

# Stabilisation pratique par modes glissants pour un système linéaire à retard

Nima YEGANEFAR<sup>1,2</sup>, Michel DAMBRINE<sup>1</sup>, Annemarie KOKOSY<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (LAGIS) UMR 8146 CNRS  
École Centrale de Lille, BP 48, 59651 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

<sup>2</sup>ISEN-ERASM  
41 Boulevard Vauban, 59046 Lille Cedex, France

(nima.yeganefar,michel.dambrine)@ec-lille.fr, annemarie.kokosy@isen.fr  
http://syner.free.fr

**Résumé**— Dans cet article, nous étudions une possibilité de réduire les problèmes de réticences liés à la commande par modes glissants. Dans cette optique, nous proposons une manière de réduire la réticence en utilisant les fonctions sigmoïdes, tout en essayant de conserver le caractère robuste de la commande. Nous étendons ainsi des études déjà réalisées pour des systèmes sans retard.

**Mots-clés**— commande par modes glissants, systèmes linéaires à retard, réticence.

## I. INTRODUCTION

### A. Intérêt de l'étude

Les commandes par modes glissants ont été étudiées avec succès sur les systèmes linéaires à retard (pour un bilan, on pourra se référer par exemple à [1] et [2]).

Si, comme dans le cas non retardé, ces commandes ont fait leurs preuves quant au niveau de la robustesse, il s'avère aussi qu'elles présentent les mêmes inconvénients que pour les systèmes sans retard, c'est-à-dire avant tout le phénomène de *réticence*, plus connu sous le nom anglais de *chattering*, qui apparaît une fois la surface de glissement atteinte. La commande oscille alors théoriquement à une fréquence infinie, ce qui peut passablement perturber le système par exemple en excitant des modes non modélisés, dégradant ainsi les performances du système, parfois jusqu'à l'instabilité (cf. [3]).

Dans le cas des systèmes sans retards, les études se sont alors dirigées vers des techniques permettant de réduire cette réticence, d'abord en essayant d'approcher la fonction signe par des fonctions de type sigmoïde [4], [5] et ensuite en essayant d'élargir avec les commandes par modes glissants d'ordres supérieurs [6]. Récemment, un résultat a permis d'étudier un algorithme d'ordre deux sur un système à retard [7]. A ce jour, les auteurs ne connaissent aucune étude pour réduire le phénomène de réticence par l'utilisation de fonctions sigmoïdes pour les systèmes à retards.

Nous exposerons donc d'abord le cadre général de notre démarche par la présentation d'une commande classique pour un système linéaire à retard et nous verrons qu'il est possible de réduire le phénomène de réticence en utili-

sant des fonctions de type sigmoïde. Nous donnerons pour conclure quelques exemples de simulations pour comparer les performances en terme de robustesse/réticence.

### B. Définitions et notations

Les notations seront les suivantes : *sign* représente la fonction signe qui, à un réel, associe son signe et qui n'est pas définie en 0. Par extension, pour  $x \in \mathfrak{R}^n$  de composantes  $x^i$ ,  $sign(x)$  représente le vecteur de coordonnées  $sign(x^i)$ .

Pour éviter une écriture trop lourde des équations, on notera  $x_d(t) = x(t - \tau)$  la fonction  $x$  retardée de  $\tau$ .

On notera  $C$  l'ensemble des fonctions continues définies sur  $[-\tau, 0]$  à valeurs dans  $\mathfrak{R}^n$  et  $C_\alpha$  l'ensemble des fonctions  $\varphi$  de  $C$  telles que  $\|\varphi\| \leq \alpha$ . Pour une fonction  $\varphi \in C$ , on notera  $\|\varphi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|\varphi(\theta)\|$ . Pour  $x \in \mathfrak{R}^n$ , on notera indifféremment  $\|x\|$  ou  $|x|$  la norme euclidienne du vecteur  $x$  suivant le cadre de l'étude et un souci de clarté.

Une fonction continue  $\omega : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  est dite de classe  $\mathcal{K}$  si elle est strictement croissante et  $\omega(0) = 0$ . On dira qu'elle est de classe  $\mathcal{K}_\infty$  si  $a = \infty$  et  $\omega(r) \rightarrow \infty$  quand  $r \rightarrow \infty$ .

Les fonctions *sigmoïdes* sont définies de la manière suivante :

*Definition 1: fonction sigmoïde.* Pour un  $\epsilon$  donné,  $0 < \epsilon < 1$ , une fonction continue  $\sigma_\epsilon$  de  $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  est dite une fonction  $\epsilon$ -sigmoïde (et on notera la classe d'une telle fonction par  $\Sigma_\epsilon$ ) si elle vérifie les relations suivantes, pour  $z \in \mathfrak{R}$  :

1.  $\sigma_\epsilon(z)z > 0$ ,  $z \neq 0$
2.  $\sigma_\epsilon(0) = 0$
3.  $|z| \leq \epsilon \Rightarrow |\sigma_\epsilon(z)| \geq \frac{|z|}{\epsilon}(1 - \epsilon)$  et  
 $|z| \geq \epsilon \Rightarrow |1 - \sigma_\epsilon(z)sign(z)| \leq \epsilon$

Par extension, pour  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$  un vecteur de  $\mathfrak{R}^n$ , nous noterons aussi  $\sigma_\epsilon(x)$  le vecteur qui a pour composantes  $(\sigma_\epsilon(x^1), \sigma_\epsilon(x^2), \dots, \sigma_\epsilon(x^n))^T$ . Pour illustrer, nous présentons ici quelques exemples de fonctions sigmoïdes les plus couramment utilisées dans la littérature :  $sat_\epsilon(z)$ ,  $\tanh(\frac{4z}{\epsilon})$ ,  $\frac{sign(z)|z|^\epsilon}{|z|^\epsilon + \frac{\epsilon}{2}}$  ( $\forall 0 < \epsilon < 1$ ). Par contre, la fonction  $\frac{2}{\pi} \arctan(\frac{z}{\epsilon})$  n'est pas une fonction sigmoïde. Pour

finir, nous formulons une définition appropriée pour la stabilité pratique dans le cas des systèmes à retards :

*Definition 2: stabilité pratique.* On considère le système d'équations différentielles fonctionnelles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x_t) & (t \geq t_0) \\ x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta) & \text{pour } \theta \in [-h, 0] \end{cases} \quad (1)$$

où  $\varphi \in C_\alpha$ ,  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  et  $x_t$  représente la fonction définie sur l'intervalle  $[-h, 0]$  par  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ . Le système (1) sera dit *pratiquement stable* si pour  $A$  donné, il existe  $\lambda$  et  $T$  dans  $\mathfrak{R}^+$  tel que  $\|x_{t_0}\| < \lambda$  implique que  $|x(t)| < A$ , quelque soit  $t \geq T$ .

## II. STABILISATION PRATIQUE D'UN SYSTÈME PERTURBÉ À RETARD VARIABLE INCONNU

### A. Commande classique

Soit le système à retard inconnu et éventuellement variable suivant, mis sous la forme régulière (voir [8], [9]) :

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = (A_{11} + H\Delta(t)E_0)x_1(t) + (A_{d11} + H\Delta(t)E_1)x_1(t - \tau(t)) + \\ (A_{12} + H\Delta(t)E_2)x_2(t) + A_{d12}x_2(t - \tau) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \sum_{i=1}^2 (A_{2i}x_i(t) + A_{d2i}x_i(t - \tau)) + Du(t) + f(t, x_t) \\ x(t) = \phi(t) \text{ for } t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (2)$$

où  $x(t) = (x_1, x_2)$ ,  $x_1 \in \mathfrak{R}^{n-r}$ ,  $x_2 \in \mathfrak{R}^r$ .  $A_{ij}$ ,  $A_{dij}$ , ( $i = 1, 2, j = 1, 2$ ),  $E_k$ , ( $k = 0, 1, 2$ ) et  $H$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées;  $D$  est une matrice régulière  $r \times r$ , la matrice  $\Delta$  est une matrice variable dans le temps représentant les éventuelles incertitudes,  $u \in \mathfrak{R}^r$  est la commande,  $\tau$  représente un retard variant et borné ( $0 \leq \tau(t) \leq h, \forall t \geq 0$ ) et  $\phi$  est une fonction continue par morceau définie sur  $[-h, 0]$  représentant la condition initiale.

De plus, on suppose que :

$a_1$ ) La paire de matrices  $(A_{11} + A_{d11}, A_{12} + A_{d12})$  est commandable.

$a_2$ )  $f$  vérifie l'inégalité suivante :

$$\|f(t, x_t)\| < F_M(t, x_t), \forall t \geq 0, \quad (3)$$

où  $F_M(t, x_t)$  est une fonctionnelle continue supposée connue *a priori*

$a_3$ )  $\Delta(t)$  est une matrice variable qui représente les incertitudes du système et satisfaisant à la condition  $\Delta^T(t)\Delta(t) \leq I \forall t$ .

On pose :

$$\begin{aligned} \Omega(x(t)) &= \sum_{i=1}^2 (A_{2i} - A_{1i}K)x_i(t) \\ \Gamma(x(t)) &= E_0x_1(t) + E_2x_2(t) \end{aligned}$$

où  $K \in \mathfrak{R}^r \times (n - r)$  et  $D_M$  la fonctionnelle définie par :

$$\begin{aligned} D_M = (&\|A_{d12} - A_{d11}K\| + \|KH\| \|E_1\|) \sup_{-h \leq \theta \leq 0} \|x_1(t + \theta)\| \\ &+ \|A_{d22} - A_{d12}K\| \sup_{-h \leq \theta \leq 0} \|x_2(t + \theta)\|. \end{aligned}$$

On considère la surface de glissement suivante :

$$s(x) = x_2 - Kx_1.$$

On peut montrer, en s'appuyant sur une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii, comme il est développé dans [10], que la commande suivante stabilise asymptotiquement le système (2) :

$$u(t) = -D^{-1} [\Omega(x(t)) + (F_M(t, x_t) + D_M(x_t) + \|KH\| \|\Gamma(x(t))\| + M) \frac{s(x(t))}{\|s(x(t))\|}]$$

si  $M > 0$ , et les autres matrices, provenant de l'expression de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii choisie, vérifient une certaine LMI (inégalité matricielle linéaire) que nous ne détaillerons pas ici.

### B. Diminution de la réticence

#### B.1 Cas du retard constant

Dans cette section, nous étudions un système où les perturbations vérifient cette fois la condition dite de *recouvrement* (ou *matching* en anglais [11]) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sum_{i=1}^2 (A_{1i}x_i(t) + A_{d1i}x_i(t - \tau)) \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^2 (A_{2i}x_i(t) + A_{d2i}x_i(t - \tau)) + Du(t) + f(t, x_t) \\ x(t) = \phi(t) \text{ for } t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (4)$$

On considère la surface de glissement suivante :

$$s(t) = x_2(t) - Kx_1(t) \quad (5)$$

avec  $K \in \mathfrak{R}^{r \times (n-r)}$ . On définit  $\Omega$  comme suit :

$$\Omega(x_t) = \sum_{i=1}^2 [(A_{2i} + A_{1i}K)x_i(t) + (A_{d2i} + A_{d1i}K)x_i(t - \tau)]$$

de telle sorte que

$$\dot{s}(t) = \Omega(x_t) + Du(t) + f(t, x_t)$$

De plus, on suppose que :

$A1$ ) La paire de matrice  $(A_{11} + A_{d11}, A_{12} + A_{d12})$  est commandable.

$A2$ )  $f$  vérifie l'inégalité suivante :

$$\|f(t, x_t)\| < \Psi(t, x_t), \forall t \geq 0 \quad (6)$$

où  $\Psi$  est une fonction continue supposée connue *a priori*.

$A3$ ) l'origine du sous-système :

$$\frac{dx_1}{dt} = (A_{11} + A_{12}K)x_1 + (A_{d11} + A_{d12}K)x_{d1} \quad (7)$$

est asymptotiquement stable.

Avant d'exposer notre résultat principal, nous devons d'abord présenter un lemme qui s'appuie sur les travaux de [12] et [13]. Considérons, pour ce faire, à nouveau le système (1). On suppose que  $F$  est choisie de telle sorte que, quelque soit  $\varphi \in C_\alpha$ , le problème (1) admette une solution unique  $\mathbf{x}(t)$  qui satisfasse la condition de Lipschitz

$$\|\mathbf{x}(t_2) - \mathbf{x}(t_1)\| < \ell |t_2 - t_1|, \quad \forall t_2, t_1 \geq t_0. \quad (8)$$

Nous obtenons alors le résultat suivant :

*Lemma 1:* Pour le système (1), supposons qu'il existe une fonctionnelle définie positive, continue,  $V : \mathfrak{R}^+ \times C_\alpha \rightarrow \mathfrak{R}$ , deux fonctions  $\omega_1, \omega_2$  de classe  $\mathcal{K}$ , et  $\omega_3$  une fonction définie positive, telles que pour tout  $\varphi \in C_\alpha$  :

$$\omega_1(\|\varphi(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq \omega_2(\|\varphi\|_c), \quad (9)$$

et

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -\omega_3(\|\varphi(0)\|) \text{ si } \forall \theta \in [-h, 0], \|\varphi(\theta)\| \geq \mu > 0. \quad (10)$$

De plus, supposons que

$$\omega_1^{-1}(\omega_2(\mu + h\ell)) + h\ell < \alpha. \quad (11)$$

Alors, pour toute fonction initiale  $x_{t_0}$  satisfaisant

$$\|x_{t_0}\|_c \leq \omega_2^{-1}(\omega_1(\alpha - h\ell)) - h\ell, \quad (12)$$

il existe  $T > 0$  tel que la solution (1) satisfasse la condition suivante :

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \omega_1^{-1}(\omega_2(\mu + h\ell)), \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (13)$$

*Proof:* Soit  $\mathcal{L}_\alpha$  l'ensemble de toutes les fonctions lipschitzienne dans  $C_\alpha$  de constante  $\ell$  :

$$\mathcal{L}_\alpha = \{ \varphi \in C_\alpha : \|\varphi(\theta_2) - \varphi(\theta_1)\| \leq \ell |\theta_2 - \theta_1|, \forall \theta_1, \theta_2 \in [0, h] \},$$

et soit  $\Lambda_{t, \xi} = \{x_t \in C_\alpha : V(t, x_t) \leq \xi\}$ , pour  $\xi > 0$ . Notons que

$$\mathcal{L}_{\omega_2^{-1}(\xi)} \subset \Lambda_{t, (\xi)} \subset \mathcal{L}_{\omega_1^{-1}(\xi) + h\ell}.$$

Prouvons par exemple la seconde inclusion : si  $\varphi \in \Lambda_{t, \xi}$  alors  $\|\varphi(0)\| \leq \omega_1^{-1}(\xi)$  et, puisque  $\varphi \in \mathcal{L}_\alpha$ , nous obtenons :

$$\|\varphi(\theta)\| \leq \|\varphi(0)\| + \theta\ell \leq \omega_1^{-1}(\xi) + h\ell.$$

Soit  $\rho = \omega_2^{-1}(\omega_1(\alpha - h\ell))$ . Nous avons alors les inclusions suivantes

$$\mathcal{L}_\mu \subset \mathcal{L}_{\mu+h\ell} \subset \Lambda_{t, \omega_2(\mu+h\ell)} \subset \Lambda_{t, \omega_2(\rho)} \subset \mathcal{L}_\alpha$$

et

$$\mathcal{L}_\rho \subset \Lambda_{t, \omega_2(\rho)}.$$

Les ensembles  $\Lambda_{t, \omega_2(\mu+h\ell)}$  et  $\Lambda_{t, \omega_2(\rho)}$  sont positivement invariants. De plus, supposons que  $x_t$  est à la frontière de  $\Lambda_{t, \omega_2(\mu+h\ell)}$  (ou  $\Lambda_{t, \omega_2(\rho)}$ ) alors  $\|x_t\|_c \geq \mu + h\ell$  et donc, puisque  $x_t \in \mathcal{L}_\alpha$ ,  $\|x_t(\theta)\| \geq \mu$  quelque soit  $\theta \in [-h, 0]$  : nous avons donc  $\dot{V}(t, x_t) < 0$ .

Pour une fonction initiale  $x_{t_0} \in C_{\rho-h\ell}$ , d'après la propriété (8),  $x_t$  est dans  $C_\rho$  pour  $t \in [t_0, t_0 + h]$ , et  $x_t$  appartient à  $\mathcal{L}_\alpha$  pour  $t \geq t_0 + h$ . Donc,  $x_{t_0+h} \in \mathcal{L}_\rho$ .

Supposons que  $x_{t_0+h} \in \Lambda_{t, \omega_2(\rho)} \setminus \Lambda_{t, \omega_2(\mu+h\ell)}$ , alors  $\dot{V}(t, x_t) \leq -k < 0$ , avec  $k = \max_{\mu \leq s \leq \alpha} \omega_3(s)$ . Cette inégalité implique que

$$\begin{aligned} V(t, x_t) &\leq V(t_0 + h, x_{t_0+h}) - k(t - t_0 - h) \\ &\leq \omega_2(\rho) - k(t - t_0 - h) \end{aligned}$$

Finalement, il existe un temps fini  $T$ , indépendant de  $x_{t_0}$  telle que, pour  $t \geq t_0 + T$ ,  $V(t, x_t) \leq \mu + h\ell$ , et dans ce cas l'inégalité (13) est vérifiée. ■

Le théorème suivant montre qu'en remplaçant la fonction signe par la fonction sigmoïde, on peut obtenir un système pratiquement stable.

*Theorem 2:* Sous les hypothèses citées plus haut (A1-A3) et dans le cas d'un retard constant  $\tau = h$ , l'origine du système (4) est localement pratiquement stable sous la loi de commande suivante :

$$u(t) = -D^{-1} [\Omega(x_t) + m_1 \sigma_\epsilon(s) + m_2 s] \quad (14)$$

avec  $m_1 = \frac{m'_1 + 2M V'_M}{1 - \epsilon}$ ,  $m'_1 \geq \|\Psi\|$  et  $m_2 \geq 0$ ,  $M = \max(\|A_{12}\|, \|A_{d12}\|)$  et  $V'_M = \sup_{x_{1t} \in C_r} \|V'_1(x_{1t})\|$  où  $V'_1$  est définie plus bas (expression (15)).

*Proof:* D'après l'hypothèse A3, il existe une fonction de Lyapunov-Krasovskii  $V_r(t, \varphi) : \mathfrak{R} \times C_\alpha \rightarrow \mathfrak{R}^+$  telle qu'il existe  $\omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$  des fonctions définies positives sur  $[0, \alpha]$ , vérifiant pour tout  $\varphi \in C_\alpha$  et pour tout  $t$  :

$$\begin{aligned} \omega_1(\|\varphi(0)\|) &\leq V_r(t, \varphi) \leq \omega_2(\|\varphi\|) \\ \dot{V}_r|_{(7)}(t, \varphi) &\leq -\omega_3(\|\varphi(0)\|) \end{aligned}$$

où  $\dot{V}_r|_{(7)}$  est la dérivée de  $V_r$  le long des trajectoires de (7). Suivant les travaux de Kharitonov et en reprenant les mêmes notations (cf. [14]), on peut montrer que cette fonctionnelle, dans le cas d'un système linéaire à retard constant, peut être choisie de la forme suivante :

$$V_r(x_{1t}) = V_1(x_{1t}) + V_2(x_{1t})$$

avec

$$\begin{aligned} V_1(x_{1t}) &= x_1^T(t) U(0) x_1(t) + 2x_1^T(t) \int_{-h}^0 U(-h - \theta) B x_1(t + \theta) d\theta \\ V_2(x_{1t}) &= \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x_1^T(t + \theta_1) B^T U_1(\theta_1 - \theta_2) B x_1(t + \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \\ &\quad + \int_{-h}^0 x_1^T(t + \theta) [(h + \theta) W_2 + W_3] x_1(t + \theta) d\theta. \end{aligned}$$

où  $W_1, W_2, W_3$  sont des matrices définies positives et  $U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t) W K(t + \tau) dt$ , où  $K$  représente la matrice fondamentale du système (4) comme il est défini dans [14] et  $W$  une matrice définie positive.

Il s'agit alors de faire apparaître  $\dot{V}_r|_{(7)}$ , en remarquant que seule la dérivée de  $V_1(x_1(t))$  donne des termes en  $\dot{x}_1$ . Pour ce faire, on isole tous les termes en  $\dot{x}_1$  dans un terme que nous noterons  $V'_1 \dot{x}_1$  avec

$$V'_1 = 2x_1^T(t) U(0) + \left( 2 \int_{-h}^0 U(-h - \theta) B x_1(t + \theta) d\theta \right)^T. \quad (15)$$

Le reste sera noté  $\dot{V}'_2|_{(4)}$  ( $= \dot{V}'_2|_{(7)}$ ), ceci, pour ne pas alourdir l'écriture des équations. Considérons, alors, la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(t) = \frac{1}{2} \|s(x(t))\|^2 + M V'_M \int_{-h}^0 |s(t + \theta)| d\theta + V_r(x_{1t}).$$

La dérivée de  $V$  le long des trajectoires de (4) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t)|_{(4)} &= s^T (\Omega(x_t) + Du(t) + f(t, x_t)) + V'_1 \dot{x}_1 \\ &\quad + M V'_M (|s(t)| - |s(t - h)|) + \dot{V}'_2|_{(7)}. \end{aligned} \quad (16)$$

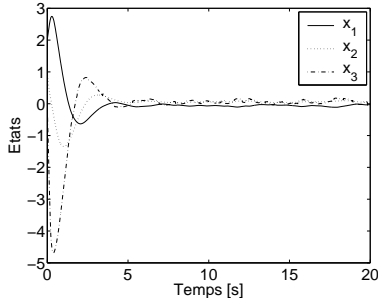


Fig. 1. Stabilisation par une commande « sigmoïde » sous perturbation

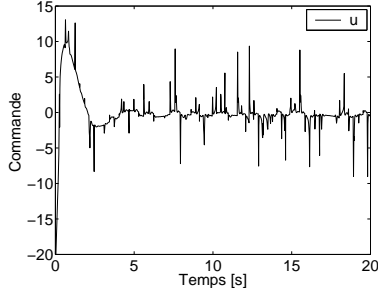


Fig. 2. Commande « sigmoïde »

Si on pose

$$g(x_t) = g(x_{1t}, x_{2t}) = \sum_{i=1}^2 (A_{1i}x_i + A_{d1i}x_{di}) = \dot{x}_1,$$

alors d'après (3), l'équation (16) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & s^T(t) [-m_1\sigma_\epsilon(s) - m_2s + f(t, x_t)] + \\ & V_1'(g(x_{1t}, x_{2t}) - g(x_{1t}, Kx_{1t})) + \\ & V_1'g(x_{1t}, Kx_{1t}) + \dot{V}_2|_{(\tau)} + MV_M'(|s| - |s_d|). \end{aligned} \quad (17)$$

Par simple calcul, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} g(x_t) - g(x_{1t}, Kx_{1t}) &= A_{12}(x_2 - Kx_1) + A_{d12}(x_{d2} - Kx_{d1}) \\ &= A_{12}s + A_{d12}s_d \\ \dot{V}_r|_{(\tau)} &= \dot{V}_2|_{(\tau)} + V_1'g(x_{1t}, Kx_{1t}). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse sur  $M$  et en notant que  $|s| = s^T \text{sign}(s)$ , (17) est majorée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & s^T(t) [-m_1\sigma_\epsilon(s) - m_2s + \text{sign}(s)\Psi] + \\ & M\|V_1'\| (s^T \text{sign}(s) + s_d^T \text{sign}(s_d)) \\ & + \dot{V}_r|_{(\tau)} + MV_M'(s^T \text{sign}(s) - s_d^T \text{sign}(s_d)). \end{aligned}$$

Par hypothèse, le sous-système (7) étant asymptotiquement stable, le terme  $\dot{V}_r|_{(\tau)}$  est négatif. Il suffit alors de vérifier, grâce aux propriétés de la fonction sigmoïde (définition 1), et les conditions sur  $m_1$ , que le terme

$$s^T(t) [-m_1\sigma_\epsilon(s) + \text{sign}(s)\Psi] + 2M V_M' s^T \text{sign}(s)$$

est négatif pour  $|s| \geq \epsilon$ . Ce qui conclut la preuve, par application du lemme 1. ■

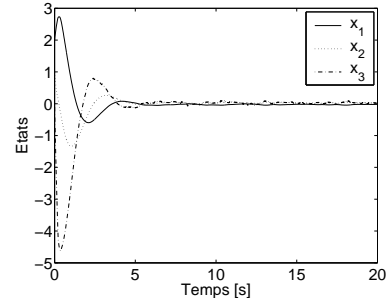


Fig. 3. Stabilisation par une commande classique sous perturbation

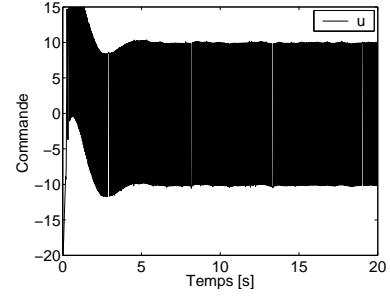


Fig. 4. Commande classique

## B.2 Cas du retard variable

On suppose dans cette partie que les hypothèses les hypothèses supplémentaires suivantes :

A4) Le retard  $\tau(t)$  est borné par  $h$  et  $|\dot{\tau}| < \beta < 1$

A5)  $\frac{dx_1}{dt} = (A_{11} + A_{d11} + (A_{12} + A_{d12})K)x_1$  est asymptotiquement stable.

*Corollary 3:* Sous les hypothèses (A1-A5), l'origine du système (4) est localement pratiquement stable pour un retard variable  $|\tau(t)| < h$  sous la loi de commande suivante :

$$u(t) = -D^{-1} [\Omega(x_t) + m_1\sigma_\epsilon(s) + m_2s]$$

les constantes étant définies comme dans le cas du théorème 2.

*Proof:* La preuve est identique à celle du théorème 2, à cela près que pour le sous-système (7), nous choisissons cette fois la fonctionnelle développée dans [1]

$$V_r(x_{1t}) = x_1^T P x_1 + \frac{1}{1-\beta} \int_{t-\tau}^t \int_s^t x_1^T(\theta) Q x_1(\theta) d\theta ds,$$

avec  $Q$  et  $P$  deux matrices définies positives. Le seul terme susceptible de faire apparaître des termes en  $\dot{x}_1$  est le premier terme de la fonctionnelle  $x_1^T P x_1$ . Donc d'après les notations du théorème 2, on a  $V_1' = 2x_1^T P$  et la fonctionnelle choisie s'écrit :

$$V(t) = \frac{1}{2} \|s(x(t))\|^2 + M V_M' \int_{-h}^0 |s(t+\theta)| d\theta + V_r(x_{1t}).$$

Nous montrons de même que cette fonctionnelle est négative pour  $|s| > \epsilon$ , concluant ainsi la preuve par application du lemme 1. ■

### III. SIMULATIONS

Soit le système perturbé sous forme régulière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & -0.5 & 1 & x_1 + & 0 & x_2 \\ & 2 & -3 & & 1 & \\ & 0.2 & -1 & x_{d1} + & 1 & x_{d2} \\ & -0.9 & -1 & & 0 & \\ \dot{x}_2 = & 1 & 1 & x_1 + x_2 + & -0.2 & 0.1 & x_{d1} + Du(t) + p \end{cases} \quad (18)$$

On considère la surface de glissement suivante :

$$s(t) = x_2(t) - Kx_1(t)$$

avec  $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ . La commande est la suivante :

$$u(t) = -D^{-1} [\Omega(x_t) + m\sigma_\epsilon(s)] \quad (19)$$

Les simulations ont été faites avec  $\epsilon = 0.3$ ,  $K = [1.6, -1]$ ,  $m = 10$ ,  $\sigma_\epsilon = \tanh(\frac{4s}{\epsilon})$  et  $\tau = 0.2$ . La perturbation  $p$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance 0.094.

Les conditions initiales sur les différentes variables sont des fonctions constantes ( $x_{10} = 2$ ,  $x_{20} = 1$  et  $x_{30} = 0$ ).

Les figures 1 et 2 représentent respectivement l'état du système (18) sous la commande (19) tandis que sur les figures 3 et 4, on visualise l'état du même système mais avec une commande classique cette fois.

Nous observons bien, sur la figure 1 que le système (18) est pratiquement stable ( $|x_i| < 0.2$ ) en présence de perturbations, tandis que la réticence n'apparaît quasiment plus (Fig. 2) comparée à la commande par modes glissants classique (Fig. 4).

### IV. CONCLUSION

Dans cet article, nous étudions une possibilité de réduction du problème de réticence rencontré par l'utilisation des commandes par modes glissants d'ordre un. S'il est connu que l'utilisation de fonctions approchant la fonction signe permet de réduire la réticence dans le cas de systèmes sans retard, cet article étend ce résultat au cas des systèmes linéaires à retard inconnu et variable (le retard restant borné par une valeur supérieure).

En effet, nous proposons dans cet article un nouvel algorithme permettant de réduire la réticence en remplaçant la fonction signe par une fonction sigmoïde. En utilisant cette commande, on garantit l'obtention d'un système dit pratiquement stable pour des perturbations qui vérifient la condition de recouvrement. Ce résultat peut être étendu à des systèmes non-linéaires à retard, et/ou des systèmes avec des perturbations plus générales, du type (2).

### REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier la Fondation Norbert Ségard et le Conseil Régional du Nord Pas de Calais de leur soutien financier.

### RÉFÉRENCES

- [1] F. Gouaisbaut. *Sur la Commande Par Modes Glissants Des Systèmes À Retards*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille, Université des sciences et technologies de lille, 2001.
- [2] W. Perruquetti et J.P. Barbot. *Sliding Mode Control in Engineering*. Control Engineering Series. Marcel Dekker, New York, 2002.
- [3] B. Heck. Sliding mode control for singularly perturbed systems. *International Journal of Control*, vol. 53 :985–1001, 1991.

- [4] J.J.E. Slotine et S.S. Sastry. Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulator. *International Journal of control*, vol. 38(2) :465–492, 1983.
- [5] J.J.E. Slotine et W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1991.
- [6] T. Floquet. *Contributions À la Commande Par Modes Glissants D'ordre Supérieur*. PhD thesis, Université des sciences et technologies de Lille, 2000.
- [7] L. Levaggi et E. Punta. Stabilization of a second-order variable structure system with unknown input delay. *TDS'03*, Rocquencourt, France, 2003.
- [8] A.G. Lukyanov et V.I. Utkin. Methods of reducing equations for dynamic systems to a regular form. *Automation and Remote Control*, vol. 42(4) :413–420, 1981.
- [9] W. Perruquetti, P. Borne, et J.P. Richard. A generalized regular form for sliding mode stabilization of mimo systems. *Proc. Of the 36th IEEE CDC*, San Diego, 1997.
- [10] E. Fridman, F. Gouaisbaut, M. Dambrine, et J-P. Richard. A descriptor approach to sliding mode control of systems with time-varying delays. *ECC'03*, Cambridge, England, 2003.
- [11] V.I. Utkin. *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [12] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. MacMillan Publishing Company, 1992.
- [13] V.B. Kolmanovskii et A. Myshkis. *Applied Theory of Functional Differential Equations*. Kluwer Acad. Pub., 1992.
- [14] V.L. Kharitonov et A.P. Zhabko. Lyapunov-krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, vol. 39 :15–20, 2003.