Thèse

Préparée au
Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes

en vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'Institut National des Sciences Appliquées

spécialité : **Automatique et Informatique Industrielle**

par
Olivier BACHELIER
Ingénieur de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

COMMANDE DES SYSTEMES LINEAIRES INCERTAINS : PLACEMENT DE PÔLES ROBUSTE EN $\mathcal{D}$-STABILITE

Avant-Propos

Ce mémoire présente des travaux de thèse qui ont été effectués au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (L.A.A.S.) du C.N.R.S. dont je remercie l'ancien directeur, M. Alain Costes, ainsi que l'actuel directeur, M. Jean-Claude Laprie, pour avoir mis à ma disposition les moyens matériels nécessaires au bon déroulement de la thèse.

Je remercie également M. Philippe de Larminat, professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, et M. Alain Oustaloup, professeur à l'E.N.S.E.R.B. d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail. Ces remerciements s'adressent aussi à M. Driss Mehdi, professeur à l'E.S.I.P., et à M. Alain Richard, professeur à l'Université de Nancy, qui ont accepté de participer au jury de cette thèse.

J'exprime ma reconnaissance envers M. Jacques Bernussou, directeur de recherche au C.N.R.S., pour m'avoir accueilli au sein du groupe C.S.C. dont il est responsable, pour avoir contribué à mon intégration dans ce groupe et enfin pour avoir, lui aussi, accepté de juger mon travail.

Il est hors de question bien sûr d'oublier dans mes remerciements Germain Garcia, maitre de conférence à l'I.N.S.A. de Toulouse. Non seulement, je ne lui en veux pas d'avoir expérimenté sur moi, pour la première fois, l'effet d'envoyer un élève au tableau, mais, au contraire, je le remercie d'avoir su rendre vivants ses travaux dirigés d'Automatique à l'I.N.S.A. et d'avoir participé au jury de cette thèse.

Si les travaux dirigés de Germain Garcia ont contribué à développer mon intérêt pour l'Automatique, ce goût me vient aussi et surtout des cours de Bernard Pradin, professeur à l'I.N.S.A. de Toulouse, auquel je tiens à exprimer ma profonde gratitude. Je le remercie d'avoir encadré ce travail de thèse. Ses qualités humaines et professionnelles ont rendu ces quelques années de collaboration très agréables.

Il serait dommage, dans ces remerciements, d'oublier ma famille et l'ensemble des amis qui m'ont soutenu à l'I.N.S.A., au L.A.A.S. et en dehors du cadre professionnel. Je ne peux les citer tous (de peur d'en oublier) mais je ne peux néanmoins pas passer sous silence l'ambiance du groupe C.S.C. Du reste, je m'engage à porter prochainement le maillot de foot qui m'a été offert, à la fin de cette thèse, par les gens du groupe (l'habit fera-t-il le moine ?).

Bien sûr, l'ensemble du personnel du L.A.A.S. a contribué à instaurer cette atmosphère sympathique de travail, c'est pourquoi je remercie tous les collègues du laboratoire.

Contents

Introduction Générale **1**

I Contexte et motivations **5**

I.1 Introduction . . . 6
I.2 Rappel sur la modélisation des systèmes . . . 6
I.2.1 Matrice de transfert . . . 8
I.2.2 Représentation d'état . . . 8
I.3 Stabilité et performances d'un modèle linéaire . . . 10
I.3.1 Stabilité . . . 10
I.3.2 Performances et méthodes de commande qui en découlent . . . 11
I.4 Incertitudes, robustesse et commande robuste . . . 15
I.4.1 Incertitudes et robustesse . . . 15
I.4.2 Quelques approches de la commande robuste . . . 20
I.5 Problématique du mémoire . . . 25
I.5.1 But recherché . . . 25
I.5.2 Introduction à la notion de $\mathcal{D}$-stabilité . . . 26
I.5.3 Les diverses régions . . . 27
I.5.4 Volonté d'affiner les critères . . . 28
I.5.5 Finalisation de l'objectif . . . 30
I.6 Conclusion . . . 31

II Bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste **33**

II.1 Introduction . . . 34
II.2 Principe d'obtention d'une borne de robustesse . . . 34
II.3 Approche Lyapunov . . . 35
II.3.1 CNS de $\mathcal{D}$-stabilité . . . 36
II.3.2 Bornes de robustesse . . . 39
II.4 Approche logarithmique . . . 47
II.4.1 Présentation des mesures logarithmiques . . . 47
II.4.2 CNS de $\mathcal{D}$-stabilité . . . 48
II.4.3 Bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste . . . 51
II.5 Conclusion . . . 61

III Bornes $\mathcal{LMI}$ de $\mathcal{D}$-stabilité robuste 65
III.1 Introduction . . . 66
III.2 $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice réelle dans une région $\mathcal{LMI}$ . . . 67
III.2.1 Définition d'une région $\mathcal{LMI}$ . . . 67
III.2.2 CNS de $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice réelle dans une région $\mathcal{LMI}$ 68
III.2.3 Bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice réelle incertaine . 69
III.3 $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice complexe dans une région $\mathcal{GLMI}$ 72
III.3.1 Définition d'une région $\mathcal{GLMI}$ . . . 72
III.3.2 CNS de $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice complexe dans une région $\mathcal{GLMI}$ . . . 72
III.3.3 Bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice complexe incertaine 73
III.4 Application à la $\mathcal{D}$-stabilité dans une union de sous-régions convexes 76
III.4.1 Exemples de régions simples . . . 77
III.4.2 Exemples d'unions de sous-régions convexes . . . 79
III.5 Aspects numériques . . . 83
III.5.1 Détermination d'une valeur quelconque de borne . . . 84
III.5.2 Amélioration de la valeur des bornes . . . 86
III.6 Exemples illustratifs . . . 87
III.6.1 Stabilité robuste . . . 88
III.6.2 $\mathcal{D}$-stabilité dans un secteur . . . 91
III.6.3 $\mathcal{D}$-stabilité dans une région de deuxième ordre . . . 93
III.6.4 $\mathcal{D}$-stabilité dans une intersection de sous régions . . . 95
III.6.5 $\mathcal{D}$-stabilité dans une union de sous régions . . . 95
III.6.6 Application à l'étude de fragilité d'un retour statique . . . 97
III.7 Conclusion . . . 98

IV Amélioration de la robustesse d'un placement de pôles 101
IV.1 Introduction . . . 102
IV.2 Obtention des performances nominales . . . 103
IV.2.1 Retour d'état . . . 103
IV.2.2 Retour de sortie . . . 108
IV.3 Recherche de la flexibilité nécessaire . . . 113
IV.3.1 Utilisation des directions propres . . . 114
IV.3.2 Tolérances sur le spectre désiré . . . 115
IV.3.3 Utilisation de la matrice T . . . 116
IV.4 Placement robuste de pôles . . . 117
IV.4.1 Formulation du problème d'optimisation . . . 118
IV.4.2 Heuristique de résolution . . . 119
IV.5 Illustrations . . . 123
IV.5.1 Placement dans une région $\mathcal{LMI}$ . . . 123
IV.5.2 Placement dans une union de sous-régions convexes . . . 135
IV.6 Conclusion . . . 144

Conclusion Générale **147**

Annexes **148**

A Influence de la structure propre de la matrice d'état **149**
A.1 Influence des valeurs propres . . . 150
A.2 Influence des vecteurs propres . . . 151
A.2.1 Vecteurs propres et découplage . . . 151
A.2.2 Vecteurs propres à gauche et rejet de perturbation . . . 153
A.2.3 Vecteurs propres et conditionnement des valeurs propres . . . 154

B Formulations de quelques régions usuelles **157**
B.1 Formulations polynomiales . . . 158
B.1.1 Régions de premier ordre . . . 158
B.1.2 Régions de deuxième ordre . . . 160
B.2 Formulations $\mathcal{LMI}$ ou $\mathcal{GLMI}$ . . . 163
B.2.1 Régions de premier ordre . . . 164
B.2.2 Régions de deuxième ordre . . . 164

C Quelques pages Web intéressantes **171**

Références bibliographiques **177**

Notations

Nous donnons ici quelques notations qui, outre celles qui seront ponctuellement introduites dans ce document, seront régulièrement utilisées.

$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels
$\mathbb{C}$	Corps des nombres complexes
$\mathbf{0}_n$	Matrice carrée nulle de dimension $n \times n$
$\mathbf{0}_{n,m}$	Matrice rectangulaire nulle de dimension $n \times m$
$\mathbf{I}_n$	Matrice identité d'ordre n
$M < 0$	La matrice M est définie négative
$M > 0$	La matrice M est définie positive
$M_1 < M_2\,(M_1 > M_2)$	La matrice $M_1 - M_2$ est définie négative (resp. positive)
M^*	Matrice transposée conjuguée de M (seulement transposée si M est rélle)
M^{-1}	Matrice inverse de M (pour M carrée de rang plein)
M^{-*}	Inverse de la transposée conjuguée de M (M inversible)
$\lVert M \rVert_2$	Norme-2 ou norme spectrale de la matrice M (induite par la norme vectorielle euclidienne)
$\bar{\lambda}(M)$	Valeur propre maximale de la matrice M (quand son spectre est réel)
$\underline{\lambda}(M)$	Valeur propre minimale de la matrice M (quand son spectre est réel)
$\bar{\sigma}(M) = \sqrt{\bar{\lambda}(M^*M)}$	Valeur singulière maximale de la matrice M (égale à la norme-2, c'est-à-dire $\lVert M \rVert_2$)
$\underline{\sigma}(M) = \sqrt{\underline{\lambda}(M^*M)}$	Valeur singulière minimale de la matrice M
$\otimes$	Produit matriciel de Kronecker
$Re(z)$	Partie réelle du nombre complexe z
$\mathbf{i}$	$\sqrt{-1}$
$\tilde{z}$	Conjugué du nombre complexe z
$\lvert z \rvert$	Module du nombre complexe z
$\tilde{M}$	Matrice conjuguée de M
$\lvert M \rvert$	Matrice obtenue à partir de M en remplaçant chaque élément de M par son module
$[M]_{\{i,j\}}$	Elément de M situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne
$\mathcal{A}/\mathcal{B}$	Ensemble $\mathcal{A}$ privé des éléments de l'ensemble $\mathcal{B}$

Introduction Générale

Les automaticiens s'intéressent à des problèmes d'interactions entre des procédés (généralement industriels) et l'environnement dans lequel ils évoluent (on parle de système en boucle ouverte). Ils ont pour objectif la compréhension des phénomènes régissant le comportement de ces procédés (ce qui passe souvent par une desciption mathématique de ces phénomènes) et la maîtrise de ce comportement par l'action d'un second système agissant sur le premier et conçu spécialement dans ce but conformément à un modèle mathématique calculé au préalable. L'association des deux systèmes en interaction est appelé système bouclé.

Il est impératif de maîtriser tout ou partie du comportement d'un système bouclé. Une propriété fondamentale qu'un système bouclé doit vérifier est la stabilité, c'est-à-dire la propriété qui assure que le système retourne à une position d'équilibre lorsqu'il en est écarté. Cette propriété se traduit entre autres par le fait que tous les signaux et grandeurs physiques du système restent bornés lorsque l'une de ces grandeurs est soumise à une évolution bornée (variation contrôlée ou perturbation non souhaitée). La stabilité garantit donc un certain niveau de sécurité, tant pour le procédé que pour d'éventuels opérateurs humains évoluant dans l'environnement considéré.
En outre, afin d'assurer une plus grande fiabilité des procédés, un plus grand rendement, un comportement plus précis, une plus grande sécurité, une moindre consommation ou encore un meilleur rejet des perturbations extérieures, l'automaticien doit aussi s'intéresser à des performances moins impératives mais plus sophistiquées que la stabilité.

D'un point de vue théorique, il existe plusieurs étapes dans la démarche. La première est la modélisation, c'est-à-dire l'obtention d'une description mathématique du procédé. La seconde est l'analyse, c'est-à-dire l'étude des propriétés d'un système : stabilité et diverses performances. Cette analyse doit répondre à la question : "dans quelle mesure le procédé satisfait-il les exigences de performances souhaitées par les utilisateurs ?". Il convient donc de déterminer des critères de stabilité et performances qui utilisent le modèle mathématique du procédé pour répondre à la question. La troisième étape est la synthèse ou la commande du procédé, nécessaire uniquement si l'analyse a révélé une insuffisance des performances. Là encore, il peut s'agir d'utiliser le modèle mathématique du procédé pour déterminer celui du second système qui, en interaction avec le procédé, conférera au système global, dans la mesure du possible, les performances souhaitées. Le modèle mathématique de ce second système est appelé loi de commande.

Ces trois étapes de l'Automatique sont parfois envisagées de manière un peu trop dissociée. En particulier, le calcul d'une loi de commande ne tient pas toujours compte des problèmes rencontrés dans la phase de modélisation. En effet, en pratique, l'efficacité d'une loi de commande, testée numériquement sur un modèle mathématique précis, peut s'avérer, une fois la commande implantée, très médiocre. Le système global peut même être déstabilisé. Ceci est dû au manque de fiabilité du modèle. La validité de ce dernier, même si la modélisation est rigouresue, n'est pas une certitude. Dans certains cas, la moindre approximation du modèle induit de sérieuses baisses de performances. C'est pourquoi, depuis la fin des années 1970, sont apparues dans la littérature des méthodes de synthèse qui prennent en compte d'éventuelles incertitudes affectant le modèle dans le calcul de la loi de commande. Ces méthodes sont regroupées sous l'appellation "Commande Robuste". L'objectif de la commande robuste est donc de calculer des lois de commande capables d'assurer des performances voulues malgré l'existence d'incertitudes sur le modèle utilisé.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la commande robuste. Son objectif est de conférer aux systèmes certains types de performances. Ces performances concernent la dynamique du système c'est-à-dire la façon dont il réagit de manière plus ou moins rapide, plus ou moins oscillatoire à une sollicitation extérieure.
Les modèles envisagés dans le mémoire pour décrire les systèmes de manière temporelle sont dits modèles d'état linéaires invariants dans le temps et l'étude de la dynamique passe par la notion de "pôles" du système. La dynamique du système dépend beaucoup de la localisation des pôles (qui sont des nombres complexes) dans le plan de Laplace. Ces pôles peuvent parfois être fixés par une loi de commande convenablement calculée.
Cependant, il devient difficile de déterminer une loi de commande fixant avec précision la dynamique du système global lorsque le modèle de ce dernier est sujet à des incertitudes. Dans ce mémoire, deux types d'incertitude seront envisagés : additive non structurée et additive affine structurée. L'objectif du travail devient donc de déterminer des lois de commande qui puissent fixer les pôles du système global de manière robuste par rapport à l'incertitude considérée. On parle alors de placement robuste de pôles. Ainsi, en résumé, le but de ce mémoire, est de conduire à une nouvelle méthode de placement robuste de pôles.

Il importe donc de pouvoir juger en termes quantitatifs, de la robustesse des pôles. Cette analyse se fera au travers de la notion de $\mathcal{D}$-stabilité (appartenance des pôles, qui sont en fait les valeurs propres d'une matrice, à une région $\mathcal{D}$ du plan complexe). Si l'on peut attester facilement de la $\mathcal{D}$-stabilité d'un système nominal,

en revanche, en présence de l'incertitude, on se contente de calculer des bornes de robustesse sur l'incertitude qui garantissent de manière suffisante la $\mathcal{D}$-stabilité du système incertain. Ce concept de $\mathcal{D}$-stabilité robuste est largement étudié dans le mémoire et un effort particulier est apporté dans l'établissement de bornes de robustesse relatives à des régions non connexes appartenant à une vaste gamme.
Ces bornes sont donc des critères de performances dynamiques robustes qui peuvent servir à améliorer la robustesse d'un placement de pôles. L'objectif ultime du mémoire est de prendre en compte la valeur de ces bornes dans le calcul de la loi de placement pour contrecarrer la présence de l'incertitudes. Il est à noter que les lois de commande envisagées dans le mémoire sont de nature statique, par souci de simplicité. En d'autres termes, le système de commande ne présente pas de dynamique interne.

En conséquence, le mémoire est organisé de la façon suivante :

- Un premier chapitre est consacré à la présentation du cadre de travail. Les notions évoquées dans cette introduction y sont davantage détaillées, en particulier, celles de modèles linéaires, de pôles, de stabilité et de performances. Les performances relatives à la "réponse transitoire" du système sont celles qui seront par la suite envisagées. Ce chapitre rappelle également quelques modèles d'incertitude, les notions de robustesse et de commande robuste (en évoquant quelques approches classiques) avant de présenter les objectifs du mémoire de manière précise, en termes d'analyse et de commande robustes.

- Le deuxième chapitre s'intéresse à l'analyse robuste à travers la notion de bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste. Les régions envisagées sont en général convexes et connexes. Deux approches connues sont présentées : l'approche Lyapunov et l'approche logarithmique. Quelques contributions originales sont proposées.

- Dans le troisième chapitre, une nouvelle approche pour déterminer des bornes de robustesse est proposée. Elle repose sur la notion d'inégalités matricelles linéaires (en anglais, $\mathcal{L}$inear $\mathcal{M}$atrix $\mathcal{I}$nequalities ou $\mathcal{LMI}$). Elle permet un choix beaucoup plus vaste des régions de placement en particulier des régions non connexes. Ce choix autorise des compromis beaucoup plus précis entre robustesse et performances dans la spécification des objectifs. Ce chapitre constitue la contribution la plus originale du mémoire.

- Le quatrième chapitre aborde les problèmes de commande. Des méthodes de détermination de lois de placement robuste de pôles sont présentées. Elles font appel aux techniques de placement de structure propre et au concept de bornes de robustesse. Ces méthodes reposent sur la résolution de problèmes d'optimisation non linéaires dont la solution est approchée en associant des algorithmes proches des algorithmes génétiques et les outils proposés par MATLAB.

Chapter I

Contexte et motivations

L'objectif de ce premier chapitre est de replacer le travail de cette thèse dans le cadre de l'Automatique. Des rappels sur les diverses modélisations possibles y sont effectués ainsi que sur les notions de stabilité et de performances. Ces rappels sont mis à profit pour exprimer les choix sur les modèles utilisés et sur la spécification des performances recherchées. Une brève introduction aux concepts d'incertitudes et de robustesse permet de faire un rapide tour d'horizon de quelques approches de commande robuste existantes. Ceci conduit, au sein de ces approches, à préciser les objectifs qui ont motivé le travail présenté dans ce mémoire.

I.1 Introduction

Cette thèse relève du domaine très vaste de l'Automatique et plus particulièrement d'une de ses composantes que constitue la commande des systèmes à modèles incertains. Il convient, au cours de ce premier chapitre, d'effectuer quelques rappels élémentaires sur des notions de base de l'Automatique afin de préciser, parmi les nombreuses façons d'aborder les problèmes de commande, quels ont été nos choix quant aux objectifs recherchés, aux spécifications des performances désirées, aux modèles utilisés. Il importe aussi de voir comment les méthodes que nous souhaitons développer dans le but d'atteindre ces spécifications s'inscrivent au sein des approches existantes de la commande robuste.
Pour débuter cette présentation du contexte, la partie suivante consiste en un rappel sur les modèles couramment utilisés en Automatique. Nous présentons particulièrement le modèle pour lequel nous avons opté, à savoir, la représentation d'état linéaire. Dès ce choix effectué, la troisième partie nous permet de rappeler comment certaines performances que nous considérons de manière privilégiée peuvent être spécifiées pour les modèles choisis. Nous parlerons essentiellement de stabilité et de régime transitoire de la réponse d'un système. Ces premières sections du chapitre relèvent d'une Automatique ne s'intéressant qu'aux performances nominales d'un modèle considéré comme certain. C'est pourquoi nous en arrivons, dans la quatrième partie, au domaine plus spécifique qui est le nôtre : celui de la commande robuste. Nous y rappelons les raisons qui ont conduit les automaticiens à envisager des incertitudes sur les modèles et donnons également plusieurs modélisations possibles de ces incertitudes. Puis, nous présentons quelques tendances dans la façon d'aborder les incertitudes dans un cadre de synthèse. Ceci nous amène dans la cinquième partie à nous situer clairement par rapport à ces approches de commande robuste. Nous y clarifions la manière dont nous envisageons, dans ce mémoire, la spécification de certaines performances, d'un point de vue robuste, ceci vis-à-vis de deux types d'incertitudes que nous précisons. Nous abordons d'abord ce problème de robustesse sous un angle analytique, ce qui nous conduit à rappeler la notion de bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste et à expliquer comment nous souhaitons sophistiquer les critères d'analyse robuste que constituent ces bornes. Nous terminons cette partie en introduisant nos objectifs de commande avant de conclure le chapitre dans la sixième partie.

I.2 Rappel sur la modélisation des systèmes

Un système est généralement vu comme un processus (souvent physique) reliant, par des relations de cause à effet, des grandeurs (essentiellement physiques). Les modifications de certaines grandeurs externes au systèmes (dites **entrées**) excitent la dynamique interne de celui-ci. Il en résulte une modification des grandeurs qui émanent de ce système et peuvent revêtir une importance particulière pour un opérateur ou un environnement donné (on parle de **sorties**). Les objectifs de l'automaticien sont

de pouvoir comprendre et prévoir le comportement d'un système, ses propriétés, ses performances vis-a-vis d'attentes particulières (**analyse**) et de chercher à maîtriser ce comportement, à améliorer ces performances, à essayer de modeler les sorties en agissant au niveau de ses entrées (**commande**). Le principe consiste à mesurer les sorties et à utiliser judicieusement l'information contenue dans ces mesures en la "réinjectant" sur les entrées. On parle alors de **système bouclé**.
Au delà de cette présentation très qualitative, la compréhension du comportement d'un système peut passer par l'établissement d'un ensemble de relations mathématiques reliant plus ou moins directement les entrées aux sorties et reposant sur l'application de lois connues de la physique (exemple : mécanique, électrictié, chimie, biologie...etc...) en fonction de l'environnement, du système et des grandeurs en jeu. Ces relations constituent souvent un ensemble d'équations algébriques ou différentielles plus ou moins compliquées pouvant faire intervenir des termes linéaires ou non linéaires, des grandeurs déterministes ou stochastiques, des paramètres variants ou invariants dans le temps. Néanmoins, une modélisation rigoureuse peut induire de gros obstacles techniques dans l'analyse d'un système et a fortiori dans la synthèse d'une loi de commande. C'est pourquoi nous précisons d'ores et déjà que notre propos ne concerne que les modèles linéaires invariants dans le temps et faisant intervenir des grandeurs déterministes. Notons à ce propos qu'on approche souvent un modèle non linéaire autour d'un point de fonctionnement par un modèle linéaire, moins précis mais plus facilement manipulable. Notons aussi qu'un modèle linéaire peut être obtenu par un autre moyen. Par exemple, on peut supposer une forme littérale de modèle décrivant le système et compléter la modélisation par des techniques d'identification des paramètres de ce modèle [Lju1986, Lan1993].
Parmi les divers modèles, on peut encore distinguer les modèles monovariables (une seule entrée et une seule sortie) des modèles multivariables (plusieurs entrées et plusieurs sorties). Nous traitons dans ce travail le cas général des systèmes multivariables.
Enfin, la dernière distinction qui est faite dans cette partie est celle qui sépare les modèles à temps continu (résultant par exemple d'une modélisation par un système d'équations algébro-différentiel) des modèles à temps discret. Ces derniers correspondent à des systèmes dont l'évolution n'est connue qu'à des instants régulièrement espacés du temps. Ils peuvent naître soit d'une contrainte pratique, technologique, obligeant l'automaticien à mesurer les paramètres du système (par essence continu) et à appliquer sa commande à des instants donnés, soit d'une modélisation directe sous forme d'équations récurrentes (modèles économiques, modèles d'écosystèmes). Dans notre travail, nous n'utiliserons que des modèles à temps continu même si l'ensemble des résultats qui seront présentés peuvent être, moyennant quelques modifications, adaptés au cas des systèmes à temps discret.

Ces précisions sur les modèles considérés étant apportées, nous rappelons maintenant les deux types de modèles linéaires les plus couramment utilisés : la matrice de transfert et la représentation d'état.

I.2.1 Matrice de transfert

Il s'agit là de la généralisation au cas multivariable du concept monovariable de fonction de transfert. Cette dernière fut très utilisée (en particulier avant 1960) pour l'étude des systèmes. Empruntée au monde de l'électronique, elle fut popularisée dans la communauté automaticienne par les premiers résultats concernant la commande des systèmes monovariables obtenus par Bode [Bod1945].
Cette représentation est basée sur l'utilisation de la transformée de Laplace du signal d'entrée et du signal de sortie du système. Elle caractérise en fait le transfert entre l'entrée et la sortie en fonction de la variable de Laplace, c'est-à-dire en fonction des fréquences. C'est pourquoi l'on parle de représentation externe dans le domaine fréquentiel.

Plus précisément, dans le cas multivariable, si l'on nomme s la variable de Laplace et si $U(s) \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ et $Y(s) \in \mathbb{R}^{\mathbf{p}}$ désignent respectivement les transformées de Laplace des vecteurs de signaux d'entrée $u(t) \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ et de sortie $y(t) \in \mathbb{R}^{\mathbf{p}}$ (t représentant le temps), alors la représentation fréquentielle d'un système peut s'écrire :

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{N(s)}{D(s)}U(s) \tag{I.1}$$

où $G(s) \in \mathbb{R}^{\mathbf{m} \times \mathbf{p}}$ est appelée matrice de transfert.
Chaque élément $[G(s)]_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}$ de cette matrice résulte de la fraction de numérateur $[N(s)]_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}$ et de dénominateur $D(s) \in \mathbb{R}$. Il traduit le transfert de la $j^{\text{ème}}$ entrée du système vers sa $i^{\text{ème}}$ sortie. $D(s)$ est donc le dénominateur de tous les éléments de $G(s)$. Les racines de $D(s)$, appelées pôles du système sont, comme on le verra, déterminants dans le comportement du système.

Remarque I.1 *: On suppose que le système est causal c'est-à-dire que les sorties à une date donnée ne peuvent dépendre des entrées à une date ultérieure. Ceci traduit une réalité physique et implique mathématiquement que chaque polynôme $[N(s)]_{\{i,j\}}$ est de degré inférieur ou égal à celui de $D(s)$.*

I.2.2 Représentation d'état

En 1960, un autre type de modèle est introduit par Kalman [Kal1960] : la représentation d'état. Il s'agit de décrire la dynamique du système de manière interne à partir de l'évolution d'un vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^n$, représentatif des grandeurs intervenant dans le procédé. Cette description s'effectue au travers d'un système de n équations différentielles de premier ordre, complété par $\mathbf{p}$ équations algébriques donnant l'évolution des sorties :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &=& Ax(t) &+& Bu(t) \\ \\ y(t) &=& Cx(t) &+& Du(t) \end{cases} \tag{I.2}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ est le vecteur d'entrée ou de commande et $y \in \mathbb{R}^{\mathbf{p}}$ est le vecteur de sortie ou d'observation. On appelle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice d'état ou matrice d'évolution ou encore matrice dynamique, $B \in \mathbb{R}^{n\times \mathbf{m}}$ la matrice d'entrée ou de commande, $C \in \mathbb{R}^{\mathbf{p}\times n}$ la matrice de sortie ou d'observation et $D \in \mathbb{R}^{\mathbf{p}\times \mathbf{m}}$ la matrice de transmission directe.
Dans le cas des systèmes invariants dans le temps que nous étudions ici, ces matrices sont constantes mais il est facile d'écrire ces équations avec une dépendance des matrices en t ou tout autre paramètre pour étendre la représentation.
Ce type de modèle fut très bien accueilli par la communauté automaticienne car il permet d'envisager avec la même approche des problèmes monovariables et multivariables. Il permit aussi à Kalman d'introduire les concepts de commandabilité *(possibilité de déterminer une commande qui, appliquée au système en un temps fini, déplace le vecteur d'état de n'importe quelle position initiale vers une position voulue)* et d'observabilité *(possibilité de retrouver à partir des connaissances des entrées et des sorties sur un horizon de temps fini* $[t_0; t_f]$ *l'état initial* $x(t_0)$*)* [KFA1969]. L'étude de ces concepts conduisit ensuite à la théorie des observateurs [Lue1964, Lue1966, O'R1983] et, ce qui nous intéresse particulièrement, aux premiers travaux de Wonham sur le placement de pôles par retour d'état (voir [Won1985]) largement repris et étendus par la suite. C'est pour ces raisons que nous avons choisi d'utiliser, dans le mémoire, ce modèle linéaire plutôt que la matrice de transfert.

A partir d'une représentation d'état, on peut retrouver $G(s)$ de la façon suivante :

$$G(s) = C(s\mathbf{I}_n - A)^{-1}B + D \tag{I.3}$$

La matrice D est non nulle lorsque certains polynômes $[N(s)]_{\{i,j\}}$ sont de degré égal à celui du polynôme $D(s)$. Elle représente un transfert statique direct entre entrées et sorties.
Il existe en fait une infinité d'équations d'état possibles pour une matrice de transfert donnée et tout quadruplet (A, B, C, D) vérifiant (I.3) est appelé réalisation de $G(s)$. On passe de (A, B, C, D) à une autre réalisation (A', B', C', D') par l'intermédiaire d'une matrice non singulière T telle que :

$$A' = T^{-1}AT\,;\; B' = T^{-1}B\,;\; C' = CT\,;\; D' = D \tag{I.4}$$

Il existe des matrices de passage telle que A' est diagonale ou de Jordan et l'on peut alors s'intéresser aux éléments diagonaux de A' (c'est-à-dire aux valeurs propres de A ou de A') qui, lorsque la réalisation est minimale (système commandable et observable), sont les pôles de $G(s)$.

I.3 Stabilité et performances d'un modèle linéaire

Dans cette partie nous nous attachons à spécifier très brièvement quelques propriétés que peuvent vérifier les modèles d'état linéaires précédemment présentés et qui peuvent conférer aux systèmes ainsi décrits des performances souhaitables que nous précisons dans le paragraphe suivant. Celui-ci sera lui-même suivi d'un second paragraphe montrant l'influence de la structure propre de la matrice d'état sur les performances du modèle.

I.3.1 Stabilité

Il s'agit là d'une propriété que doit impérativement vérifier un système commandé sous peine de voir sa sortie diverger irrémédiablement sous l'effet d'une perturbation. La stabilité d'un système est, de manière très qualitative, la capacité de ce dernier à revenir à une position d'équilibre lorsqu'il en est ponctuellement écarté. Lorsque l'on veut traduire cette propriété essentielle sur le modèle choisi, on est amené, selon les modèles, à donner quantité de définitions mathématiques que nous ne rappelons pas ici. En effet, notre étude se restreignant aux modèles linéaires, la stabilité dite "asymptotique" suffit à définir globalement la propriété.

Cette propriété (dans le cas des systèmes linéaires invariants à temps continu) peut être testée en vérifiant la localisation des points du plan associés aux pôles de $G(s)$ dans le demi-plan complexe gauche ouvert. L'étude de la localisation des racines d'un polynôme n'est pas un problème mathématique nouveau propre à l'Automatique. Depuis que Descartes a montré que le traitement de problèmes géométriques pouvait se ramener à la résolution d'équations algébriques [Des1637], les développements mathématiques qui suivirent pendant près de trois siècles permirent à Routh [Rou1877] et Hurwitz [Hur1895] de déterminer des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité asymptotique des systèmes à temps continu (pour le cas des systèmes à temps discret, voir le travail de Jury [Jur1971]).
Une condition équivalente fut obtenue par Lyapunov [Lya1892]. Cette dernière est très utilisée dans le cadre d'une description dans l'espace d'état. Elle stipule qu'un modèle linéaire est stable si et seulement s'il existe une fonction quadratique vérifiant certaines propriétés. Nous aurons l'occasion de revenir sur quelques extensions des travaux de Lyapunov dans la suite du mémoire.

Une plus ample information sur ses problèmes de stabilité peut être trouvée en consultant l'ouvrage de Jury [Jur1974]. Quoi qu'il en soit, notons surtout que la stabilité d'un modèle lineaire peut se concevoir comme l'appartenance des pôles de $G(s)$ (ou des valeurs propres de A, c'est plutôt ainsi que nous l'envisagerons par la suite) au demi-plan complexe gauche ouvert. Cependant, la stabilité est une performance minimale pour le système et reste bien souvent insuffisante pour assurer le comportement souhaité ; c'est pourquoi nous évoquons maintenant certaines performances plus précises.

I.3.2 Performances et méthodes de commande qui en découlent

Les performances nominales d'un modèle linéaire sont très diverses et nous en rappelons ici quelques exemples. Nous évoquons également les méthodes de commande visant à assurer ces performances.

Critère quadratique

Une approche pour spécifier les performances d'un modèle tel que (I.2) consiste à définir un critère quadratique J pondérant de manière plus ou moins sophistiquée l'importance des composantes du vecteur d'état et du vecteur d'entrées :

$$J = \int_0^{\infty} (x^* Q x + u^* R u) dt \tag{I.5}$$

Ce critère peut traduire différentes attentes telles que des attentes de minimisation de l'énergie de commande (réduction de consommation) par exemple. Le choix des matrices de pondération $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathbb{R}^{\mathbf{m} \times \mathbf{m}}$ revêt une importance capitale dans l'effet de la commande sur la réponse transitoire du système car ce choix correspond inplicitement à un choix des pôles de $G(s)$. Toutefois, cette correspondance reste assez difficile à établir.
Minimiser un tel critère par un bouclage de type retour d'état (tout en assurant la stabilité du système) revient à minimiser une fonction quadratique sous des contraintes linéaires. Ainsi cette approche est appelée commande LQ (Lineaire Quadratique). (voir [AM1990] pour plus ample information).

Critère $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

On peut être amené à quantifier l'effet d'une perturbation exogène w en entrée d'un système sur une sortie contrôlée z de ce même système. On estime alors que le système est performant si cet effet est faible, c'est-à-dire si la matrice de transfert $G_{zw}(s)$ de w à z est faible au sens d'une norme. Toutefois, il convient de préciser la norme utilisée.

• La norme $\mathcal{H}_2$ représente l'énergie totale du signal z lorsque w est une impulsion de Dirac. Notée $||G_{zw}||_2$, elle est définie par :

$$||G_{zw}||_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Trace(G_{zw}(\mathbf{i}\omega)^* G_{zw}(\mathbf{i}\omega)) d\omega \tag{I.6}$$

où ω représente la pulsation.
On sait exactement évaluer cette norme par l'intermédiaire des grammiens de commandabilité et d'observabilité. Chercher à la réduire revient à répartir un effort

de minimisation du transfert sur l'ensemble des fréquences. Le calcul d'une commande assurant à la fois la stabilité du système et la minimisation de cette norme est équivalente à un type de commande appelé commande LQG (Linéaire Quadratique Gaussienne), initialement developpée pour étendre l'approche LQ au cas où une estimation de l'état est nécessaire. Ici encore, l'on peut se référer à [AM1990] pour plus de détails.

• La norme $\mathcal{H}_\infty$ est un peu plus complexe car elle ne peut être évaluée précisément. On peut cependant la majorer par un scalaire γ. Elle est définie par :

$$||G_{zw}||_\infty = \sup_{\omega} \ \bar{\sigma}(G(\mathbf{i}\omega)) < \gamma \tag{I.7}$$

Le problème de commande revient alors à établir une loi assurant la stabilité du système et réduisant l'effet de w en minimisant γ. Cependant, contrairement au problème $\mathcal{H}_2$, l'effort de minimisation n'est pas réparti sur l'ensemble des fréquences mais on cherche à diminuer le "pire transfert" c'est-à-dire le transfert à la fréquence la plus défavorable. Ce problème formulé dans [Zam1981] fur résolu dans le domaine fréquentiel [FHZ1984] puis dans l'espace d'état [DGKF1989, SMN1990, GA1994].

Matrices de sensibilité

Nous n'entrons pas dans les détails de ces concepts mais tenons à citer ces outils d'analyse en performances très répandus. Ils permettent d'étudier un procédé soumis à des perturbations en entrée w_u, à des perturbations en sortie w_y et à des bruits b_y entachant la mesure de ces sorties.
Une fois le système bouclé, on définit S_y, la matrice de sensibilité en sortie (caractérisant le transfert entre w_y et y) et T_y, la matrice de sensibilité complémentaire en sortie telle que $S_y + T_y = \mathbf{I_p}$. On définit aussi S_u, la matrice de sensibilité en entrée (caractérisant le transfert entre w_u et u) et T_u, la matrice de sensibilité complémentaire en entrée telle que $S_u + T_u = \mathbf{I_m}$. Les expressions de ces diverses matrices dépendent bien sûr de la loi de commande appliquée.
Compte tenu des différents transferts qui régissent le comportement du système, il a été montré que le suivi de consigne et un bon rejet de perturbations en sortie sont liés à S_y et que l'effort de commande est lié à T_u et S_y. De même, une faible commande effective et un bon rejet de pertubations en entrée peuvent être obtenus en jouant sur S_u et S_y alors que de T_y dépend la rejection des bruits de mesure b_y.
Il s'agit donc de calculer une loi de commande telle que certaines matrices dépendantes de ces sensibilités et sensibilités complémentaires soient plus ou moins faibles au sens de leur valeur singulière maximale. Cependant, en raison des relations de complémentarité, améliorer toutes ces performances simultanément est impossible.
Le compromis consiste à calibrer les matrices S_u, T_u, S_y et T_y selon des plages de fréquences en utilisant leurs valeurs singulières maximale (transfert maximal)

et minimale (transfert minimal). On peut ramener ce problème de calibrage à un problème $\mathcal{H}_\infty$ dans lequel des matrices de pondération interviennent pour modeler le diagramme fréquentiel correpondant aux matrices de sensibilité et sensibilité complémentaire selon le compromis souhaité. Pour en savoir plus sur ce problème dit d'"optimisation à sensibilité mixte", très répandu dans la littérature, l'on peut se référer au chapitre écrit par Kwakernaak pour l'ouvrage [Ous1994].

Régime transitoire de la réponse du système

Ce type de performances est un peu différent de ceux introduits précédemment. Il s'agit là de s'intéresser à la dynamique du système et à sa réponse (c'est-à-dire à la forme de ses sorties) lorsque ce dernier est soumis à une excitation en entrée. Lorsque le système est stable, cette réponse peut être décomposée en deux phases : d'abord le régime transitoire durant lequel le système réagit plus ou moins vivement et convenablement aux signaux d'excitation et atteint des valeurs proches des valeurs d'équilibre en sorties ; ensuite, le régime permanent durant lequel les sorties restent dans une zone proche des valeurs d'équilibre et s'en rapprochent asymptotiquement jusqu'à une nouvelle excitation.

La dynamique du système et donc la forme de cette réponse transitoire est étroitement liée à la valeur des zéros du système (racines des polynômes $[N(s)]_{\{i,j\}}$) et surtout à la structure propre de la matrice d'état A [ASC1983, CM1989].
La structure propre est donc une notion matricielle. Il s'agit de l'association des valeurs propres et vecteurs propres correspondants. On parle de structure propre d'un système bouclé lorsque l'on fait référence à la structure propre de la matrice d'état de ce système.
Ainsi, nous supposons que nous devons commander un système dont le modèle linéaire est donné dans l'espace d'état par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & A_0 x \;+\; Bu \\ \\ y & = & Cx \end{array} \right. \tag{I.8}$$

Supposons également que nous puissions appliquer sur ce système des lois de commande correspondant à deux types de retour :
• retour d'état statique : $u = Kx + e$ où $K \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}\times n}$.
• retour de sortie statique : $u = Ky + e$ où $K \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}\times \mathbf{p}}$.
Le signal e peut représenter une consigne.
Le retour d'état peut être vu comme un cas particulier du retour de sortie pour lequel $C = \mathbf{I}_n$. Le comportement du système en boucle fermée est alors décrit par le modèle d'état suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax \;+\; Be \\ \\ y & = & Cx \end{array} \right. \tag{I.9}$$

où $A = A_0 + BKC$ devient la matrice d'évolution du modèle en boucle fermée.

La structure propre de la matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est définie comme l'association de ses valeurs propres λ_i, $i \in \{1, ..., n\}$, de vecteurs propres à droite $v_i \in \mathbb{C}^n$, $i \in \{1, ..., n\}$, et de vecteurs propres à gauche $u_i \in \mathbb{C}^n$, $i \in \{1, ..., n\}$. Par souci de simplicité, nous supposons que toutes les valeurs propres λ_i sont distinctes.
Les valeurs propres de A sont associés à ses vecteurs propres à droite par la relation :

$$Av_i \;=\; (A_0 + BKC)v_i \;=\; \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{I.10}$$

et à ses vecteurs propres à gauche par la relation :

$$u_i^* A \;=\; u_i^*(A_0 + BKC) \;=\; \lambda_i u_i^* \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{I.11}$$

Soient les matrices suivantes :

$$\Lambda \;=\; \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \quad ; \quad U \;=\; [u_1, ..., u_n] \quad ; \quad V \;=\; [v_1, ..., v_n] \tag{I.12}$$

Les vecteurs propres (à droite ou à gauche) vérifiant les relations (I.10) et (I.11) ne sont pas uniques mais définis à un coefficient multiplicateur près. Néanmoins, on peut facilement démontrer qu'il existe des instances de cet ensemble de vecteurs telles que :

$$U^* V \;=\; \mathbf{I}_n \tag{I.13}$$

ce qui conduit à :

$$A_0 + BKC \;=\; A \;=\; V\Lambda U^* \tag{I.14}$$

Les relations (I.10), (I.11) et (I.13) définissent la structure propre de A, c'est-à-dire que nous supposerons que ***les vecteurs propres seront toujours tels que (I.13) est vérifiée.***

Remarque I.2 *: En pratique les matrices A_0, K et A sont toutes réelles ce qui conduit à considérer des spectres auto-conjugués pour A. Les vecteurs propres v_i (respectivement u_i) et v_j (respectivement u_j) sont conjugués lorsque les valeurs propres λ_i et λ_j le sont.*

Pour les besoins de la commande, on définit également [CM1991] les directions d'entrée w_i par :

$$w_i \;=\; KCV_i \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{I.15}$$

et les directions de sorties l_i par :

$$l_i^* \;=\; u_i^* BK \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{I.16}$$

Les valeurs propres (parfois également appelés modes : cf. annexe A) sont très importantes car de ces dernières dépendent la stabilité asymptotique du système bouclé (appartenance des valeurs propres de A au demi-plan complexe gauche ouvert) et la forme générale de la réponse transitoire (temps de réponse, caractère plus ou moins oscillatoire, ...). Cette réponse est également liée aux vecteurs propres qui traduisent les couplages entre signaux d'entrée et modes, entre modes et composantes du vecteur d'état (donc sorties) [ASC1983, CM1989]. Ils peuvent aussi traduire une capacité du système à éliminer des perturbations en entrée [CLKK1995] ou encore traduire la sensibilité locale des valeurs propres à de petites variations sur A [KND1985]. Les propiétés de la structre propre de A sont un peu plus détaillées dans l'annexe A.

I.4 Incertitudes, robustesse et commande robuste

Dans cette partie, nous abordons le problème de la qualité d'un modèle. En effet, jusqu'à présent, les modèles linéaires ont toujours été considérés comme suffisamment bons, suffisamment précis pour traduire fidèlement le comportement du système. En pratique, il n'en est rien. La volonté de prendre en compte cet état de fait a conduit les automaticiens à introduire la notion d'**incertitudes** de modélisation et celle de **robustesse** d'un système vis-à-vis de ces incertitudes. Ces notions sont rappelées dans le paragraphe suivant. Toutefois, ces concepts ne sont pas uniquement utilisés d'un point de vue analytique pour connaître l'influence des incertitudes sur la stabilité et les performances (**analyse robuste**) et un second paragraphe présentera quelques approches connues de synthèse où les incertitudes sont prises en compte (**commande robuste**).

I.4.1 Incertitudes et robustesse

Pourquoi définir des incertitudes ?

Nous considérons ainsi dans cette partie que le modèle linéaire n'est plus tout-à-fait “valable” c'est-à-dire plus assez précis et souhaitons le compléter en modélisant également des incertitudes.

Ces dernières peuvent traduire, par exemple, la prise en compte de l'approximation inhérente à toute linéarisation. Nous avons mentionné, dans la partie I.2, qu'un modèle linéaire résulte souvent de l'approximation d'un modèle non linéaire mais que nous l'utiliserions pour la simplicité des méthodes d'analyse et de commande auxquelles il peut donner lieu. Ce modèle linéaire est valide dans une certaine plage de fonctionnement et s'éloigner de ce régime de fonctionnement revient à réduire la validité du modèle.
Cette première critique de la validité d'un modèle linéaire repose sur une considération mathématique. Cependant, d'un point de vue bien plus pratique, il faut

rappeler que les modèles utilisent les valeurs de paramètres intervenant dans la description du procédé. Or, ces paramètres ne sont pas toujours connus avec précision (exemples : résistance ou capacité connue à 10% près dans un circuit électrique). Il peuvent aussi évoluer dans le temps, par exemple sous l'effet du vieillissement. Ces variations paramétriques induisent une dérive du modèle par rapport au système réel qu'il peut être souhaitable d'anticiper.
De même, un procédé est parfois amené à évoluer selon plusieurs régimes de fonctionnement (exemples : différents régimes de vol d'un avion, changement de masse d'un élément d'un mécanisme...). Il en résulte là aussi une incertitude paramétrique qui doit être considérée.
En outre, par souci de simplicité, lors de la phase de modélisation, on peut être amené à négliger certaines dynamiques (parce-que très rapides et d'amplitude faible) et à utiliser des modèles réduits facilitant le calcul d'une loi de commande. Ces approximations engendrent également des incertitudes de même que l'effet de dynamiques parasites dont on peut ne pas connaître l'existence.

L'effet de ces incertitudes, si elles ne sont pas appréhendées correctement, peut être catastrophique. Non seulement les performances initialement évaluées d'un point de vue nominal peuvent être gravement altérées mais cette altération peut même évoluer jusqu'à une perte de stabilité du système réel, propriété pourtant impérative. En bref, de nombreuses raisons peuvent justifier la prise en compte d'incertitudes lors de l'analyse ou de la commande d'un système. Selon l'idée que l'on se fait de l'origine des incertitudes, on peut en faire diverses modélisations.

La notion d'incertitude n'est pas propre aux systèmes linéaires mais nous ne présentons ici bien sûr que des incertitudes relatives à des modèles linéaires. De même, bien qu'il existe plusieurs modélisations possibles des incertitudes dans le domaine fréquentiel (incertitudes additives, multiplicatives directes ou inverses en entrée ou en sortie, structurées "type μ"... etc...), nous ne les présentons pas non plus et conseillons la lecture du rapport technique [Duc1994]. Nous donnons par contre quelques modélisations d'incertitudes dans l'espace d'état. Bien que les incertitudes puissent intervenir sur les quatre matrices A, B, C et D d'une réalisation telle que celle introduite en (I.2), nous nous limitons aux incertitudes sur A, conservant à l'esprit notre intérêt pour les valeurs propres de A.

Modélisations d'une incertitude dans l'espace d'état

Nous considérons que la matrice d'état est incertaine. Ainsi, la matrice d'état $\mathbf{A}$ du système réel est égale à $\mathbf{A} = A + E$ où E représente une incertitude additive affectant la matrice nominale A. La nature de l'incertitude est traduite par la structure plus ou moins complexe de la matrice E. Nous rappelons ici quelques exemples de définitions de l'incertitude où E est soit non structurée, soit structurée.

Incertitude non structurée [CP1972]
C'est la modélisation la plus simpliste, la plus globale et la plus pessimiste. Elle considère que toutes les variations paramétriques et les dynamiques négligées engendrent une incertitude E dont la structure est totalement inconnue. On quantifie cette incertitude au travers d'une norme matricielle, généralement la norme $||.||_2$, déduite de la norme vectorielle euclidienne. Quoique certains auteurs estiment que cette modélisation est peu élaborée (donc pessimiste), elle a aussi le mérite de pouvoir représenter toutes sortes d'imprécisions et nous l'utiliserons dans ce mémoire.

Incertitude structurée
Afin de réduire le conservatisme d'une modélisation non structurée, certains auteurs ont choisi de conférer à E une structure visant à représenter plus fidèlement la nature de l'incertitude. Selon la structure de E, on peut affiner la classification :

Incertitude bornée en norme [Pet1987, GBA1993]
La structure de E est ainsi définie :

$$E = G_1 \mathcal{G} G_2 \tag{I.17}$$

où $G_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ et $G_2 \in \mathbb{R}^{l\times n}$ sont des matrices constantes connues et où $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{r\times l}$ est une matrice de paramètres incertains vérifiant :

$$\mathcal{G}^*\mathcal{G} \leq \mathbf{I}_l \tag{I.18}$$

Il est à noter que l'on peut accentuer la complexité de la structure en considérant q blocs de la façon suivante :

$$E = \sum_{i=1}^{q} E_i \quad \text{avec} \quad E_i = G_{i_1}\mathcal{G}_i G_{i_2} \text{ et } \mathcal{G}_i^*\mathcal{G}_i \leq \mathbf{I}_l, \ \forall i \in \{1, ..., q\} \tag{I.19}$$

Incertitude bornée réelle [HB1993]
L'incertitude est ainsi définie :

$$E = G_1\mathcal{G}(\mathbf{I}_l - \mathbb{G}\mathcal{G})^{-1}G_2 \tag{I.20}$$

où $G_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ et $G_2 \in \mathbb{R}^{l\times n}$ sont des matrices constantes connues, où $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{r\times l}$ est une matrice de paramètres incertains satisfaisant (I.18) et où $\mathbb{G} \in \mathbb{R}^{l\times r}$ est une matrice constante telle que :

$$\mathbf{I}_r - \mathbb{G}^*\mathbb{G} > \mathbf{0}_r \tag{I.21}$$

On peut également, pour ce type d'incertitude, obtenir une structure plus sophistiquée :

$$E = \sum_{i=1}^{q} E_i \tag{I.22}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_i = G_{i_1} \mathcal{G}_i (\mathbf{I}_l - \mathbb{G}_i \mathcal{G}_i)^{-1} G_{i_2} \\ \mathcal{G}_i^* \mathcal{G}_i \leq \mathbf{I}_l \\ \mathbf{I}_r - \mathbb{G}_i^* \mathbb{G}_i > \mathbf{0}_r \end{array} \right. \quad \forall i \in \{1, ..., q\} \tag{I.23}$$

Remarque I.3 *On peut établir une équivalence entre l'incertitude bornée réelle et l'incertitude bornée en norme comme il est montré dans [GBDA1997, Daa1997].*

Incertitude positive réelle [HB1991]
L'incertitude est ainsi définie :

$$E = -G_1 \mathcal{G} (\mathbf{I}_r + \mathbb{G}\mathcal{G})^{-1} G_2 \tag{I.24}$$

où $G_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ et $G_2 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ sont toujours des matrices constantes connues mais où $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, matrice de paramètres incertains, vérifie

$$\mathcal{G}^* + \mathcal{G} \geq \mathbf{0}_r \tag{I.25}$$

et où $\mathbb{G} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est une matrice constante telle que :

$$\mathbb{G}^* + \mathbb{G} > \mathbf{0}_r \tag{I.26}$$

On peut là encore affiner la structure de l'incertitude en prenant E de la forme (I.22) avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_i = -G_{i_1} \mathcal{G}_i (\mathbf{I}_r + \mathbb{G}_i \mathcal{G}_i)^{-1} G_{i_2} \\ \mathcal{G}_i^* + \mathcal{G}_i \leq \mathbf{0}_r \\ \mathbb{G}_i + \mathbb{G}_i > \mathbf{0}_r \end{array} \right. \quad \forall i \in \{1, ..., q\} \tag{I.27}$$

Remarque I.4 *: On peut à nouveau établir une équivalence entre l'incertitude positive réelle et l'incertitude bornée en norme comme il est montré dans [GDB1996, Daa1997].*

Incertitude affine structurée [TV1990]
Nous insistons particulièrement sur ce type d'incertitude structurée qui sera considéré dans la suite de ce mémoire. La matrice incertaine est décrite par :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\delta) = A + E(\delta) = A + \sum_{h=1}^{\zeta} q_{h,\delta} E_h \tag{I.28}$$

avec $q_{h,\delta} = \Xi_h(\delta - \hat{\delta})$ et $A = \mathbf{A}(\hat{\delta})$.
Les fonctions Ξ_h sont des fonctions scalaires réelles continues du vecteur de paramètres

$\delta = [\delta_1, ..., \delta_\tau]^*$, dont $\hat{\delta}$ est la valeur nominale. Elles vérifient $\Xi_h(\mathbf{0}_{\tau,1}) = 0, \forall h \in \{1, ..., \zeta\}$. Les matrices $E_h \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont constantes et connues. Elles permettent de spécifier quels éléments de A sont affectés par une variation de δ autour de $\hat{\delta}$. Le vecteur δ est souvent supposé appartenant à un hyper-rectangle $\Omega(\Upsilon)$ défini par :

$$\Omega(\Upsilon) = \{\delta \in \mathbb{R}^\tau | (\hat{\delta}_\xi - \Upsilon\underline{\phi}_\xi \leq \delta_\xi \; \leq \; \hat{\delta}_\xi + \Upsilon\bar{\phi}_\xi, \forall \xi \in \{1, ..., \tau\})\} \tag{I.29}$$

où $\Upsilon > 0$ et où $\underline{\phi}_\xi$ et $\bar{\phi}_\xi$ sont des pondérations positives.
La formulation (I.28) est une définition assez générale de la structure de l'incertitude. Néanmoins, à l'intérieur de cette classe d'incertitudes, il existe un cas particulier qui est plus couramment étudié en pratique et qui allège les problèmes d'analyse et de commande. Il s'agit du cas où les $q_{h,\delta}$ sont des fonctions linéaires vis-à-vis des composantes de δ. L'incertitude peut alors s'écrire comme suit :

$$E(\delta) \;=\; \sum_{\xi=1}^{\tau} \delta_\xi E_\xi \tag{I.30}$$

Lorsque δ décrit $\Omega(\Upsilon)$, $\mathbf{A}(\delta)$ évolue dans un polytope de matrices.
L'expression (I.30) est un cas particulier de l'expression (I.28) où :

$$h \;=\; \xi \,;\, \zeta \;=\; \tau \,;\, q_{h,\delta} \;=\; \delta_\xi \,;\, \hat{\delta} \;=\; \mathbf{0}_{\tau,1} \tag{I.31}$$

Remarque I.5 *: L'incertitude définie par (I.30) est très proche de la représentation dite polytopique [BPG1989]. Dans cette dernière, on n'utilise pas de matrice additive E mais la matrice d'état du modèle est spécifiée comme appartenant à un polytope de matrices défini par ses sommets et il n'existe pas de matrice nominale.*

Notions de robustesse

La notion de robustesse caractérise l'invariance de certaines propriétés qualitatives d'un système commandé (telles que la stabilité et les performances évoquées en §I.3) vis-à-vis des incertitudes sur le modèle. On dit donc d'un système qu'il est robuste s'il conserve sa stabilité et des performances acceptables malgré la présence des incertitudes.

L'analyse robuste consiste soit à attester que les propriétés du système sont modifiées dans des proportions tolérables, c'est-à-dire que le système est robuste, pour une famille prédéfinie de modèles donnés soit *(et c'est ainsi que nous raisonnerons)* à essayer d'estimer quel est le plus vaste domaine d'incertitude pour lequel le système conserve des propriétés acceptables.

La commande robuste consiste à déterminer une loi de commande qui vise soit à conférer au système bouclé des propriétés données quel que soit le modèle appartenant à une famille prédéfinie de modèles, soit à essayer d'augmenter le domaine d'incertitude pour lequel on est sûr que les propriétés sont acceptables.

I.4.2 Quelques approches de la commande robuste

Le but de ce paragraphe est d'évoquer très brièvement **quelques** approches connues de commande robuste. La liste ci-dessous n'est **absolument pas exhaustive** et la classification peut paraître arbitraire.

Approche algébrique

Il s'agit là de l'ensemble des méthodes qui cherchent à revenir aux toutes premières formulations des problèmes de stabilité en étendant le critère de Routh-Hurwitz au cas des systèmes à modèles incertains. Kharitonov en est l'initiateur par l'intermédiaire d'un célèbre théorème [Kha1978]. Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante d'appartenance au demi-plan complexe gauche ouvert des racines d'une famille de polynômes caractéristiques dont les coefficients varient dans des intervalles specifiés. La notoriété de ce théorème tient au fait rare d'aboutir à une condition nécessaire et suffisante [dL1989].
Toutefois, il convient de noter que le théorème est a priori restreint à l'analyse des systèmes à temps continu puisqu'il émane du critère de Routh-Hurwitz. Quelques extensions à l'étude de régions de cloisonnement des racines autres que le demi-plan gauche (analyse de performances robustes, stabilité robuste des systèmes à temps discret) sont néanmoins proposées dans [Bar1994]. De plus, il est parfois difficile de traduire la nature des incertitudes en termes de variations des coefficients du polynôme caractéristique. Enfin, cette approche, bien que très intéressante d'un point de vue analytique, conduit, sur le plan de la synthèse, à des problèmes encore très ouverts même si quelques résultats existent [Bar1994].

Remarque I.6 *: Cette approche "Kharitonov" est parfois qualifiée de "paramétrique". Il existe une approche connexe dite "polynomiale" qui, quoique s'intéressant aussi à l'étude des racines de polynômes incertains, ne s'appuie pas sur le théorème de Kharitonov. Kučera en est le précurseur (voir par exemple [KK1997]).*

Approches fréquentielles

On regroupe sous cette appellation des méthodes cherchant à déterminer des lois de commande robuste relatives à des critères de performances spécifiés dans le domaine fréquentiel et à des incertitudes le plus souvent non structurées. En voici quelques exemples.

• Dans le paragraphe sur la présentation des performances envisageables pour un système, nous avons évoqué l'approche LQ. Cette approche est réputée pour ses propriétés de robustesse [SA1977]. Malheureusement, lorsque l'état n'est pas directement accessible mais reconstruit par le biais d'un observateur, ces propriétés disparaissent. Ainsi, par exemple, dans l'approche LQG (également évoquée dans le paragraphe sur la norme $\mathcal{H}_2$), qui peut pourtant être vue comme une approche de commande robuste vis-à-vis des signaux stochastiques exogènes qui entâchent la mesure des sorties, l'estimation de l'état et le rebouclage détruisent les propriétés de robustesse de la commande LQ par rapport aux imprécisions du modèle [Doy1978]. C'est ce qui a suscité le besoin de développer une théorie afin de concevoir des observateurs ou des compensateurs (retours de sortie dynamiques) retrouvant les propriétés du retour d'état, donnant ainsi naissance à l'approche LQG/LTR (Loop Transfer Recovery). Le principe en est de calculer un retour d'état de type LQ puis de construire un observateur dont le gain est choisi tel que le transfert en boucle fermée tende vers celui obtenu avec le retour d'état [Ath1986, Lew1992].

• La norme $\mathcal{H}_\infty$, que nous avons présentée dans le paragraphe I.3.2 comme un moyen de quantifier le transfert entre une perturbation en entrée et la sortie contrôlée, est en fait un outil mathématique à l'origine d'une approche beaucoup plus générale dite elle aussi $\mathcal{H}_\infty$. Certes, la recherche d'un compensateur minisant ce transfert peut déjà être vue comme un problème de "robustesse", non pas vis-à-vis d'une incertitude de modélisation, mais vis-à-vis d'une perturbation exogène. Cependant, l'aspect "robustesse" de l'approche va bien au delà. En effet, en introduisant la formulation d'un problème beaucoup plus général (appelé "problème standard") s'intéressant à la minimisation de la norme $\mathcal{H}_\infty$ de tout transfert entre des entrées extérieures quelconques (signaux de référence, perturbations bruits, ...) et des sorties à réguler (de toutes sortes), Doyle a permis d'élargir considérablement les perspectives d'une telle approche. Ce concept permet d'étendre le problème de rejet de perturbation à des problèmes de performances plus sophistiqués et de stabilité robuste par rapport à des incertitudes non structurées, ceci en faisant intervenir, dans la mise sous forme standard, les matrices de sensibilité et sensibilité complémentaires. Ainsi, par exemple, le principe de la solution du problème $\mathcal{H}_\infty$ dans l'espace d'état présenté dans [DGKF1989] peut être utilisé pour atteindre des objectifs combinés de stabilité nominale, performance nominale et robustesse en stabilité. Il faut toutefois noter que pour atteindre les objectifs souhaités, il faut calibrer les diverses matrices de sensibilité par un choix judicieux de matrices de pondération. Ce choix reste un exercice délicat.

Cette approche est toutefois insuffisante pour traiter les problèmes de robustesse en performances ou de robustesse en stabilité vis-à-vis d'incertitudes structurées. Ces deux points nécessitent l'utilisation du concept de valeur singulière structurée introduit dans [Doy1982] qui conduit à l'approche "μ-synthèse".

On peut trouver une information assez complète sur ces sujets dans [Duc1994] et les références qui y sont données.

Remarque I.7 *: Dans le cadre de ces problèmes, les auteurs de [CG1996] proposent une méthode basée sur la résolution d'inégalités matricielles linéaires (en anglais : $\mathcal{L}$inear $\mathcal{M}$atrix $\mathcal{I}$nequalities ou $\mathcal{LMI}$) pour résoudre le problème $\mathcal{H}_\infty$ (et même le problème mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$) par retour de sortie, en ajoutant des contraintes de placement de pôles. Cette méthode peut se généraliser aux systèmes de modélisation incertaine (incertitude polytopique) [CG1996]. Elle utilise le concept de régions $\mathcal{LMI}$ qui nous sera extrêmement utile dans la suite du mémoire pour résoudre des problèmes quelque peu différents.*

• L'approche CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) [Ous1994] s'intéresse, elle, initialement, à la robustesse du degré de stabilité. Cette approche a fait l'objet de plusieurs sophistications de la part de ses concepteurs appelées "générations". L'idée première est de considérer un régulateur en cascade avec un procédé et de faire en sorte que la marge de phase du système résultant dans le plan de Bode ne soit pas trop altérée lorsque la fonction de transfert du procédé est incertaine (les auteurs parlent de reparamétrisation du procédé plutôt que d'incertitude). En effet, cette reparamétrisation induit une dérive de la pulsation au gain unité et il s'en suit une variation de marge de phase. En montrant que la variation de marge de phase est pour partie celle du régulateur et pour partie celle du procédé et en argumentant que c'est souvent le régulateur qui entraîne la sensibilité aux incertitudes paramétriques, une première génération a consisté à déterminer un régulateur de phase constante autour de la pulsation au gain unitaire ce qui a conduit à des opérateurs de dérivation d'ordre non entier réel.
Plus tard, l'objectif est devenu plus strict : annuler la variation de marge de phase autour de la pulsation au gain unitaire. D'où le diagramme de Black du système en boucle ouverte doit suivre, dans une gamme de fréquences, un gabarit vertical. Ce gabarit peut être pris tangent à des lignes d'iso-amortissement et d'iso-dépassement. Ceci permet de fixer, d'un point de vue robuste, le dépassement de la réponse indicielle et le facteur d'amortissement. Dans cette deuxième génération de CRONE, c'est le choix de l'ordre non entier d'un intégrateur qui permet de placer la phase.
Le déplacement vertical exact du diagramme fréquentiel le long du gabarit vertical n'étant pas toujours possible, la troisième génération envisage un gabarit légèrement incliné dit "généralisé", toujours tangent aux lignes d'iso-dépassement et d'iso-amortissement. Comme il en existe une infinité, on choisit celui qui minimise un critère quadratique sur les variations du facteur d'amortissement et du dépassement en fonction des dérives paramétriques. La commande qui en résulte fait intervenir un intégrateur d'ordre non entier complexe. Une sophistication de la troisième génération existe et a pour but de pendre en compte la commande des procédés instables. Elle s'appuie sur une étude du lieu de Nyquist et du critère de stabilité du même nom [Ous1995].
Les stratégies CRONE vivent toujours actuellement des évolutions permanentes. Cette approche a l'intérêt d'envisager la robustesse en raisonnant sur des indicateurs de stabilité et de performances fréquentiels des systèmes monovariables sans

avoir à modéliser l'incertitude, ce qui siginfie que la nature de cette incertitude n'a pas à être précisée, pas plus qu'il ne faut utiliser de norme sur cette incertitude. Le revers de la médaille est la difficulté d'envisager la commande de systèmes multi-variables même si des efforts sont faits dans cette direction.

Remarque I.8 *: CRONE n'est pas la seule approche à tenter de modeler la réponse d'un procédé dans le plan de Black. C'est aussi le cas de l'approche QFT (Quantitative Feedback Theory) qui repose sur l'idée que le retour n'intervient que pour contrecarrer l'effet des incertitudes. La commande se fait en deux étapes : calcul d'un régulateur assurant une certaine robustesse vis-à-vis de variations paramétriques puis calcul d'un précompensateur assurant des performances temporelles souhaitées sur le régime transitoire [Ous1994, YH1986].*

Approches temporelles

Ce terme désigne parfois les approches qui s'appuient sur les résultats essentiels de Lyapunov quant à la stabilité du mouvement [Lya1892].
Nous rappelons d'abord un résultat bien connu concernant la stabilité asymptotique d'un système linéaire à temps continu décrit par $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $A \in A^{n \times n}$. La théorie de Lyapunov stipule que le système est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction quadratique $V(.)$ du vecteur d'état $x(t)$ telle que $\{V(x(t)) > 0; \dot{V}(x(t)) < 0\}. \forall x(t) \in \{\mathbb{C}^n / \{\mathbf{0}_{n,1}\}\}$.
On définit une fonction quadratique en x

$$V(x(t)) = x^*(t)Px(t) \tag{I.32}$$

dont la dérivée par rapport au temps t est :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^*(t)Px(t) + x^*(t)P\dot{x}(t) = x^*(t)(A^*P + PA)x(t) = -2x^*(T)Qx(t) \tag{I.33}$$

Le système est asymptotiquement stable si et seulement si tout choix d'une matrice symétrique définie positive Q conduit à une solution unique P symétrique définie positive de l'équation dite de Lyapunov :

$$A^*P + PA = -2Q \tag{I.34}$$

La fonction $V(.)$ est alors appelée fonction de Lyapunov.

Il existe un résultat analogue pour les systèmes à temps discret.

Remarque I.9 *: La stabilité asymptotique de la matrice A* **réelle** *est équivalente à celle de A^* (on parle de stabilité d'une matrice lorsque le système associé est stable). Ainsi, pour un choix de Q, on peut aussi raisonner par rapport à l'équation duale :*

$$AP + PA^* = -2Q \tag{I.35}$$

On peut citer deux approches s'appuyant sur ce résultat : celle de stabilisabilité quadratique cherchant à commander une famille prédéfinie de modèles ainsi que les méthodes visant un commander un système nominal et à maximiser le domaine d'incertitude auxquelles il pourrait être sujet en utilisant le principe de bornes de robustesse.

Stabilisabilité quadratique

La stabilisabilité quadratique des systèmes incertains est un concept qui remonte aux premières réflexions de Barmish sur le sujet [Bar1985]. Le principe de la synthèse robuste par l'approche "stabilisabilité quadratique" est de trouver une fonction de Lyapunov quadratique unique pour toute une famille de systèmes incertains et d'en déduire une loi de commande. Cette unicité conduit à une condition suffisante de stabilisabilité quadratique de l'ensemble des systèmes mais ce conservatisme ne doit pas éclipser la facilité avec laquelle on peut parfois numériquement obtenir cette fonction et une commande correspondante.
Il existe, dans la littérature, deux méthodes pour stabiliser quadratiquement une famille de modèles : la méthode par résolution d'une équation de Riccati et la méthode par résolution d'un système $\mathcal{LMI}$. Les incertitudes envisagées sont les incertitudes bornées en norme, bornées réelles, positives réelles ou, grâce aux $\mathcal{LMI}$, polytopiques [Pet1987, BGP1989, GBO1997, Daa1997]. Des résultats sur la stabilisabilité quadratique des systèmes incertains à temps discret existent aussi [GBA1994].
Il n'est pas surprenant de retrouver les méthodes "Riccati" et "$\mathcal{LMI}$" qui servent aussi à résoudre le problème $\mathcal{H}_\infty$ puisque les travaux de [KPZ1990] ont permis de montrer l'équivalence entre certains problèmes particuliers de l'approche $\mathcal{H}_\infty$ et les problèmes de stabilisation quadratique.

Cette approche offre de vastes perspectives car certaines méthodes ont permis de combiner les objectif initiaux de la stabilisation quadratique avec des objectifs de rejet de perturbations au sens de la norme $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ (commande à coût garanti $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$) et de placement de pôles dans une région (secteur, disque) [GPS1992, GB1995, GDB1996, CBG1998, Daa1997].

Approche utilisant les bornes de robustesse

Nous nous contenterons d'introduire très brièvement le principe d'une telle approche qui sera largement discuté par la suite puisque le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit pleinement dans cette mouvance.
Revenons à un modèle incertain de matrice d'état $\mathbf{A} = A + E$. La matrice E étant inconnue, il est impossible d'attester que $\mathbf{A}$ est Hurwitz (c'est-à-dire stable) en vérifiant l'équation de Lyapunov (I.34) pour $\mathbf{A}$. D'où vient l'idée de majorer la norme spectrale de E, $||E||_2$, de telle sorte que l'on puisse garantir avec certitude que pour toute matrice E vérifiant la majoration, l'équation de Lyapunov est satisfaite donc garantir que le système reste stable. C'est l'idée qui est dévelopée dans [PT1980]

où apparaît une des premières bornes de robustesse ou bornes de stabilité robuste. Il faut noter que ces bornes sont conservatives. D'une part elles sont pessimistes de par leur expression même car les démonstrations qui conduisent à leur établissement utilisent l'inégalité triangulaire sur la norme $||.||_2$. D'autre part, comme dans le cas de la stabilité quadratique, la borne garantit la même solution de (I.34) pour $\mathbf{A}$ quelle que soit E. Néanmoins, ces bornes restent de bons critères de stabilité robuste. De nombreux auteurs travaillent à réduire le conservatisme en améliorant l'expression des bornes ou en jouant, par exemple, sur le choix de Q apparaissant dans (I.34).
Ces bornes sont également données dans le cas d'incertitudes affines structurées [PT1980, Yed1985, YL1986, ZK1987].

Les divers travaux sur ce sujet ne se contentent pas de s'intéresser à l'appartenance des valeurs propres de $\mathbf{A}$ au demi-plan complexe gauche ouvert mais cherchent à étendre le principe de ces bornes à des régions plus restreintes du plan complexe [Yed1993b, BLJ1993, CP1995b]. Nous reviendrons longuement sur ce thème dans la prochaine partie et surtout dans les chapitres II et III.

Du point de vue de la synthèse, il devient intéressant de déterminer une loi de commande qui stabilise le système mais qui, de plus, augmente la borne de robustesse en stabilité [LJB1995]. Pour des régions de placement plus compliquées, l'on peut se référer par exemple à [Cho1994, BP1997, BP1998b, BP1998a]. La partie suivante a pour but de présenter les objectifs de notre travail qui se place justement dans cette optique.

I.5 Problématique du mémoire

Nous expliquons dans cette partie quelles sont les motivations de cette thèse en précisant les objectifs en termes d'analyse et de commande.

I.5.1 But recherché

Il s'agit de proposer une méthode pour déterminer une loi de commande robuste des systèmes à modèles d'état linéaires tels que (I.8) lorsqu'ils sont sujets à une incertitude. Ces lois de commande doivent conférer au système bouclé (I.9) des performances souhaitées sur le régime transitoire de la réponse temporelle. Ces performances sont spécifiées à travers le choix d'un spectre désiré pour la matrice d'état A en boucle fermée, conformément au remarques du paragraphe I.3.2 et de l'annexe A. De plus, ces performances ne doivent pas être trop altérées par l'existence de l'incertitude. Dans notre travail, seulement deux types d'incertitude sont considérés (cf. §I.4.1) :

- L'incertitude non structurée.

- L'incertitude affine structurée telle que celle définie en (I.28) ou (I.30).

Dans les deux cas, le domaine d'incertitude est considéré comme n'étant pas figé.

Le but devient donc de calculer une loi de commande qui puisse placer sur le système bouclé nominal (I.9) des pôles désirés et telle que la présence de l'incertitude ne modifie ce spectre que dans des proportions acceptables. A ce propos, pour éclaircir cette spécification de la robustesse en performances, nous rappelons dans le paragraphe suivant, la notion de $\mathcal{D}$-stabilité.

I.5.2 Introduction à la notion de $\mathcal{D}$-stabilité

La propriété de **$\mathcal{D}$-stabilité** est connue dans la littérature anglophone sous la vocable de **"root-clustering"**. On dit d'une matrice A qu'elle est $\mathcal{D}$-stable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement contenues à l'intérieur d'une région $\mathcal{D}$ du plan complexe. Lorsque la matrice A est connue avec précision, on parle de **$\mathcal{D}$-stabilité nominale**.
Les problèmes de $\mathcal{D}$-stabilité pour une région autre que le demi-plan complexe gauche ouvert sont apparus en Automatique avec l'étude des systèmes à temps discret [Jur1971] et avec les premières interrogations soulevées par Kalman [Kal1969] reprises par Jury et Ahn [JA1974] . Il s'agissait plutôt alors de tester la localisation des racines de polynômes. Le fait de raisonner par rapport à des valeurs propres de matrices émane davantage des travaux de Lancaster [Lan1969]. Les contributions les plus significatives à notre sens sont celles de Gutman et Jury [Gut1979, GJ1981].

La $\mathcal{D}$-stabilité, qui, clairement, généralise la propriété de stabilité, peut être testée mathématiquement, voire numériquement, comme nous le rappellerons dans les chapitres II et III.
Lorsque la matrice est incertaine ($\mathbf{A} = A + E$), il devient généralement impossible d'appliquer les tests de $\mathcal{D}$-stabilité et il faut se contenter d'une condition suffisante définissant le domaine d'incertitude pour lequel on a la garantie que $\mathbf{A}$ est $\mathcal{D}$-stable. On parle alors de **$\mathcal{D}$-stabilité robuste**. La condition suffisante se traduit par une borne sur l'incertitude comme nous l'expliciterons de manière plus formalisée au chapitre II. Cette borne est dite borne de robustesse ou, comme nous nous permettons de l'introduire ici, borne de $\mathcal{D}$-stabilité robuste.

Revenons à notre problème plus pratique de commande des systèmes incertains. Les performances nominales du système de modèle (I.8) sont spécifiées par la localisation des valeurs propres de la matrice A. On peut estimer que les performances sont robustes vis-à-vis d'une incertitude quand les valeurs propres de $\mathbf{A}$ ne sortent pas d'une région $\mathcal{D}$ à spécifier. Dès lors, les bornes évoquées ci-dessus deviennent des critères de performances robustes auxquels nous nous intéresserons longuement. Bien sûr, ces critères dépendent des régions considérées.

I.5.3 Les diverses régions

Dans ce paragraphe, nous nous référons essentiellement au travail présenté dans [GJ1981].

La région est une notion géométrique. Il s'agit d'un ensemble quelconque de points du plan affine. Certaines régions sont délimitées par une frontière éventuellement fermée et peuvent ainsi être définies au travers de l'équation cartésienne de leur contour. On peut alors parler de formulation cartésienne. Supposons que chaque point du plan affine est caractérisé dans un repère orthonormé par son abscisse $x \in \mathbb{R}$ et son ordonnée $y \in \mathbb{R}$. La formulation cartésienne d'une région $\mathcal{D}$ est donnée par :

$$\{\,\{x;y\} \in \mathbb{R}^2 \,|\, F(x,y) \;=\; \sum_{u=0,v=0}^{u+v=\nu} d_{uv} x^u y^v \;<\; 0\,\} \tag{I.36}$$

où $d_{u,v} \in \mathbb{R}\,\forall\{u;v\}$. Le maximum ν de la somme $(u+v)$ tel que $d_{uv} \neq 0$ est appelé degré ou ordre de la région.
Lorsque d_{uv} est nul pour toute valeur impaire de v, la région $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à l'axe réel.

Remarque I.10 : *L'inégalité apparaissant dans (I.36) est ici prise stricte de manière à généraliser la propriété de stabilité asymptotique. Ceci signifie que la frontière de $\mathcal{D}$ n'est pas contenue dans $\mathcal{D}$.*

Par le plongement de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ défini par l'isomorphisme suivant :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \{x;y\} & \mapsto & z = x + \mathbf{i}y \end{array} \tag{I.37}$$

on assimile le plan affine au plan complexe (appelé plan de Laplace par les automaticiens), c'est-à-dire chaque point à son affixe, et l'on peut aisément reformuler $\mathcal{D}$ de manière "polynomiale" :

$$\mathcal{D} \;=\; \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) \;=\; \mathbf{f}(z,\tilde{z}) \;=\; \sum_{r=0,s=0}^{r+s=\nu} c_{rs} z^r \tilde{z}^s \;,\; 0\} \tag{I.38}$$

où les coefficients c_{rs} sont complexes et vérifient $\tilde{c}_{sr} = c_{rs}$, $\forall\{r;s\}$.
Lorsque $c_{rs} \in \mathbb{R}\,\forall\{r;s\}$ (ce qui implique $c_{rs} = c_{sr}$), la région $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à l'axe réel.
On retrouve ν, le degré de la région. Nous noterons $\mathcal{P}_\nu$, l'ensemble des régions polynomiales d'ordre ν. En pratique, nous ne nous intéresserons qu'aux régions de **premier ordre** et de **deuxième ordre**. Mais il convient de restreindre ces ensembles aux régions vérifiant la propriété de transformabilité que nous rappelons. Considérons le couple $\{\alpha;\beta\} \in \mathbb{C}^2$. La région $\mathcal{D}$ est transformable (c'est-à-dire qu'il existe une transformation de $\mathcal{D}$ en le demi-plan complexe gauche ouvert) si :

$$\{\alpha;\beta\} \in \mathcal{D}^2 \;\Rightarrow\; Re[\mathbf{f}(\alpha,\tilde{\beta})] \;<\; 0 \tag{I.39}$$

On note $\mathcal{P}_\nu^{\{t\}}$, l'ensemble des régions polynomiales transformables de degré ν. Toutes les régions polynomiales ne sont donc pas transformables. Pour le premier ordre, elles le sont toutes et $\mathcal{P}_1^{\{t\}} = \mathcal{P}_1$. En ce qui concerne les régions de deuxième ordre, la résolution du problème de programmation non linéaire

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\max_{\alpha,\beta} \quad Re[\mathbf{f}(\alpha,\tilde{\beta})] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \{\alpha;\beta\} \in \mathcal{D}^2 \\ Re[\mathbf{f}(\alpha,\tilde{\beta})] \;<\; 0 \end{array}\right. \tag{I.40}$$

conduit aux conditions suivantes de transformabilité [Gut1979] :

$$d_{02} \,+\, d_{20} \;\geq\; 0 \quad \text{pour la formulation cartésienne} \tag{I.41}$$

$$\Rightarrow\; c_{11} \;\geq\; 0 \quad \text{pour la formulation polynomiale} \tag{I.42}$$

On a donc $\mathcal{P}_2^{\{t\}} \subset \mathcal{P}_2$.

Parmi les régions de premier ordre, on peut citer les demi-plans verticaux et obliques. Parmi les régions transformables de deuxième ordre, on peut citer les disques, les ellipses, les bandes verticales ou horizontales, les paraboles, certaines hyperboles... etc ... Des détails sur la formulation polynomiale de ces régions sont donnés dans l'annexe B.

A partir des régions $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}_\nu^{\{t\}}$, Gutman et Jury ont donné une condition nécessaire et suffisante d'appartenance des valeurs propres d'une matrice complexe à $\mathcal{D}$ qui permettent d'établir, pour $\mathcal{D} \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2^{\{t\}}$, des bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste (voir chapitre II). Compte tenu de la diversité des régions, ces bornes sont autant de critères de performances robustes qui peuvent servir à l'analyse (voire la commande) d'un système.

Remarque I.11 *: La matrice d'état d'un système étant réelle (donc de spectre auto-conjugué), l'automaticien ne s'intéresse en pratique qu'à des régions symétriques.*

I.5.4 Volonté d'affiner les critères

Ces bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste sont conservatives mais donnent néanmoins une bonne estimation des performances robustes si $\mathcal{D}$ est convenablement choisie. Elles traduisent la robustesse "globale" du spectre de A alors que le nombre de conditionnement de la matrice modale (cf. annexe A) traduit approximativement la sensibilité "locale" de ce spectre. La première différence fondamentale est bien sûr que la borne de robustesse peut être utilisée dans le cas d'une incertitude structurée. La seconde différence fondamentale est que si un pôle a une sensibilité plus élevée que les autres, il peut induire un fort nombre de conditionnment de la matrice modale bien qu'il soit très éloigné de la frontière de $\mathcal{D}$ (ex : mode très rapide dont la dynamique influe peu sur la réponse : cf. annexe A). Dans ces conditions, la borne de robustesse peut s'avérer un meilleur critère.

Toutefois, cette globalité est un peu restrictive pour certains modèles. Prenons par exemple le cas d'un système comportant une dynamique lente et une autre nettement plus rapide, nettement séparée dans le plan de Laplace. Chercher à analyser la robustesse du spectre par le choix d'une région $\mathcal{D}$ polynomiale est assez délicat car une telle région est généralement convexe et connexe ce qui contraint à envisager une seule et même vaste région pour traduire les performances robustes liées aux deux dynamiques. Dans ce cas là, il serait intéressant de considérer $\mathcal{D}$ comme une région non connexe résultant de l'union de deux sous-régions disjointes : une pour les modes lents, l'autre pour les modes rapides (cf. annexe A pour la rapidité des modes).
De la même manière, si le concepteur désire un certain facteur d'amortissement caractérisant la réponse transitoire, il peut vouloir imposer (d'un point de vue robuste) l'existence d'un mode complexe dominant. Pour tester la robustesse de ce mode, il peut être préférable de spécifier deux sous-régions disjointes, symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe réel et contenant chacune une seule des deux valeurs propres complexes conjuguées.

Pour illustrer notre propos, nous considérons un exemple académique. Un modèle d'hélicoptère VTOL en boucle ouverte [KBH1988] est bouclé, grâce à la méthode de [KND1985], par un retour d'état plaçant le spectre $\{-2 \pm 1.7137\mathbf{i}; -0.8; -7.2106\}$. La matrice d'état du modèle en boucle fermée est alors :

$$A = \begin{bmatrix} -1,5036 & -0,1683 & 0,5384 & 1,1040 \\ 2,2651 & -5,4409 & 1,3045 & 0,0242 \\ 8,0311 & 4,9355 & -5,0662 & -11,7663 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} \tag{I.43}$$

Nous supposons que ce système bouclé a des performances robustes si, malgré l'incertitude, il conserve un pôle rapide, un pôle lent et deux pôles complexes conjugués légèrement amortis. Si nous décidons d'apprécier la robustesse en performance en termes de $\mathcal{D}$-stabilité, $\mathcal{D}$ pourrait être la région suivante : l'union de demi-plan vertical $x < -5$, de deux disques de centres $(-2; -1,7)$ et $(-2; +1,7)$, tous deux de rayon 1, et de l'ellipse de centre $(-0,8; 0)$ avec un demi-axe transverse mineur de longueur $0,5$ et un demi-axe conjugué majeur de longueur 1. La figure I.1 illustre ce choix.
En présence d'une l'incertitude tolérable, chaque pôle complexe est cloisonné dans un des disques et la spécification sur l'amortisemeent est préservée. Bien entendu,

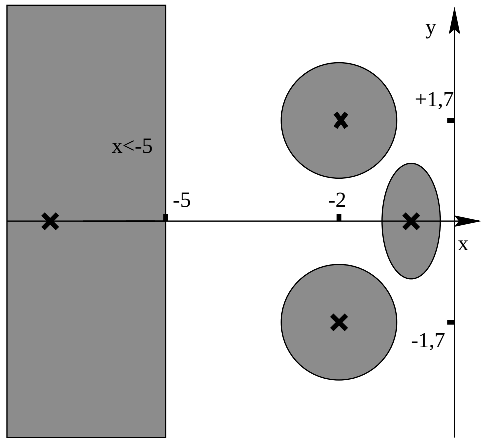

Figure I.1: region $\mathcal{D}$ et spectre de A dans le plan de Laplace

les pôles rapide et lent restent tous deux sur l'axe réel dans leurs régions respectives. L'ensemble des régions polynomiales ne peut nous pourvoir en régions de ce type. C'est pourquoi nous avons dû nous pencher sur d'autres régions telles que les régions $\mathcal{LMI}$ [CG1996] et surtout $\mathcal{GLMI}$ ($\mathcal{G}$eneralised $\mathcal{LMI}$) [Chi1996] que nous présentons au chapitre III et dont les dernières peuvent être non connexes. La possibilité d'envisager la $\mathcal{D}$-stabilité robuste pour des régions non connexes permet d'exhiber des critères de performances robustes nettement plus sophistiquées autorisant ainsi la spécification d'un compromis entre les performances nominales et la robustesse.

I.5.5 Finalisation de l'objectif

Dans les paragraphes précédents, nous avons surtout présenté un problème d'analyse en robustesse des performances du régime transitoire de la réponse du système en introduisant le concept de bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste.
En ce qui concerne la commande d'un système tel que celui décrit nominalement par (I.8), l'objectif est d'atteindre les performances en plaçant les valeurs propres de la matrice d'état A du système bouclé décrit par (I.9) dans des zones très localisées du plan de Laplace. En effet, il paraît difficile de spécifier des performances nominales en termes de localisation très précise du spectre de A alors que, d'une part, une correspondance très stricte est difficile à établir et, d'autre part, le modèle linéaire utilisé est incertain. Il semble plus raisonnable de spécifier le spectre nominal grâce à des petites zones de tolérances du plan complexe à l'intérieur desquelles les valeurs propres nominales se situent. Dans ce travail, le placement de ce spectre se fera par retour statique d'état ou de sortie. Ces retours seront déduits des techniques de placement de struture propre (cf. chapitre IV).
Dans le cadre de la commande des systèmes multivariables, il peut exister plusieurs

retours pour placer un spectre donné d'où apparaissent des degrés de liberté. De plus, la possibilité de faire varier les valeurs propres dans des zones de tolérances accroît ce nombre de degrés de liberté. Cette flexibilité est utilisée pour tenter de contrecarrer l'effet d'une incertitude additive non structurée ou structurée sur la matrice d'état A du système en boucle fermée. L'idée est de trouver parmi les retours possibles, celui qui maximise le critère de performances robustes que représente une borne de $\mathcal{D}$-stabilité robuste relative à une région $\mathcal{D}$ judicieusement choisie.

I.6 Conclusion

Nous avons, dans ce chapitre, rappelé quelques bases de la commande et plus particulièrement de la commande robuste. Nous avons, entre autres, présenté quelles étaient les performances que nous souhaitions atteindre. Elles sont de nature temporelle et concernent le régime transitoire de la réponse du système.
Nous également rappelé quelques modèles d'incertitudes et précisé ceux qui seront envisagés dans ce travail : incertitude non structurée et incertitude affine structurée. Nous avons exposé la façon dont nous estimions la robustesse des performances vis-à-vis de ces incertitudes en utilisant la notion de bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste, notion que nous souhaitons d'ailleurs affiner. Ceci nous a conduit à présenter notre problème de commande comme un problème de placement de pôles robuste en $\mathcal{D}$-stabilité.
En conséquence, la chapitre II traite de la $\mathcal{D}$-stabilité robuste. Des approches classiques sont présentées de manière plus formelle et quelques contributions sont exposées. Le chapitre III propose une approche autorisant un choix beaucoup plus vaste de régions, entre autres, des régions non connexes. Dans le dernier chapitre, la synthèse est abordée en termes de placement robuste de pôles au travers d'un problème d'optimisation à résoudre.

Chapter II

Bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste

Dans le chapitre précédent, nous avons formulé un problème d'analyse robuste et nous avons, en particulier, évoqué le concept de $\mathcal{D}$-stabilité. L'ensemble des travaux concernant le calcul de bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste lorsque $\mathcal{D}$ est une région polynomiale généralement connexe est déjà très vaste c'est pourquoi nous nous proposons de dresser, dans ce chapitre, une liste non exhaustive de quelques résultats obtenus dans ce domaine. Afin de limiter l'inventaire fastidieux des diverses bornes, nous privilégions deux approches : l'approche dite "Lyapunov" et l'approche dite "logarithmique". Au cours de ce chapitre, quelques résultats nouveaux sont ponctuellement introduits.

II.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques résultats de la littérature concernant l'établissement de bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice incertaine. Ce rappel, qui ne se prétend pas complet, ne considère que les cas où $\mathcal{D}$ est une sous-région généralement connexe du plan complexe. En effet, le manque de résultats théoriques sur la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice nominale a longtemps limité la recherche de bornes de robustesse relatives à des régions plus sophistiquées. Il existe de nombreux travaux dans ce domaine et ne pouvant tous les citer ici, nous avons choisi de focaliser notre attention essentiellement sur deux approches : la première, plus connue, est dite “approche Lyapunov” car elle découle d'une généralisation de l'application des théories de Lyapunov aux modèles linéaires. La seconde est dite “approche logarithmique” car elle utilise la notion de mesure logarithmique définie ultérieurement.
Le chapitre se décompose de la façon suivante : après un éclaircissement sur la définition générale des bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste et sur le principe général d'obtention de telles bornes, une longue partie est consacrée aux bornes issues de l'approche Lyapunov. Cette approche autorise le calcul de bornes dans les deux cas d'incertitude envisagés (cf. §I.5.1). La quatrième partie présente les résultats les plus significatifs concernant les bornes logarithmiques, utilisables seulement dans le cas d'une incertitude additive non structurée. Dans ces deux parties, figurent quelques résultats nouveaux avec en particulier, des apports sur le lien théorique entre les bornes de Lyapunov et les bornes logarithmiques, lorsque $\mathcal{D}$ est un secteur symétrique par rapport à l'axe réel. La cinquième partie évoque quelques résultats divers n'entrant pas dans le cadre des approches précédemment citées mais qui nous semblent originaux ou significatifs. Cette partie conclut également le chapitre par un avis subjectif que nous nous permettons de donner sur l'ensemble des travaux présentés.

II.2 Principe d'obtention d'une borne de robustesse

Dans cette brève partie, nous nous proposons de préciser le problème d'analyse robuste que nous avons posé en présentant un principe général d'obtention d'une borne de robustesse. De cette explication découlera naturellement la définition de ce que nous entendons par borne de robustesse.

Nous avons vu dans le chapite précédent l'importance de la localisation dans le plan complexe du spectre de la matrice d'état du modèle linéaire d'un système. Lorsque celui-ci est intégralement contenu dans une sous-région $\mathcal{D}$ du plan complexe, on dit de la matrice qu'elle est $\mathcal{D}$-stable. Nous avons également vu que la spécification des performances robustes d'un système pouvait, par exemple, se traduire par le choix d'une région $\mathcal{D}$ du plan complexe dans laquelle les valeurs propres de la matrice d'état doivent rester, en présence de l'incertitude, pour assurer certaines caractéristiques

de la réponse transitoire du système. On parle alors de $\mathcal{D}$-stabilité robuste de la matrice.
Avant d'envisager la $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice incertaine $\mathbf{A} = A + E$, il importe de pouvoir attester de la $\mathcal{D}$-stabilité de la matrice nominale A. Cette $\mathcal{D}$-stabilité est équivalente à quantité de conditions nécessaires et suffisantes (CNS) que l'on peut trouver dans la littérature et dont quelques unes seront données dans la suite de ce chapitre. Certaines de ces CNS sont facilement testables d'un point de vue mathématique et surtout d'un point de vue numérique. C'est par l'intermédaire de tests de ces conditions que l'on peut conclure ou pas à la $\mathcal{D}$-stabilité de A. La question qui se pose ensuite est de savoir si $\mathbf{A}$ est robuste en $\mathcal{D}$-stabilité. E étant une matrice d'incertitude, donc inconnue par définition, il devient impossible de tester les CNS de $\mathcal{D}$-stabilité pour $A + E$. Le principe est alors d'obtenir une condition suffisante qui puisse garantir, lorsqu'elle est vérifiée et lorsque A est $\mathcal{D}$-stable, que $\mathbf{A}$ reste $\mathcal{D}$-stable. Deux cas sont souvent considérés selon le type d'incertitude additive envisagée :

- soit E est non structurée auquel cas la condition suffisante consiste à ne pas dépasser une borne majorante sur $\|E\|_2$, la norme spectrale de E.
- soit E a une structure comme celle introduite en (I.28) et la condition suffisante consiste à ne pas dépasser une borne majorante sur $\max_h \max_\delta |q_{h,\delta}|$.

Dans les deux cas, le fait que la borne (dite borne de $\mathcal{D}$-stabilité robuste) n'est pas dépassée garantit la satisfaction de la CNS pour $\mathbf{A}$, donc la $\mathcal{D}$-stabilité de $\mathbf{A}$.
Ainsi, lorsque l'on veut établir une borne de robustesse, il convient de savoir quelle est la CNS utilisée. Dans les parties suivantes, la présentation des bornes sera toujours précédée d'une présentation des CNS associées.

Remarque II.1 *: Dans la plupart des travaux relatifs à l'établissement de bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste dans le cas d'une incertitude additive structurée, la définition de la structure se limite à (I.30) mais ceci ne change rien à l'établissement des bornes de robustesse. Nous conserverons donc la définition générale (I.28) pour la suite de notre propos.*

II.3 Approche Lyapunov

Dans cette partie, nous présentons une série de résultats concernant la $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice lorsque $\mathcal{D}$ est une région polynomiale transformable de premier ordre ou de deuxième ordre (cf. §I.5.3). Nous rappelons d'abord certaines CNS de $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice réelle dans de telles régions. Ces CNS sont déduites de la généralisation de l'application des théories de Lyapunov [Lya1892] à la stabilité des systèmes à modèles linéaires. Cette généralisation est principalement due à Gutman et Jury [Gut1979, GJ1981]. Ensuite, nous rappelons ou introduisons différentes bornes de robustesse déduites de ces CNS en mettant en valeur les résultats les moins conservatifs, ceci pour les divers cas de figure.

II.3.1 CNS de $\mathcal{D}$-stabilité

Nous indiquons ici quelques résultats sur l'obtention de CNS de $\mathcal{D}$-stabilité lorsque $\mathcal{D}$ est une région polynomiale transformable de premier ordre ou de deuxième ordre. Nous nous attachons également à donner quelques liens entre ces divers résultats.

Régions de premier ordre

Cas général
Dans ce paragraphe, nous considérons l'ensemble des régions polynomiales de premier ordre $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1^{\{t\}}$ (toutes les régions polynomiales de premier ordre sont transformables). Tout élément $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}_1$ est décrit par :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) = c_{00} + c_{10}z + c_{01}\tilde{z} < 0\} \tag{II.1}$$

avec $c_{01} = \tilde{c}_{10} \in \mathbb{C}\,\&\, c_{00} \in \mathbb{R}$.
Lorsque $c_{10} = c_{01} \in \mathbb{R}$, la région est symétrique par rapport à l'axe réel.
La région $\mathcal{D}$ ainsi définie est en fait un demi-plan. Si $\mathcal{D}$ est symétrique, alors c'est un demi-plan vertical.

Théorème II.1 *: [GJ1981] La matrice complexe A est $\mathcal{D}$-stable si et seulement si, pour toute matrice Q, hermitienne définie positive, il existe une matrice P, hermitienne définie positive, unique solution de l'Equation de Lyapunov Généralisée (E.L.G.) suivante :*

$$c_{00}P + c_{10}AP + c_{01}PA^* = -Q \tag{II.2}$$

Démonstration : voir [GJ1981].

Application à la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice **réelle** dans un secteur
D'un point de vue pratique, l'automaticien ne s'intéresse qu'à la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice d'état réelle A. C'est pourquoi l'on peut appliquer le résultat précédent à la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice réelle lorsque $\mathcal{D}$ est un secteur symétrique par rapport à l'axe réel. En effet, considérons le secteur S_1, symétrique, de sommet $(-\sigma; 0)$ $(\sigma > 0)$ ouvert vers la gauche et faisant un angle ϑ $(0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2})$ avec l'axe imaginaire. S_1 résulte de l'intersection de deux demi-plans répondant à la définition (II.1). Le spectre de A étant auto-conjugué, étudier la $\mathcal{D}$-stabilité de A dans S_1 revient à étudier la $\mathcal{D}$-stabilité de A dans un seul des deux demi-plans. Prenons, par exemple, celui défini par (II.1) où :

$$c_{00} = \sigma\cos\vartheta\,;\; c_{10} = \frac{1}{2}(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)\,;\; c_{01} = \frac{1}{2}(\cos\vartheta - \mathbf{i}\sin\vartheta) \tag{II.3}$$

Avec les coefficients donnés en (II.3), l'E.L.G. (II.2) peut s'écrire :

$$\mathbb{A}P + P\mathbb{A}^* = -2Q \tag{II.4}$$

avec :

$$\mathbb{A} = e^{\mathbf{i}\vartheta}(A + \sigma\mathbf{I}_n) \qquad \mathbb{A}^* = e^{-\mathbf{i}\vartheta}(A + \sigma\mathbf{I}_n)^* \tag{II.5}$$

L'E.L.G. (II.2) peut ainsi se réexprimer comme une équation duale de l'équation de Lyapunov classique, relative à la stabilité des systèmes à temps continu, dans laquelle une matrice complexe $\mathbb{A}$ apparaît. Le théorème II.1 peut donc prendre la forme suivante :

Théorème II.2 *: La matrice réelle A est S_1-stable si et seulement si, pour toute matrice Q, hermitienne définie positive, il existe une matrice P, hermitienne définie positive, unique solution de l'équation de Lyapunov (II.4).*

Remarque II.2 *: Le théorème II.2 peut être vu comme une réexpression d'un résultat de [JHW1989b].*

Remarque II.3 *: Si l'on choisit $\sigma = 0$ et $\vartheta = 0$, on décrit un secteur particulier confondu avec le demi-plan complexe gauche et l'équation (II.4) devient bien entendu équivalente à l'expression duale de l'équation de Lyapunov relative à la stabilité des systèmes à temps continu, à savoir (I.35).*

$\mathcal{D}$-STABILITÉ D'UNE MATRICE **complexe** DANS UN SECTEUR VIA UNE MATRICE AUGMENTÉE

Par extension immédiate de la consition de S_1-stabilité donnée par les auteurs de [DR1970] au cas d'une matrice complexe A, on peut proposer une approche utilisant la définition de la matrice augmentée suivante :

$$A_a = \Theta(\vartheta) \otimes (A + \sigma\mathbf{I}_n), \tag{II.6}$$

où :

$$\Theta(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}, \tag{II.7}$$

Les valeurs propres $\lambda_i(A)$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$ de la matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sont contenues dans S_1 si et seulement si les valeurs propres $\lambda_j(A_a)$, $\forall j \in \{1, ..., 2n\}$ de la matrice augmentée $A_a \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ appartiennent au demi-plan complexe gauche [DR1970]. Nous pouvons donc déduire le théorème suivant (inspiré d'un résultat que nous avons proposé dans [BPC1997]) :

Théorème II.3 *: La matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est S_1-stable si et seulement si, pour toute matrice hermitienne définie positive Q_a, il existe une matrice hermitienne définie positive P_a, unique solution de l'équation de Lyapunov :*

$$A_a P_a + P_a A_a^* = -2Q_a \tag{II.8}$$

Démonstration : simple application du théorème de Lyapunov à la matrice A_a. □

Comparaison entre les deux approches

Le but de ce paragraphe est de comparer les CNS de S_1-stabilité obtenues d'une part, par la technique E.L.G., d'autre part, par la technique de la matrice augmentée, ceci **lorsque la matrice A est réelle**.

En fait, lorsque A est réelle, la résolution de l'E.L.G. (II.2) ou (II.4) peut se ramener à celle de l'équation de Lyapunov (II.8) associée à la matrice augmentée A_a. Considérons une matrice $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitienne :

$$Q = Q^* = Q_1 + \mathbf{i}Q_2 \quad \text{avec :} \quad Q_1 = Q_1^* \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad Q_2 = -Q_2^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

La solution $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de l'équation (II.4) est une matrice hermitienne :

$$P = P^* = P_1 + \mathbf{i}P_2 \quad \text{avec :} \quad P_1 = P_1^* \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad P_2 = -P_2^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

On montre facilement que l'E.L.G. (II.2) ou (II.4) est équivalente à l'équation de Lyapunov (II.8), moyennant les relations :

$$\begin{cases} P_a = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^* \\ P_2 & P_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \qquad ; \qquad Q_a = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2^* \\ Q_2 & Q_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \\ \\ A_a = \Theta(\vartheta) \otimes (A + \sigma \mathbf{I}_n) \end{cases} \tag{II.9}$$

Régions de deuxième ordre

Dans ce paragraphe, nous considérons l'ensemble $\mathcal{P}_2^{\{t\}}$ des régions polynomiales transformables de deuxième ordre. Tout élément $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}_2^{\{t\}}$ est décrit par :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) = c_{00} + c_{10}z + c_{01}\tilde{z} + c_{11}z\tilde{z} + c_{20}z^2 + c_{02}\tilde{z}^2 < 0\} \tag{II.10}$$

avec $c_{00} \in \mathbb{R}$, $c_{01} = \tilde{c}_{10} \in \mathbb{C}$, $c_{02} = \tilde{c}_{20} \in \mathbb{C}$ et la condition de transformabilité $c_{11} \geq 0$.

Lorsque $c_{10} = c_{01} \in \mathbb{R}$ et $c_{20} = c_{02} \in \mathbb{R}$, la région est symétrique par rapport à l'axe réel.

Théorème II.4 *: [GJ1981] La matrice complexe A est $\mathcal{D}$-stable si et seulement si, pour toute matrice Q, hermitienne définie positive, il existe une matrice P, hermitienne définie positive, unique solution de l'E.L.G. suivante :*

$$c_{00}P + c_{10}AP + c_{01}PA^* + c_{11}APA^* + c_{20}A^2P + c_{02}PA^{*2} = -Q \tag{II.11}$$

Démonstration : voir [GJ1981].

Remarque II.4 *: Dans le cas du disque $\mathcal{D}$ de centre $(\gamma; 0)$ et de rayon r, les coefficients de la formulation polynomiale de $\mathcal{D}$ sont :*

$$c_{00} = \gamma^2 - r^2\,;\ c_{01} = c_{10} = -\gamma\,;\ c_{11} = 1\,;\ c_{02} = c_{20} = 0 \tag{II.12}$$

et l'E.L.G. (II.11) est équivalente à une équation de Lyapunov duale pour les systèmes à temps discret appliquée à la matrice $(A-\gamma)/r$:

$$\frac{(A-\gamma\mathbf{I}_n)}{r}P\frac{(A-\gamma\mathbf{I}_n)^*}{r} - P = -\frac{Q}{r^2} \tag{II.13}$$

On retrouve ainsi le résultat de [FK1987].

Remarque II.5 *: Dans le cas du cercle unité, on retrouve l'expression duale de l'équation de Lyapunov relative à la stabilité des systèmes à temps discret :*

$$APA^* - P = -Q \tag{II.14}$$

II.3.2 Bornes de robustesse

Il s'agit maintenant d'utiliser l'approche Lyapunov pour étudier la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice $\mathbf{A} = A + E$ (cf. §I.4.1). Nous envisageons d'abord le cas où E est une matrice non structurée puis le cas où E est une matrice définie comme en (I.28) et pour chaque cas, présentons des bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste.

Incertitude non structurée

Région de premier ordre **(ou secteur quand A est réelle)**

Nous rappelons qu'une région de premier ordre est en fait un demi-plan (vertical ou oblique). Un demi-plan oblique, qui n'est pas symétrique par rapport à l'axe réel, peut servir à l'analyse en $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice complexe. Toutefois, dans les problèmes d'Automatique, la matrice A étant en pratique réelle, nous assimilons région de premier ordre et secteur $S_1 = \mathcal{D}$. Sous cette condition, le résultat nous paraissant le plus significatif est donné par le théorème suivant [LJB1993] :

Théorème II.5 *: [LJB1993] La matrice $\mathbf{A} = A + E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}$-stable si A l'est et si :*

$$\bar{\sigma}(E) \;=\; \|E\|_2 \;<\; \rho_{u_{LJB}} \;=\; \frac{1}{\bar{\sigma}(S^{-1})\bar{\sigma}(e^{\mathbf{i}\vartheta}PS^{-1})} \tag{II.15}$$

où $P = P^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est la solution définie positive de (II.4) avec $Q = S^*S$, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de rang plein.

Démonstration : voir [LJB1993].

Remarque II.6 *: L'expression de cette borne dépend de la matrice S et peut être optimisée par rapport à S [LJB1993] en utilisant, par exemple, la fonction* **fminu** *de l'Optimization Toolbox de MATLAB [Gra1990]. On peut aussi optimiser une borne par l'intermédaire d'une matrice de changement de base appliqué à A comme pour les bornes de stabilité robuste proposées dans [YL1986] mais ceci revient à optimiser par rapport à S. Ainsi les résultats de [YL1986] peuvent être vus comme une particularité de ceux de [LJB1993].*

Le théorème II.5 peut être particularisé de manière à retrouver d'autres bornes de robustesse présentées dans la littérature.
En effet, pour $S = \mathbf{I}_n$, on retrouve la borne proposée dans [CP1995b] et calculée à partir de l'E.L.G. (II.2) :

$$\bar{\sigma}(E) \;=\; ||E||_2 \;<\; \rho_{u_{CP}}(A) \;=\; \frac{\underline{\sigma}(Q)}{\bar{\sigma}(P)} \tag{II.16}$$

(où $P = P^* > 0$ est l'unique solution de l'E.L.G. (II.2) avec les coefficients donnés en (II.3) pour une matrice $Q = Q^* > 0$ donnée).
Ceci se justifie par $\{S = \mathbf{I}_n \Rightarrow Q = \mathbf{I}_n\}$, par $\{2|c_{01}| = |e^{\mathbf{i}\vartheta}| = 1\}$ et par le fait que (II.2) et (II.4) sont équivalentes.
La borne donnée par (II.16) est optimale pour $Q = \mathbf{I}_n$ par extension des résultats de [PT1980] mais son expression ne dépend pas de S contrairement à la borne donnée par (II.15) pour laquelle $S = \mathbf{I}_n$ n'est pas optimale (cf. remarque II.6). La borne donnée par (II.16) n'exploite donc pas pleinement la possibilité d'optimiser par rapport à S ou Q.

De plus, dans le cas où $S = \mathbf{I}_n$, $\sigma = 0$ et $\vartheta = 0$, S_1 est confondu avec le demi-plan complexe gauche la borne $\rho_{u_{LJB}}$ donnée en (II.15) prend la même valeur que la borne de stabilité robuste proposée dans [PT1980], également optimale pour $Q = \mathbf{I}_n$.
Dans le cas où $S = \mathbf{I}_n$, $\sigma > 0$ et $\vartheta = 0$, la borne $\rho_{u_{LJB}}$ est égale à la borne de stabilité robuste avec marge de stabilité donnée dans [Yed1993b].

Approche propre au secteur **(utilisable pour une matrice A complexe)**
En utilisant la matrice augmentée A_a proposée dans [DR1970], on peut proposer le théorème suivant qui offre une borne de robustesse pour le secteur S_1 :

Théorème II.6 *: [BPC1997] La matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est S_1-stable si A est S_1-stable et si :*

$$\bar{\sigma}(E) = \|E\|_2 < \rho_{u_{CP}}(A_a) \ = \ \frac{\underline{\sigma}(Q_a)}{\bar{\sigma}(P_a)} \tag{II.17}$$

où P_a est la matrice hermitienne définie positive, solution unique de l'équation de Lyapunov (II.8) pour une matrice hermitienne définie positive Q_a donnée, A_a étant définie par (II.6).

Démonstration : en utilisant la même transformation que pour la matrice nominale, on définit la matrice incertaine augmentée par $A_a + E_a$, avec $A_a = \Theta(\vartheta) \otimes (A + \sigma \mathbf{I}_n)$ et $E_a = \Theta(\vartheta) \otimes E$. D'après [PT1980], la condition :

$$\|E_a\|_2 = \bar{\sigma}(E_a) < \frac{\underline{\sigma}(Q_a)}{\bar{\sigma}(P_a)} \tag{II.18}$$

garantit que les valeurs propres de la matrice augmentée incertaine $A_a + E_a$ sont dans le demi-plan gauche. De plus il facile de vérifier que :

$$\|E_a\|_2 = \|\Theta(\vartheta) \otimes E\|_2 = \|\Theta(\vartheta)\|_2 \, \|E\|_2 \ = \ \|E\|_2 \tag{II.19}$$

Ceci implique que la matrice $\mathbf{A}$ reste S_1-stable. □

Comparaison entre les deux approches précédentes
Lorsque $\mathbf{A}$ est réelle, il existe une relation entre deux des bornes relatives au secteur et précédemment définies par (II.16) et (II.17), car, pour un secteur donné S_1, P_a solution de l'équation (II.8) pour une matrice Q_a donnée par (II.9), et P solution de l'équation (II.4) avec $Q = Q_1 + iQ_2$ vérifient la relation suivante :

$$\|P\|_2 = \|P_a\|_2$$

En effet, d'après (II.9), les valeurs propres de P_a sont celles de $P = P_1 + iP_2$ et celles de $P^* = P$. Ce sont donc les valeurs propres de P avec un ordre de multiplicité 2. Comme P est une matrice hermitienne et P_a est une matrice symétrique nous avons :

$$\|P\|_2 = \bar{\sigma}(P) = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |\lambda_i(P)| = \max_{i\in\{1,\ldots,2n\}} |\lambda_i(P_a)| = \bar{\sigma}(P_a) = \|P_a\|_2$$

De la même manière, on peut démontrer que $\underline{\sigma}(Q_a) = \underline{\sigma}(Q)$. Ceci prouve, sous réserve que les conditions (II.9) soient satisfaites, que les bornes définies par (II.16) et (II.17) sont égales.

Région de deuxième ordre

Nous donnons ici un théorème qui généralise un résultat que nous avons proposé dans [BP1997] et qui, en ce qui concerne les bornes de Lyapunov relatives à une région $\mathcal{D} \in \mathcal{P}_2^{\{t\}}$, nous paraît le plus significatif :

Théorème II.7 : *Soit $\mathcal{D} \in \mathcal{P}_2^{\{t\}}$, une région polynomiale transformable décrite par (II.10). La matrice incertaine $\mathbf{A} = A + E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}$-stable si A est $\mathcal{D}$-stable et si :*

$$\|E\|_2 = \bar{\sigma}(E) < \rho_{u_{BP}} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + a}}{a} \tag{II.20}$$

où :

$$a = |c_{11}|\bar{\sigma}(P)\bar{\sigma}^2(S^{-1}) + 2|c_{02}|\bar{\sigma}(S^{-1})\bar{\sigma}(PS^{-1}) \quad ; \tag{II.21}$$

$$b = |c_{11}|[\bar{\sigma}(S^{-*}(A+\frac{c_{01}}{c_{11}}\mathbf{I}_n)P + \frac{c_{02}}{c_{11}}S^{-*}PA^*)\bar{\sigma}(S^{-1})] + |c_{02}|\bar{\sigma}(A^*S^{-1})\bar{\sigma}(PS^{-1}) \tag{II.22}$$

où P est l'unique solution hermitienne définie positive solution de (II.11) pour une matrice hermitienne définie positive $Q = S^*S$, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ étant une matrice quelconque de rang plein.

Démonstration : $\|E\|_2 < \rho_{u_{BP}} \Leftrightarrow a\bar{\sigma}^2(E) + 2b\bar{\sigma}(E) - 1 < 0 \Leftrightarrow$

$$[2|c_{02}|\bar{\sigma}(S^{-1})\bar{\sigma}(PS^{-1}) + |c_{11}|\bar{\sigma}(P)\bar{\sigma}^2(S^{-1})]\bar{\sigma}^2(E) +$$

$$2[|c_{11}|\{\bar{\sigma}(S^{-*}(A+\frac{c_{01}}{c_{11}}\mathbf{I}_n)P + \frac{c_{02}}{c_{11}}S^{-*}PA^*)\bar{\sigma}(S^{-1})\} + |c_{02}|\bar{\sigma}(A^*S^{-1})\bar{\sigma}(PS^{-1})]\bar{\sigma}(E) < 1 \Rightarrow$$

$$\bar{\sigma}[c_{20}S^{-*}E^2PS^{-1}] + \bar{\sigma}[c_{02}S^{-*}PE^{*2}S^{-1}] + \bar{\sigma}[c_{11}S^{-*}EPE^*S^{-1}] + \bar{\sigma}[c_{11}S^{-*}APE^*S^{-1} +$$
$$c_{01}S^{-*}PE^*S^{-1} + c_{02}S^{-*}PA^*E^*S^{-1}] +$$
$$\bar{\sigma}[c_{11}S^{-*}EPA^*S^{-1} + c_{10}S^{-*}EPS^{-1} + c_{20}S^{-*}EAPS^{-1}] +$$
$$\bar{\sigma}[c_{20}S^{-*}AEPS^{-1}] + \bar{\sigma}[c_{02}S^{-*}PE^*A^*S^{-1}] < 1 \Rightarrow$$
$$S^{-*}\{c_{01}PE^* + c_{10}EP + c_{11}[APE^* + EPA^* + EPE^*] +$$
$$c_{02}[PA^*E^* + PE^{*2} + PE^*A^*] + c_{20}[EAP + E^2P + AE^P]\}S^{-1} - \mathbf{I}_n < 0$$

En prémultipliant cette inégalité par S^* et en la post-multilpliant par S, il vient :

$$c_{00}P + c_{01}(PA^* + PE^*) + c_{10}(AP + EP) + c_{11}(APA^* + APE^* + EPA^* + EPE^*) +$$
$$c_{02}(PA^{*2} + PA^*E^* + PE^*A^* + PE^{*2}) + c_{20}(A^2P + AEP + EAP + E^2P) < 0 \Leftrightarrow$$
$$c_{00}P + c_{10}((A + E)P) + c_{01}(P(A + E)^*) +$$
$$c_{11}((A + E)P(A + E)^*) + c_{20}((A + E)^2P) + c_{02}(P(A + E)^{*^2}) < 0 \quad \square$$

Remarque II.7 *: Dans [BP1997], nous avons proposé un cas particulier du théorème II.7 où $\mathcal{D}$ est symétrique et où A, P et S sont réelles. Cependant, à quelques détails d'écriture près, la démonstration est analogue.*

Remarque II.8 *: La borne $\rho_{u_{BP}}$ donnée par (II.20) peut être optimisée par rapport à S en utilisant par exemple la fonction* **fminu** *de l'Optimization Toolbox de MATLAB [Gra1990].*

Des bornes concernant les régions de second ordre avaient déjà été proposées, pour A réelle et $\mathcal{D}$ symétrique, par exemple dans [Yed1993b, CP1995b, Cho1994, BLJ1993]. Nous souhaitons expliquer dans ce qui suit pourquoi notre résultat est moins conservatif. Rappelons pour cela le résultat de [BLJ1993] qui peut être ainsi formulé :

Théorème II.8 *: [BLJ1993] Soit $\mathcal{D} \in \mathcal{P}_2^{\{t\}}$, une région polynomiale symétrique transformable décrite par (II.10). La matrice incertaine $\mathbf{A} = A + E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}$-stable si A est $\mathcal{D}$-stable et si :*

$$\|E\|_2 = \bar{\sigma}(E) < \rho_{u_{BLJ}} = \frac{-\breve{b} + \sqrt{\breve{b}^2 + \breve{a}}}{\breve{a}} \tag{II.23}$$

où :

$$\breve{a} = |c_{11}|\bar{\sigma}(P)\bar{\sigma}^2(S^{-1}) + 2|c_{02}|\bar{\sigma}(S^{-1})\bar{\sigma}(PS^{-1}) \quad ; \tag{II.24}$$

$$\begin{aligned}\breve{b} = {} & |c_{01}|\bar{\sigma}(S^{-1})\bar{\sigma}(PS^{-1}) + |c_{11}|\bar{\sigma}(S^{-1})\bar{\sigma}(PA^*S^{-1}) + \\ & |c_{20}|\bar{\sigma}(S^{-*}A)\bar{\sigma}(PS^{-1}) + |c_{20}|\bar{\sigma}(S^{-1})\bar{\sigma}(APS^{-1})\end{aligned} \tag{II.25}$$

et où P est l'unique solution symétrique définie positive solution de (II.11) pour une matrice symétrique définie positive $Q = S^*S$, $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ étant une matrice quelconque de rang plein.

Démonstration : voir [BLJ1993].

On peut d'abord remarquer que les deux bornes données par (II.20) et (II.23) ont la même expression analytique et que, de surcroît, on a $\breve{a} = a$. Seule les quantités b et $\breve{b}$ diffèrent dans ces deux expressions. Or, il est facile de vérifier que la dérivée de $\rho_{u_{BP}}$ par rapport à b (respectivement de $\rho_{u_{BLJ}}$ par rapport à $\breve{b}$) est négative. En outre, on a :

$$\begin{aligned}b \leq {} & |c_{11}|\bar{\sigma}(S^{-*}AP)\bar{\sigma}(S^{-1}) + |c_{01}|\bar{\sigma}(S^{-*}P)\bar{\sigma}(S^{-1}) + \\ & |c_{02}|\bar{\sigma}(S^{-*}PA^*)\bar{\sigma}(S^{-1}) + |c_{02}|\bar{\sigma}(A^*S^{-1})\bar{\sigma}(PS^{-1}) = \breve{b}\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que la borne $\rho_{u_{BP}}$ donnée par (II.20) est moins conservative que la borne $\rho_{u_{BLJ}}$ donnée par (II.23).

Il faut également noter que les bornes proposées dans [Yed1993b], [CP1995b] et [Cho1994] ne dépendent pas de S et sont donc moins facilement optimisables. Cependant, on peut montrer par un raisonnement analogue au précédent que, pour $S = Q = \mathbf{I}_n$, notre résultat est moins conservatif que celui donné dans [Cho1994]. En outre, il a déjà été démontré que le résultat de [Cho1994] est moins conservatif que celui donné dans [CP1995b], lui-même meilleur que celui présenté dans [Yed1993b] (voir [CP1995b, Cho1994, BP1997]).

Remarque II.9 *: Si l'on considère $\mathcal{D}$, une région symétrique de $\mathcal{P}_2^{\{t\}}$ et $\mathcal{D}_\gamma$, l'image de $\mathcal{D}$ par la translation de vecteur $[\gamma\ 0]^*$, alors la $\mathcal{D}$-stabilité de A est équivalente à la $\mathcal{D}_\gamma$-stabilité de $(A + \gamma\mathbf{I}_n)$. La valeur de la borne qui en découle s'en trouve modifiée. On peut donc optimiser cette valeur, non seulement par rapport à S, mais aussi par rapport à γ.*

Incertitude structurée

Région de premier ordre

Nous considérons toujours une matrice $\mathbf{A}$ réelle et assimilons région de premier ordre au secteur $S_1 = \mathcal{D}$. Nous rappelons ici le résultat de [LJB1993] qui nous paraît le plus significatif et que nous reformulons de la manière suivante.

Théorème II.9 *: [LJB1993] Soient la matrice incertaine $\mathbf{A} = A + E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ où E a la structure définie en (I.28) et la région de premier ordre $\mathcal{D} = S_1$. $\mathbf{A}$ est $\mathcal{D}$-stable si A l'est et si :*

$$\max_h \max_\delta |q_{h,\delta}| < \rho_{s_{LJVdB}} = \frac{2}{\bar{\sigma}(\sum_{h=1}^{\zeta} |S^{-*}(e^{\mathbf{i}\vartheta} E_h P + e^{-\mathbf{i}\vartheta} P E_h^*) S^{-1}|)} \tag{II.26}$$

où $P = P^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est la solution définie positive de (II.4) avec $Q = S^*S$, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de rang plein.

Démonstration : voir [LJB1993].

Remarque II.10 *: L'expression de cette borne dépend elle aussi d'une matrice S et peut être optimisée par rapport à S [LJB1993] en utilisant, par exemple, la fonction* **fminu** *de l'Optimization Toolbox de MATLAB [Gra1990]. On peut là encore optimiser la borne par l'intermédaire d'une matrice de changement de base appliqué à A comme pour les bornes de stabilité robuste proposées dans [YL1986] mais ceci revient à optimiser par rapport à S.*

Pour $S = \mathbf{I}_n$, on retrouve la borne proposée dans [CP1994b] :

$$\max_{h}\max_{\delta}|q_{h,\delta}| \; < \; \rho_{s_{LJB}} \; = \; \frac{1}{\bar{\sigma}(\sum_{h=1}^{\zeta}|c_{10}E_hP \; + \; c_{01}PE_h^*)|)} \tag{II.27}$$

(où $P = P^* > 0$ est la solution de l'E.L.G. (II.2) pour une matrice $Q = Q^* > 0$ donnée), ceci pour les mêmes raisons que dans le cas d'une incertitude non-struturée. Là encore, la borne la borne donnée par (II.27), contrairement à celle donnée par (II.26), est optimale pour $Q = \mathbf{I}_n$, par extension des résultats de [PT1980].
De plus, dans le cas où $S = \mathbf{I}_n$, $\sigma > 0$ et $\vartheta = 0$, on retrouve la borne de stabilité robuste avec marge de stabilité proposée dans [Yed1993b]. Dans le cas où $S = \mathbf{I}_n$, $\sigma = 0$ et $\vartheta = 0$, on retrouve la borne de stabilité robuste proposée dans [ZK1987].

A propos de la stabilité robuste, nous rappelons également ici un très bon résultat extrait de [LJB1995] que nous reformulons grâce au théorème suivant :

Théorème II.10 *: [LJB1995]. Soit la matrice incertaine* $\mathbf{A} = A + E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *où* E *a la structure définie en (I.28). La matrice* $\mathbf{A}$ *est stable si la matrice nominale* A *est stable et si :*

$$\max_{h}\max_{\delta}|q_{h,\delta}| \; < \; \rho_{s_{stab}} \; = \; \frac{2}{\min_{S} \max_{j\in\{1,\dots,2^{\zeta-1}\}} \bar{\sigma}(L_j)} \tag{II.28}$$

où $L_j = S^{-*}(K_jP + PK_j^*)S^{-1}$, *où* $K_j = \sum_{h=1}^{\zeta} G_{j,h}$ *avec* $G_{j,h} = E_h \, ou G_{j,h} = -E_h, \forall h \in \{2,\dots,\zeta\}$ *et* $G_{j,1} = E_1$ *et où* $P = P^* > 0$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est la solution de (II.4) avec* $Q = S^*S$, $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *de rang plain.*

Démonstration : voir [LJB1995].

Remarque II.11 *: Cette borne peut être optimisée par rapport à* j *et* S *grâce, par exemple, à la fonction* **minimax** *de l'Optimization Toolbox de MATLAB [Gra1990]*

La borne donnée par (II.28) présente un avantage sur les bornes de stabilité précédemment présentées du point de vue de l'optimisation de sa valeur. En effet, les auteurs de [LJB1995] ont exprimé le gradient de L_j par rapport à S, ce qui facilite la résolution du problème d'optimisation de la borne par la fonction **minimax**. Toutefois, un nombre élevé ζ de composantes incertaines dans $\mathbf{A}$ augmente considérablement le nombre de matrices L_j à prendre en compte, soit $2^{\zeta-1}$.

Région de deuxième ordre

Pour ce qui concerne les régions polynomiales d'ordre 2, nous ne citerons qu'un résultat que l'on peut attribuer à [BLJ1993] et relatif à la $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice incertaine. Nous reformulons de manière plus générale le théorème :

Théorème II.11 *Soient $\mathcal{D}$ une région de $\mathcal{P}_2^{\{t\}}$ et $\mathbf{A} = A + E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice incertaine où l'incertitude E a la structure définie en (I.28). $\mathbf{A}$ est $\mathcal{D}$-stable si la matrice nominale A est $\mathcal{D}$-stable et si :*

$$\max_h \max_\delta |q_{h,\delta}| \; < \; \rho_{s_{BLJ}} \; = \; \frac{-\check{b} \, + \, \sqrt{\check{b}^2 \, + \, \check{a}}}{\check{a}} \tag{II.29}$$

où

$$\check{a} \; = \; \bar{\sigma}(\sum_{i=1}^{\zeta} \sum_{j=1}^{\zeta} |\mathbb{P}_{ij}|) \tag{II.30}$$

$$\check{b} \; = \; \frac{1}{2}\bar{\sigma}(\sum_{h=1}^{\zeta} |\mathbb{P}_h|) \tag{II.31}$$

avec :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{ij} \; &= \; S^{-*}[c_{11}(E_iPE_j^* \, + \, E_jPE_i^*) \, + \, c_{20}(E_iE_jP \, + \, E_jE_iP) + \\ &\quad c_{02}(P(E_iE_j)^* \, + \, P(E_jE_i)^*)]S^{-1}, \quad \forall\{i,j\} \in \{1,...,\zeta\}^2 \quad (\text{II}.32)\\ \mathbb{P}_h \; &= \; S^{-*}[c_{10}E_hP \, + \, c_{01}PE_h^*) \, + \, c_{11}(E_hPA^* \, + \, APE_h^*) + \\ c_{20}(E_hAP + AE_hP) \, &+ \, c_{02}(P(E_hA)^* \, + \, P(AE_h)^*)]S^{-1}, \quad \forall h \in \{1,...,\zeta\} \quad (\text{II}.33)\end{aligned}$$

et où $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est la matrice hermitienne définie positive unique solution de l'E.L.G. (II.11) pour $Q = S^*S$, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de rang plein.

Démonstration : analogue à celle proposée dans [BLJ1993] □.

Remarque II.12 *: Dans [BLJ1993], le résultat précédent est particularisé à $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathcal{D}$ symétrique. Toutefois, à quelques détails de démonstration près, la généralisation qui conduit au théorème II.11 est immédiate.*

Remarque II.13 *: La borne donnée en (II.29) peut être améliorée en jouant sur la valeur de S, ceci en utilisant, par exemple, la fonction* **fminu** *de l'Optimization Toolbox de MATLAB [Gra1990].*

D'autres auteurs ont obtenu des résultats concernant les régions symétriques de $\mathcal{P}_2^{\{t\}}$. Citons entres autres [Yed1993b, CP1995b, Cho1994] où les bornes proposées ne sont toutefois pas optimisées par rapport à Q. Il est à noter que la borne donnée dans [Cho1994] est moins conservative que celle donnée dans [CP1995b], elle même meilleure que celle présentée dans [Yed1993b] (voir [CP1995b, Cho1994]).
D'autres travaux traitent également de la maximisation du domaine d'incertitude pour lequel la $\mathcal{D}$-stabilité de $\mathbf{A}$ est garantie. Citons entre autres [SRFG1998] même si, à la vue de quelques exemples, ces résultats semblent plus conservatifs.

II.4 Approche logarithmique

Cette partie est consacrée à la présentation de bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste dites “bornes logarithmiques” parce que déduites de CNS utilisant la notion de mesure logarithmique d'une matrice. Cette approche ne prend en compte que les incertitudes additives non structurées. Elle a pour avantage de fournir des bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste dont l'obtention ne nécessite pas d'inversion matricielle (une telle inversion intervient lors de la résolution d'une E.L.G. [GJ1981]) et de réduire ainsi les temps de calcul.
Après une introduction à la notion de mesure logarithmique, nous rappelons quelques CNS de $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice dans une région polynomiale de premier ou de deuxième ordre. Puis, nous rappelons ou déduisons plusieurs bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste associées. Au cours de cette partie, un soin particulier est apporté à l'étude de la $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice réelle dans un secteur S_1 et un lien théorique est établi entre les bornes de Lyapunov et les bornes logarithmiques relatives à cette région.

II.4.1 Présentation des mesures logarithmiques

Nous donnons ici quelques rappels sur la notion de mesure logarithmique (voir par exemple [Deu1975]) d'une matrice complexe $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, notée $U(A)$ et ainsi définie :

$$U(A) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\|\mathbf{I}_n + \epsilon A\| - 1}{\epsilon} \tag{II.34}$$

où $||.||$ représente une norme matricielle sur $\mathbb{C}^{n\times n}$. Les mesures logarithmiques ont les propriétés suivantes [Vid1978] :

1. $-\|A\| \leq -U(-A) \leq U(A) \leq \|A\|, \ \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
2. $U(\alpha A) = \alpha U(A), \ \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \ \forall \alpha \geq 0$.
3. $U(A + B) \leq U(A) + U(B)$.
4. $U(.)$ est une fonction convexe sur $\mathbb{C}^{n\times n}$.
5. $-U(-A) \leq Re(\lambda(A)) \leq U(A)$ pour chaque valeur propre $\lambda(A)$ de A.

Remarque II.14 *: Certains auteurs ont donné à cette mesure matricielle le nom de “norme” logarithmique mais ce terme est impropre puisque cette relation de $\mathbb{C}^{n\times n}$ dans $\mathbb{R}$ ne vérifie pas la propriété classique de positivité d'une norme.*

Pour les normes matricielles classiques (1, 2, ∞), on peut déduire analytiquement les mesures logarithmiques correspondantes. Elles sont données dans le tableau II.1 (même si nous ne nous intéresserons par la suite qu'à la norme 2).

p	Norme sur $\mathbb{C}^{n\times n}$: $\|\|A\|\|_p$	Mesure logarithmique correspondante $U_p(A)$
1	$\max\limits_{j\in\{1,\dots,n\}}(\sum\limits_{i=1}^{n}\|[A]_{\{i,j\}}\|)$	$\max\limits_{j\in\{1,\dots,n\}}(Re([A]_{\{i,j\}})+\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{n}\|[A]_{\{i,j\}}\|)$
2	$\sqrt{\bar{\lambda}(A^*A)}=\bar{\sigma}(A)$	$\frac{\bar{\lambda}(A+A^*)}{2}$
∞	$\max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}}(\sum\limits_{j=1}^{n}\|[A]_{\{i,j\}}\|)$	$\max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}}(Re([A]_{\{i,j\}})+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\|[A]_{\{i,j\}}\|)$

Table II.1: Mesures logarithmiques

Toutefois, il existe d'autres normes matricielles que les normes matricielles 1, 2 et ∞. Ainsi des normes sont parfois définies à partir d'une transformation linéaire de similarité associée à une matrice non singulière T. On note ainsi la norme qui en résulte :

$$\|A\|_T = \|T^{-1}AT\| \tag{II.35}$$

d'où découle une mesure logarithmique :

$$U_T = U(T^{-1}A_0T) \tag{II.36}$$

Cette possibilité d'utiliser un changement de base nous sera utile par la suite.

II.4.2 CNS de $\mathcal{D}$-stabilité

Nous rappelons ici comment les mesures logarithmiques peuvent être utilisées pour déduire des CNS de $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice A. Nous envisageons d'abord le cas où $\mathcal{D}$ est une région polynomiale de premier ordre en insistant sur la possibilité d'envisager l'appartenance des valeurs propres de A à un secteur S_1 lorsque A est réelle. Ensuite, nous envisageons le cas où $\mathcal{D}$ est une région polynomiale de deuxième ordre.

Régions de premier ordre

Nous nous intéressons ici à la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice A lorsque $\mathcal{D}$ est un élément de $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1^{\{t\}}$ défini comme en (II.1).
Soit la matrice augmentée suivante, relative à A et à $\mathcal{D}$:

$$\Phi_1(A) \;=\; c_{00}\mathbf{I}_{n^2} \;+\; c_{01}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{A} \;+\; c_{10}A \otimes \mathbf{I}_n \tag{II.37}$$

Dans [GJ1981], grâce au résultat de [Sté1900], il est montré que les valeurs propres de A sont contenues dans $\mathcal{D}$ si et seulement si celles de $\Phi_1(A)$ sont contenues dans le demi-plan complexe gauche. C'est à partir de cette remarque que les auteurs de [CP1994b] déduisent le théorème suivant :

Théorème II.12 *: [CP1994b] $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}$-stable si et seulement s'il existe une mesure logarithmique $U(.)$ vérifiant :*

$$U[\Phi_1(A)] \;<\; 0 \tag{II.38}$$

Démonstration : voir [CP1994b].

Remarque II.15 *: Le théorème II.12 peut être vu comme une généralisation du théorème donné par Ström dans [Str1975] et traitant de la stabilité d'une matrice par approche logarithmique. En effet, pour $c_{00} = 0$ et $c_{10} = c_{01} = \frac{1}{2}$, la région $\mathcal{D}$ est le demi-plan complexe gauche et on a :*

$$U[\Phi_1(A)] \;=\; \bar{\lambda}[\frac{1}{2}(\Phi_1(A) + \Phi_1^*(A))] \;=\; \bar{\lambda}[\frac{1}{2}(\mathbf{I}_n \otimes (\tilde{A} + \tilde{A}^*) + (A + A^*) \otimes \mathbf{I}_n)] \;=$$

$$\frac{1}{2} \max_{\{i,j\}\in\{1,\dots,n\}^2} [\lambda_i(\tilde{A} + \tilde{A}^*) + \lambda_j(A + A^*)] \;=\; \frac{1}{2}\bar{\lambda}(A + A^*) \;=$$

$$U(A) \;<\; 0 \tag{II.39}$$

Or l'inégalité (II.39) est justement la condition de stabilité donnée par Ström.

Comme pour l'approche Lyapunov, on peut appliquer ce résultat à la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice **réelle** lorsque $\mathcal{D}$ est confondue avec le secteur S_1 (cf. §II.3.1) en ne considérant qu'un demi-plan oblique. Ceci permet d'écrire le corollaire suivant :

Corollaire II.1 *: [CP1994b] Une matrice* **réelle** *A a ses valeurs propres dans le secteur S_1 si et seulement s'il existe une mesure logarithmique $U(.)$ vérifiant (II.38) avec (II.37) et (II.3).*

Démonstration : simple application du théorème II.12 avec A réelle et (II.3). $\square$

Dans le paragraphe II.3.1, nous avons également vu que l'appartenance des valeurs propres d'une matrice **réelle** A à un secteur S_1 est équivalente à la stabilité de la matrice complexe $\mathbb{A}$ donnée par (II.5). Ceci permet de déduire le corollaire suivant que nous avons déjà proposé dans [BPC1997].

Corollaire II.2 *: La matrice réelle A est S_1-stable si et seulement s'il existe une mesure logarithmique $U(.)$ vérifiant :*

$$U(\mathbb{A}) < 0 \tag{II.40}$$

où $\mathbb{A}$ est donnée en (II.5).

Démonstration : simple application de la condition de stabilité (II.39) à la matrice $\mathbb{A}$. □

De plus, on peut envisager d'étudier la S_1-stabilité d'une matrice **complexe** A grâce à la matrice augmentée A_a définie en (II.6) et déduire ainsi le corollaire suivant que nous avons également déjà proposé dans [BPC1997]

Corollaire II.3 *: La matrice complexe A est S_1-stable si et seulement s'il existe une mesure logarithmique $U(.)$ vérifiant :*

$$U(A_a) < 0 \tag{II.41}$$

où A_a est donnée en (II.6).

Démonstration : simple application de la condition de stabilité (II.39) à la matrice A_a. □

Enfin, pour en terminer avec ces CNS de S_1-stabilité, les auteurs de [CP1994b] ont envisagé les mesures logarithmiques pour former une fonction de Lyapunov permettant d'attester de la S_1-stabilité d'une matrice :

Théorème II.13 *: [CP1994b] La fonction $||Wx(t)||$ avec la matrice W de dimension $m \times n$ et de rang n est une fonction de Lypunov pour le système $\dot{x}(t) = Ax(t)$ qui garantit que les valeurs propres de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont dans S_1 si et seulement si $W \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est solution de*

$$WA - QW = \mathbf{0}_{m,n} \tag{II.42}$$

où la matrice $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ doit satisfaire, pour une mesure logarithmique $U(.)$, la condition suivante :

$$U(e^{\mathbf{i}\vartheta}Q) < -\sigma\cos\vartheta \tag{II.43}$$

Démonstration : voir [CP1994b]

Remarque II.16 *: Pout $\sigma = \vartheta = 0$, le secteur S_1 est confondu avec le demi-plan complexe gauche et l'on retrouve le résultat de [KAS1992], relatif à la stabilité d'un système.*

Régions de deuxième ordre

Nous considérons maintenant que $\mathcal{D}$ est un élément de $\mathcal{P}_2^{\{t\}}$ défini comme en (II.10). Soit la matrice augmentée suivante, relative à A et à $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\Phi_2(A) = c_{00}I_{n^2} + c_{01}I_n \otimes \tilde{A} + c_{10}A \otimes I_n + \\ c_{11}A \otimes \tilde{A} + c_{02}I_n \otimes \tilde{A}^2 + c_{20}A^2 \otimes I_n\end{aligned} \tag{II.44}$$

Dans [GJ1981], grâce au résultat de [Sté1900], il est montré que les valeurs propres de A appartiennent à $\mathcal{D}$ si et seulement si celles de $\Phi_2(A)$ sont dans le demi-plan complexe gauche. Ceci a permis aux auteurs de [CP1994b, CP1995a] de déduire le théorème suivant :

Théorème II.14 *: [CP1994b] La matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}$-stable, $\mathcal{D} \in \mathcal{P}_2^{\{t\}}$ si et seulement s'il existe une mesure logarithmique $U(.)$ vérifiant :*

$$U(\Phi_2(A)) \;<\; 0 \tag{II.45}$$

où $\Phi_2(A)$ est définie en (II.44).

Démonstration : triviale par application de la condition de stabilité (II.39) à la matrice $\Phi_2(A)$. □

II.4.3 Bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste

Nous considérons maintenant que A est soumise à une incertitude additive non structurée E et nous nous intéressons à la $\mathcal{D}$-stabilité de la matrice incertaine $\mathbf{A} = A + E$, lorsque D est une région polynomiale transformable de premier ou deuxième ordre. Le principe est donc de reprendre une par une les CNS de $\mathcal{D}$-stabilité de A exposées dans les paragraphes précédents pour en déduire des bornes sur $\|E\|_2$ garantissant que la $\mathcal{D}$-stabilité de $\mathbf{A}$ est préservée

Régions de premier ordre (ou secteur quand A est réelle)

Nous considérons ici que $\mathcal{D}$ est un élément de $\mathcal{P}_1$ et rappelons ou proposons quelques résultats de $\mathcal{D}$-stabilité robuste.

Théorème II.15 *: [CP1994b] Une matrice incertaine $\mathbf{A} = A + E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}$-stable si A est $\mathcal{D}$-stable et si :*

$$||E||_2 \;<\; \eta_{CP} \;=\; -\frac{U[\Phi_1(A)]}{2|c_{10}|} \tag{II.46}$$

sous la condition (II.38) avec (II.37)

Démonstration : voir [CP1994b].

Remarque II.17 *: Dans le cas où $\mathcal{D}$ se ramène au demi-plan complexe gauche ($c_{00} = 0$ et $c_{10} = c_{01} = \frac{1}{2}$), on retrouve la condition de stabilité donnée par [WL1992], à savoir*

$$||E||_2 < \eta_{WL} = -U(A) \quad avec \quad U(A) < 0 \tag{II.47}$$

ceci en tenant compte des égalités apparaissant dans la remarque II.15.

Remarque II.18 *: Dans la condition (II.47) figure l'inégalité $U(A) < 0$. En effet la CNS de stabilité d'une matrice A donnée dans [Str1975] stipule qu'il existe* **une** *mesure logarithmique $U(.)$ vérifiant (II.39). Or cette mesure n'est pas forcément la mesure déduite de la norme spectrale simple. Si $U(A) \geq 0$, on peut utiliser une mesure issue d'une transformation de similarité associée à T et la condition (II.47) devient alors :*

$$||E||_2 < \frac{-U(T^{-1}AT)}{\mathrm{cond}(T)} \quad avec \quad U_T(A) < 0 \tag{II.48}$$

où $\mathrm{cond}(T) = \|T\|_2\|T^{-1}\|_2$.
Pour le voir, il suffit de noter que $\|T^{-1}ET\|_2 \leq \mathrm{cond}(T)\|E\|_2$. Toutefois, il n'est pas immédiat de trouver T non singulière telle que $U_T(A) < 0$ c'est pourquoi on peut utiliser $T = V$ (V étant la matrice modale de A) et retrouver la borne de [CW1987] :

$$||E|| < \eta_{CW} = -\frac{\max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} Re(\lambda_i(A))}{\mathrm{cond}(V)} \tag{II.49}$$

On est alors sûr de trouver une borne majorante positive de $\|E\|_2$.
La méthode qui consiste à utiliser, lorsque $U(A) \geq 0$, la mesure $U_V(.)$ est valable quelle que soit la région considérée. Cette remarque s'applique donc à toutes les bornes logarithmiques de $\mathcal{D}$-stabilité robuste qui vont suivre. Nous y reviendrons dans la suite de ce chapitre.

Nous déduisons maintenant des bornes de S_1-stabilité du théorème II.15 et des corollaires II.2 et II.3 :

Théorème II.16 *: La matrice incertaine réelle (resp. réelle et complexe) $\mathbf{A} = A + E$ est S_1-stable si A est S_1-stable et si :*

$$||E||_2 < \eta_{CP_1} = -U[\Phi_1(A)] \tag{II.50}$$

(respectivement :

$$||E||_2 = \eta_{CP_2} = -U(\mathbb{A}) \tag{II.51}$$

et

$$||E||_2 = \eta_{CP_3} = -U(A_a) \tag{II.52}$$

)
sous la condition (II.38) avec (II.37) et (II.3). (respectivement sous (II.40) avec $\mathbb{A}$ donnée par (II.5) et sous (II.41) avec A_a donnée par (II.6)).

Démonstration : en ce qui concerne la borne η_{CP_1} donnée par (II.50), il s'agit d'une simple application du théorème II.15 tenant compte des coefficients qui sont donnés en (II.3). □

En ce qui concerne la borne η_{CP_2} donnée par (II.51), on a :

$$\begin{aligned} &\|E\|_2 < -U(\mathbb{A}) \\ \Leftrightarrow\ &\|E\|_2 + U(\mathbb{A}) < 0 \\ \Leftrightarrow\ &\|e^{i\vartheta}E\|_2 + U(\mathbb{A}) < 0 \\ \Rightarrow\ &U(e^{i\vartheta}E + \mathbb{A}) < 0 \\ &U[e^{i\vartheta}(A + E + \sigma\mathbf{I}_n)] < 0 \qquad \square \end{aligned}$$

En ce qui concerne la borne η_{CP_3} donnée par (II.52), on a :

$$\begin{aligned} &\|E\|_2 < -U(A_a) \\ \Leftrightarrow\ &\|E\|_2 + U(A_a) < 0 \\ \Leftrightarrow\ &\|E_a\|_2 + U(A_a) < 0 \quad \text{compte tenu de (II.19)} \\ \Rightarrow\ &U(A_a + E_a) < 0 \\ \Rightarrow\ &U[\Theta(\vartheta) \otimes (A + E + \sigma\mathbf{I}_n)] < 0 \quad \text{avec } \Theta(\vartheta) \text{ donné en (II.7)} \ \square \end{aligned}$$

Enfin, on peut déduire le théorème suivant [CP1994b] du théorème II.13 :

Théorème II.17 *: [CP1994b] La matrice incertaine $\mathbf{A} = A + E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est S_1-stable si A est S_1-stable et si :*

$$||E||_2 < \eta'_{CP_4} = -\frac{U(e^{-\mathbf{i}\vartheta}\Lambda) + \sigma\cos\vartheta}{\mathrm{cond(V)}} \tag{II.53}$$

où V est la matrice modale de A telle que $\Lambda = V^{-1}AV$.

Démonstration : déduite des conditions du théorème II.13 (voir [CP1994b]).

Remarque II.19 *: Dans le cas ou $\sigma = \vartheta = 0$, on retrouve la borne de stabilité robuste également proposée dans [CP1994b], à savoir :*

$$||E||_2 < \eta'_{CP} = -\frac{U(\Lambda)}{\mathrm{cond(V)}} \tag{II.54}$$

Il est facile de voir que les bornes η_{CW} et η'_{CP}, respectivement données par (II.49) et (II.54) sont égales en notant que $U(\Lambda) = \max\limits_i Re(\lambda_{i\in\{1,\dots,n\}}(\Lambda)) = \max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} Re(\lambda_i(A))$.

Comparaison des diverses approches de S_1-stabilité robuste

Dans ce paragraphe, nous ne considérons spécifiquement que la S_1-stabilité (les égalités de (II.3) sont donc vérifiées) d'une matrice incertaine **A réelle** et nous comparons les bornes de S_1-stabilité robuste données en (II.50), (II.51), (II.52) et (II.53).

Théorème II.18 *: lorsque* **A** *est réelle, les bornes de S_1-stabilité robuste η_{CP_1}, η_{CP_2}, et η_{CP_3}, respectivement données par (II.50), (II.51) et (II.52), sont égales*

Démonstration :

$$U[\Phi_1(A)] = \frac{1}{2}\bar{\lambda}\{\Phi_1(A) + {\Phi_1}^*(A)\}$$

$$\Leftrightarrow U[\Phi_1(A)] = c_{00} + \frac{1}{2}\bar{\lambda}\{\mathbf{I}_n \otimes \mathbb{M} + \mathbb{N} \otimes \mathbf{I}_n\}$$

Les matrices $\mathbb{M} = c_{01}\tilde{A} + c_{10}\tilde{A}^*$ et $\mathbb{N} = \tilde{\mathbb{M}} = c_{10}A + c_{01}A^*$, sa conjuguée, sont hermitiennes. Leurs valeurs propres sont donc réelles et égales. On déduit de ce fait et des propriétés du produit de Kronecker [HJ1991] que :

$$U[\Phi_1(A)] = c_{00} + \bar{\lambda}(c_{10}A + c_{01}A^*) \tag{II.55}$$

On s'intéresse maintenant à $U(A_a)$.

$$U(A_a) = \frac{1}{2}\bar{\lambda}(A_a + A_a^*)$$

$$\Leftrightarrow U(A_a) = \frac{1}{2}\bar{\lambda}\{\Theta(\vartheta) \otimes (A + \sigma\mathbf{I}_n) + \Theta(\vartheta)^* \otimes (A^* + \sigma\mathbf{I}_n)\}$$

$$\Leftrightarrow U(A_a) = c_{00} + \frac{1}{2}\bar{\lambda}\{\Theta(\vartheta) \otimes A + \Theta(\vartheta)^* \otimes A^*\}$$

Or $\Theta(\vartheta)$ est diagonalisable par une matrice unitaire

$$\mathbb{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}$$

telle que :

$$\mathbb{X}^*\Theta(\vartheta)\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta - \mathbf{i}\sin\vartheta & 0 \\ 0 & \cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_{01} & 0 \\ 0 & 2c_{10} \end{bmatrix} = \mathcal{L}$$

Il est facile de montrer en utilisant les propriétés du produit de Kronecker [HJ1991] que $\Theta(\vartheta) \otimes A + \Theta(\vartheta)^* \otimes A^*$ et $\mathcal{L} \otimes A + \mathcal{L}^* \otimes A^*$ sont semblables. En effet :

$$(\mathbb{X}^* \otimes \mathbf{I}_n)\{\Theta(\vartheta) \otimes A + \Theta(\vartheta)^* \otimes A^*\}(\mathbb{X} \otimes \mathbf{I}_n) = \mathcal{L} \otimes A + \mathcal{L}^* \otimes A^*$$

Ainsi :

$$U(A_a) = c_{00} + \frac{1}{2}\bar{\lambda}\{\begin{bmatrix} 2c_{01}A & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & 2c_{10}A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c_{10}A^* & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & 2c_{01}A^* \end{bmatrix}\}$$

$$\Leftrightarrow U(A_a) = c_{00} + \frac{1}{2}\bar{\lambda}\{\begin{bmatrix} 2\mathbb{M} & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & 2\mathbb{N} \end{bmatrix}\}$$

puisque A est rélle (c'est-à-dire $\tilde{A} = A$).
Les matrices hermitiennes $\mathbb{M}$ et $\mathbb{N}$ étant conjuguées, leurs valeurs propres sont réelles et donc identiques, ce qui conduit à :

$$U(A_a) = c_{00} + \bar{\lambda}(c_{10}A + c_{01}A^*) \tag{II.56}$$

Il reste à traiter la borne donnée par(II.51).

$$U(\mathbb{A}) = \frac{1}{2}\bar{\lambda}\{(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)(A + \sigma\mathbf{I}_n) + (\cos\vartheta - \mathbf{i}\sin\vartheta)(A^* + \sigma\mathbf{I}_n)\}$$

$$\Leftrightarrow U(\mathbb{A}) = \frac{1}{2}\bar{\lambda}(2c_{00}\mathbf{I}_n + 2c_{10}A + 2c_{01}A^*)$$

$$\Leftrightarrow U(\mathbb{A}) = c_{00} + \bar{\lambda}(c_{10}A + c_{01}A^*) \tag{II.57}$$

On retrouve à nouveau l'expression (II.55) et (II.56) ce qui nous permet de déduire que :

$$U(\mathbb{A}) = U[\Phi_1(A)] = U(A_a)$$

$$\Leftrightarrow \eta_{CP_1} = \eta_{CP_2} = \eta_{CP_3} \quad \square \tag{II.58}$$

Avant de continuer cette comparaison pour y inclure la borne η'_{CP_4}, nous revenons sur la remarque II.18. En effet, si la borne η'_{CP_4} donnée par (II.53) est toujours calculable lorsque A est S_1-stable, pour les autres bornes données par (II.50), (II.51) et (II.52), la mesure logarithmique simple peut ne pas conduire à une valeur positive de borne. C'est pourquoi, nous regardons ici ce qui se passe lorsque l'on utilise le passage à la forme diagonale.
Intéressons-nous d'abord à ce que devient η_{CP_1}. Etudier la S_1-stabilité robuste de $A + E$ revient à étudier la stabilité robuste de $\Phi_1(A + E)$ ou encore celle de $\Phi_1(\Lambda + \mathcal{E}) = \Phi_1(\Lambda) + \mathbb{E}$ avec $\mathbb{E} = c_{01}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{\mathcal{E}} + c_{10}\mathcal{E} \otimes \mathbf{I}_n$ et $\mathcal{E} = V^{-1}EV$. D'après les propriétés du produit de Kronecker [HJ1991], il est facile de voir que $\Phi_1(\Lambda)$ est effectivement une matrice diagonale semblable à $\Phi_1(A)$ grâce au changement de base associé à la matrice $\mathcal{V} = V \otimes \tilde{V}$ et une nouvelle condition peut donc être obtenue :

$$\|E\|_2 < \eta'_{CP_1} = -\frac{U_{\mathcal{V}}[\Phi_1(A)]}{\mathrm{cond}(V)} = -\frac{U[\Phi_1(\Lambda)]}{\mathrm{cond}(V)} \tag{II.59}$$

De la même manière, il est facile de vérifier que $\mathbb{A}$ est diagonalisable par la transformation de similarité associée à V et l'on obtient alors, en présence de l'incertitude E sur A, une incertitude $\mathbb{E} = e^{\mathbf{i}\vartheta}E$ sur $\mathbb{A}$ telle que :

$$V^{-1}(\mathbb{A} + \mathbb{E})V = \mathbb{L} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{II.60}$$

où $\mathbb{L} = V^{-1}\mathbb{A}V = e^{\mathbf{i}\vartheta}(\Lambda + \sigma\mathbf{I}_n)$ est une matrice diagonale et où $\boldsymbol{\mathcal{E}} = V^{-1}\mathbb{E}V = e^{\mathbf{i}\vartheta}\mathcal{E}$.
De ceci découle la condition de S_1-stabilité robuste de $\mathbf{A}$ suivante :

$$\|E\|_2 \;<\; \eta'_{CP_2} \;=\; -\frac{U_V[\mathbb{A}]}{\mathrm{cond}(V)} \;=\; -\frac{U[\mathbb{L}]}{\mathrm{cond}(V)} \tag{II.61}$$

Enfin, le cas de η_{CP_3} donnée par (II.52) est un peu plus compliqué. Remarquons au préalable que A_a est diagonalisable par le changement de base associé à la matrice $V_a = \mathbb{X} \otimes V$ puisque :

$$\begin{aligned} \Lambda_a \;&=\; {V_a}^{-1} A_a V_a \;=\; (\mathbb{X}^* \otimes V^{-1})(\Theta(\vartheta) \otimes (A + \sigma\mathbf{I}_n))(\mathbb{X} \otimes V) \\ \Lambda_a \;&=\; (\mathbb{X}^*\Theta(\vartheta)\mathbb{X}) \otimes (V^{-1}AV + \sigma\mathbf{I}_n) \;=\; \mathcal{L} \otimes (\Lambda + \sigma\mathbf{I}_n) \end{aligned} \tag{II.62}$$

Λ_a est clairement diagonale. De plus, s'intéresser à la S_1-stabilité de $A+E$ revient à s'intéresser à la stabilité de $\mathcal{L}\otimes(\Lambda+\mathcal{E}+\sigma\mathbf{I}_n) = \Lambda_a+\mathbf{E}_a$, avec $\mathbf{E}_a = \mathcal{L}\otimes\mathcal{E} = {V_a}^{-1}E_aV_a$, ce qui conduit à la condition de S_1-stabilité robuste de $\mathbf{A}$ suivante :

$$\|E\|_2 \;<=\; \eta'_{CP_3} \;=\; -\frac{U_{V_a}[A_a]}{\mathrm{cond}(V)} \;=\; -\frac{U[\Lambda_a]}{\mathrm{cond}(V)} \tag{II.63}$$

Ces remarques ont en fait pour but de comparer ces trois nouvelles conditions à celle donnée en (II.53).

Théorème II.19 *Les bornes η'_{CP_1}, η'_{CP_2}, η'_{CP_3} et η'_{CP_4}, respectivement données par (II.59), (II.61), (II.63), et (II.53) sont égales.*

Démonstration : en remplaçant A par Λ dans la démonstration du théorème II.18, l'équation (II.55) devient :

$$U[\Phi_1(\Lambda)] \;=\; c_{00} \;+\; \bar{\lambda}(c_{10}\Lambda + c_{01}\Lambda^*)$$

ce qui n'est autre que l'équation (II.57) avec A remplacé par Λ. Ceci implique que $U[\Phi_1(\Lambda)] = U[\Phi_1(\mathbb{L})] \Leftrightarrow \eta'_{CP_2} = \eta'_{CP_1}$.
$U[\Lambda_a]$ doit être regardé un peu plus attentivement. On a :

$$U[\Lambda_a] \;=\; \max_{i\in\{1,\ldots,2n\}} Re(\lambda_i\{\begin{bmatrix} \cos\vartheta - \mathbf{i}\sin\vartheta & 0 \\ 0 & \cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta \end{bmatrix} \otimes (\Lambda \;+\; \sigma\mathbf{I}_n)\})$$

$$\Leftrightarrow\; U[\Lambda_a] \;=\; \sigma\cos\vartheta \;+\; \max_{i\in\{1,\ldots,2n\}} Re(\lambda_i\{\begin{bmatrix} \cos\vartheta - \mathbf{i}\sin\vartheta & 0 \\ 0 & \cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta \end{bmatrix} \otimes \Lambda\})$$

$$U[\Lambda_a] \;=\; c_{00} \;+\; \max_{i\in\{1,\ldots,2n\}} Re\{\lambda_i \begin{bmatrix} 2c_{01}\Lambda & 0 \\ 0 & 2c_{10}\Lambda \end{bmatrix}\}$$

Les matrices Λ^* et Λ étant semblables, en réarrangeant les éléments diagonaux du terme de droite de l'égalité ci-dessus, on a :

$$\Leftrightarrow\; U[\Lambda_a] \;=\; c_{00} \;+\; \max_{i\in\{1,\ldots,2n\}} Re\{\lambda_i \begin{bmatrix} 2c_{10}\Lambda & 0 \\ 0 & 2c_{01}\Lambda^* \end{bmatrix}\}$$

$$\Leftrightarrow U[\Lambda_a] \;=\; c_{00} \;+\; \max_{i\in\{1,\dots,n\}} Re\{\lambda_i[2c_{01}\Lambda]\} \;=\; c_{00} \;+\; \bar{\lambda}(c_{10}\Lambda + c_{01}\Lambda^*)$$

Ceci permet de déduire que $\eta'_{CP_1} = \eta'_{CP_2} = \eta'_{CP_3}$. Qu'en est-il de η'_{CP_4} ?

$$U(e^{-\mathbf{i}\vartheta}\Lambda) \;+\; \sigma\cos\vartheta \;=\; c_{00} \;+\; \max_{i\in\{1,\dots,n\}} Re[\lambda_i(e^{-\mathbf{i}\vartheta}\Lambda)] \;=$$

$$c_{00} \;+\; \max_{i\in\{1,\dots,n\}} Re[e^{-\mathbf{i}\vartheta}[\Lambda]_{\{i,i\}}] \;=\; c_{00} \;+\; \max_{i\in\{1,\dots,n\}} Re[e^{-\mathbf{i}\vartheta}[\Lambda^*]_{\{i,i\}}] \;=$$

$$c_{00} \;+\; \max_{i\in\{1,\dots,n\}} Re[\lambda_i(e^{-\mathbf{i}\vartheta}\Lambda^*)] \;=\; c_{00} \;+\; \bar{\lambda}(c_{10}\Lambda + c_{01}\Lambda^*)$$

Ceci permet de conclure $\eta'_{CP_1} = \eta'_{CP_2} = \eta'_{CP_3} = \eta'_{CP_4}$. $\square$

Comparaison avec les conditions de l'approche Lyapunov

L'objet de ce paragraphe est d'établir un lien théorique entre les bornes de S_1-stabilité robuste d'une matrice réelle $\mathbf{A}$ issues, d'une part de l'approche Lyapunov, d'autre part de l'approche logarithmique. Tout d'abord, l'étude de nombreux exemples numériques nous laissent penser que les bornes issues de l'approche Lyapunov sont moins conservatives que les bornes logarithmiques, au prix d'un temps de calcul nettement supérieur, mais nous n'avons pas pu trouver de justification théorique rigoureuse. Toutefois, nous montrons ici ce lien théorique lorsque les bornes sont calculées via une forme diagonale et lorsque $Q = S = \mathbf{I}_n$ (ou $Q_a = \mathbf{I}_{2n}$). Ces bornes ont déjà été données au paragraphe précédent dans le cas de l'approche logarithmique. Nous devons avant tout donner l'expression de ces bornes dans le cas de l'approche Lyapunov. Les conditions (II.16) et (II.17) deviennent respectivement :

$$\bar{\sigma}(E) \;<\; \rho'_{u_{CP1}} \;=\; \frac{1}{\bar{\sigma}(\mathcal{P})\mathrm{cond}(V)} \tag{II.64}$$

(par application de $||\mathcal{E}||_2 \leq \mathrm{cond}(V)||E||_2$) et :

$$\bar{\sigma}(E) = \|E\|_2 < \rho'_{u_{CP2}} \;=\; \frac{1}{\bar{\sigma}(\mathcal{P}_a)\mathrm{cond}(V)} \tag{II.65}$$

(par application de $||\mathbf{E}_a||_2 \leq \mathrm{cond}(V_a)||E_a||_2 = \mathrm{cond}(V_a)||E||_2$) où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_a$ sont les solutions respectives de (II.4) et (II.8) avec $A = \Lambda$ et $Q = \mathbf{I}_n$ (resp. $A_a = \Theta(\vartheta) \otimes (\Lambda + \sigma\mathbf{I}_n)$ et $Q_a = \mathbf{I}_{2n}$)). Le passage à la forme diagonale ne change rien au fait que ces deux bornes restent égales. En effet, $Q_a = \mathbf{I}_{2n}$ étant de la forme donnée en (II.9), on a $\bar{\sigma}(\mathcal{P}_a) = \bar{\sigma}(\mathcal{P})$. Ce qui est moins évident est le résultat que nous donnons dans le théorème suivant :

Théorème II.20 *: Les bornes η'_{CP_1}, η'_{CP_2}, η'_{CP_3}, η'_{CP_4}, $\rho'_{u_{CP1}}$ et $\rho'_{u_{CP2}}$ sont égales.*

Démonstration : L'égalité de η'_{CP_1}, η'_{CP_2}, η'_{CP_3} et η'_{CP_4} a déjà été prouvée d'une part ainsi que celle de $\rho'_{u_{CP1}}$ et $\rho'_{u_{CP2}}$ d'autre part. Pour compléter la démonstration on peut vérifier, par exemple, que $\eta'_{CP_1} = \rho'_{u_{CP1}}$.

La matrice $\mathcal{P}$ est solution de l'équation de Lyapunov généralisée (II.2), avec $Q = \mathbf{I}_n$, $A = \Lambda$ et $A^* = \Lambda^*$, c'est-à-dire :

$$c_{00}\mathcal{P} + c_{01}\Lambda\mathcal{P} + c_{01}\mathcal{P}\Lambda^* = -\mathbf{I}_n \tag{II.66}$$

Λ et $\mathbf{I}_n$ étant diagonales, $\mathcal{P}$ l'est aussi. Ainsi l'E.L.G. (II.66) est donc équivalente à un système de n équations scalaires indépendantes et l'on peut déduire que les éléments de la diagonale de la matrice hermitienne définie positive $\mathcal{P}$, qui sont aussi ses valeurs singulières, ont l'expression suivante :

$$[\mathcal{P}]_{\{i,i\}} = -(c_{00} + c_{10}\lambda_i(A) + c_{01}\tilde{\lambda}_i(A) +)^{-1} \; \forall i \in \{1, ..., n\}$$

D'où il vient

$$\frac{1}{\bar{\sigma}(\mathcal{P})} = \underline{\sigma}(\mathcal{P}^{-1}) = -\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}(c_{00} + 2Re[c_{10}\lambda_i(A)]) =$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\bar{\sigma}(\mathcal{P})} = -c_{00} - 2\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{Re[c_{10}\lambda_i(A)]\} = -c_{00} - \bar{\lambda}(c_{10}\Lambda + c_{01}\Lambda^*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\bar{\sigma}(\mathcal{P})} = -U[\Phi_1(\Lambda)] \quad \square$$

Régions de deuxième ordre

Nous considérons une région polynomiale transformable $\mathcal{D}$ de deuxième ordre répondant à la définition donnée en (II.10) et nous établissons une borne sur $||E||_2$ garantissant la $\mathcal{D}$-stabilité de $\mathbf{A} = A + E \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Avant de présenter cette borne, il nous faut introduire le lemme suivant :

Lemme II.1 *Soient les matrices :*

$$\mathcal{H} = \sum_{p\in\mathcal{G}} \alpha_p A_p \otimes \tilde{B}_p \quad ; \quad \mathcal{K} = \sum_{p\in\mathcal{G}} \tilde{\alpha}_p B_p \otimes \tilde{A}_p \tag{II.67}$$

où $\alpha_p \in \mathbb{C}$, $A_p \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $B_p \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\forall p \in \mathcal{G}$ et où $\mathcal{G}$ est un ensemble d'entiers naturels. L'égalité suivante est vérifiée :

$$\bar{\sigma}(\mathcal{H}) = \bar{\sigma}(\mathcal{K}) \tag{II.68}$$

Démonstration : il s'agit de comparer $\bar{\sigma}(\mathcal{H}) = \sqrt{\bar{\lambda}(\mathbb{H})}$ et $\bar{\sigma}(\mathcal{K}) = \sqrt{\bar{\lambda}(\mathbb{K})}$ avec :

$$\mathbb{H} = \mathcal{H}^*\mathcal{H} = (\sum_{p\in\mathcal{G}} \tilde{\alpha}_p A_p^* \otimes \tilde{B}_p^*)(\sum_{q\in\mathcal{G}} \alpha_q A_q \otimes \tilde{B}_q) = \sum_{\{p,q\}\in\mathcal{G}^2} \tilde{\alpha}_p \alpha_q A_p^* A_q \otimes \tilde{B}_p \tilde{B}_q$$

$$\mathbb{K} = \mathcal{K}^*\mathcal{K} = (\sum_{p\in\mathcal{G}} \alpha_p B_p^* \otimes \tilde{A}_p^*)(\sum_{q\in\mathcal{G}} \tilde{\alpha}_q B_q \otimes \tilde{A}_q) = \sum_{\{p,q\}\in\mathcal{G}^2} \alpha_p \tilde{\alpha}_q B_p^* B_q \otimes \tilde{A}_p^* \tilde{A}_q$$

On pose :

$$\mathbb{V}_{[n,m]} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(e_i e_j^*) \otimes (e_j e_i^*)$$

où $e_i \in \mathbb{R}^n$ et $e_j \in \mathbb{R}^m$ sont des vecteurs n'ayant que des composantes nulles exceptées $[e_i]_{\{i,1\}}$ et $[e_j]_{\{j,1\}}$.
La matrice $\mathbb{V}_{\{n,m\}}$ est appelée matrice de permutation car quelles que soient les matrices $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$, elle vérifie [HJ1991] :

$$B \otimes A = \mathbb{V}^*_{[n,m]}(A \otimes B)\mathbb{V}_{[n,m]}$$

Il est à noter que $\mathbb{V}^{-1}_{[n,m]} = \mathbb{V}^*_{[n,m]}$ et que $\mathbb{V}_{[n,m]}$ ne dépend que de m et de n [HJ1991]. De ceci, on peut déduire :

$$\bar{\lambda}(\mathbb{K}) = \bar{\lambda}(\mathbb{V}^*_{[n,m]}\mathbb{K}\mathbb{V}_{[n,m]}) = \bar{\lambda}\Big(\sum_{\{p,q\}\in\mathcal{G}^2} \alpha_p\tilde{\alpha}_q\tilde{A}_p^*\tilde{A}_q \otimes B_p^*B_q\Big)$$

Il apparaît donc que $(\mathbb{V}^*_{[n,m]}\mathbb{K}\mathbb{V}_{[n,m]})$ et $\mathbb{H}$ sont deux matrices conjuguées. Comme elles sont hermitiennes, elles ont les mêmes valeurs propres réelles. Ainsi :

$$\bar{\lambda}(\mathbb{K}) = \bar{\lambda}(\mathbb{H}) \Rightarrow \bar{\sigma}(\mathcal{H}) = \bar{\sigma}(\mathcal{K}) \quad \square$$

Nous proposons le théorème suivant :

Théorème II.21 *: Soient la matrice incertaine $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et la région $\mathcal{D} \in \mathcal{P}_2^{\{t\}}$. $\mathbf{A} = A + E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}$-stable si A l'est et si :*

$$\|E\|_2 < \eta_{\mathcal{D}\in\mathcal{P}_2^{\{t\}}} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + ac}}{a} \tag{II.69}$$

où :

$$b = |c_{02}|\bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(c_{10}\mathbf{I}_{n^2} + c_{11}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{A} + c_{20}A \otimes \mathbf{I}_n) \tag{II.70}$$

$$a = 2|c_{02}| + |c_{11}| \quad ; \quad c = -U[\Phi_2(A)] \tag{II.71}$$

sous la condition $U[\Phi_2(A)] < 0$ avec $\Phi_2(A)$ donnée par (II.44).

Démonstration : l'inégalité présente en (II.69) est équivalente à :

$$\Leftrightarrow 2\bar{\sigma}(E)(|c_{02}|\bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(c_{10}\mathbf{I}_{n^2} + c_{11}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{A} + c_{20}A \otimes \mathbf{I}_n)) +$$

$$(2|c_{02}| + |c_{11}|)\bar{\sigma}^2(E) + U[\Phi_2(A)] < 0$$

Par application du lemme II.1 à

$$\mathcal{H} = c_{10}\mathbf{I}_{n^2} + c_{11}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{A} + c_{20}A \otimes \mathbf{I}_n \text{ et } \mathcal{K} = c_{01}\mathbf{I}_{n^2} + c_{11}A \otimes \mathbf{I}_n + c_{02}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{A},$$

il vient :

$$\begin{aligned}
&\bar{\sigma}(c_{20}A \otimes \mathbf{I}_n)\bar{\sigma}(E \otimes \mathbf{I}_n) + \bar{\sigma}(\mathbf{I}_n \otimes \tilde{E})(c_{02}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{A}) + \\
&\bar{\sigma}(E \otimes \mathbf{I}_n)\bar{\sigma}(c_{10}\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_n + c_{11}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{A} + c_{20}A \otimes \mathbf{I}_n) + \\
&\bar{\sigma}(c_{01}\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_n + c_{11}A \otimes \mathbf{I}_n + c_{02}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{A})\bar{\sigma}(\mathbf{I}_n \otimes \tilde{E}) + \\
&\bar{\sigma}(c_{11}E \otimes \tilde{E} + c_{02}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{E}^2 + c_{20}E^2 \otimes \mathbf{I}_n) + U[\Phi_2(A)] < 0 \\
&\Rightarrow U[c_{10}E \otimes \mathbf{I}_n + c_{01}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{E} + c_{11}E \otimes \tilde{A} + c_{11}A \otimes \tilde{E} + \\
&c_{20}AE \otimes \mathbf{I}_n + c_{02}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{E}\tilde{A} + c_{20}EA \otimes \mathbf{I}_n + c_{02}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{A}\tilde{E} + \\
&c_{11}E \otimes \tilde{E} + c_{02}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{E}^2 + c_{20}E^2 \otimes \mathbf{I}_n + \Phi_2(A)] < 0 \\
&\Leftrightarrow U[\Phi_2(A + E)] < 0 \quad \square
\end{aligned}$$

Un autre résultat existe concernant la détermination de borne logarithmique de $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice réelle et lorsque $\mathcal{D}$ est une région symétrique de $\mathcal{P}^{\{t\}}$:

Théorème II.22 *: [CP1995a] Soient la matrice incertaine* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et la région symétrique* $\mathcal{D} \in \mathcal{P}_2^{\{t\}}$. $\mathbf{A}$ *est* $\mathcal{D}$*-stable si* A *l'est et si :*

$$\|E\|_2 < \hat{\eta}_{\mathcal{D}\in\mathcal{P}_2} = \frac{-\hat{b} + \sqrt{\hat{b}^2 + \hat{a}\hat{c}}}{\hat{a}} \tag{II.72}$$

où :

$$\hat{b} = 2|c_{02}|\bar{\sigma}(A) + |c_{11}|\bar{\sigma}(A + \frac{c_{01}}{c_{11}}\mathbf{I}_n) \tag{II.73}$$

$$\hat{a} = 2|c_{02}| + |c_{11}| \quad ; \quad \hat{c} = -U[\Phi_2(A)] \tag{II.74}$$

sous la condition $U[\Phi_2(A)] < 0$ *avec* $\Phi_2(A)$ *donnée par (II.44).*

Démonstration : voir [CP1995a].

Le théorème II.22, bien que proposé dans [CP1995a] pour une matrice $\mathbf{A}$ réelle et une région $\mathcal{D}$ symétrique, est généralisable à une matrice $\mathbf{A}$ complexe et une région $\mathcal{D}$ non symétrique, ceci de manière triviale. La borne donnée par (II.72) est toutefois plus conservative que celle que nous proposons en (II.69). En effet, ces deux bornes ont la même expression analytique. On a $a = \hat{a}$ et $c = \hat{c}$. Seuls b et b' diffèrent puisque :

$$\begin{aligned}
b &= |c_{02}|\bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(c_{10}\mathbf{I}_{n^2} + c_{11}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{A} + c_{20}A \otimes \mathbf{I}_n) \\
b &= |c_{02}|\bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}((c_{11}A + \frac{c_{01}}{c_{11}}\mathbf{I}_n) \otimes \mathbf{I}_n + c_{02}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{A}) \quad \text{(cf. lemme II.1)} \\
b &\leq |c_{02}|\bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(c_{11}A + \frac{c_{01}}{c_{11}}\mathbf{I}_n) + |c_{20}|\bar{\sigma}(A) = \hat{b}
\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que :

$$\frac{\partial(\eta_{\mathcal{D}\in\mathcal{P}_2})}{\partial b} < 0 \text{ et } \frac{\partial(\hat{\eta}_{\mathcal{D}\in\mathcal{P}_2})}{\partial \hat{b}} < 0$$

on peut déduire que $\eta_{\mathcal{D}\in\mathcal{P}_2} \geq \hat{\eta}_{\mathcal{D}\in\mathcal{P}_2}$.

Le problème de la vérification de la condition $U[\Phi_2(A)] < 0$ se pose à nouveau. Pour s'assurer d'un choix judicieux de mesure logarithmique, on peut utiliser $U_{\mathcal{V}}(.)$ avec $\mathcal{V} = V \otimes \tilde{V}$ et le corollaire suivant se déduit facilement :

Corollaire II.4 *: Soient la matrice incertaine* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *et la région* $\mathcal{D} \in \mathcal{P}_2^{\{t\}}$. $\mathbf{A}$ *est* $\mathcal{D}$*-stable si* A *l'est et si :*

$$\|E\|_2 < \eta'_{\mathcal{D}\in\mathcal{P}_2} = \frac{-b' + \sqrt{b'^2 + a' c'_{\mathcal{V}}}}{a'\text{cond}(V)} \quad \text{(II.75)}$$

où :

$$b' = |c_{02}|\bar{\sigma}(\Lambda) + \bar{\sigma}(c_{10}\mathbf{I}_{n^2} + c_{11}\mathbf{I}_n \otimes \tilde{\Lambda} + c_{20}\Lambda \otimes \mathbf{I}_n) \quad \text{(II.76)}$$

$$a' = 2|c_{02}| + |c_{11}| \quad ; \quad c'_{\mathcal{V}} = -U_{\mathcal{V}}[\Phi_2(A)] = -U[\Phi_2(\Lambda)] \quad \text{(II.77)}$$

où $\mathcal{V} = V \otimes \tilde{V}$ *et où* V *est la matrice modale de* A *telle que* $\Lambda = V^{-1}AV$ *est diagonale.*

Démonstration : se déduit du théorème II.21 et du fait que $\|\mathcal{E}\|_2 = ||V^{-1}EV\|_2 \leq \|E\|_2\text{cond}(V)$. □

II.5 Conclusion

Bien entendu, nous rappelons que les bornes de $\mathcal{D}$**-stabilité** robuste présentées dans ce chapitre ne constituent pas une liste exhaustive mais forment un panel représentatif de deux approches que nous avons choisi arbitrairement de privilégier. Ces deux approches offrent chacune leur intérêt. Si l'on peut estimer que l'approche Lyapunov est plus générale (puisqu'elle permet de traiter le cas d'incertitudes structurées) et qu'elle conduit souvent à des bornes moins conservatives (en particulier grâce à l'optimisation par rapport à la matrice S), on peut aussi lui reprocher son temps de calcul, la résolution d'une E.L.G. nécessitant l'inversion d'une matrice de dimension n^2, toujours risquée et gourmande en opérations numériques élémentaires. Cet inconvénient, s'il peut être négligé dans un cadre analytique, doit être pris en compte dans les problèmes de synthèse pour lesquels la borne de $\mathcal{D}$**-stabilité** robuste est assimilée à un indice de performances robustes à optimiser (cf. chapitre IV). A cet effet, l'approche logarithmique ne doit pas être écartée.

Toutefois, avant de porter un avis subjectif sur ces critères de performances robustes, nous souhaitons, sans entrer dans les détails techniques, évoquer plusieurs résultats très intéressants de la littérature qui ne peuvent être rattachés à ces deux approches mais qui nous paraissent dignes d'intérêt.
Distinguons d'abord le concept de **stabilité** du concept plus général de **$\mathcal{D}$-stabilité**. La "simple" **stabilité** (appartenance des valeurs propres de la matrice d'état au demi-plan complexe gauche ouvert) est la propriété la plus largement étudiée et certains travaux lui sont spécifiquement dédiés. Ainsi certains auteurs ont donc cherché la borne de **stabilité** robuste idéale (c'est-à-dire la CNS de **stabilité**) qu'ils ont baptisée rayon de stabilité. Ce rayon ne pouvant généralement pas être numériquement déterminé, ils ont proposé un encadrement dans le cas non structuré [HP1986a] et dans le cas structuré [HP1986b]. La borne inférieure de l'intervalle obtenu peut être considérée comme une borne de **stabilité** robuste et la borne supérieure permet d'apprécier le conservatisme de la borne inférieure (ou d'une autre borne de **stabilité** robuste obtenue avec une approche différente). Ces résultats sont originaux mais il faut noter que dans la plupart des exemples, une seule des deux bornes est exploitable : soit la borne inférieure est proche du rayon de **stabilité** (donc une bonne borne de **stabilité** robuste) et la borne supérieure est beaucoup trop élevée pour apprécier le degré de conservatisme, soit c'est la borne supérieure qui est proche du rayon de **stabilité** auquel cas la borne de **stabilité** robuste est très conservative.
En matière de robustesse en **stabilité**, il semble approprié d'évoquer les travaux relatifs à la valeur singulière structurée (dite μ) introduite dans [Doy1982]. Le calcul de cette valeur (appelé μ-analyse dans un cadre d'analyse robuste) a été développé pour caractériser certaines performances (par exemple des performances relatives à la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert entre des signaux exogènes de perturbation en entrée du système et des sorties contrôlées) mais aussi la robustesse en **stabilité** vis-à-vis d'une vaste gamme d'incertitudes. Dans le cas d'une étude de robustesse vis-à-vis d'une incertitude telle que celle définie en (I.30), l'inverse de μ correspond à un indice idéal de **stabilité** robuste [Saf1982] (qui est en fait le rayon de **stabilité**). Malheureusement, le calcul de μ est un problème N-P difficile [BYDM1994] qui a conduit les auteurs à se contenter du calcul d'une borne inférieure et d'une borne supérieure [FTD1991]. L'inverse de la borne supérieure peut être vu comme une borne de **stabilité** robuste [GB1990].
Une autre approche concernant le problème de **stabilité** robuste est celle présentée dans [Yed1993a] qui traite *(uniquement)* les incertitudes structurées définies comme en (I.28). Yedavalli y propose des méthodes de calcul de bornes de **stabilité** robuste basées entre autres sur la notion de somme de Kronecker ou sur celle de somme bialternée. Ces approches, quoiqu'uniquement valables pour des matrices réelles (ce qui n'est pas une limite en pratique) induisent de très bons résultats en un temps de calcul remarquablement court. Ces bornes sont parfois améliorables par une technique proposée dans [Gar1997]. Il est toutefois regrettable que cette approche ne puisse être efficacement étendue à des problèmes d'analyse de robustesse en performances.
Pour la **$\mathcal{D}$-stabilité** robuste, d'autres travaux ont conduit à des résultats relative-

ment peu conservatifs dans le cas structuré [LBW1996]. Ces résultats sont surtout intéressants pour de petits systèmes car le temps de calcul des bornes "explose" avec le nombre de paramètres incertains.

Pour achever ce chapitre, nous portons un jugement parfois arbitraire sur l'ensemble des résultats présentés ou simplement évoqués ci-dessus. La qualité d'une borne de $\mathcal{D}$**-stabilité** robuste d'une matrice réelle dépend bien sûr des objectifs de l'automaticien qui l'utilise. Toutefois, nous nous permettons de donner nos préférences, en prenant en compte le degré de conservatisme, la simplicité et le temps de calcul d'une borne.

Incertitude non structurée :

Concernant la S_1**-stabilité**, la borne donnée en (II.15) et due à [LJB1993] nous paraît la plus intéressante ainsi que celle donnée, par exemple, en (II.52) et due à [CP1994b], plus conservative mais très rapidement calculable. Si seule la **stabilité** est envisagée, ces bornes restent utilisables en supposant $\sigma = \vartheta = 0$.

Concernant la $\mathcal{D}$**-stabilité** lorsque $\mathcal{D} \in \mathcal{P}_2^{\{t\}}$, le résultat nous semblant le meilleur est la borne proposée en (II.20) [BP1997] bien que celle que nous présentons en (II.69), plus conservative si l'on se réfère à quelques exemples numériques, soit plus rapidement calculable.

Incertitude structurée :

Si l'on s'intéresse d'abord à la **stabilité**, la borne obtenue par approche "somme bialternée" [Yed1993a] nous semble la plus appropriée car à la fois peu conservative et calculable rapidement. Quoique l'on puisse l'étendre au cas du secteur en considérant la stabilité de la matrice augmentée A_a donnée en (II.6), pour la S_1-**stabilité**, nous conseillons plutôt la borne donnée en (II.26) et due à [LJB1993].

Lorsque $\mathcal{D}$ est une région de $\mathcal{P}_2^{\{t\}}$, la borne de $\mathcal{D}$**-stabilité** robuste présentée en (II.29), donnée initialement dans [BLJ1993] et la borne de $\mathcal{D}$**-stabilité** robuste proposée dans [LBW1996] nous semblent les plus indiquées.

Il est à noter que ces jugements subjectifs ne tiennent pas compte des résultats nouveaux que nous présentons dans le chapitre suivant où nous proposons une méthode de calcul des bornes de $\mathcal{D}$**-stabilité** robuste suffisamment générale pour couvrir la plupart des cas traités dans ce chapitre et même des problèmes plus sophistiqués où $\mathcal{D}$ est une région non connexe.

Chapter III

Bornes $\mathcal{LMI}$ de $\mathcal{D}$-stabilité robuste

Dans le chapitre précédent, nous avons rappelé quelques résultats de la littérature concernant l'analyse robuste en $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice réelle incertaine. Une liste non exhaustive de bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste a été présentée et quelques éclaircissements ainsi que quelques améliorations des techniques déjà existantes ont été exposés. Cependant, aucune contribution théorique significative ne vient offrir de nouvelles perspectives. C'est pourquoi l'objet de ce chapitre est de proposer de nouvelles bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste déduites de résultats récents concernant la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice. Nous montrerons l'avantage de cette approche sur les autres en ce sens que des régions non connexes peuvent être envisagées. Ce point permet entre autres d'établir des critères de performances robustes plus sophistiqués, plus affinés que dans le cas de régions classiques, critères déjà évoqués dans le premier chapitre. Après avoir rappelé les résultats fondamentaux de cette approche concernant la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice et établi les diverses bornes qui en découlent (selon les différents cas à traiter), nous nous pencherons sur des aspects numériques du calcul de ces bornes et de la réduction de leur conservatisme. Quelques exemples illustreront la fin de ce chapitre avec en particulier quelques comparaisons avec des résultats connus de la littérature.

III.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la recherche de bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste passe par l'obtention de conditions nécessaires et suffisantes (CNS) d'appartenance des valeurs propres d'une matrice certaine à une région $\mathcal{D}$ du plan complexe. Ces CNS doivent être facilement testables mathématiquement (voire numériquement). Dès lors qu'une CNS originale est découverte, il peut être intéressant de déduire des bornes de robustesse ou de $\mathcal{D}$-stabilité robuste associées afin de comparer le conservatisme induit par la nouvelle approche avec celui des bornes existantes. C'est dans ce but que le concept de bornes logarithmiques, par exemple, avait été développé.
La motivation initiale du travail présenté dans ce chapitre est d'exploiter la CNS de $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice *réelle* obtenue dans [CG1996]. Cette condition est basée sur une approche de type $\mathcal{LMI}$ (Linear Matrix Inequalities). Dans [CG1996], les régions envisagées répondent à une définition spécifique (donnée ultérieurement) et sont appelées régions $\mathcal{LMI}$. Ces régions, quoique constituant une classe non équivalente à celle des régions polynomiales, offrent a priori des perspectives comparables en termes d'analyse des performances robustes. Toutefois, nous rappellerons pourquoi l'intersection de régions peut être envisagée, dans une étude de $\mathcal{D}$-stabilité, avec beaucoup plus de facilité que dans le cadre des approches précédentes, tant sur le plan nominal que sur le plan robuste [CG1996].
Mais la plus importante des perspectives offertes par cette approche est liée à l'extension des résultats de [CG1996] (proposée dans [Chi1996]) à une gamme beaucoup plus vaste de régions [Chi1996]. Ces régions sont appelées régions $\mathcal{GLMI}$ (Generalized Linear Matrix Inequalities). Une CNS d'appartenance des valeurs propres d'une matrice *complexe* à de telles régions est proposée dans [Chi1996] et permet, elle aussi, de déduire des bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste correspondantes. Si de tels problèmes d'analyse semblent, à première vue, très éloignés des attentes pratiques de l'automaticien en raison de la "généralité" de la définition des régions $\mathcal{GLMI}$, nous montrerons, en systématisant une procédure utilisée initialement dans [Chi1996], que de nombreuses régions non connexes peuvent être considérées. Il s'agit en fait de régions résultant de l'union de plusieurs sous-régions convexes, chacune de ces sous-régions n'étant pas nécessairement symétriques par rapport à l'axe réel. Ceci est d'un intérêt majeur car l'étude de bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste relatives à de telles régions permet d'exhiber des critères d'analyse de performances robustes beaucoup plus affinés que dans le cas de simples régions connexes. L'approche $\mathcal{LMI}$ permet donc d'aborder la problématique présentée au premier chapitre.
La possibilité d'envisager de nombreuses régions non connexes est un point sur lequel nous insistons particulièrement car la littérature concernant l'établissement de bornes relatives à ce type de régions est plutôt pauvre. A ce jour, à notre connaissance, la seule contribution dans ce domaine est celle de [AY1997] mais seules les incertitudes non structurées sont prises en compte. De plus, la seule région composée envisagée est l'union de disques, obligatoirement disjoints, en nombre égal à la

dimension de la matrice considérée, chaque disque étant centré autour d'une valeur propre de la matrice. De ce fait, la borne proposée dans cet article traduit un peu la même propriété que le nombre de conditionnement de la matrice modale, à savoir la sensibilité des valeurs propres de la matrice étudiée à une incertitude additive non structurée.

Le chapitre est ainsi organisé : dans la deuxième partie, nous proposons des bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice *réelle* soumise à une incertitude additive non structurée ou structurée comme en (I.28) (cf. §I.4.1), $\mathcal{D}$ étant une région $\mathcal{LMI}$. La troisième partie traite de l'établissement de bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice *complexe*, pour les mêmes incertitudes, lorsque $\mathcal{D}$ est une région $\mathcal{GLMI}$. Dans la quatrième partie, nous montrons que ces résultats sont applicables à l'analyse en $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice incertaine *réelle* lorsque $\mathcal{D}$ appartient à un ensemble précisément défini de régions résultant d'unions de plusieurs sous-régions convexes. Ces sous-régions peuvent ne pas être symétriques par rapport à l'axe réel mais l'union $\mathcal{D}$ est considérée comme symétrique puisque le spectre d'une matrice réelle est auto-conjugué. Dans la cinquième partie, nous nous intéressons quelque peu à des aspects numériques afin de développer des méthodes de calcul et d'amélioration des bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste. Dans la sixième et dernière partie, plusieurs exemples illustrent nos propos parmi lesquels figurent quelques comparaisons avec des méthodes déja connues.

III.2 $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice réelle dans une région $\mathcal{LMI}$

Dans cette partie, nous nous intéressons à la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice réelle incertaine $\mathbf{A} = A + E$ définie en §I.4.1 où $\mathcal{D}$ est une région convexe, symétrique par rapport à l'axe réel, appelée région $\mathcal{LMI}$. Les deux types d'incertitude sont envisagés. Après un rappel de la définition d'une région $\mathcal{LMI}$ et de la CNS de $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice réelle dans une telle région [CG1996], nous déduisons une borne sur la norme spectrale de E pour une incertitude E non structurée (respectivement sur le module de la plus grande perturbation tolérée dans les composantes de A pour une incertitude E structurée) telle que, lorsque A est $\mathcal{D}$-stable et que cette borne n'est pas dépassée, alors la $\mathcal{D}$-stabilité de $\mathbf{A}$ est garantie.

III.2.1 Définition d'une région $\mathcal{LMI}$

Un sous-ensemble $\mathcal{D}$ du plan complexe est appelé région $\mathcal{LMI}$ d'ordre l s'il existe une matrice symétrique $\alpha \in \mathbb{R}^{l\times l}$ et une matrice $\beta \in \mathbb{R}^{l\times l}$ telles que [CG1996] :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid f_{\mathcal{D}}(z) < 0\} \qquad \text{(III.1)}$$

où :

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \alpha + \beta z + \beta^* \tilde{z} \tag{III.2}$$

On peut remarquer que la fonction caractéristique $f_{\mathcal{D}}$ de variable complexe prend ses valeurs dans l'ensemble des matrices hermitiennes d'ordre l et qu'une région $\mathcal{LMI}$ est symétrique par rapport à l'axe réel puisque $f_{\mathcal{D}}(\tilde{z}) = \tilde{f}_{\mathcal{D}}(z) < 0$, $\forall z \in \mathcal{D}$. Cette dernière propriété est souvent vérifiée par les régions utilisées pour l'étude de la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice réelle puisque le spectre d'une matrice réelle est auto-conjugué.

III.2.2 CNS de $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice réelle dans une région $\mathcal{LMI}$

Dans ce paragraphe, nous rappelons un théorème relatif à la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice réelle dans une région $\mathcal{LMI}$. Ce théorème, issu de [CG1996], sera utilisé plus tard lors de l'établissement des bornes de robustesse.

Théorème III.1 *[CG1996] : Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathcal{D}$ une région $\mathcal{LMI}$ définie par (III.1) et (III.2). La matrice A est $\mathcal{D}$-stable si et seulement s'il existe une matrice $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, symétrique définie positive, telle que :*

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^* \otimes (AX)^* < 0 \tag{III.3}$$

Démonstration : voir [CG1996].

Remarque III.1 *: $M_{\mathcal{D}}(A, X)$ s'obtient immédiatement à partir de l'écriture de $f_{\mathcal{D}}(z)$ en opérant les substitutions suivantes :*

$$(1, z, \tilde{z}) \leftrightarrow (\otimes X, \otimes(AX), \otimes(AX)^*) \tag{III.4}$$

Remarque III.2 *: Les auteurs de [CG1996] mettent en valeur l'intérêt de l'approche $\mathcal{LMI}$ pour tester la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice réelle dans une intersection de régions $\mathcal{LMI}$. En effet, une seule $\mathcal{LMI}$ et donc une seule solution symétrique définie positive à cette $\mathcal{LMI}$ est nécessaire pour attester de la $\mathcal{D}$-stabilité dans une telle région. Plus précisément, considérons la région $\mathcal{D}$ résultant de l'intersection de ϑ sous-régions $\mathcal{LMI}$ $\mathcal{D}_i, i \in \{1, ..., \vartheta\}$ d'ordre l_i toutes définies comme en (III.1) et (III.2) avec $\alpha = \alpha_i, \beta = \beta_i, l = l_i, \forall i \in \{1, ..., \vartheta\}$. Les valeurs propres d'une matrice réelle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ appartiennent à $\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe une matrice $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, symétrique définie positive, telle que [CG1996] :*

$$M_{\mathcal{D}_i}(A, X) = \alpha_i \otimes X + \beta_i \otimes (AX) + \beta_i^* \otimes (AX)^* < 0, \forall i \in \{1, ..., \vartheta\} \tag{III.5}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$M_{\mathcal{D}}(A,X) \;=\; \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^* \otimes (AX)^* \;=\; \operatorname*{diag}_{i=1,\ldots,\vartheta} \; M_{\mathcal{D}_i}(A,X) \;<\; 0 \tag{III.6}$$

où :

$$\alpha \;=\; \operatorname*{diag}_{i=1,\ldots,\vartheta} \;\alpha_i \;\;;\;\; \beta \;=\; \operatorname*{diag}_{i=1,\ldots,\vartheta} \;\beta_i \tag{III.7}$$

Ceci montre que l'approche $\mathcal{LMI}$ permet de considérer la même matrice X pour toutes les sous-régions de l'intersection tout en préservant la nécessité de la condition de $\mathcal{D}$-stabilité. Si l'on compare, par exemple, avec l'approche Lyapunov, on constate qu'il faudrait résoudre ϑ équations de Lyapunov généralisées relatives aux sous-régions de l'intersection (sous réserve que ces régions aient une formulation polynomiale) et obtenir ϑ solutions respectives distinctes afin d'attester de la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice. Il n'existe pas de résultat théorique affirmant qu'une solution commune à toutes ces équations de Lyapunov généralisées existe dans le cas où la matrice est $\mathcal{D}$-stable.
On voit également clairement dans l'inégalité présente en (III.6) que $\mathcal{D}$ peut elle-même être formulée comme une région $\mathcal{LMI}$, c'est-à-dire comme en (III.1) et (III.2) avec α et β mentionnés ci-dessus. A ce titre, les résultats du prochain paragraphe sont applicables à ce type de régions.

III.2.3 Bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice réelle incertaine

Ce paragraphe est consacré à l'analyse en $\mathcal{D}$-stabilité de la matrice réelle incertaine $\mathbf{A} = A + E$. Nous supposons que les valeurs propres de A sont déjà contenues dans une région $\mathcal{LMI}$ appelée $\mathcal{D}$ et nous recherchons une condition suffisante de $\mathcal{D}$-stabilité de $\mathbf{A}$. Bien entendu, la condition obtenue dans le cas d'une incertitude non structurée est différente de celle obtenue dans le cas d'une incertitude structurée. Cependant, avant de donner ces deux conditions, nous introduisons les hypothèses préliminaires suivantes : soient une matrice inversible quelconque $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que l'on puisse définir la matrice $\mathcal{A} = TAT^{-1}$ semblable à A et une matrice $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, symétrique définie positive vérifiant :

$$\mathcal{M} \;=\; \alpha \otimes X \;+\; \beta \otimes (\mathcal{A}X) \;+\; \beta^* \otimes (\mathcal{A}X)^* \;<\; 0 \tag{III.8}$$

L'existence d'une telle matrice X est une CNS d'appartenance des valeurs propres de $\mathcal{A}$, donc de A, à la région $\mathcal{LMI}$ $\mathcal{D}$ définie comme en (III.1) et (III.2).
En outre, nous définissons aussi la matrice $\mathcal{N} = (-\mathcal{M})^{-1/2}$.

Cas d'une incertitude non structurée

Nous considérons ici que la structure de la matrice d'incertitude E est totalement inconnue et nous établissons une borne sur la norme spectrale de E qui garantit la

$\mathcal{D}$-stabilité de $\mathbf{A}$.

Théorème III.2 *: Soit $\mathcal{D}$ une région $\mathcal{LMI}$ définie par (III.1) et (III.2). La matrice incertaine $\mathbf{A} = (A + E) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}$-stable si la matrice nominale A est $\mathcal{D}$-stable (c'est-à-dire s'il existe une matrice réelle $X = X^* > 0$ telle que (III.8) est vérifiée) et si :*

$$\|E\|_2 = \bar{\sigma}(E) < \rho_u(T) = \frac{1}{2\bar{\sigma}(\mathcal{N}(\mathbf{I}_l \otimes T))\bar{\sigma}((\beta \otimes (T^{-1}X))\mathcal{N})} \tag{III.9}$$

Démonstration : (III.9) équivaut à :

$$\begin{gathered}
2\bar{\sigma}(\mathcal{N}(\mathbf{I}_l \otimes T))\bar{\sigma}(E)\bar{\sigma}((\beta \otimes (T^{-1}X))\mathcal{N}) < 1 \\
\Rightarrow 2\bar{\sigma}(\mathcal{N}(\mathbf{I}_l \otimes T)(\mathbf{I}_l \otimes E)(\beta \otimes (T^{-1}X))\mathcal{N}) < 1 \\
\Leftrightarrow 2\bar{\sigma}(\mathcal{N}(\beta \otimes (TET^{-1}X))\mathcal{N}) < 1 \\
\Rightarrow \bar{\lambda}\{\mathcal{N}[\beta \otimes (TET^{-1}X) + \beta^* \otimes (XT^{-*}E^*T^*)]\mathcal{N}\} < 1 \\
\Leftrightarrow \beta \otimes (TET^{-1}X) + \beta^* \otimes (XT^{-*}E^*T^*) < \mathcal{N}^{-2} = -\mathcal{M} \\
\Leftrightarrow \beta \otimes (TET^{-1}X) + \beta^* \otimes (XT^{-*}E^*T^*) + \\
\alpha \otimes X + \beta \otimes (TAT^{-1}X) + \beta^* \otimes (XT^{-*}A^*T^*) < 0 \\
\Leftrightarrow \alpha \otimes X + \beta \otimes (T(A+E)T^{-1}X) + \beta^* \otimes (XT^{-*}(A+E)^*T^*) < 0
\end{gathered}$$

$\Leftrightarrow T(A+E)T^{-1}$ est $\mathcal{D}$ -stable par application du théorème III.1.
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ est $\mathcal{D}$-stable. □

Remarque III.3 *: La borne $\rho_u(T)$ donnée par (III.9) dépend de la matrice de similarité T. Les degrés de liberté offerts par T seront utilisés plus tard dans la partie III.5 pour améliorer la valeur de la borne.*

Cas d'une incertitude structurée

Nous supposons ici que nous connaissons la structure de la matrice incertaine. Cette dernière est définie en (I.28). Nous proposons un théorème présentant une borne sur $\max_h \max_\delta |q_{h,\delta}|$ qui garantit la $\mathcal{D}$-stabilité de $\mathbf{A}(\delta)$ quand les valeurs propres de A se trouvent déjà à l'intérieur de la région $\mathcal{LMI}$ $\mathcal{D}$.

Théorème III.3 *: Soit $\mathcal{D}$ la région $\mathcal{LMI}$ définie par (III.1) et (III.2). La matrice incertaine $\mathbf{A}(\delta) = (A + \sum_{h=1}^{\zeta} q_{h,\delta}E_h) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}$-stable si la matrice nominale $A = \mathbf{A}(\hat{\delta})$ est $\mathcal{D}$-stable (c'est-à-dire s'il existe une matrice réelle $X = X^* > 0$ telle que (III.8) est vérifiée) et si :*

$$\max_h \max_\delta |q_{h,\delta}| \, < \, \rho_s(T) \, = \, \frac{1}{\bar{\sigma}\{\sum_{h=1}^{\zeta} |\mathcal{N}[\beta \otimes (TE_hT^{-1}X) + \beta^* \otimes (TE_hT^{-1}X)^*]\mathcal{N}|\}} \tag{III.10}$$

Démonstration : (III.10) équivaut à :

$$\max_h \max_\delta |q_{h,\delta}| \bar{\sigma}\{\sum_{h=1}^{\zeta} |\mathcal{N}[\beta \otimes (TE_hT^{-1}X) + \beta^* \otimes (XT^{-*}E_h^*T^*)]\mathcal{N}|\} \, < \, 1$$

$$\Rightarrow \, \bar{\sigma}\{\sum_{h=1}^{\zeta} \{q_{h,\delta}\mathcal{N}[\beta \otimes (TE_hT^{-1}X) \, + \, \beta^* \otimes (XT^{-*}E_h^*T^*)]\mathcal{N}\}\} \, < \, 1$$

$$\Leftrightarrow \, \bar{\sigma}\{\mathcal{N}[\sum_{h=1}^{\zeta} \{\beta \otimes (Tq_{h,\delta}E_hT^{-1}X) \, + \, \beta^* \otimes (XT^{-*}q_{h,\delta}E_h^*T^*)\}]\mathcal{N}\} \, < \, 1$$

$$\Rightarrow \, \bar{\lambda}\{\mathcal{N}[\beta \otimes (\sum_{h=1}^{\zeta} Tq_{h,\delta}E_hT^{-1}X) \, + \, \beta^* \otimes (\sum_{h=1}^{\zeta} XT^{-*}q_{h,\delta}E_h^*T^*)]\mathcal{N}\} \, < \, 1$$

$$\Leftrightarrow \beta \otimes (T(\sum_{h=1}^{\zeta} q_{h,\delta}E_h)T^{-1}X) \, + \, \beta^* \otimes (XT^{-*}(\sum_{h=1}^{\zeta} q_{h,\delta}E_h^*)T^*) \, < \, \mathcal{N}^{-2} \, = \, -\mathcal{M}$$

$$\Leftrightarrow \, \alpha \otimes X \, + \, \beta \otimes (TAT^{-1}X) \, + \, \beta^* \otimes (XT^{-*}A^*T^*) \, +$$
$$\beta \otimes (TET^{-1}X) \, + \, \beta^* \otimes (XT^{-*}E^*T^*) \, < \, 0$$

$$\Leftrightarrow \, \alpha \otimes X \, + \, \beta \otimes (T(A+E)T^{-1}X) \, + \, \beta^* \otimes (T(A+E)T^{-1}X)^* \, < \, 0$$

$\Leftrightarrow$ $T(A+E)T^{-1}$ est $\mathcal{D}$-stable par application du théorème III.1.

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ est $\mathcal{D}$-stable. □

Remarque III.4 *: La borne précédente est valable pour la structure simplifiée d'incertitude définie en (I.30). Elle devient alors une borne majorante de* $\max_\xi |\delta_\xi|$ *et son expression est déduite de celle donnée en (III.10) en remplaçant* h *par* ξ*,* $q_{h,\delta}$ *par* δ_ξ *et* ζ *par* τ*.*

Remarque III.5 *: La borne* $\rho_s(T)$ *donnée par (III.10) dépend de la matrice de similarité* T*. Les degrés de liberté offerts par* T *seront utilisés plus tard dans la partie III.5 pour améliorer la valeur de la borne.*

III.3 $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice complexe dans une région $\mathcal{GLMI}$

Dans cette partie, nous étendons les résultats concernant les bornes introduites dans la partie III.2 à l'étude de la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice complexe incertaine dans une région $\mathcal{GLMI}$. Nous rappelons d'abord la définition d'une région $\mathcal{GLMI}$ ainsi que la CNS d'appartenance des valeurs propres d'une matrice complexe A à une telle région [Chi1996]. Puis, nous envisageons le cas d'une matrice complexe incertaine $\mathbf{A} = A+E$. En supposant que les valeurs propres de A sont déjà contenues dans $\mathcal{D}$, une région $\mathcal{GLMI}$, nous proposons une borne sur la norme spectrale de la matrice d'incertitude E (pour une incertitude non structurée) ou sur le module de la plus grande perturbation acceptée dans les composantes de A (pour une incertitude structurée définie comme en (I.28)) telle que, si cette borne n'est pas dépassée, la $\mathcal{D}$-stabilité de $\mathbf{A}$ est garantie.

III.3.1 Définition d'une région $\mathcal{GLMI}$

Un sous ensemble $\mathcal{D}$ du plan complexe est appelé région $\mathcal{GLMI}$ d'ordre l s'il existe θ_k, ψ_k, H_k et J_k ($\forall k \in \{1, ..., m\}$), matrices complexes carrées d'ordre l, telles que [Chi1996] :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m, f_{\mathcal{D}}(z, w) < 0, g_{\mathcal{D}}(w) \ = \ \mathbf{0}_l\} \qquad \text{(III.11)}$$

où les matrices $f_{\mathcal{D}}(z, w)$ et $g_{\mathcal{D}}(w)$ sont définies par :

$$f_{\mathcal{D}}(z, w) \ = \ \sum_{k=1}^{m}(\theta_k w_k \ + \ \theta_k^* \tilde{w}_k \ + \ \psi_k z w_k \ + \ \psi_k^* \tilde{w}_k \tilde{z}) \qquad \text{(III.12)}$$

$$g_{\mathcal{D}}(w) \ = \ \sum_{k=1}^{m}(H_k w_k + J_k \tilde{w}_k) \qquad \text{(III.13)}$$

III.3.2 CNS de $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice complexe dans une région $\mathcal{GLMI}$

Dans ce paragraphe, nous rappelons un théorème sur la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice complexe quand $\mathcal{D}$ est une région $\mathcal{GLMI}$. Ce théorème, issu de [Chi1996], sera utilisé par la suite pour établir des bornes de robustesse.

Théorème III.4 *[Chi1996] : Soient une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $\mathcal{D}$, une région $\mathcal{GLMI}$ définie par (III.11), (III.12) et (III.13). A est $\mathcal{D}$-stable si et seulement s'il existe un ensemble de m matrices $X_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\forall k \in \{1, ..., m\}$, tel que :*

$$M_{\mathcal{D}}(A, \{X_k\}) \; < \; 0 \tag{III.14}$$

$$N_{\mathcal{D}}(\{X_k\}) \; = \; \mathbf{0}_{nl} \tag{III.15}$$

où :

$$M_{\mathcal{D}}(A, \{X_k\}) \; = \; \sum_{k=1}^{m} (\theta_k \otimes X_k \; + \; \theta_k^* \otimes X_k^* \; + \; \psi_k \otimes (AX_k) \; + \; \psi_k^* \otimes (AX_k)^*) \tag{III.16}$$

$$N_{\mathcal{D}}(\{X_k\}) \; = \; \sum_{k=1}^{m} (H_k \otimes X_k \; + \; J_k \otimes X_k^*) \tag{III.17}$$

Démonstration : voir [Chi1996].

Remarque III.6 *: Les matrices $M_{\mathcal{D}}(A, \{X_k\})$ et $N_{\mathcal{D}}(\{X_k\})$ peuvent être immédiatement déduites de l'écriture de $f_{\mathcal{D}}(z, w)$ et $g_{\mathcal{D}}(w)$ en effectuant les substitutions suivantes :*

$$(w_k, \tilde{w}_k, zw_k, \tilde{w}_k \tilde{z}) \; \leftrightarrow \; (\otimes X_k, \otimes X_k^*, \otimes(AX_k), \otimes(AX_k)^*) \tag{III.18}$$

III.3.3 Bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice complexe incertaine

Dans ce paragraphe, nous considérons une matrice incertaine $\mathbf{A} = A + E$. Nous supposons que A est $\mathcal{D}$-stable, $\mathcal{D}$ étant une région $\mathcal{GLMI}$ et nous recherchons une condition suffisante pour que $\mathbf{A}$ soit également $\mathcal{D}$-stable. Comme dans la partie concernant les régions $\mathcal{LMI}$, les deux types d'incertitude (non structurée et structurée) sont envisagés. Mais nous devons d'abord introduire de nouvelles hypothèses préliminaires : soient $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, toujours une matrice réelle inversible quelconque et la matrice $\mathcal{A} = TAT^{-1}$. Nous supposons maintenant que $\{X_k \in \mathbb{C}^{n \times n}, \, k \in \{1, ..., m\}\}$ est un ensemble de matrices vérifiant :

$$\mathcal{M} \; = \; \sum_{k=1}^{m} \{\theta_k \otimes X_k \; + \; \theta_k^* \otimes X_k^* \; + \; \psi_k \otimes (\mathcal{A}X_k) \; + \; \psi_k^* \otimes (\mathcal{A}X_k)^*\} \; < \; 0 \tag{III.19}$$

ainsi que (III.15) avec (III.17). L'existence d'un tel ensemble de matrices $\{X_k, \, k \in \{1, ..., m\}\}$ est une CNS de $\mathcal{D}$-stabilité de $\mathcal{A}$ et donc de A, $\mathcal{D}$ étant une région $\mathcal{GLMI}$ définie comme en (III.11), (III.12) et (III.13).
En outre, nous continuons à poser $\mathcal{N} = (-\mathcal{M})^{-1/2}$.

Cas d'une incertitude non structurée

Comme en §$III.2.3$, nous considérons que la structure de E est inconnue. La seule différence est que, puisque nous traitons le cas de matrices complexes, E est supposée complexe également. Nous établissons ici une borne sur la norme spectrale de E de manière à garantir la $\mathcal{D}$-stabilité de $\mathbf{A}$.

Théorème III.5 *: Soit $\mathcal{D}$ une région $\mathcal{GLMI}$ définie par (III.11), (III.12) et (III.13). La matrice incertaine $\mathbf{A} = (A + E) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}$-stable si la matrice nominale A est $\mathcal{D}$-stable (c'est-à-dire s'il existe un ensemble de matrices complexes $\{X_k,\, k \in \{1, ..., m\}\}$ tel que (III.19) et (III.15) avec (III.17) sont vérifiées) et si :*

$$\|E\|_2 \;=\; \bar{\sigma}(E) \;=\; \mu_u(T) \;=\; \frac{1}{2\bar{\sigma}(\mathcal{N}(\mathbf{I}_l \otimes T))\bar{\sigma}([\sum_{k=1}^{m} \psi_k \otimes (T^{-1}X_k)]\mathcal{N})} \tag{III.20}$$

Démonstration : (III.20) équivaut à :

$$2\bar{\sigma}(\mathcal{N}(\mathbf{I}_l \otimes T))\bar{\sigma}(E)\bar{\sigma}([\sum_{k=1}^{m} \psi_k \otimes (T^{-1}X_k)]\mathcal{N}) \;<\; 1$$

$$\Rightarrow\; 2\bar{\sigma}(\mathcal{N}(\mathbf{I}_l \otimes T)(\mathbf{I}_l \otimes E)[\sum_{k=1}^{m}\{\psi_k \otimes (T^{-1}X_k)\}]\mathcal{N}) \;<\; 1$$

$$\Leftrightarrow\; 2\bar{\sigma}(\mathcal{N}[\sum_{k=1}^{m}\{\psi_k \otimes (TET^{-1}X_k)\}]\mathcal{N}) \;<\; 1$$

$$\Rightarrow\; \bar{\lambda}\{\mathcal{N}[\sum_{k=1}^{m}\{\psi_k \otimes (TET^{-1}X_k) \;+\; \psi_k^* \otimes (X_k^*T^{-*}E^* * T^*)\}]\mathcal{N}\} \;<\; 1$$

$$\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{m}\{\psi_k \otimes (TET^{-1}X_k) \;+\; \psi_k^* \otimes (X_k^*T^{-*}E^*T^*)\} \;<\; \mathcal{N}^{-2} \;=\; -\mathcal{M}$$

$$\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{m}\{\theta_k \otimes X_k + \theta_k^* \otimes X_k^* + \psi_k \otimes (TAT^{-1}X_k) + \psi_k^* \otimes (X_k^*T^{-*}A^*T^*)\}+$$

$$\sum_{k=1}^{m}\{\psi_k \otimes (TET^{-1}X_k) + \psi_k^* \otimes (X_k^*T^{-*}E^*T^*)\} < 0$$

$$\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{m}\{\theta_k \otimes X_k + \theta_k^* \otimes X_k^* + \psi_k \otimes (T(A+E)T^{-1}X_k) + \psi_k^* \otimes (T(A+E)T^{-1}X_k)^*\} < 0$$

$\Leftrightarrow$ $T(A+E)T^{-1}$ est $\mathcal{D}$-stable par application du théorème III.4 (puisque (III.15) est vérifiée avec (III.17)).

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ est $\mathcal{D}$-stable. $\square$

Remarque III.7 *: Comme pour les régions $\mathcal{LMI}$, l'expression de la borne précédente donneé par (III.20) fait apparaître une dépendance en T. Cette matrice de similarité offre des degrés de liberté qui seront utilisés dans la partie III.5 pour améliorer la valeur de la borne.*

Cas d'une incertitude structurée

Dans ce paragraphe, nous supposons que E a maintenant une structure dépendant d'un vecteur de paramètres δ comme défini en §I.4.1. La seule différence est que, puisque nous sommes ici intéressés par la $\mathcal{D}$-stabilité des matrices complexes, nous supposons que les matrices E_h, $\forall h \in \{1, ..., \zeta\}$ introduites en §I.4.1 sont des éléments de $\mathbb{C}^{n\times n}$.
Comme en §I.4.1, $\mathbf{A}(\delta)$ peut décrire un polytope de matrices avec la définition simplifiée de $E(\delta)$ donnée par (I.30).

Nous donnons ici un théorème présentant une condition suffisante de $\mathcal{D}$-stabilité de $\mathbf{A}(\delta)$ lorsque $\mathcal{D}$ est une région $\mathcal{GLMI}$.

Théorème III.6 *: Soit $\mathcal{D}$, une région $\mathcal{GLMI}$ définie par (III.11), (III.12) et (III.13). La matrice incertaine $\mathbf{A}(\delta) = (A + \sum_{h=1}^{\zeta} q_{h,\delta} E_h) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}$-stable si la matrice nominale A est $\mathcal{D}$-stable (c'est-à-dire s'il existe un ensemble de matrices complexes $\{X_k,\ k \in \{1, ..., m\}\}$ tel que (III.19) et (III.15) avec (III.17) sont vérifiées) et si :*

$$\max_h \max_\delta |q_{h,\delta}| < \mu_s(T) = \frac{1}{\bar{\sigma}\{\sum_{h=1}^{\zeta} |\mathcal{N}[\sum_{k=1}^{m}\{\psi_k \otimes (TE_hT^{-1}X_k) + \psi_k^* \otimes (TE_hT^{-1}X_k)^*\}]\mathcal{N}|\}} \tag{III.21}$$

Démonstration : (III.21) équivaut à :

$$\max_h \max_\delta |q_{h,\delta}| \bar{\sigma}\{\sum_{h=1}^{\zeta} |\mathcal{N}[\sum_{k=1}^{m}\{\psi_k \otimes (TE_hT^{-1}X_k) + \psi_k^* \otimes (TE_hT^{-1}X_k)^*\}]\mathcal{N}|\} < 1$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}\{\sum_{h=1}^{\zeta}\{q_{h,\delta}\mathcal{N}[\sum_{k=1}^{m}\{\psi_k \otimes (TE_hT^{-1}X_k) + \psi_k^* \otimes (TE_hT^{-1}X_k)^*\}]\mathcal{N}\}\} < 1$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}\{\mathcal{N}[\sum_{h=1}^{\zeta}\sum_{k=1}^{m}\{\psi_k \otimes (Tq_{h,\delta}E_hT^{-1}X_k) + \psi_k^* \otimes (X_kT^{-*}q_{h,\delta}E_h^*T^*)\}]\mathcal{N}\} < 1$$

$$\Leftrightarrow\ \bar{\sigma}\{\mathcal{N}[\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=1}^{\zeta}\{\psi_k \otimes (Tq_{h,\delta}E_hT^{-1}X_k)\ +\ \psi_k^* \otimes (X_k^*T^{-*}q_{h,\delta}E_h^*T^*)\}]\mathcal{N}\}\ <\ 1$$

$$\Rightarrow\ \bar{\lambda}\{\sum_{k=1}^{m}\{\psi_k \otimes (T(\sum_{h=1}^{\zeta}q_{h,\delta}E_h)T^{-1}X_k)\ +\ \psi_k^* \otimes (X_k^*T^{-*}(\sum_{h=1}^{\zeta}q_{h,\delta}E_h^*)T^*)\}\}\ <\ \mathcal{N}^{-2}\ =\ -\mathcal{M}$$

$$\Leftrightarrow\ \sum_{k=1}^{m}\{\theta_k \otimes X_k\ +\ \theta_k^* \otimes X_k^*\ +\ \psi_k \otimes (TAT^{-1}X_k)\ +\ \psi_k^* \otimes (X_k^*T^{-*}A^*T^*)\}\ +$$

$$\sum_{k=1}^{m}\psi_k \otimes (TET^{-1}X_k)\ +\ \psi_k^* \otimes (X_k^*T^{-*}E^*T^*)\}\ <\ 0$$

$$\Leftrightarrow\ \sum_{k=1}^{m}\{\theta_k \otimes X_k + \theta_k^* \otimes X_k^* + \psi_k \otimes (T(A+E)T^{-1}X_k) + \psi_k^* \otimes (T(A+E)T^{-1}X_k)^*\} < 0$$

$$\Leftrightarrow\ T(A+E)T^{-1} \text{ est } \mathcal{D}\text{-stable par application du théorème III.4}$$
$$\text{(puisque (III.15) est vérifiée avec (III.17))}$$
$$\Leftrightarrow\ \mathbf{A} \text{ est } \mathcal{D}\text{-stable} \qquad \square$$

Remarque III.8 *: Comme pour la $\mathcal{D}$-stabilité dans les régions $\mathcal{LMI}$, on peut envisager le cas de la structure d'incertitude simplifiée définie en (I.30). La condition suffisante devient une borne sur $\max_{\xi}|\delta_\xi|$ et son expression est obtenue à partir de celle donnée en (III.21) en remplaçant h par ξ, $q_{h,\delta}$ par δ_ξ et ζ par τ.*

Remarque III.9 *: Comme pour la borne relative aux régions $\mathcal{LMI}$, l'expression de la borne précédente donnée par (III.21) dépend de la matrice de similarité T. Cette matrice fournit des degrés de liberté qui seront utilisés dans la partie III.5 pour améliorer la valeur de la borne.*

III.4 Application à la $\mathcal{D}$-stabilité dans une union de sous-régions convexes

Nous devons garder présent à l'esprit notre intérêt pratique pour la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice réelle modélisant l'évolution dynamique du vecteur d'état d'un système linéaire. A première vue, les résultats des parties III.2 et III.3 paraissent plutôt éloignés des problèmes classiques de commande ou d'analyse robuste. Ceci s'explique par le fait que la plupart des régions de placement sont, en pratique, décrites au travers d'une formulation polynomiale (voir par exemple [Gut1979, GJ1981] et §I.5.3).
Nous avons vu, au chapitre précédent, que la définition des régions polynomiales a déjà conduit à l'établissement de bornes de robustesse préservant la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice en présence d'une incertitude additive, structurée ou pas. Le propos de cette partie est d'utiliser l'approche $\mathcal{LMI}$ précédemment introduite pour montrer que les

bornes proposées dans les paragraphes III.2.3 et III.3.3 peuvent être appliquées à un vaste ensemble de régions $\mathcal{D}$ correspondant à des problèmes pratiques d'analyse robuste. Ces régions résultent en realité d'unions de sous-régions polynomiales convexes, pas nécessairement symétriques par rapport à l'axe réel. Ces unions peuvent être elle-mêmes, dans leur ensemble, symétriques, puisque nous traitons, en pratique, le cas de matrices d'état réelles, dont les spectres sont auto-conjugués. Nous montrons dans cette partie la grande diversité des régions pouvant être envisagées en fournissant une procédure systématique pour décrire de telles régions et calculer les bornes associées.
Le premier paragraphe est consacré au moyen par lequel nombre de ces régions simples peuvent être formulées comme des régions $\mathcal{GLMI}$. Ensuite, le second paragraphe est dédié à l'étude de la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice lorsque $\mathcal{D}$ appartient à un vaste ensemble d'unions de sous-régions qui peuvent être décrites à travers une formulation $\mathcal{GLMI}$.

III.4.1 Exemples de régions simples

Nous décrivons ici des régions polynomiales telles que celles définies en (I.38), souvent utilisées dans les problèmes de placement de pôles, et qui peuvent être également décrites par une formulation $\mathcal{GLMI}$.

Régions de premier ordre

Considérons l'ensemble $\mathcal{C}_1 = \mathcal{P}_1$ des régions polynomiales de premier ordre. Tout élément $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}_1$ est décrit par :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) = c_{00} + c_{10}z + c_{01}\tilde{z} < 0\} \tag{III.22}$$

$\mathcal{D}$ peut aussi s'exprimer de la manière suivante :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists w_1 \in \{\mathbb{R}^+/\{0\}\} \,:\, w_1 f(z) < 0\} \tag{III.23}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists w_1 \in \{\mathbb{C}/\{0\}\} \,:\, w_1 f(z) < 0,\, w_1 + \tilde{w}_1 > 0, w_1 - \tilde{w}_1 = 0\} \tag{III.24}$$

La formulation (III.24) est équivalente à la formulation donnée par (III.11), (III.12) et (III.13) avec $m = 1$, $l = 2$ et

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} c_{00} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \;;\; \psi_1 = \begin{bmatrix} c_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;;\; H_1 = -J_1 = \mathbf{I}_2 \tag{III.25}$$

ce qui définit $\mathcal{D}$ comme une région $\mathcal{GLMI}$. Les bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste (III.20) et (III.21) peuvent donc être utilisées pour une telle région.

Remarque III.10 *: Toute région polynomiale de premier ordre, symétrique par rapport à l'axe réel, est une région $\mathcal{LMI}$ puisque $f(\tilde{z}) = \tilde{f}(z)$ implique $c_{00} = \alpha = \alpha^* \in \mathbb{R}$ et $c_{10} = \beta \in \mathbb{R}$. Les bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste (III.9) et (III.10) peuvent donc être utilisées pour une telle région.*

Régions de deuxième ordre

Considérons maintenant l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des régions polynomiales de deuxième ordre $\mathcal{D}$ pouvant être décrites par :

$$\mathcal{D} = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, \exists\{\alpha_1; \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^4 \;:\; -\gamma(z) + \frac{\Gamma(z)\Gamma^*(z)}{\gamma(z)} < 0\,,$$
$$\gamma(z) = \gamma^*(z) = -\alpha_1 - \beta_1 z - \tilde{\beta}_1 \tilde{z} \in \{\mathbb{R}^+/\{0\}\}\,,\, \Gamma(z) = \alpha_2 + \beta_2 z + \tilde{\beta}_3 \tilde{z}\,\} \tag{III.26}$$

Remarque III.11 *: $\mathcal{C}_2$ est seulement un sous-ensemble de $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des régions polynomiales de deuxième ordre ce qui signifie que (III.26) n'est pas la formulation la plus générale des régions polynomiales de deuxième ordre. Cependant, elle recouvre une vaste gamme de régions symétriques souvent utilisées en automatique (telles que les secteurs classiques et hyperboliques, les disques, les ellipses, les bandes verticales et horizontales) ainsi que des régions non symétriques telles que, par exemple, des disques ou des ellipses excentrés par rapport à l'axe réel.*

La région $\mathcal{D}$ décrite par (III.26) est une région $\mathcal{GLMI}$. En effet, en appliquant la technique du complément de Schur, (III.26) équivaut à :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} | \exists\{\alpha_1; \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^4 : f(z) = \begin{bmatrix} -\gamma(z) & \Gamma(z) \\ \Gamma^*(z) & -\gamma(z) \end{bmatrix} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} z + \hat{\beta}^* \tilde{z} < 0\} \tag{III.27}$$

où :

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \tilde{\alpha}_2 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{bmatrix} \tag{III.28}$$

Grâce à un raisonnement similaire à celui utilisé dans le cas des régions de premier ordre, il est facile de constater que la formulation de $\mathcal{D}$ permet de vérifier (III.11), (III.12) et (III.13) avec $m = 1$, $l = 3$ et :

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\alpha} & \mathbf{0}_{2,1} \\ \mathbf{0}_{1,2} & -1 \end{bmatrix} \;;\; \psi_1 = \begin{bmatrix} \hat{\beta} & \mathbf{0}_{2,1} \\ \mathbf{0}_{1,2} & 0 \end{bmatrix} \;;\; H_1 = -J_1 = \mathbf{I}_3 \tag{III.29}$$

ce qui définit $\mathcal{D}$ comme une région $\mathcal{GLMI}$. Les bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste (III.20) et (III.21) peuvent donc être calculées pour une telle région.

Remarque III.12 : *Toute région convexe polynomiale de deuxième ordre, symétrique par rapport à l'axe réel et pouvant être décrite par (III.26), est une région $\mathcal{LMI}$ puisque :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Gamma(\tilde{z}) & = & \tilde{\Gamma}(z) \\ \gamma(\tilde{z}) & = & \tilde{\gamma}(z) \end{array} \right. \Rightarrow \hat{\alpha} = \alpha = \alpha^* \in \mathbb{R}^{2\times 2},\, \hat{\beta} = \beta \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{III.30}$$

Les bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste (III.9) et (III.10) peuvent donc être calculées pour une telle région.

III.4.2 Exemples d'unions de sous-régions convexes

Dans ce paragraphe, nous sommes intéressés par la $\mathcal{D}$-stabilité d'une matrice lorsque $\mathcal{D}$ est une union de certaines sous-régions convexes. Nous montrons que de nombreuses régions de ce type peuvent être décrites par une formulation $\mathcal{GLMI}$. Nous pouvons donc appliquer à ces régions les résultats concernant les bornes de robustesse.

Formulation $\mathcal{GLMI}$

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des régions $\mathcal{D}$ pouvant être décrites par :

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{D}_k \tag{III.31}$$

où les sous-régions $\mathcal{D}_k$ peuvent être définies de la manière suivante :

$$\mathcal{D}_k \in \mathcal{C}_1\, \forall k \in \{1, ..., p\} \tag{III.32}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{D}_k = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f_k(z) = \alpha_k + \beta_k z + \beta_k^* \tilde{z} < 0\}, \quad \forall k \in \{1, ..., p\} \tag{III.33}$$

et :

$$\mathcal{D}_k \in \mathcal{C}_2\, \forall k \in \{p+1, ..., m\} \tag{III.34}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{D}_k = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f_k(z) = \begin{bmatrix} -\gamma_k(z) & \Gamma_k(z) \\ \Gamma_k^*(z) & -\gamma_k(z) \end{bmatrix} = \alpha_k + \beta_k z + {\beta_k}^* \tilde{z} < 0\,,$$

$$\gamma_k(z) \in \{\mathbb{R}^+/\{0\}\},\, \alpha_k = \begin{bmatrix} \alpha_{k_1} & \alpha_{k_2} \\ \tilde{\alpha}_{k_2} & \alpha_{k_1} \end{bmatrix},\, \beta_k = \begin{bmatrix} \beta_{k_1} & \beta_{k_2} \\ \beta_{k_3} & \beta_{k_1} \end{bmatrix}\}, \quad \forall k \in \{p+1, ..., m\} \tag{III.35}$$

En réalité, $\mathcal{D}$ peut être exprimée comme en (III.11), (III.12) et (III.13) avec $l = 2m - p + 1$ et :

$$\theta_k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \Theta_k & \mathbf{0}_{m-p+1,m} \\ \mathbf{0}_{m,m-p+1} & -\mathcal{E}_k^m \end{bmatrix} ; \tag{III.36}$$

$$\psi_k = \begin{bmatrix} \Psi_k & \mathbf{0}_{m-p+1,m} \\ \mathbf{0}_{m,m-p+1} & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} ; \ H_k = -J_k = \mathcal{E}_{m-p+k+1}^{2m-p+1} \tag{III.37}$$

où les matrices $\mathcal{E}_i^j$ sont carrées d'ordre j avec toutes leurs composantes nulles à l'exception d'un "1" en position (i,i),
où :

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \Psi_k = \begin{bmatrix} \beta_k & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 \end{bmatrix} ; \ \forall k \in \{1, ..., p\} \tag{III.38}$$

(Les matrices Θ_k (et Ψ_k) $\forall k \in \{1, ..., p\}$ sont réelles (respectivement complexes) carrées d'ordre $m - p + 1$. Toutes les composantes non-spécifiées sont nulles et les seules composantes non nulles sont $[\Theta_k]_{\{1,1\}} = \alpha_k$ et $[\Psi_k]_{\{1,1\}} = \beta_k$, $\forall k \in \{1, ..., p\}$, les scalaires α_k et β_k, $\forall k \in \{1, ..., p\}$ étant donnés par (III.33))
et où :

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} \alpha_{k_1} & ... & \alpha_{k_2} & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\alpha}_{k_2} & ... & \alpha_{k_1} & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} ; \Psi_k = \begin{bmatrix} \beta_{k_1} & ... & \beta_{k_2} & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k_3} & ... & \beta_{k_1} & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \ ; \ \forall k \in \{p{+}1, ..., m\} \tag{III.39}$$

(Dans les expressions de (III.39), les matrices Θ_k and Ψ_k sont complexes carrées d'ordre $m - p + 1$. Toutes les composantes non-spécifiées sont nulles. Les composantes clairement exprimées sont $[\Theta_k]_{\{1,1\}}$, $[\Psi_k]_{\{1,1\}}$, $[\Theta_k]_{\{1,k-p+1\}}$, $[\Psi_k]_{\{1,k-p+1\}}$, $[\Theta_k]_{\{k-p+1,1\}}$, $[\Psi_k]_{\{k-p+1,1\}}$, $[\Theta_k]_{\{k-p+1,k-p+1\}}$, $[\Psi_k]_{\{k-p+1,k-p+1\}}$, $\forall k \in \{p+1, ..., m\}$ et sont définies à partir des composantes de α_k et β_k, $\forall k \in \{p{+}1, ..., m\}$ donnés par (III.4.2)).
Ceci définit $\mathcal{D}$ comme une région $\mathcal{GLMI}$.

Justification : cela se déduit de la généralisation d'une procédure proposée dans [Chi1996] pour l'union de disques.
$\mathcal{D}$ donnée en (III.31) peut être décrite ainsi :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} | \exists w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \in \{\mathbb{R}^+/\{0\}\}^m, \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(z,w) \ = \ \sum_{k=1}^{m} w_k f_k(z) \ < \ 0\} \quad \text{(III.40)}$$

L'inégalité apparaissant en (III.40), par application successive du complément de Schur, peut être écrite de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} w_k f_k(z) \ + \sum_{k=p+1}^{m} -w_k\gamma_k(z) & [w_k\Gamma_k(z)]_{p+1\leq k\leq m} \\ \{[w_k\Gamma_k(z)]_{p+1\leq k\leq m}\}^* & \underset{k=\{p+1,\ldots,m\}}{\mathrm{diag}} \ \{-w_k\gamma_k(z)\} \end{bmatrix} < \ 0 \quad \text{(III.41)}$$

où :

$$[w_k\Gamma_k(z)]_{p+1\leq k\leq m} \ = \ [w_{p+1}\Gamma_{p+1}(z), ..., w_m\Gamma_m(z)]$$

Si l'on prend en compte les expressions de $\gamma_k(z)$, $\Gamma_k(z)$, $k \in \{p+1, ..., m\}$ et de $f_k(z)$, $k \in \{1, ..., p\}$, (III.41) équivaut à :

$$\sum_{k=1}^{m}(\Theta_k w_k \ + \ \Psi_k w_k z \ + \ \Psi_k^* \tilde{w}_k \tilde{z}) \ < \ 0 \quad \text{(III.42)}$$

avec Θ_k, Ψ_k, $k \in \{1, ..., m\}$ définis par (III.38) et (III.39).
Comme les scalaires $w_k, k \in \{1, ...m\}$ sont réels, il vient :

$$w_k - \tilde{w}_k = 0, \forall k \in \{1, ..., m\} \quad \text{(III.43)}$$

En prenant également en compte le fait que $w_k \ > \ 0, \forall k \ \in \ \{1, ...m\}$, l'inégalité (III.42) est équivalente à l'inégalité apparaissant en (III.11) avec (III.12) et avec θ_k et ψ_k définis en (III.36).
En outre, (III.43) équivaut à l'égalité présente en (III.11) avec (III.13) et avec H_k and J_k définis en (III.37). □

Bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste relatives à un élément de $\mathcal{C}$

Puisque $\mathcal{D}$ définie en (III.31) est apparue, dans le raisonnement précédent, comme une région $\mathcal{GLMI}$, par application du théorème III.4, une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}$-stable si et seulement s'il existe m matrices $X_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $k \in \{1, ...m\}$, vérifiant (III.14) et (III.15) avec (III.16) et (III.17). Cependant, on peut simplifier ce résultat et oublier les égalités (III.15) et (III.17) en écrivant le corollaire suivant :

Corollaire III.1 *: Soient la matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et la région $\mathcal{D}$ élément de $\mathcal{C}$. La matrice A est $\mathcal{D}$-stable si et seulement s'il existe un ensemble de m matrices $X_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\forall k \in \{1,...,m\}$, hermitiennes définies positives, telles que :*

$$M \;=\; \sum_{k=1}^{m}(\Theta_k \otimes X_k \;+\; \Psi_k \otimes (AX_k) \;+\; \Psi_k^* \otimes (AX_k)^*) \;<\; 0 \qquad \text{(III.44)}$$

Démonstration : ceci est juste une réexpression simplifiée du théorème III.4 pour un type particulier de région $\mathcal{GLMI}$. Brièvement, l'équation (III.15) avec H_k et J_k définis en (III.37), $\forall k \in \{1,...,m\}$ ne traduit rien d'autre que le fait que la matrice X_k, $\forall k \in \{1,...,m\}$ est hermitienne. En outre, (III.14) est une inégalité matricielle bloc-diagonale comportant deux blocs. Seul le premier a été conservé pour obtenir (III.44), le second étant équivalent à la définie positivité des matrices X_k. En d'autres termes, (III.44) se déduit de (III.42) et le fait que les scalaires w_k soient réels positifs contraint les matrices X_k, $k \in \{1,...,m\}$ à être hermitiennes définies positives $\square$.

Remarque III.13 *: L'inégalité matricelle (III.44) se déduit de (III.42) par les substitutions suivantes :*

$$(w_k,\, w_k z, \tilde{w}_k \tilde{z}) \;\leftrightarrow\; (\otimes X_k, \otimes(AX_k), \otimes(AX_k)^*) \qquad \text{(III.45)}$$

Le corollaire ci-dessus conduit à de légères modifications des expressions des bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste d'une matrice incertaine. Ces modifications sont données par les corollaires suivants, pour lesquels nous sommes amenés à faire les suppositions préliminaires suivantes : $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ étant toujours une matrice inversible quelconque permettant de définir la matrice $\mathcal{A} = TAT^{-1}$, nous supposons maintenant que $\{X_k \in \mathbb{C}^{n\times n},\, k \in \{1,...,m\}\}$ est un ensemble de matrices *hermitiennes définies positives* vérifiant :

$$\mathcal{M} \;=\; \sum_{k=1}^{m}\{\Theta_k \otimes X_k \;+\; \Psi_k \otimes (\mathcal{A}X_k) \;+\; \Psi_k^* \otimes (\mathcal{A}X_k)^*\} \;<\; 0 \qquad \text{(III.46)}$$

L'existence d'un tel ensemble de matrices $\{X_k,\, k \in \{1,...,m\}\}$ est une CNS de $\mathcal{D}$-stabilité de $\mathcal{A}$, donc de A, $\mathcal{D}$ appartenant à $\mathcal{C}$.
En outre, nous continuons à poser $\mathcal{N} = (-\mathcal{M})^{-1/2}$.

Corollaire III.2 *: Soit $\mathcal{D}$ un élément de $\mathcal{C}$. La matrice incertaine $\mathbf{A} = (A+E) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}$-stable si la matrice nominale A est $\mathcal{D}$-stable (c'est à dire s'il existe un ensemble de matrices complexes $\{X_k = X_k^* > 0,\, k \in \{1,...,m\}\}$ vérifiant (III.46)) et si :*

$$\|E\|_2 = \bar{\sigma}(E) = \hat{\mu}_u(T) = \frac{1}{2\bar{\sigma}(\mathcal{N}(\mathbf{I}_{m-p+1} \otimes T))\bar{\sigma}([\sum_{k=1}^{m}\{\Psi_k \otimes (T^{-1}X_k)\}]\mathcal{N})} \tag{III.47}$$

Démonstration : similaire à la démonstration du théorème III.5. □

Corollaire III.3 *: Soit $\mathcal{D}$ un élément de $\mathcal{C}$. La matrice incertaine $\mathbf{A}(\delta) = (A + \sum_{h=1}^{\zeta} q_{h,\delta}E_h) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}$-stable si la matrice nominale A est $\mathcal{D}$-stable (c'est à dire s'il existe un ensemble de matrices complexes $\{X_k = X_k^* > 0,\ k \in \{1, ..., m\}\}$ vérifiant (III.46)) et si :*

$$\max_h \max_\delta |q_{h,\delta}| < \hat{\mu}_s(T) = \frac{1}{\bar{\sigma}\{\sum_{h=1}^{\zeta} |\mathcal{N}[\sum_{k=1}^{m}\{\Psi_k \otimes (TE_hT^{-1}X_k) + \Psi_k^* \otimes (TE_hT^{-1}X_k)^*\}]\mathcal{N}|\}} \tag{III.48}$$

Démonstration : similaire à la démonstration du théorème III.6. □

Remarque III.14 *: Dans le cas de matrices réelles, il est préférable d'envisager la $\mathcal{D}$-stabilité dans une région $\mathcal{D}$ symétrique par rapport à l'axe réel. Une telle région peut tout-à-fait répondre à la définition de (III.31). En réalité, si une sous-région $\mathcal{D}_k$ de $\mathcal{D}$ est non symétrique, la sous-région symétrique de $\mathcal{D}_k$ par rapport à l'axe réel doit aussi appartenir à $\mathcal{D}$. L'union $\mathcal{D}$ est alors symétrique dans son ensemble et les trois corollaires ci-dessus sont applicables. En pratique, ceci est particulièrement utile pour considérer des paires d'ellipses ou de disques excentrés par rapport à l'axe réel.*

III.5 Aspects numériques

Cette partie est consacrée à la recherche de plusieurs méthodes permettant de mettre en oeuvre les résultats des parties précédentes, dans le but, non seulement de calculer les bornes ρ_u, ρ_s, $\hat{\mu}_u$ and $\hat{\mu}_s$ relatives à des matrices d'état de modèles linéaires incertains, mais aussi d'améliorer leurs valeurs afin de réduire le conservatisme de ces critères d'analyse robuste.
Plus précisément, l'idée est de déterminer des solutions aux systèmes $\mathcal{LMI}$ (III.8) ou (III.46) afin, soit de calculer une borne, soit d'améliorer sa valeur de telle sorte qu'elle se rapproche de l'idéale condition nécessaire et suffisante. Bien entendu, plusieurs cas doivent être envisagés selon que l'on a affaire à une incertitude structurée ou pas, ou encore selon la nature de la région choisie, $\mathcal{GLMI}$ ou simplement $\mathcal{LMI}$. Les paragraphes suivants présentent diverses méthodes que nous avons mises en œuvre.

III.5.1 Détermination d'une valeur quelconque de borne

Le calcul des bornes définies en (III.9) ou (III.10) pour les régions $\mathcal{LMI}$ (respectivement les bornes définies en (III.47) ou (III.48) pour des régions de $\mathcal{C}$) nécessite la recherche d'une solution admissible $X = X^* > 0$ (resp. $\{X_k = X_k^* > 0,\ k \in \{1,...,m\}\}$) au système $\mathcal{LMI}$ correspondant (III.8) (resp. (III.46)), ***pour une matrice*** T ***donnée***. Nous proposons trois méthodes :

a. Méthode 1 : X (ou $\{X_k,\ k \in \{1,...,m\}\}$) est obtenue en résolvant directement le système $\mathcal{LMI}$ correspondant (III.8) (ou (III.46)). Cette méthode est valable pour pour une incertitude non structurée ou structurée ainsi que pour des régions $\mathcal{LMI}$ ou des régions de $\mathcal{C}$.

Remarque III.15 *: La fonction* **feasp** *de la LMI Control Toolbox de MATLAB [GNLC1995] peut être utilisée pour résoudre ce problème de faisabilité.*

b. Méthode 2 :
Cas des régions de $\mathcal{C}$ ***:*** ce cas correspond au calcul des bornes $\hat{\mu}_u$ and $\hat{\mu}_s$.
Une solution particulière $\{X_k = X_k^* > 0,\ k \in \{1,...,m\}\}$ à la $\mathcal{LMI}$ (III.46) peut être calculée sous la forme :

$$X_k \;=\; V \underset{\varsigma=1,...,n}{\mathrm{diag}} \;(w_k(\lambda_\varsigma))\;\; V^* \;, \quad \forall k \in \{1,...,m\} \tag{III.49}$$

où V est la matrice modale de la matrice nominale $\mathcal{A}$ et où les scalaires $w_k(\lambda_\varsigma)$, $k \in \{1,...,m\}$ sont des réels positifs tels que (III.42) est vérifiée pour $z = \lambda_\varsigma$, $\{\lambda_\varsigma,\ \varsigma \in \{1,...,n\}\}$ constituant le spectre de $\mathcal{A}$. Pour ce résultat, nous nous référons à la démonstration du théorème III.4 donnée dans [Chi1996].

Remarque III.16 *: Si l'on compare la* **méthode 1** *et la* **méthode 2** *en termes de temps de calcul, on peut voir que le problème de résolution de (III.46) apparaissant dans la* **méthode 1** *est remplacé par la résolution de* n $\mathcal{LMI}$ *en* $\{w_k = \tilde{w}_k > 0,\ k \in \{1,...,m\}\}$ *séparées telles que celle définie en (III.42). Plus clairement, plutôt que de résoudre une* $\mathcal{LMI}$ $\mathcal{M} < 0$ *en* $\{X_k\}$ *où* $\mathcal{M}$ *est une matrice hermitienne d'ordre* $(m-p+1)n$ *dont la solution est constituée de* $\frac{1}{2}mn(n+1)$ *scalaires à déterminer, il suffit de résoudre* n *sous-problèmes* $\mathcal{LMI}$ *séparés d'ordre* $(m-p+1)$ *en* $\{w_k\}$ *(comme en (III.42)) dont les solutions respectives sont constituées par* m *nombres réels positifs à déterminer. La* **méthode 2** *réclame donc un moindre temps de calcul pour déterminer* $\hat{\mu}_u$ *ou* $\hat{\mu}_s$*.*

Remarque III.17 *: Comme pour la* **méthode 1***, la fonction* **feasp** *peut être utilisée pour résoudre chacun des* n *sous-problèmes* $\mathcal{LMI}$ *et calculer* $\{w_k(\lambda_\varsigma) = \tilde{w}_k(\lambda_\varsigma) > 0,\ \varsigma \in \{1,...,n\},\ k \in \{1,...,m\}\}$*.*

Cas des régions $\mathcal{LMI}$ ***:*** dans ce cas, la solution particulière de (III.8) prend la forme $X = VV^*$. Pour ce résultat, nous nous référons à la démonstration du théorème III.1 donnée dans [CG1996].

Remarque III.18 *: Le temps de calcul des bornes ρ_u et ρ_s est fortement réduit avec la* **méthode 2** *puisqu'aucune résolution de système $\mathcal{LMI}$ n'est nécessaire.*

c. Nous proposons ici une méthode appelée **méthode 3**, s'appuyant sur la détermination d'une matrice X supposée conduire à une meilleure valeur de la borne ρ_u. Cette méthode est donc **seulement** utilisable dans le cas d'une région $\mathcal{LMI}$ et d'une incertitude non structurée.

Méthode 3 : Déterminer la solution optimale $X = \mathcal{X}$ du problème de valeurs propres généralisées suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\limits_{X} \eta \\ \text{sous les contraintes :} \\ 2\bar{\sigma}(\beta \otimes T^{-1})\bar{\sigma}(T)\, X \; < \eta\nu \mathbf{I}_n \\ \mathcal{M} \; < \; -\nu \mathbf{I}_{nl} \\ X = X^* \; > \; 0 \\ \nu \; > \; 0 \end{array} \right. \tag{III.50}$$

puis calculer $\rho_u(\mathcal{X}, T)$.

Justification : Pour une matrice T donnée, la borne ρ_u est une fonction de la matrice X, symétrique définie positive, solution de (III.8). D'un point de vue numérique, la maximisation de ρ_u en fonction de X sous les contraintes (III.8) et $X = X^* > 0$ n'est pas un problème aisé à résoudre. Pour contourner cet obstacle, nous introduisons une nouvelle borne $\breve{\rho}_u$ par le biais du corollaire suivant :

Corollaire III.4 *: Soit $\mathcal{D}$ une région $\mathcal{LMI}$ définie par (III.1) et (III.2). La matrice incertaine $\mathbf{A} = A + E$ est $\mathcal{D}$-stable si la matrice nominale A est $\mathcal{D}$-stable et si :*

$$\|E\|_2 \; =< \; \breve{\rho}_u(T) \; = \; \frac{\underline{\lambda}(-\mathcal{M})}{2\bar{\sigma}(T)\bar{\sigma}(\beta \otimes T^{-1})\bar{\sigma}(X)} \tag{III.51}$$

où les matrices X, T and $\mathcal{M}$ sont définies au paragraphe §III.2.3.

Démonstration : cette nouvelle expression de borne se déduit de

$$\underline{\lambda}(-\mathcal{M}) \; = \; \underline{\sigma}(-\mathcal{M}) \; = \; \frac{1}{\bar{\sigma}((-\mathcal{M})^{-1})} \; = \; \frac{1}{\bar{\sigma}(\mathcal{N})\bar{\sigma}(\mathcal{N})} \quad , \tag{III.52}$$

de

$$\bar{\sigma}(\beta \otimes T^{-1})\bar{\sigma}(X) = \bar{\sigma}(\beta \otimes T^{-1})\bar{\sigma}(\mathbf{I}_l \otimes X) \geq \bar{\sigma}((\beta \otimes T^{-1})(\mathbf{I}_l \otimes X)) = \bar{\sigma}(\beta \otimes T^{-1}X) \tag{III.53}$$

et du théorème III.2. □

La borne $\breve{\rho}_u$ est donc plus conservative que la borne ρ_u présentée au théorème III.2 : en effet, les relations (III.52) et (III.53) impliquent :

$$\breve{\rho}_u(X,T) < \rho_u(X,T)\,,\ \forall X,\ \forall T \tag{III.54}$$

Soit κ une borne inférieure de $\breve{\rho}_u$ telle que :

$$\kappa\ <\ \breve{\rho}_u(X,T)\,,\ \forall X,\ \forall T \tag{III.55}$$

La maximization de κ vérifiant (III.55) peut être exprimée comme en (III.50) en utilisant le fait que les matrices $X > 0$ et $\mathcal{M}$ sont symétriques et en définissant le réel positif η comme étant égal à κ^{-1}.
La valeur optimale de κ vérifie :

$$\kappa_{opt}\ =\ \kappa(\mathcal{X})\ <\ \breve{\rho}_u(\mathcal{X},T)\ <\ \rho_u(\mathcal{X},T) \tag{III.56}$$

On peut espérer que le choix $X = \mathcal{X}$ pour le calcul de ρ_u conduise à une bonne valeur de la borne. De nombreux exemples numériques confirment cette supposition. Ces exemples montrent tout particulièrement que l'inégalité (III.55) est génériquement saturée à l'optimum de telle sorte que $\kappa(\mathcal{X})$ peut quasiment être confondu avec $\breve{\rho}_u(\mathcal{X},T)$.
On peut noter que l'efficacité de cette méthode est plus marquée pour $T = \mathbf{I}_n$ puisque l'inégalité apparaissant en (III.53) est alors saturée. Par conséquent, $\breve{\rho}_u$ est moins éloignée de ρ_u.
Cette méthode ne peut malheureusement pas être étendue au calcul de $\hat{\mu}_u$ (parce que $\sum_{k=1}^{m}(\Psi_k \otimes X_k)$ n'est pas hermitienne définie en signe) ou au calcul de ρ_s et $\hat{\mu}_s$ (en raison des modules figurant dans l'expression de ces bornes).

Remarque III.19 : *Ce problème de valeurs propres généralisées peut être résolu, par exemple, grâce à la fonction* **gevp** *de la LMI Control Toolbox de MATLAB [GNLC1995].*

III.5.2 Amélioration de la valeur des bornes

Nous proposons ici un moyen d'améliorer la valeur des bornes (ρ_u, ρ_s, $\hat{\mu}_u$ et $\hat{\mu}_s$). Ce moyen consiste à utiliser les degrés de liberté apportés par la matrice T apparaissant dans l'expression des bornes pour déterminer une solution X ou $\{X_k,\ k \in \{1, ..., m\}\}$ du système $\mathcal{LMI}$ conduisant à des valeurs plus élevées. Le problème d'optimisation qui en découle n'est pas convexe mais l'expérience montre qu'il peut mener à des valeurs nettement moins conservatives. Le revers de la médaille est le temps de calcul. De plus, même si une matrice optimale T_{opt} est déterminée, elle ne permet pas d'obtenir la valeur maximale de la borne dont l'expression dépend aussi de X ou $\{X_k,\, k \in \{1, ..., m\}\}$. A chaque itération du processus d'optimisation, une solution X ou $\{X_k,\, k \in \{1, ..., m\}\}$ est calculée et ce n'est pas obligatoirement la meilleure. Néanmoins, l'amélioration apportée par cette approche s'avère souvent très significative.

Remarque III.20 *: On peut tenter de résoudre le problème d'optimisation par rapport à T en utilisant, par exemple, la fonction* **fminu** *de l'Optimization Toolbox de MATLAB [Gra1990].*

Remarque III.21 *: Nous appelons* **méthode T1** *(respectivement* **méthode T2** *et* **méthode T3***) la* **méthode 1** *(respectivement la* **méthode 2** *et la* **méthode 3***) modifiée par l'introduction de l'optimisation par rapport à T . La* **méthode T3** *n'est bien sûr valable que pour le calcul de ρ_u.*

Remarque III.22 *: Comme la borne $\breve{\rho}_u(T)$ est moins proche de la borne $\rho_u(T)$ pour $T \neq \mathbf{I}_n$ que pour $T = \mathbf{I}_n$, la* **méthode T3** *conduit généralement à une moindre valeur de la borne que la* **méthode T1***.*

III.6 Exemples illustratifs

Le but de cette partie est d'appliquer les résultats des paragraphes précédents à de petits exemples académiques dont certains sont connus dans la littérature relative aux bornes de robustesse. Ces illustrations permettent entre autres, dans la mesure du possible, de comparer ponctuellement le conservatisme induit par l'approche $\mathcal{LMI}$ à celui induit par d'autres approches. Ainsi dans les exemples qui suivent exposons-nous des valeurs de bornes déduites d'autres méthodes parmi les plus connues (quand celles-ci permettent d'envisager le problème considéré). Le choix des approches comparées à la nôtre peut paraître arbitraire. Trois raisons peuvent le justifier selon les exemples :

1. la littérature fournit explicitement les valeurs des bornes issues des approches en question.

2. nous estimons que ces approches conduisent généralement à de bons résultats.

3. nous avons implémenté ces méthodes et sommes à même de les comparer à la nôtre sur n'importe quel exemple.

Plusieurs cas sont donc envisagés dans la suite de cette partie, parmi lesquels l'étude de la stabilité robuste largement traitée dans la littérature. Puis la $\mathcal{D}$-stabilité robuste dans un secteur est considérée. Le cas des régions de deuxième ordre est ensuite illustré. Par la suite, les particularités de l'approche $\mathcal{LMI}$ sont mises en évidence grâce à deux exemples, l'un traitant de l'intersection de sous-régions et l'autre de l'union de sous-régions. Cette partie se termine par un paragraphe montrant que les bornes de robustesse peuvent être utilisées dans l'étude de la fragilité d'une loi de commande par retour statique.

III.6.1 Stabilité robuste

Incertitude non structurée

Le premier exemple est un des tous premiers rencontrés dans les publications. Il s'agit d'étudier la stabilité robuste d'une matrice A initialement proposée dans [PT1980] et soumise à une incertitude additive non structurée E. La matrice est la suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{III.57}$$

La première borne sur $\|E\|_2$ proposée par Patel et Toda dans [PT1980] est :

$$\rho_{u_{PT}} = 0,382$$

alors que l'amélioration proposée par Yedavalli et Liang dans [YL1986] conduit à la valeur :

$$\rho_{u_{YL}} = 0,394$$

La **méthode 1**, la **méthode 2** et la **méthode 3** appliquées pour $T = \mathbf{I}_2$ donnent :

$$\rho_{u_1} = 0,3766 \quad ; \quad \rho_{u_2} = 0,2157 \quad ; \quad \rho_{u_3} = 0,3826$$

et les **méthodes T1**, **T2** et **T3** permettent d'augmenter ces valeurs jusqu'à :

$$\rho_{u_{T1}} = \mathbf{0,4648} \quad ; \quad \rho_{u_{T2}} = 0,2158; \quad ; \quad \rho_{u_{T3}} = \mathbf{0,4648}$$

Sur cet exemple, la comparaison tourne à l'avantage de la méthode $\mathcal{LMI}$.

Incertitude structurée

Ce type de borne a été beaucoup plus etudié par divers auteurs aussi présentons nous ici plusieurs exemples et des comparaisons plus complètes.

Premier exemple

La matrice considérée est extraite de [Yed1985] :

	$\xi = 1,2,3,4$	$\xi = 1,4$	$\xi = 2,3$	$\xi = 1$	$\xi = 4$	$\xi = 2$	$\xi = 3$
[Yed1985]	$0,784$	**1**	$1,7777$	**8**	**1**	16	2
[Yed1993a] (bialt.)	$\mathbf{0,8889}$	1	$\mathbf{2,8284}$	8	1	∞	∞
[Yed1993a] (Kron.)	$\mathbf{0,8889}$	1	$\mathbf{2,8284}$	8	1	∞	∞
T1	$\mathbf{0,8889}$	1	$\mathbf{2,8284}$	8	1	∞	∞

Table III.1: Premier tableau récapitulatif

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\delta) = A + \sum_{\xi=1}^{\tau=4} \delta_\xi E_\xi$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.58}$$

Le tableau III.1 donne quelques valeurs issues de diverses approches. Les colonnes indiquent quelles sont les composantes de $\delta \in \mathbb{R}^4$ qui sont effectivement considérées dans le calcul des bornes. Les lignes correspondent respectivement aux approches utilisées pour le calcul, c'est-à-dire celles de [Yed1985], celles de [Yed1993a] (par somme bialternée et par somme de Kronecker : cf. chapitre II) et la **méthode T1**. On note que ci la méthode de [Yed1985] est à proscrire puisqu'elle ne peut même pas déterminer qu'une perturbation infinie sur une des deux composantes nulles de A ne fait pas migrer ses valeurs propres. En revanche les résultats de la **méthode T1** et ceux de [Yed1993a] sont bien meilleurs. Leur concordance s'explique par le fait que les bornes ont atteint les CNS. L'avantage revient toutefois aux méthodes proposées dans [Yed1993a] pour des raisons de temps de calcul.

Deuxième exemple

Il s'agit d'un exemple extrait de [ZK1987] :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\delta) = A + \sum_{\xi=1}^{\tau=2} \delta_\xi E_\xi$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} ; E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les premières valeurs de bornes données respectivement par Patel et Toda [PT1980], Yedavalli [Yed1985], puis Zhou et Khargonekar [ZK1987] sont :

$$\rho_{s_{PT}} = 0,5027 \quad ; \quad \rho_{s_Y} = 0,8158 \quad ; \quad \rho_{s_{ZK}} = 1,5533$$

Les valeurs proposées ensuite par Yedavalli [Yed1993a] sont supérieures :

$$\rho_{s_{Ybialt}} = \mathbf{1,7499}\,;\, \rho_{s_{YKron}} = 1,5728$$

Les **méthodes 1** et **2** appliquées pour $T = \mathbf{I}_3$ ainsi que les **méthodes T1** et **T2** conduisent aux valeurs suivantes :

$$\rho_{s_1} = 1,4764\,;\, \rho_{s_2} = 1,4192\,;\, \rho_{s_{T1}} = \mathbf{1,7499}\,;\, \rho_{s_{T2}} = \mathbf{1,7499}$$

Là encore les meilleurs résultats sont obtenus par l'approche par somme bialternée [Yed1993a] et par les **méthodes T1** et **T2**. Leur concordance s'expliquent encore par le fait que la CNS est atteinte. Le temps de calcul est toujours favorable à l'approche par somme bialternée.

Troisième exemple

Ce dernier exemple concernant la stabilité robuste vis à vis d'une incertitude structurée, plus complet, permet notamment de comparer la **méthode T1** à la méthode proposée dans [LJB1995] que nous considérons comme efficace. La matrice nominale est celle déjà donnée en (III.57) et la structure considérée est celle donnée en (III.58).
Envisageons d'abord que seuls δ_1 et δ_2 peuvent perturber les composantes de A. Les valeurs de bornes proposées respectivement dans [Yed1985], [YL1986] et [ZK1987] sont :

$$\rho_{s_Y} = 0,4805 \quad ; \quad \rho_{s_{YL}} = 0,6575 \quad ; \quad \rho_{s_{ZK}} = 0,4805$$

La **méthode T1** et la méthode proposée dans [LJB1995] donnent respectivement :

$$\rho_{s_{T1}} = 0,8734 \quad ; \quad \rho_{s_{LJVdB}} = 0,9745$$

Ces valeurs se rapprochent de la CNS atteinte par les méthodes proposées dans [Yed1993a] :

$$\rho_{s_{Ybialt}} = \mathbf{1} \quad ; \quad \rho_{s_{YKron}} = \mathbf{1}$$

Ces résultats sont confortés par le tableau III.2 où les lignes indiquent quelles composantes de $\delta \in \mathbb{R}^4$ sont considérées dans le calcul de la borne et où les colonnes correspondent à la méthode utilisée pour ce calcul. Une colonne est réservée à la CNS.
De toute évidence, la meilleure méthode sur cet exemple est à nouveau la méthode par somme bialternée présentée dans [Yed1993a] qui atteint toujours la CNS (ce n'est pas vrai pour tous les exemples : voir [Yed1993a, Gar1997]). La méthode par somme

	[Yed1985]	[Yed1993a] bialt.	[Yed1993a] Kron.	[LJB1995]	**T1**	CNS
$\xi = 1$	$1,657$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{3}$	$2,86$	3
$\xi = 2$	$1,657$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$	2
$\xi = 3$	$0,655$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	1
$\xi = 4$	$0,396$	$\mathbf{0,6666}$	$0,473$	$\mathbf{0,6666}$	$\mathbf{0,6666}$	$0,6666$
$\xi = 1,2$	1	$\mathbf{2}$	$1,2$	$1,6647$	$1,3706$	2
$\xi = 1,3$	$0,4805$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$0,9745$	$0,8734$	1
$\xi = 1,4$	$0,382$	$\mathbf{0,5616}$	$0,4086$	$\mathbf{0,5616}$	$\mathbf{0,5616}$	$0,5616$
$\xi = 2,3$	$0,5$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$0,9466$	$0,8116$	1
$\xi = 2,4$	$0,324$	$\mathbf{0,5}$	$0,3732$	$\mathbf{0,5}$	$\mathbf{0,5}$	$0,5$
$\xi = 3,4$	$0,3027$	$\mathbf{0,4}$	$0,3194$	$\mathbf{0,4}$	$\mathbf{0,4}$	$0,4$
$\xi = 1,2,3$	$0,397$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$0,8546$	$0,6269$	1
$\xi = 1,2,4$	$0,311$	$\mathbf{0,4495}$	$0,3326$	$\mathbf{0,4495}$	$0,4449$	$0,4495$
$\xi = 1,3,4$	$0,273$	$\mathbf{0,3723}$	$0,2962$	$\mathbf{0,3723}$	$0,363$	$0,3723$
$\xi = 2,3,4$	$0,256$	$\mathbf{0,3542}$	$0,2817$	$\mathbf{0,3542}$	$0,3463$	$0,3542$
$\xi = 1,2,3,4$	$0,236$	$\mathbf{0,3333}$	$0,2625$	$\mathbf{0,3333}$	$0,3093$	$0,3333$

Table III.2: Deuxième tableau récapitulatif

de Kronecker laisse apparaître ses limites. La **méthode T1** et la méthode proposée dans [LJB1995] sont tout de même assez efficaces et atteignent également souvent la CNS. Ces deux méthodes consistent en la résolution d'un problème d'optimisation de la borne par rapport à une matrice de similarité mais le fait qu'un gradient du critère présenté en [LJB1995] ait été exprimé permet de faciliter l'optimisation et autorise ainsi des résultats légèrement meilleurs. Rappelons toutefois que le temps de calcul du critère de [LJB1995] "explose" avec ζ, le nombre de composantes incertaines.

L'approche $\mathcal{LMI}$, bien qu'assez efficace pour analyser la stabilité robuste en présence d'une incertitude additive non structurée, n'est visiblement pas la plus appropriée dans le cas d'une incertitude structurée pour lequel Yedavalli propose une méthode plus avantageuse en temps de calcul et moins conservative [Yed1993a]. Dans ce qui suit, nous envisageons une analyse robuste plus sophistiquée.

III.6.2 $\mathcal{D}$-stabilité dans un secteur

Incertitude non structurée

Nous considérons ici la matrice nominale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.59)}$$

Nous calculons une borne de $\mathcal{D}$-stabilité robuste sur $\|E\|_2$, E étant une incertitude

additive non structurée et $\mathcal{D}$ étant un secteur S classique symétrique par rapport à l'axe réel, ouvert vers la gauche, dont le sommet est l'origine du plan complexe et faisant une angle de $\frac{\pi}{4}$ radians par rapport à l'axe imaginaire.
La littérature nous donne déjà des valeurs de bornes pour cet exemple. Les bornes respectivement présentées en [JHW1989a] et en [LJB1993] sont :

$$\rho_{u_{YHW}} = 0,0121 \quad ; \quad \rho_{u_{LJB}} = 0,06$$

Les diverses méthodes $\mathcal{LMI}$ nous conduisent aux valeurs suivantes :

$$\rho_{u_1}(T = \mathbf{I}_3) = 0,027 \quad ; \quad \rho_{u_2}(T = \mathbf{I}_3) = 0,01 \quad ; \quad \rho_{u_3}(T = \mathbf{I}_3) = 0,0313$$

$$\rho_{u_{T1}} = \mathbf{0,064} \quad ; \quad \rho_{u_{T2}} = 0,0106 \quad ; \quad \rho_{u_{T3}} = 0,0438$$

Grâce à la **méthode T1**, on obtient la meilleure valeur de borne sur cet exemple à notre connaissance.

Incertitude structurée

Nous reprenons ici un exemple extrait de [LBW1996] où la matrice incertaine est :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\delta) = A + \sum_{\xi=1}^{\tau=2} \delta_\xi E_\xi$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La région $\mathcal{D}$ considérée est toujours le secteur S décrit au paragraphe précédent et les bornes proposées à ce jour pour cet exemple sont celles issues des méthodes proposées en [JHW1989b] et en [LBW1996]. Les valeurs respectives correspondantes sont les suivantes :

$$\rho_{s_{YHW}} = 0,1566 \quad ; \quad \rho_{s_{LBW}} = 1,0899$$

En utilisant l'équivalence entre la $\mathcal{D}$-stabilité de A et la stabilité de A_a introduite en (II.6) et(II.7), on peut étendre les résultats de [Yed1993a] sur la stabilité robuste à la $\mathcal{D}$-stabilité robuste dans un secteur et obtenir les valeurs de bornes suivantes :

$$\rho_{s_{Ybialt}} = 0,2677 \quad ; \quad \rho_{s_{YKron}} = 0,2188$$

Les résultats prometteurs de [Yed1993a] concernant la stabilité robuste ne se retrouvent donc pas dans cette extension et c'est finalement l'approche $\mathcal{LMI}$ qui donne la meilleure valeur grâce à la **méthode T1**.

$$\rho_{s_1}(T = \mathbf{I}_2) = 0,2868\,; \; \rho_{s_2}(T = \mathbf{I}_s) = 0,5694\,; \; \rho_{s_{T1}} = \mathbf{1,1357}\,; \; \rho_{s_{T2}} = 0,6417$$

III.6.3 $\mathcal{D}$-stabilité dans une région de deuxième ordre

Incertitude non structurée

Premier exemple

Nous reprenons là l'exemple le plus connu de la littérature relative aux bornes de robustesse [Yed1993b]. La matrice nominale est :

$$A = \begin{bmatrix} -4,3 & -0,4 \\ 0,2 & -3,4 \end{bmatrix} \tag{III.60}$$

Nous nous intéressons à la $\mathcal{D}$-stabilité robuste de cette matrice lorsqu'elle est soumise à une incertitude non structurée E et lorsque $\mathcal{D}$ est le disque de centre $(-4; 0)$ et de rayon unitaire. Les valeurs des bornes sur $\|E\|_2$ garantissant la $\mathcal{D}$-stabilité de $\mathbf{A}$ et issues des méthodes "Lyapunov" proposées dans [Yed1993b], [Cho1994], [BLJ1993] et [BP1997] sont respectivement :

$$\rho_{u_Y} = 0,0341\,;\ \rho_{u_C} = 0,3782\,;\ \rho_{u_{BLJ}} = \mathbf{0,3865}\,;\ \rho_{u_{BP}} = \mathbf{0,3865}$$

Les valeurs engendrées par l'application des méthodes $\mathcal{LMI}$ sont :

$$\rho_{u_1}(T = \mathbf{I}_2) = 0,2072 \quad ; \quad \rho_{u_2}(T = \mathbf{I}_2) = 0,1733 \quad ; \quad \rho_{u_3}(T = \mathbf{I}_2) = 0,2286$$

$$\rho_{u_{T1}} = 0,2373 \quad ; \quad \rho_{u_{T2}} = 0,1759 \quad ; \quad \rho_{u_{T3}} = 0,2373$$

L'approche "Lyapunov" induit de bons résultats. Cependant cet exemple la privilégie car il est tel qu'une des inégalités triangulaires apparaissant dans chacune des démonstrations permettant d'établir ces bornes est saturée. Cette saturation "cache" le conservatisme induit par l'approche. On peut éviter ce problème en changeant la région $\mathcal{D}$. C'est ce que nous faisons dans l'exemple qui suit.

Deuxième exemple

La région $\mathcal{D}$ est maintenant l'ellipse de centre $(-3,85; 0)$, de demi-axe transverse horizontal $0,75$ et demi-axe conjugué vertical $0,25$. Voici les valeurs des bornes qui découlent de ce changement :

$$\rho_{u_Y} = 0,0022\,;\ \rho_{u_C} = 0,0029\,;\ \rho_{u_{BLJ}} = 0,0349\,;\ \rho_{u_{BP}} = 0,0536$$

Les valeurs engendrées par l'application des méthodes $\mathcal{LMI}$ sont :

$$\rho_{u_1}(T = \mathbf{I}_2) = 0,0550 \quad ; \quad \rho_{u_2}(T = \mathbf{I}_2) = 0,0653 \quad ; \quad \rho_{u_3}(T = \mathbf{I}_2) = 0,0656$$

$$\rho_{u_{T1}} = \mathbf{0,0676} \quad ; \quad \rho_{u_{T2}} = 0,0653 \quad ; \quad \rho_{u_{T3}} = 0,0669$$

Cette fois-ci, c'est la **méthode T1** qui donne la meilleure valeur.

Incertitude structurée

Premier exemple

On reprend la matrice A donnée par (III.60). $\mathcal{D}$ est à nouveau le cercle de centre $(-4;0)$ et de rayon unitaire. L'incertitude additive E s'écrit :

$$E = \sum_{\xi=1}^{\tau=2} \delta_\xi E_\xi$$

où :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sur cet exemple, la borne issue de la méthode proposée dans [LBW1996] avait atteint la CNS, à savoir $\mathbf{0,4}$. Voici les valeurs issues de l'approche $\mathcal{LMI}$:

$$\rho_{s_1}(T = \mathbf{I}_2) = 0,2618\,;\, \rho_{s_2}(T = \mathbf{I}_2) = 0,2644\,;\, \rho_{s_{T1}} = \mathbf{0,4}\,;\, \rho_{s_{T2}} = 0,2947$$

La **méthode T1** permet donc elle aussi de retrouver la CNS.

Deuxième exemple

Le second exemple de cette partie est emprunté à [GB1995]. C'est en fait le modèle d'un système continu incertain qui peut être décrit par :

$$\dot{x}(t) = (A_0 + E)x(t) + Bu(t) \tag{III.61}$$

où t est le temps, $x(t)$ est le vecteur d'état, $u(t)$ le signal de commande, A_0 la matrice d'etat nominale, B la matrice de commande et $E = \delta_1 E_1$ est une incertitude additive.

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0,82 & 17,76 & 90,24 \\ 0,17 & -0,75 & -11,10 \\ 0 & 0 & -250 \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} -91,24 \\ 0 \\ 250 \end{bmatrix} \tag{III.62}$$

$$\delta_1 \in \mathbb{R} \;;\; E_1 = \begin{bmatrix} 0,080 & 0,080 & 0,800 \\ -0,025 & -0,025 & -0,250 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{III.63}$$

Dans [GB1995], une loi de commande par retour d'état K est calculée de manière à placer les valeurs propres de la matrice d'état du modèle incertain bouclé dans le disque de centre $(-5;0)$ et de rayon $4,5$, ceci quel que soit $\delta_1 \in [-1;1]$:

$$K = \begin{bmatrix} 0,00165 & 0,0173 & 0,9478 \end{bmatrix}$$

La matrice d'évolution en boucle fermée peut s'écrire $\mathbf{A} = A + E$ où $A = A_0 + BK$. Notre but n'est pas de calculer une loi de commande mais d'analyser la robustesse de celle déjà proposée dans [GB1995] par rapport à δ_1.
Les diverses méthodes $\mathcal{LMI}$ conduisent aux valeurs suivantes :

$$\rho_{s_1}(T = \mathbf{I}_3) \;=\; 3,0035\,;\; \rho_{s_3}(T = \mathbf{I}_s) \;=\; 3,5622\,;\; \rho_{s_{T1}} \;=\; \mathbf{13,2303}\,;\; \rho_{s_{T2}} \;=\; 5,2896$$

Il est à noter que la **méthode T1** atteint à nouveau une valeur assez proche de la CNS.

III.6.4 $\mathcal{D}$-stabilité dans une intersection de sous régions

L'objectif de ce paragraphe est d'illustrer les possibilités évoquées dans la remarque III.2 relative à l'intersection de sous régions. Pour cela, nous considérons la matrice incertaine $\mathbf{A} = A + E$ pour laquelle le terme nominal est donné en (III.59). La région $\mathcal{D}$ est l'intersection entre le secteur S et le demi-plan vertical caractérisé par $x < -1$. Nous recherchons une borne sur la norme spectrale de E telle que $\mathbf{A}$ reste $\mathcal{D}$-stable.
Certains auteurs ont envisagé ce problème par l'approche Lyapunov. Ils ont résolu deux équations de Lyapunov et déduit une borne pour chacune des sous régions. La borne relative à l'intersection est alors obtenue en prenant le minimum des deux bornes. Ainsi les résultats respectifs de [JHW1989a] et [BLJ1993] sont :

$$\begin{aligned} \rho_{u_{JHW}} &= \min\{0,0128; 0,0121\} \;=\; 0,0121 \\ \rho_{u_{LJB}} &= \min\{0,0718; 0,0600\} \;=\; 0.0600 \end{aligned}$$

La **méthode T1** nous permet, selon le même principe, d'obtenir :

$$\rho_{u_{T1}} \;=\; \min\{0,0718; 0,0640\} \;=\; 0,0640$$

Si nous ne nous attachons plus à résoudre deux systèmes $\mathcal{LMI}$ séparés et que nous formalisons cette intersection de deux sous-régions comme une région $\mathcal{LMI}$ d'ordre 3 (cf. remarque III.2), alors la **méthode T1** conduit à la valeur suivante :

$$\rho'_{u_{T1}} \;=\; \mathbf{0,0684}$$

Ceci montre bien l'intérêt que peut présenter l'approche $\mathcal{LMI}$ dans le cas d'une intersection de régions $\mathcal{LMI}$.

III.6.5 $\mathcal{D}$-stabilité dans une union de sous régions

La région $\mathcal{D}$ est maintenant une région $\mathcal{GLMI}$ résultant de l'union de plusieurs sous-régions polynomiales convexes. Nous reprenons ici l'exemple utilisé au paragraphe I.5.4 et qui sert pour illustrer le calcul des bornes dans les deux cas d'incertitude.

Incertitude non structurée

La structure de l'incertitude additive E est inconnue. La **méthode 1** et la **méthode 2** appliquées avec $T = \mathbf{I}_4$ donnent respectivement

$$\hat{\mu}_{u_1} = 0,0019 \quad ; \quad \hat{\mu}_{u_2} = 0,0020$$

En utilisant la **méthode T1** et la **méthode T2** pour améliorer ces valeurs, nous obtenons :

$$\hat{\mu}_{u_{T1}} = \mathbf{0,0044} \quad ; \quad \hat{\mu}_{u_{T2}} = 0,0041$$

Il est assez difficile de dire si ces valeurs sont optimales par rapport à T en raison de l'existence possible de minima locaux. Néanmoins, plusieurs initialisations conduisent aux mêmes résultats.

Incertitude structurée

Nous choisissons maintenant d'imposer la structure suivante à E :

$$E = \sum_{\xi=1}^{3} \delta_\xi E_\xi$$

où :

$$E_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Chercher une solution quelconque au système $\mathcal{LMI}$ et calculer la borne sur $\max\limits_{\xi} |\delta_\xi|$ qui en découle par les **méthodes 1** et **2** (pour $T = \mathbf{I}_4$) conduit à :

$$\hat{\mu}_{s_1} = 0,0105 \quad ; \quad \hat{\mu}_{s_2} = 0,0115$$

L'amélioration apportée par la **méthode T1** et la **méthode T2** permet d'obtenir les valeurs :

$$\hat{\mu}_{s_{T1}} = 0,0197 \quad ; \quad \hat{\mu}_{s_{T2}} = \mathbf{0,0235}$$

Exceptionnellement, la **méthode T2** donne un meilleur résultat que la **méthode T1**.

Pour cet exemple ci, il est impossible de comparer aux approches déjà existantes puisque ces dernières ne permettent pas d'envisager une telle région.

III.6.6 Application à l'étude de fragilité d'un retour statique

Dans ce paragraphe, nous montrons que les bornes calculées sur $\max_{\xi} |\delta_\xi|$ peuvent être utilisées pour définir un critère conservatif de non-fragilité d'une loi de commande par retour statique. Supposons qu'un système soit modélisé par une représentation d'état linéaire (A_0, B, C) où $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times \mathbf{m}}$ et $C \in \mathbb{R}^{\mathbf{p}\times n}$. Supposons également que l'on boucle ce système à l'aide d'un retour de sortie statique $K \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}\times\mathbf{p}}$ de telle sorte que la matrice d'évolution en boucle fermée soit $A = A_0 + BKC$. Les valeurs propres de cette dernière sont parfois très sensibles à de petites variations sur les composantes de K et certains auteurs qualifient alors la loi de commande (voire le modèle bouclé) de “fragile” [KB1997]. En pratique, ceci peut traduire la difficulté d'implémenter une commande sur une plate-forme ne bénéficiant pas d'une précision numérique suffisante. Il importe donc de déterminer des lois de commande peu fragiles et pour cela, il est impératif de pouvoir faire une analyse de fragilité. C'est à cet effet que peuvent être utilisées les bornes définies en (III.10) et (III.48) comme nous le montrons ci-après.
Supposons donc que le triplet (A_0, B, C) est certain et que seul K est soumis à une incertitude ΔK. La matrice d'évolution incertaine en boucle fermée est donc :

$$\mathbf{A} = A_0 + BKC + B\Delta KC = A + B\Delta KC = A + E$$

où :

$$E = \sum_{r=1}^{\mathbf{m}} \sum_{s=1}^{\mathbf{p}} [\Delta K]_{\{r,s\}} E_{rs}$$

et où les composantes des matrices $E_{rs} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont définies, $\forall \{r;s\} \in \{\{1,...,\mathbf{m}\} \times \{1,...,\mathbf{p}\}\}$, par :

$$[E_{rs}]_{\{i,j\}} = [B]_{\{i,r\}}[C]_{\{s,j\}}, \quad \forall \{i,j\} \in \{1,...,n\}^2$$

En remplaçant chaque paire $\{r;s\}$ par une valeur distinctes de ξ pouvant évoluer ainsi de 1 à $\tau = \mathbf{mp}$ et $[\Delta K]_{\{r,s\}}$ par δ_ξ, on retrouve la formulation d'incertitude définie en (I.30). Ainsi, si l'on souhaite que les valeurs propres de $\mathbf{A}$ restent contenues dans une région $\mathcal{D}$, les bornes ρ_s et $\hat{\mu}_s$ peuvent être considérées comme des critères de fragilité du modèle bouclé relativement à $\mathcal{D}$.

Reprenons l'exemple tiré de [GB1995] déjà utilisé en §III.6.3. Cette fois-ci, l'incertitude n'est plus sur A_0 mais sur K et nous souhaitons savoir quelle perturbation numérique maximale l'on peut être sûr de tolérer sans faire sortir les valeurs propres du disque choisi. La **méthodeT1** nous propose l'indice de non-fragilité suivant :

$$\rho_{s_{T1}} = 6,99 \times 10^{-4}$$

Cette valeur est très satisfaisante et montre que cette loi de commande peut être implantée sur une plate-forme ayant une précision numérique de l'ordre de 10^{-4}, ce qui est une mauvaise précision.
On peut tester le conservatisme de ce critère en traçant un lieu des pôles perturbés pour le système bouclé. Le principe est le suivant. On trace les points correspondant au spectre de $\mathbf{A}$, ceci pour différentes instances de ΔK. Les composantes de ΔK sont toujours inférieures en module à $\rho_{s_{T1}}$. On obtient donc un nuage de points répartis autour du spectre de A, comme le montre la figure III.1.

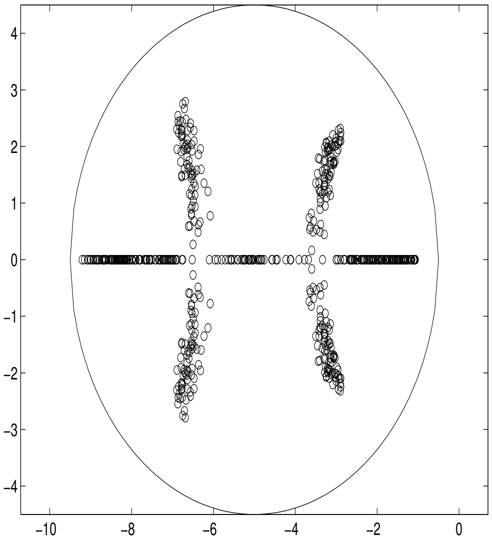

Figure III.1: Migration des pôles de $\mathbf{A}$ pour différentes incertitudes ΔK

Sur cette figure, on constate que certaines perturbations sur K sont proches de faire sortir les valeurs prores de $\mathbf{A}$ du disque choisi. Ceci donne un a priori plutôt encourageant sur le conservatisme d'un tel critère.

Remarque III.23 *: Les bornes ρ_s et $\hat{\mu}_s$ permettent bien sûr de considérer à la fois des incertitudes sur K et sur A_0.*

III.7 Conclusion

Nous avons donc proposé une nouvelle méthode plus générale que les précédentes pour calculer des bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste en utilisant des conditions basées sur une approche $\mathcal{LMI}$. Nous avons exposé divers cas de figure selon la région de robustesse spécifiée et la nature de l'incertitude considérée et montré comment la méthode pouvait fournir une borne de $\mathcal{D}$-stabilité robuste pour ces différents cas. Des exemples numériques ont illustré notre propos et ont permis de constater que la méthode $\mathcal{LMI}$ supporte très bien la comparaison avec d'autres approches,

du point de vue du conservatisme des bornes. Ceci étant, nous insistons surtout sur la généralité de cette méthode puisque, non seulement elle permet de traiter le cas d'incertitudes non structurées ou structurées, mais, surtout, elle autorise un vaste choix de régions $\mathcal{D}$, c'est-à-dire une vaste gamme de problèmes d'analyse de performances robustes.
Pour des cas particuliers (tels que l'étude de la stabilité robuste d'une matrice vis-à-vis d'une incertitude structurée), l'approche $\mathcal{LMI}$ peut certes donner des résultats un peu plus conservatifs que certaines autres approches avec un temps de calcul éventuellement supérieur, lié à la résolution du système $\mathcal{LMI}$. En d'autres termes, nous ne prétendons pas qu'elle est toujours l'outil le mieux adapté à l'étude de problèmes très classiques d'analyse robuste.
Lorsque $\mathcal{D}$ est une région convexe symétrique par rapport à l'axe réel, les bornes $\mathcal{LMI}$ induisent un degré de conservatisme comparable (souvent moindre) aux meilleures bornes de la littérature (telles que les bornes de Lyapunov). Le temps de calcul peut être quelque peu élevé et ce critère est parfois prépondérant dans le choix de la méthode d'analyse utilisée. Gardons cependant à l'esprit que la solution particulière $X = VV^*$ (**méthodes 2** et **T2**) évite la résolution de la $\mathcal{LMI}$ ce qui réduit considérablement le temps de calcul de la borne. Dans ce cas de figure, l'approche $\mathcal{LMI}$, d'un point de vue temps de calcul, devient d'ailleurs tout-à-fait concurrentielle avec l'approche logarithmique.
Lorsque $\mathcal{D}$ est une union de sous-régions convexes, l'approche $\mathcal{LMI}$ est la seule à notre connaissance à fournir des bornes de $\mathcal{D}$ stabilité robuste. Elle ne peut donc être comparée. C'est ce point qui confère aux bornes $\mathcal{LMI}$ de $\mathcal{D}$-stabilité robuste le caractère général que n'ont pas les autres bornes.

Chapter IV

Amélioration de la robustesse d'un placement de pôles

Au chapitre précédent, nous avons proposé une méthode de calcul de bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste, ceci pour un vaste choix possible de régions $\mathcal{D}$ du plan complexe. Dans ce chapitre, nous utilisons ces résultats, non plus pour analyser la robustesse en $\mathcal{D}$-stabilité d'un système en boucle fermée, mais pour améliorer la robustesse des lois de commande. Nous nous intéressons à des commandes de type placement de pôles et proposons une méthode pour rendre ces placements plus robustes vis-à-vis d'incertitudes non structurées ou structurées telles que celles envisagées dans l'ensemble de ce mémoire.

IV.1 Introduction

Une approche basée sur la résolution de systèmes $\mathcal{LMI}$ nous a permis de dégager des critères de robustesse en $\mathcal{D}$-stabilité applicables à l'analyse de la matrice d'évolution du modèle d'état linéaire d'un système en boucle fermée. Ainsi, lorsqu'un système en boucle ouverte est soumis à une incertitude de modélisation et que l'on est capable de traduire cette incertitude en une incertitude additive non structurée ou structurée (comme celles définies au premier chapitre) agissant sur la matrice d'état en boucle fermée, on peut estimer la robustesse de certaines performances du système bouclé, ceci par un choix judicieux d'une région $\mathcal{D}$ et par un calcul de borne telle que celles présentées au chapitre précédent.
Nous pouvons donc, grâce à ces critères, apprécier les performances robustes d'un système à modèle linéaire et nous allons montrer comment l'on peut aussi utiliser ces critères pour améliorer les performances robustes d'un système dans un cadre de synthèse. A cet effet, il y deux aspects à prendre en compte : les performances nominales du système en boucle fermée et ses performances robustes.
Les performances nominales désirées pour un système peuvent être très diverses et nous considérons ici des performances relatives à la réponse temporelle du système, en particulier à son régime transitoire, comme nous l'avons déjà mentionné au premier chapitre. Ces performances étant étroitement liées à la localisation des valeurs propres de la matrice d'état en boucle fermée, nous considérons des lois de commande, par retour statique d'état ou de sortie, de type "placement de structure propre". C'est donc par le calcul de telles lois de commande que nous tenterons d'atteindre les performances nominales souhaitées.
Les performances robustes ne peuvent évidemment pas être aussi précisément spécifiées et c'est par le choix d'une région $\mathcal{D}$ du plan complexe que nous les caractérisons en termes de $\mathcal{D}$-stabilité. Le région $\mathcal{D}$ doit bien sûr entourer les pôles du système nominal et définir ainsi le compromis entre performances et robustesse.
Le principe du placement robuste consiste alors à satisfaire les performances nominales (en réalisant un placement de pôles adéquat) tout en améliorant les performances robustes, ceci en maximisant une borne de $\mathcal{D}$-stabilité convenablement choisie. Pour cela, il faut bien entendu s'attacher à dégager des degrés de liberté (ddl) afin de formuler clairement un problème d'optimisation et de le résoudre.
En conséquence, le chapitre est ainsi organisé : dans une deuxième partie, nous rappelons quelques techniques utilisables pour placer, à certaines conditions et selon les divers cas de figure (retour d'état ou de sortie), les pôles du système bouclé lui conférant les performances nominales désirées. La troisième partie est consacrée à la recherche de ddl autorisant une amélioration des performances robustes. Cette flexibilité nous permet dans la quatrième partie de formuler plus précisément un problème d'optimisation relativement complexe. Nous proposons également un moyen d'approcher la solution de ce problème afin de déterminer une loi de placement robuste de pôles. Des exemples numériques viennent illustrer l'applicabilité d'une telle méthode dans la cinquième partie et précèdent la conclusion du chapitre.

IV.2 Obtention des performances nominales

Nous supposons, comme dans le paragraphe I.3.2 que nous devons commander un système dont le modèle linéaire est donné dans l'espace d'état par (I.8). Nous supposons également que le système est commandable et observable. Nous rappelons que nous nous limitons dans ce mémoire aux retours statiques d'état ou de sortie (cf. §I.3.2), le premier pouvant être vu comme un cas particulier du second en prenant $C = \mathbf{I}_n$. Le comportement du système en boucle fermée est alors décrit par le modèle (I.9).

L'objectif que nous nous fixons d'un point de vue nominal est de conférer au système décrit par (I.9) certaines performances dont nous avons déjà dit qu'elles étaient spécifiées en termes de localisation des valeurs propres de la matrice A (cf. §I.3.2 et annexe A). A supposer que ces spécifications soient très strictes, il convient de disposer de méthodes de calcul de la matrice de retour K garantissant, après bouclage, une position exacte du spectre de A dans le plan complexe. Ces techniques de placement strict de pôles sont nombreuses et font souvent appel à la notion de structure propre (cf. premier chapitre, §I.3.2). On parle alors de placement de structure propre et ce sont quelques unes de ces méthodes que nous rappelons ici. Ces dernières envisagent à la fois le placement des valeurs propres et de tout ou partie des vecteurs propres associés.
Nous devons distinguer le cas du retour d'état (plus facile) du cas du retour de sortie.

Remarque IV.1 *: Les techniques de placement de structure propre rappelées ci-après ne prennent en compte que des spectres désirés où les valeurs propres sont distinctes entre elles. La généralisation au cas des valeurs propres multiples est souvent possible mais elle correspond à un problème essentiellement théorique que nous éludons par souci de simplicité.*

IV.2.1 Retour d'état

Bien que le placement exact de pôles par retour d'état (que l'on sait toujours possible lorsque le système en boucle ouverte est commandable, depuis le travail de Wohnam en 1967 : voir [Won1985]) puisse être réalisé par des méthodes ne faisant pas réference à la notion de structure propre (citons notamment la généralisation au cas multivariable de la méthode monovariable classique de synthèse du polynôme caractéristique par l'utilisation d'une forme compagne du système [Tru1997]), nous rappelons ici deux méthodes connues de placement de structure propre par retour d'état. La première, historique et qualifiée de "directe" donne une caractérisation des vecteurs propres admissibles [Moo1976]. La seconde, propose une solution paramétrique du problème [FO1982]. C'est pourquoi elle est dite "paramétrique".
Avant de les présenter, il est utile de faire le bilan des paramètres disponibles lors d'un retour d'état. La matrice K est de dimension $\mathbf{m} \times n$ ce qui correspond à n

ddl utilisés pour placer le spectre et $(\mathbf{m}-1)n$ ddl supplémentaires qui peuvent, par exemple, servir à placer une partie des vecteurs propres. Ce qu'il convient de retenir dans ce bilan est que la dimension de la matrice de retour n'entraîne pas, pour le retour d'état, de condition particulière sur les dimensions du modèle à vérifier préalablement pour tenter un placement.

Approche directe

Moore, l'initiateur de cette approche, fut le premier à identifier les ddl offerts par un retour statique d'état plaçant un spectre désiré [Moo1976] en montrant notamment que cette flexibilité est directement liée au choix des composantes des vecteurs propres de la matrice d'état du système bouclé.
Avant de rappeler deux théorèmes donnés dans [Moo1976], nous associons à tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, les deux matrices suivantes :

$$[\lambda \mathbf{I}_n - A_0 \quad B] \in \mathbb{C}^{n\times(n+\mathbf{m})} \tag{IV.1}$$

et :

$$R_\lambda = \begin{bmatrix} N_\lambda \\ M_\lambda \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad N_\lambda \in \mathbb{C}^{n\times\mathbf{m}}\,;\, M_\lambda \in \mathbb{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{m}} \tag{IV.2}$$

où les colonnes de R_λ constituent une base possible du noyau à droite de $[\lambda\mathbf{I}_n - A_0\ B]$. Remarquons que si l'on se réfère à la définition de la structure propre d'un système bouclé, le vecteur $[v_i^*\ w_i^*]^* \in \mathbb{C}^{n+\mathbf{m}}$ (concaténation du vecteur propre à droite v_i et de la direction d'entrée w_i associés à la valeur propre λ_i de la matrice A) appartient clairement au sous-espace généré par R_{λ_i}, ceci quel que soit $i \in \{1,...,n\}$. Moore s'appuie sur ces préliminaires pour donner le théorème suivant :

Théorème IV.1 *Soit $\{\lambda_i, \forall i \in \{1,...,n\}\}$, un ensemble auto-conjugué de n scalaires. Il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}\times n}$ telle que :*

$$(A+BK)v_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1,...,n\} \tag{IV.3}$$

si et seulement si :

(i) Les vecteurs v_i, $\forall i \in \{1,...,n\}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^n$.

(ii) $v_i = \tilde{v}_j$ quand $\lambda_i = \tilde{\lambda}_j$.

(iii) $v_i \in Im(N_{\lambda_i}) \forall i \in \{1,...,n\}$.

Si K existe et si B est de rang plein, alors K est unique.

Démonstration : voir [Moo1976].

Ce théorème signifie qu'à un spectre donné et à un jeu de vecteurs propres à droite désirés, linéairement indépendants (condition (i)), admissibles (condition (iii)) et conjugués comme le sont les valeurs propres associées (condition (ii)), correspond une unique matrice réelle de retour d'état, sous réserve que la matrice d'entrée soit de rang plein. Ainsi, il s'agit d'une condition d'existence d'une solution à un placement de structure propre. Or si l'on s'intéresse à un simple placement de pôles, il importe d'identifier les ddl disponibles et qui sont de toute évidence liés au choix des vecteurs propres. A ce propos, notons que les vecteurs propres v_i et les directions d'entrée w_i peuvent s'exprimer en fonction de vecteurs non nuls de paramètres arbitraires $z_i \in \mathbb{C}^{\mathbf{m}}$:

$$v_i = N_{\lambda_i} z_i \quad ; \quad w_i = -M_{\lambda_i} z_i \tag{IV.4}$$

Il apparaît donc que les vecteurs propres admissibles appartiennent à des sous-espaces de dimension $\mathbf{m}$. Ces vecteurs étant définis à un coefficient multiplicateur près, on s'intéresse en fait à un ensemble de vecteurs propres colinéaires associés à la même valeur propre (on parle parfois de **direction propre** pour désigner cet ensemble de vecteurs). Ces directions propres sont par exemple caractérisées par le choix de $(\mathbf{m}-1)$ composantes des vecteurs z_i, la dernière pouvant être arbitrairement fixée à "1". En d'autres termes, dans le cadre d'un simple placement de pôles, ces ddl restent à l'entière disposition de l'automaticien qui doit cependant faire en sorte de respecter les conditions (i) et (ii).
Cette flexibilité est exprimée de manière différente dans [Mag1987] où les sous-espaces admissibles $S(\lambda_i)$ (c'est-à-dire les espaces dans lesquels les vecteurs propres doivent être choisis), appelés sous-espaces (A_0, B)-caractéristiques, sont définis par :

$$S(\lambda_i) = (A_0 - \lambda_i \mathbf{I}_n)^{-1} Im(B) \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{IV.5}$$

(où $Im(B)$ représente l'image de l'ensemble des directions d'entrée possibles par l'application linéaire associée à B) c'est-à-dire :

$$S(\lambda_i) = \{v_i \in \mathbb{C}^n \,|\{\, \exists w_i \in \mathbb{C}^m | (A_0 - \lambda_i \mathbf{I}_n) v_i + B w_i = \mathbf{0}_{n,1}\}\} \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{IV.6}$$

Ces espaces sont de dimension $\mathbf{m}$ et sont bien sûr invariants par retour d'état. Ils permettent d'exprimer le vecteur propre v_i de la façon suivante :

$$v_i = -(A_0 - \lambda_i \mathbf{I}_n)^{-1} B w_i, \quad w_i \in \mathbb{C}^{\mathbf{m}} \tag{IV.7}$$

Le théorème suivant (inspiré de [Moo1976]) s'appuie sur la démonstration du théorème IV.1 et sur les remarques précédentes pour donner l'expression de la matrice de retour d'état.

Théorème IV.2 *: [Moo1976] Soit le système commandable (I.8), un ensemble auto-conjugué $\{\lambda_i \in \mathbb{C},\, i \in \{1, ..., n\}\}$ et les matrices $R_{\lambda_i} = [N_{\lambda_i}^* \, M_{\lambda_i}^*]^*$ correspondantes. Pour un choix générique de vecteurs $z_i \in \{\mathbb{C}/\{\mathbf{0}_{\mathbf{m},1}\}\}^{\mathbf{m}}$, $i \in \{1, ..., n\}$,* *satisfaisant* $v_i = N_{\lambda_i} z_i = \tilde{v}_j = \tilde{N}_{\lambda_j} \tilde{z}_j$ *si* $\lambda_i = \tilde{\lambda}_j$ *et* $rang([v_1, ..., v_n]) = n$*, la matrice de retour d'état* K *donnée par :*

$$K = [w_1, ..., w_n][v_1, ..., v_n]^{-1} \tag{IV.8}$$

(où $w_i = -M_{\lambda_i} z_i, \forall i \in \{1, ..., n\}$*) est l'unique matrice de retour d'état telle que les valeurs propres de la matrice* $A = A_0 + BK$ *sont les* λ_i *avec pour vecteurs propres à droite associés les vecteurs* v_i*,* $i \in \{1, ..., n\}$*.*

Démonstration : voir [Moo1976].

Remarque IV.2 *: On peut établir des théorèmes duaux en raisonnant par rapport aux vecteurs propres à gauche et aux directions de sortie.*

Remarque IV.3 *: La technique précédente permet également d'assurer certaines propriétés de découplage par le choix de certaines composantes des vecteurs propres (voir premier chapitre). Toutefois, le choix d'un vecteur désiré* v_{d_i} *n'est pas forcément compatible avec l'admissibilité du vecteur propre effectif et il convient d'utiliser quelques ddl pour placer un vecteur propre admissible* v_i *aussi proche que possible du vecteur désiré, au sens des moindres carrés par exemple, en résolvant :*

$$\min ||v_{d_i} - v_i||_2^2 \tag{IV.9}$$

Ceci correspond à une projection orthogonale du vecteur désiré sur l'espace admissible [ASC1983]. L'expression de la solution de ce problème dépend de la technique de placement de structure propre utilisée, de la plus ou moins grande accessibilité des ddl et de la plus ou moins bonne caractérisation des sous-espaces admissibles. Dans le cas de la méthode exposée dans ce paragraphe, la solution analytique du problème est donnée par [ASC1983] :

$$z_i = (N_{\lambda_i}^* N_{\lambda_i})^{-1} N_{\lambda_i}^* v_{d_i} \tag{IV.10}$$

Rappelons cependant que nous ne nous intéresserons par la suite qu'au placement de pôles et que, même si l'ajout de telles spécifications supplémentaires est toujours possible, nous ne l'envisagerons pas dans les exemples de ce chapitre.

Approche paramétrique

Cette approche [FO1982] est un peu restrictive par rapport à la précédente car elle oblige à choisir des valeurs propres désirées pour la matrice d'état A du système bouclé (I.9) différentes de celles de la matrice d'état A_0 du système en boucle ouverte (I.8).
Soient $\Delta(\lambda)$ et $\Delta_0(\lambda)$ les polynômes caractéristiques respectifs des systèmes (I.9) et (I.8). On peut écrire :

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \det(\mathbf{I_m} - KL(\lambda)) \tag{IV.11}$$

où :

$$L(\lambda) = (\lambda \mathbf{I}_n - A_0)^{-1} B \tag{IV.12}$$

On suppose que $\{\lambda_i, i \in \{1, ..., n\}\}$ est le spectre désiré pour A, ce qui entraîne que l'équation :

$$\Delta(\lambda) = 0 \tag{IV.13}$$

doit être vérifiée pour $\lambda = \lambda_i$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$ puisqu'il s'agit de l'équation caractéristique du système en boucle fermée. Selon l'hypothèse de non-intersection des spectres de A et de A_0, on a :

$$\Delta_0(\lambda_i) \neq 0 \Rightarrow \det(\mathbf{I_m} - KL(\lambda_i)) = 0 \; \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{IV.14}$$

ce qui peut se traduire par l'existence de n vecteurs $w_i \in \{\mathbb{C}/\{\mathbf{0_{m,1}}\}\}^{\mathbf{m}}$, $i \in \{1, ..., n\}$, tels que :

$$(\mathbf{I_m} - KL(\lambda_i))w_i = 0 \Leftrightarrow KL(\lambda_i)w_i = w_i \tag{IV.15}$$

On peut alors choisir les vecteurs w_i, $\forall i \in \{1, ..., n\}$ et déterminer K :

$$K = [w_1, \dots, w_n][L(\lambda_1)w_1, \dots, L(\lambda_n)w_n]^{-1} \tag{IV.16}$$

On retrouve une expression de K analogue à celle déterminée par approche directe. En fait, cette approche restrictive donne une solution particulière pour laquelle :

$$N_{\lambda_i} = L(\lambda_i) \quad \text{et} \quad M_{\lambda_i} = \mathbf{I_m} \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{IV.17}$$

Dans cette approche, les ddl pouvant servir au placement de vecteurs propres admissibles sont les directions d'entrée elles-mêmes. Il faut noter que l'on peut également tenir un raisonnement dual par rapport aux vecteurs propres à gauche.

Remarque IV.4 : *Dans les deux approches suivantes, le calcul de K nécessite l'inversion d'une matrice complexe ce qui est peu souhaitable numériquement. Cependant, il est facile de modifier la matrice des directions d'entrées et celle des vecteurs propres avant de calculer K, de manière à les rendre réelles et à faciliter le calcul numérique [Moo1976].*

Bien entendu, il existe plusieurs autres approches permettant de placer exactement un spectre par un retour d'état. Citons parmi elles l'approche proposée dans [KND1985] où une méthode de placement de pôles par un retour d'état utilisant les ddl pour minimiser le nombre de conditionnement de la matrice modale de colonnes normalisées est explicitée. Cette méthode est implémentée dans la Control System Toolbox de MATLAB et correspond à la fonction **place** [ctr1996].

IV.2.2 Retour de sortie

Le problème du retour de sortie est nettement plus compliqué puisque les **mp** ddl apportés par la matrice de retour peuvent ne pas être suffisants pour placer l'intégralité du spectre désiré (il est à noter que nous ne nous intéressons pas ici aux techniques de placement partiel de **p** pôles qui sont généralement des extensions assez immédiates des résultats du retour d'état [ASC1983]). On comprend dès lors qu'outre la commandabilité et l'observabilité, le système décrit par (I.8) doive vérifier certaines conditions sur ses dimensions pour qu'un tel placement soit envisageable. Ces conditions sont liées à la définition de la structure propre (cf. premier chapitre) et, en particulier, à la propriété d'orthogonalité (I.13) que doivent vérifier les vecteurs propres.
Beaucoup d'auteurs ont travaillé à l'établissement de conditions sur n, **m** et **p** autorisant un placement complet de pôles par retour statique de sortie. Le résultat le plus significatif et le plus souvent mentionné est celui proposé dans [Kim1975], connu sous le nom de condition de Kimura. Cette condition est la suivante :

$$\mathbf{m} + \mathbf{p} > n \tag{IV.18}$$

Kimura montre que si (IV.18) est vérfiée alors on peut placer n'importe quel spectre pour la matrice d'état A du système (I.9) pourvu qu'une légère modification du spectre désiré soit tolérable. En fait, tout spectre est a priori plaçable mais il peut exister des spectres pathologiques pour lesquels aucun retour ne permet un placement, en particulier parce qu'il peut y avoir impossibilité de trouver un jeu de vecteurs propres admissibles linéairement indépendants.
Il faut rappeler que la condition de Kimura s'applique aux systèmes commandables et observables et qu'elle a été établie sous l'hypothèse que nous avons déjà posée ici, selon laquelle chaque valeur propre désirée est d'ordre de multiplicité unitaire. On peut alors voir l'inégalité (IV.18) comme une condition "génériquement" suffisante pour placer un spectre par retour de sortie. Nous supposons par la suite que cette condition est satisfaite.
Dans cette partie nous présentons trois approches : nous oublions volontairement l'approche directe pour lui préférer une approche dite "géométrique", l'approche "paramétrique", et une approche dans laquelle la formulation du problème fait intervenir, entre autres, deux équations de Sylvester.
A propos des problèmes engendrés par le retour de sortie et des diverses conditions de placement qui ont pu être établies, l'on peut se référer à la vue d'ensemble proposée dans [SADG1997].

Approche géométrique

Cette approche est très intéressante car elle fait clairement apparaître les ddl et leur utilisation potentielle [CM1991]. Avant de donner le théorème résumant le résultat principal, nous donnons une définition préliminaire. De même qu'à chaque scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, on peut associer un sous-espace (A_0, B)-caractéristique $S(\lambda)$ défini comme en

(IV.5) avec $\lambda_i = \lambda$, on peut aussi lui associer un sous-espace (A_0, C)-caractéristique $\tau(\lambda)$ défini ainsi :

$$\tau(\lambda) \; = \; (A_0 - \lambda \mathbf{I}_n) Ker(C) \tag{IV.19}$$

où $Ker(C)$ est le noyau à droite de C.

Théorème IV.3 *: [CM1991] Soit un système en boucle ouverte dont le comportement est décrit par le modèle (I.8) et vérifiant la condition (IV.18). Soit un ensemble* $\{\lambda_i,\, i \in \{1, ..., n\}\}$ *de scalaires distincts partitionné en trois sous-ensembles auto-conjugués de la manière suivante :*

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\mathbf{p}-1}\} \quad ; \quad \{\lambda_{\mathbf{p}}\} \quad ; \quad \{\lambda_{\mathbf{p}+1}, \dots, \lambda_n\} \tag{IV.20}$$

Soit le sous-espace $S'(\lambda_{\mathbf{p}})$ *défini par l'intersection suivante :*

$$S'(\lambda_{\mathbf{p}}) \; = \; S(\lambda_{\mathbf{p}}) \cap (\tau(\lambda_{\mathbf{p}+1} + S_{\mathbf{p}-1}) \cap \, ... \, \cap (\tau(\lambda_n) + S_{\mathbf{p}-1}) \tag{IV.21}$$

obtenu par un choix générique itératif de vecteurs non nuls $v_i \in S(\lambda_i)$, $\forall i \in \{1, ..., \mathbf{p}-1\}$, *tels que* $v_i = \tilde{v}_j$ *si* $\lambda_i = \tilde{\lambda}_j$ *et définissant ainsi* $S_{\mathbf{p}-1} = Im([v_1, \dots, v_{\mathbf{p}-1}])$.
La matrice donnée par :

$$K \; = \; [w_1, \dots, w_{\mathbf{p}}]([Cv_1, \dots, Cv_{\mathbf{p}}])^{-1} \tag{IV.22}$$

où $v_{\mathbf{p}}$ *est un vecteur choisi dans* $S'(\lambda_{\mathbf{p}})$ *et où les* w_i *sont les directions d'entrée correspondant aux vecteurs propres* v_i, $\forall i \in \{1, ..., \mathbf{p}\}$ *est l'unique matrice réelle telle que le spectre de* A *soit confondu avec* $\{\lambda_i,\, i \in \{1, ..., n\}\}$ *avec* $\{v_i,\, i \in \{1, ..., \mathbf{p}\}\}$ *comme ensemble des* **p** *premiers vecteurs propres à droite associés respectivement à* $\lambda_i \, i \in \{1, ..., \mathbf{p}\}$.

Démonstration : voir [CM1991].

On peut remarquer que le placement de pôles, pour cette approche, ne peut se faire qu'à la condition que l'on puisse choisir un vecteur $v_{\mathbf{p}}$ dans $S'(\lambda_{\mathbf{p}})$ tel que $[Cv_1, \dots, Cv_{\mathbf{p}}]$ soit de rang plein. Si l'on éclipse la condition peu contraignante d'indépendance linéaire des vecteurs Cv_i qui explique en partie le caractère générique du choix des vecteurs v_i, il est nécessaire que $S'(\lambda_{\mathbf{p}})$ ne soit pas réduit au singleton $\{\mathbf{0}_{n,1}\}$ pour que ce choix de $v_{\mathbf{p}}$ puisse se faire. Or la dimension générique de $S'(\lambda_{\mathbf{p}})$ est $\mathbf{m} + \mathbf{p} - n$ [CM1991] ce qui signifie que la condition (IV.18) apparaît ici comme une condition génériquement nécessaire d'existence de $S'(\lambda_{\mathbf{p}})$ non-réduit à $\{\mathbf{0}_{n,1}\}$ et donc comme une condition génériquement nécessaire de placement de pôles par retour de sortie, selon cette approche. Finalement, cette dernière, compte tenu du résultat de Kimura, apparaît, **pour cette méthode**, comme une condition rigoureusement ni nécessaire, ni suffisante mais génériquement nécessaire et suffisante.

La technique présentée dans ce paragraphe montre bien les ddl utilisés. En effet, $\mathbf{p}-1$ vecteurs propres à droite admissibles sont placés en utilisant ainsi $(\mathbf{m}-1)(\mathbf{p}-1)$ ddl. Le $\mathbf{p}^{\text{ème}}$ vecteur propre, s'il peut être choisi dans $S'(\lambda_\mathbf{p})$, utilise $(\mathbf{m}+\mathbf{p}-n-1)$ ddl. Ainsi, le nombre total de ddl servant à placer les vecteurs propres est :

$$(\mathbf{m} - 1)(\mathbf{p} - 1) + (\mathbf{m} + \mathbf{p} - n - 1) = \mathbf{mp} - n \tag{IV.23}$$

Si l'on ajoute les n ddl nécessaires au placement des valeurs propres elles-mêmes, il devient clair que la technique utilise toute la flexibilité potentielle du retour statique de sortie.

Approche paramétrique

Nous citons cette approche due à [RO1987, RO1989] car elle reprend une technique déjà présentée dans le cas du retour d'état, elle permet de dégager les ddl d'une autre manière que l'approche géométrique et elle a été présentée accompagnée d'un algorithme très efficace [RO1989] que nous ne donnerons néanmoins pas dans ce mémoire. L'hypothèse de partitionnement du spectre désiré pour A figurant dans le théorème IV.3 ainsi que l'hypothèse de non-intersection des spectres de A et de A_0 sont faites.

Théorème IV.4 *Soit le système (I.8) tel que (IV.18) est satisfaite. Le spectre $\{\lambda_i \in \mathbb{C},\ i \in \{1, ..., n\}\}$ et l'ensemble des directions d'entrées $\{w_i \in \{\mathbb{C}/\{\mathbf{0}_{\mathbf{m},1}\}\}^{\mathbf{m}},\ i \in \{1, ..., \mathbf{p}-1\}\}$ tels que $w_i = \tilde{w}_j$ pour $\lambda_i = \tilde{\lambda}_j$ peuvent être associés à la matrice A du système (I.9) par la matrice de retour de sortie :*

$$K = [w_1, \ldots, w_\mathbf{p}](C[(\lambda_1\mathbf{I}_n - A_0)^{-1}Bw_1, \ldots, (\lambda_\mathbf{p}\mathbf{I}_n - A_0)^{-1}Bw_\mathbf{p}])^{-1} \tag{IV.24}$$

si et seulement si $\{\lambda_i,\ i \in \{1, ..., n\}\}$ et $\{w_i,\ i \in \{1, ..., \mathbf{p}\}\}$ vérifient :

$$\begin{bmatrix} \gamma^*_{\mathbf{p}+1}C(\lambda_{\mathbf{p}+1}\mathbf{I}_n - A_0)^{-1} \\ \vdots \\ \gamma^*_n C(\lambda_n\mathbf{I}_n - A_0)^{-1} \end{bmatrix} [(\lambda_1\mathbf{I}_n - A_0)^{-1}Bw_1, \ldots, (\lambda_\mathbf{p}\mathbf{I}_n - A_0)^{-1}Bw_\mathbf{p}] = 0 \tag{IV.25}$$

pour des vecteurs paramètres $\gamma_k \in \{\mathbb{C}/\{\mathbf{0}_{\mathbf{p},1}\}\}^{\mathbf{p}}$, $k \in \{\mathbf{p}+1, ..., n\}$ tels que $\gamma_k = \tilde{\gamma}_l$ si $\lambda_k = \tilde{\lambda}_l$ et tels que :

$$rang(C[(\lambda_1\mathbf{I}_n - A_0)^{-1}Bw_1, \ldots, (\lambda_\mathbf{p}\mathbf{I}_n - A_0)^{-1}Bw_\mathbf{p}]) = \mathbf{p} \tag{IV.26}$$

Démonstration : voir [RO1989].

Ce théorème montre aussi les paramètres libres que constituent les n valeurs propres à placer et les $\mathbf{p}-1$ directions d'entrée w_i, $i \in \{1, ..., \mathbf{p}-1\}$ servant à placer les $\mathbf{p}-1$ vecteurs propres v_i, $i \in \{1, ..., \mathbf{p}-1\}$ appartenant chacun à un sous-espace de dimension $\mathbf{m}$. Le $\mathbf{p}^{\text{ème}}$ vecteur propre à droite est calculé de manière à satisfaire la condition d'orthogonalité (IV.25) qui laisse apparaître les $\mathbf{m}$ ddl de $w_{\mathbf{p}}$ soumis à $(n-\mathbf{p})$ contraintes. Si l'on fait le bilan des ddl, on aboutit à la même conclusion que pour l'approche géométrique. La condition de Kimura permet d'envisager une solution au calcul de $w_{\mathbf{p}}$ mais elle n'assure pas de l'indépendance linéaire des vecteurs propres, équivalente à (IV.26) si C est de rang plein.

Approche utilisant deux équations de Sylvester

Cette dernière approche exposée est celle proposée dans [SL1993]. Elle présente l'inconvénient, en comparaison des précédentes, de ne pas faire apparaître clairement les ddl véritablement disponibles mais en contre partie, elle est très facilement implantable. Elle repose sur l'utilisation de deux équations de Sylvester couplées entre elles par une condition supplémentaire. De manière simplifiée, placer un spectre auto-conjugué $\{\lambda_i,\ i \in \{1, ..., n\}\}$ pour le système (I.9) revient à résoudre en U et V les deux équations de Sylvester suivantes [FKKN1985, SL1993] :

$$A_0 V \;-\; V\Lambda \;=\; -BW \tag{IV.27}$$

$$U^* A_0 \;-\; \Lambda U^* \;=\; -LC \tag{IV.28}$$

(où Λ est définie en (I.12)) couplées entre elles par la condition :

$$Ker(U^*) \;=\; Im(V) \tag{IV.29}$$

pour un choix de W et de L. Ces équations reprennent en fait les notations utilisées dans la définition de la structure propre au premier chapitre puisque d'une part, V représente la matrice des vecteurs propres à droite de A et l'équation (IV.27) correspond à l'admissibilité de ses vecteurs propres à droite, d'autre part, U représente la matrice des vecteurs propres à gauche de A et l'équation (IV.28) correspond à l'admissibilité de ses vecteurs propres à gauche. W et L représentent les matrices de directions d'entrée et de sortie associées. La relation (IV.29) traduit en fait la condition d'orthogonalité $u_i^* v_j = 0$, $\forall \{i, j \neq i\} \in \{1, ..., n\}^2$.

Sur la base de ces deux équations, un algorithme de placement de pôles est donc proposé dans [SL1993] et nous en donnons ici une version quelque peu simplifiée. On note $\Lambda_p \in \mathbb{C}^{\mathbf{p}\times\mathbf{p}}$ la matrice diagonale telle que $[\Lambda_p]_{\{i,i\}} = \lambda_i$, $\forall i \in \{1, ..., \mathbf{p}\}$ et $\Lambda_{n-p} \in \mathbb{C}^{(n-\mathbf{p})\times(n-\mathbf{p})}$ la matrice diagonale telle que $[\Lambda_{n-p}]_{\{i,i\}} = \lambda_j$, $\forall \{i, j\} \in \{\{1, ..., n-\mathbf{p}\} \times \{\mathbf{p}+1, ..., n\}\}$. Ceci suppose que les ensembles $\{\lambda_i,\ i \in \{1, ..., \mathbf{p}\}\}$ et $\{\lambda_i,\ i \in \{\mathbf{p}+1, ..., n\}\}$ sont auto-conjugués.

<u>Algorithme :</u>

1. Choisir un ensemble auto-conjugué de $n - \mathbf{p}$ valeurs propres désirées $\{\lambda_i, i \in \{\mathbf{p}+1, ..., n\}\}$ et résoudre :

$$U_{n-p}^* A_0 \; - \; \Lambda_{n-p} U_{n-p}^* \; = \; -L_{n-p} C \tag{IV.30}$$

en U_{n-p} pour un choix de L_{n-p}. Il s'agit en fait de l'équation (IV.28) réduite au spectre $\{\lambda_i,\, i \in \{\mathbf{p}+1, ..., n\}\}$, à la matrice de vecteurs propres à gauche $U_{n-p} = [u_{\mathbf{p}+1}, \, \dots, u_n] \in \mathbb{C}^{n \times (n-\mathbf{p})}$ et à la matrice de directions de sortie $L_{n-p} = [l_{\mathbf{p}+1}, \, \dots, l_n] \in \mathbb{C}^{(n-\mathbf{p}) \times (n-\mathbf{p})}$

2. Choisir un ensemble auto-conjugué des $\mathbf{p}$ premières valeurs propres désirées $\{\lambda_i, i \in \{1, ..., \mathbf{p}\}\}$:

   - $\forall i \in \{1, ..., \mathbf{p}\}$, calculer :

   $$\mathcal{N}_{\lambda_i} \; = \; \begin{bmatrix} A_0 - \lambda_i \mathbf{I}_n & B \\ U_{n-p}^* & \mathbf{0}_{n-\mathbf{p},\mathbf{m}} \end{bmatrix} \tag{IV.31}$$

   ainsi que $[S_i^*, Q_i^*]^*$ (où $S_i \in \mathbb{C}^{\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i}$ et $Q_i \in \mathbb{C}^{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_i}$), une matrice dont les colonnes constituent une base du noyau à droite de $\mathcal{N}_{\lambda_i}$.

   - Trouver $\mathbf{p}$ vecteurs colonnes z_i de dimension $\mathbf{r}_i$, $\forall i \in \{1, ..., \mathbf{p}\}$ tels que :

   $$V_p \; = \; [v_1, ..., v_\mathbf{p}] \; = \; [S_1 z_1, \, \dots, S_\mathbf{p} z_\mathbf{p}] \tag{IV.32}$$

   soit de rang plein.

   - Calculer :

   $$W_p \; = \; [w_1, \, \dots, w_\mathbf{p}] \; = \; [Q_1 z_1, \, \dots, Q_\mathbf{p} z_\mathbf{p}] \tag{IV.33}$$

   Les vecteurs v_i et w_i, $\forall i \in \{1, ..., \mathbf{p}\}$, correspondent respectivement aux vecteurs propres à droite et aux directions d'entrées admissibles associées aux $\mathbf{p}$ premières valeurs propres de A désirées. Ainsi V_p et W_p vérifient l'équation :

   $$A_0 V_p \; - \; V_p \Lambda_p \; = \; -B W_p \tag{IV.34}$$

   qui correspond à l'équation (IV.27) ramenée aux $\mathbf{p}$ premières valeurs propres.

   Ce pas de l'algorithme permet également de s'assurer de la satisfaction de la condition d'orthogonalité puisque clairement $U_{n-p}^* V_p = \mathbf{0}_{n-\mathbf{p},\mathbf{p}}$.

3. Calculer la matrice de retour de sortie :

$$K \; = \; W_p (C V_p)^{-1} \tag{IV.35}$$

Il suffit de quelques lignes de code informatique pour implanter un tel algorithme. Bien entendu, la condition de Kimura (IV.18) apparaît inplicitement au niveau du calcul de la base du noyau à droite des matrices $\mathcal{N}_{\lambda_i}$, noyau dont la dimension ne doit pas être nulle, $\forall i \in \{1, ..., \mathbf{p}\}$.
En ce qui concerne les ddl, l'algorithme ci-dessus est nettement moins explicite que les approches précédentes. Les paramètres libres sont a priori L_{n-p} et les vecteurs z_i. Mais on ne peut bénéficier, une fois le spectre choisi, de plus de flexibilité que les $(\mathbf{mp} - n)$ ddl supplémentaires apportés par la matrice de retour de sortie K. Or, dans cette méthode, les ddl sont utilisés au fur et à mesure. Ainsi, il faut $(n - \mathbf{p})(\mathbf{p} - 1)$ ddl pour placer les $(n - \mathbf{p})$ directions propres à gauche. Soit $(n - \mathbf{p})(\mathbf{p} - 1) \geq \mathbf{mp} - n$, en quel cas il faut répartir les $(\mathbf{mp} - n)$ ddl sur les composantes de L_{n-p}, les autres composantes de L_{n-p} et les z_i n'étant plus réellement des paramètres libres ($\mathbf{r}_i = 1$, $\forall i \in \{1, ..., \mathbf{p}\}$) ; soit $(n - \mathbf{p})(\mathbf{p} - 1) < \mathbf{mp} - n$, en quel cas on utilise $(n - \mathbf{p})(\mathbf{p} - 1)$ ddl pour jouer sur les directions propres à gauche et les ddl restant doivent être répartis sur les composantes des z_i en fonction des valeurs des dimensions $\mathbf{r}_i$, de manière à bénéficier au maximum de la flexibilité liée aux directions propres à droite.

Il existe bien sûr beaucoup d'autres approches pour déterminer une matrice de retour de sortie K plaçant le spectre voulu pour A. Citons par exemple l'approche polynomiale de [Mag1987] s'appuyant sur une identification des coefficents du polynôme caractéristque du système (I.9) avec ceux d'un polynôme caractéristique souhaité. Citons aussi les méthode proposées dans [HP1997] et reposant sur les conditions de placement données par [FKKN1985]. Le principe de ces méthodes est de donner une paramétrisation de toutes les matrices K_u pemettant de placer une partie du spectre désiré ainsi que les directions propres à gauche associées et de faire de même pour les matrices K_v capables de placer le reste du spectre ainsi que les directions propres à droite associées. Sous certaines conditions, il existe une instance commune de ces jeux de paramètres telles que $K = K_v = K_u$ respecte la condition d'orthogonalité et place ainsi l'intégralité du spectre.

Lorsque la condition de Kimura (IV.18) n'est pas satisfaite, il convient d'utiliser des retours de sortie dynamiques. Plusieurs méthodes ont été proposées parmi lesquelles nous pouvons citer les compensateurs dynamiques obtenus par approche paramétrique [HO1987] ou encore les observateurs d'ordre minimal permettant de distinguer clairement la dynamique du procédé et celle de l'observateur [ACM1989].

IV.3 Recherche de la flexibilité nécessaire

Nous avons vu dans l'introduction de ce chapitre, que le problème de placement robuste se traduirait par un problème d'optimisation de borne $\mathcal{LMI}$. Il importe donc de trouver des ddl avant de formuler clairement ce problème. L'objet de cette partie est de faire un bilan de ces ddl potentiellement exploitables et de voir dans quelle mesure ils deviendront des variables d'optimisation.

IV.3.1 Utilisation des directions propres

Les diverses méthodes de placement de structure propre ont laissé apparaître des ddl qui sont utilisables lorsqu'aucune spécification sur les vecteurs propres n'est donnée, c'est-à-dire lorsque seul le spectre désiré traduit les performances souhaitées pour le système bouclé. Ces ddl sont dissimulés dans les composantes de la matrice de retour. Les approches directes, paramétriques et géométriques les ont clairement identifiés alors que l'approche utilisant les équations de Sylvester oblige à faire une réflexion préalable pour savoir à quel niveau du calcul du retour on peut efficacement jouer sur ces paramètres libres. Quoi qu'il en soit, comme nous l'avons vu en étudiant ces diverses approches, on peut toujours a priori parvenir à bénéficier de ces $(\mathbf{pm}-n)$ ddl en remarquant toutefois que certains ddl risquent d'être mal exploités pour la raison suivante : dans les méthodes de placement de structure propre présentées ci-dessus, il est toujours supposé que le spectre désiré est auto-conjugué puisque A doit être réelle. Mais cette supposition ne suffit pas pour s'assurer que A est réelle car il existe des retours K complexes tels que A est aussi complexe bien qu'ayant le spectre spécifié. C'est pourquoi il est aussi précisé dans ces méthodes de choisir les paramètres libres tels que l'ensemble des vecteurs propres associés soit auto-conjugué comme l'est le spectre. Or, dans le problème d'optimisation qui sera formulé par la suite, les variables d'optimisation sont réelles, ce qui implique un traitement préalable pour exploiter pleinement les ddl. Pour s'en convaincre, on peut examiner le cas du retour d'état par approche directe :
Supposons que nous placions, entre autres, deux valeurs propres λ_i et λ_j telles que $\lambda_j = \tilde{\lambda}_i$. Les vecteurs propres à droite associés vérifient :

$$v_j = N_{\lambda_j} z_j = \tilde{v}_i \quad ; \quad v_i = N_{\lambda_i} z_i \quad \text{avec} \quad \{z_i; z_j\} \in \{\mathbb{C}/\{\mathbf{0}_{\mathbf{m},1}\}\}^2 \qquad \text{(IV.36)}$$

Nous avons vu que les vecteurs propres v_i et v_j sont définis à un coefficient multiplicateur près. Ainsi, parmi les $\mathbf{m}$ composantes de z_i et de z_j (qui correspondent aux choix des vecteurs propres), une composante peut être fixée à “1” et les $(\mathbf{m}-1)$ composantes restantes correspondent à des ddl permettant de placer les directions propres. Ces composantes constitueront des variables d'optimisation du problème qui sera formulé au paragraphe IV.4.
Or on a $N_{\lambda_j} = \tilde{N}_{\lambda_i}$, ce qui oblige à vérifier $z_j = \tilde{z}_i$, donc si l'on prend directement $(\mathbf{m}-1)$ composantes de z_i et z_j (notons ces vecteurs réduits $\bar{z}_i$ et $\bar{z}_j$) comme variables d'optimisation, sachant que ces variables sont en pratique des réels, on a $\bar{z}_j = \bar{z}_i$ et l'on perd la flexibilité sur z_j. Cest pourquoi les variables d'optimisation correspondantes ne peuvent être, en pratique, directement identifiées aux vecteurs $\bar{z}_i$ et $\bar{z}_j$. Considérons plutôt des variables d'optimisation apparaissant sous forme

de vecteurs $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}-1}$ et $\mathbf{z}_j \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}-1}$. On retrouve la flexibilité de la $j^{\text{ème}}$ direction propre en posant, lors du placement :

$$\bar{z}_i = \mathbf{z}_i + \mathbf{i}\mathbf{z}_j \quad ; \quad \bar{z}_j = \mathbf{z}_i - \mathbf{i}\mathbf{z}_j \tag{IV.37}$$

Cette remarque est valable pour les diverses techniques de placement de structure propre même si le retour de sortie nécessite un traitement préalable un peu plus compliqué. Néanmoins, nous appellerons $\mathbf{z}_i$, de manière générale, les ddl liés aux directions propres sachant que $\lambda_k \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{z}_k = \bar{z}_k$.

IV.3.2 Tolérances sur le spectre désiré

La flexibilité offerte par les directions propres n'est cependant pas forcément suffisante pour améliorer de manière significative la robustesse d'un placement de pôles. C'est pourquoi nous proposons dans ce paragraphe, de relacher un peu les contraintes sur les performances nominales de manière à obtenir des ddl supplémentaires. En effet, il semble peu réaliste que des spécifications sur la réponse d'un système bouclé nominal puissent être traduites par une localisation très stricte des valeurs propres de la matrice d'état A dans le plan complexe et l'on peut raisonnablement penser que ces spécifications de performances nominales aboutissent plutôt à des zones de tolérances dans lesquelles doivent se situer les valeurs propres de A [Rop1983]. Ce point de vue se justifie aussi par le fait que le modèle étant incertain, ses pôles ne peuvent pas coïncider de manière très précise avec un ensemble fixé de n points du plan complexe.
Ainsi, nous donnons ici un moyen d'exprimer la spécification du spectre sous forme de régions de tolérances en nous inspirant du travail de [LT1997].

• Chaque valeur propre désirée réelle λ_j est définie par le scalaire réel κ_j, une tolérance $\eta_j \in \mathbb{R}$ et une valeur centrale $\lambda_{j_0} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_j = \lambda_{j_0} + \eta_j \psi(\kappa_j) \tag{IV.38}$$

où ψ est la fonction sigmoïde bipolaire :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto \psi(x) &= \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \end{aligned} \tag{IV.39}$$

Lorsque κ_i décrit $\mathbb{R}$, la localisation de λ_j dans le plan complexe varie sur l'axe réel dans l'intervalle $[\lambda_{j_0} - \eta_j; \lambda_{j_0} + \eta_j]$.

• Chaque paire de valeurs propres désirées complexes conjuguées $(\lambda_k; \tilde{\lambda}_k)$ est définie par :

$$\lambda_k = \lambda_{k_0} + \xi_k(\omega_k)(cos(\omega_k) + sin(\omega_k)\mathbf{i}) \tag{IV.40}$$

$$\tilde{\lambda}_k = \tilde{\lambda}_{k_0} + \xi_k(\omega_k)(cos(\omega_k) - sin(\omega_k)\mathbf{i}) \tag{IV.41}$$

où λ_{k_0} et $\tilde{\lambda}_{k_0}$ sont les valeurs centrales respectives de λ_k et $\tilde{\lambda}_k$. ξ_k et ω_k sont ainsi définies :

$$\xi_k(\omega_k) = \mathcal{R}_k(\omega_k)\phi(r_k) \tag{IV.42}$$

avec :

$$\mathcal{R}_k(\omega_k) = \frac{a_k b_k}{(b_k^2 cos^2(\omega_k) + a_k^2 sin^2(\omega_k))^{\frac{1}{2}}} \tag{IV.43}$$

où a_k et b_k sont des scalaires réels et :

$$\omega_k = 2\pi\phi(s_k) \tag{IV.44}$$

Les paramètres r_k et s_k sont des nombres réels et la fonction sigmoïde ϕ est définie par :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\rightarrow [0,1] \\ x \mapsto \phi(x) &= \frac{1}{1+e^{-x}} \end{aligned} \tag{IV.45}$$

Lorsque $\{r_k, s_k\}$ décrit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, les positions dans le plan complexe de λ_k et $\tilde{\lambda}_k$ varient dans des ellipses de centres associés λ_{k_0} et $\tilde{\lambda}_{k_0}$. Les paramètres a_k et b_k correspondent aux longueurs respectives des demi-axes transverse horizontal et conjugué vertical.

IV.3.3 Utilisation de la matrice T

L'amélioration de la robustesse d'un placement de pôles correspond dans notre travail à l'augmentation de la valeur d'une borne $\mathcal{LMI}$ telle que celles définies au chapitre précédent. Or, nous avons vu que l'expression de ces bornes dépend d'une matrice T qui peut avoir une grande influence sur la valeur des bornes. Cette matrice offre donc des ddl supplémentaires pour augmenter le critère de robustesse lors du placement.

Toutefois, T est utilisée comme une matrice de similarité et faire varier T pour calculer la borne revient un peu à calculer la borne sur une matrice semblable. De ce fait, on comprend intuitivement qu'il existe une redondance, difficile à exprimer précisément, entre une partie des ddl apportés par les composantes de T et les ddl apportés par le choix des directions propres. En outre, le nombre de ddl apparents inhérents à T accroît considérablement la taille du problème d'optimisation que nous cherchons à formuler. C'est pourquoi, pour des systèmes d'ordre assez élevé, T sera essentiellement vu comme un outil d'analyse.

IV.4 Placement robuste de pôles

De nombreux travaux récents ont été consacrés à rendre des lois de placement de pôles plus robustes vis-à-vis des diverses incertitudes qui peuvent entacher la modélisation linéaire des systèmes. Dans cet esprit, il existe plusieurs approches possibles. Certains auteurs proposent des lois de commande capables de placer les pôles d'une famille prédéfinie de modèles incertains dans une région du plan complexe, ceci par un retour statique [GB1995] ou par un retour dynamique [GDB1996]. Il existe également des techniques de commande modale plaçant tout ou partie de la structure propre d'une famille de modèles [MGC1997].
De façon totalement différente, d'autres auteurs proposent des méthodes plaçant précisément les pôles tout en optimisant des critères de variation des pôles en fonction des incertitudes. On peut citer par exemple les techniques de placement de pôles par retour statique d'état ou de sortie minimisant la migration de ces pôles et reposant sur la notion de "coloration de pôles" [SM1997]. Cette notion consiste à associer à chaque pôle du système incertain un pôle du système nominal, ce qui est théoriquement purement hypothétique. Plus rigoureuse est la méthode (déjà mentionnée) de placement strict de pôles par un retour d'état minimisant le nombre de conditionnement de la matrice modale de la matrice d'état du système en boucle fermée [KND1985], méthode par la suite étendue au placement partiel de pôles [Nic1987] par retour de sortie. Certains travaux ont prolongé cette idée au cas des retours dynamiques obtenues par approche paramétrique [Dua1992, Dua1993] alors que d'autres ont amélioré la technique de retour d'état de [KND1985] en relachant les contraintes sur les pôles du système nominal, autorisés à décrire des régions de tolérance, ce qui permet d'optimiser davantage ce nombre de conditionnement [LT1997].
En utilisant également des régions de tolérance sur les valeurs propres, on peut maximiser des bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste telles que celles présentées au chapitre II [CP1994a, Cho1994, BP1997], voire faire de l'optimisation multi-critères en améliorant tout à la fois les coefficents de sensibilité des pôles et les critères liées à la norme $\mathcal{H}_\infty$ des matrices de sensibilité et sensibilité complémentaire [PL1994, LP1996, LP1998] (commande robuste et optimale). Les auteurs des trois dernières références ont d'ailleurs réalisé une boîte à outils de placement de structure propre pour MATLAB capables de prendre en compte ces concepts de robustesse et d'optimalité dans les calculs des lois de placement. On peut en savoir plus sur cette boîte à outils en consultant l'adresse Internet suivante :

`http://www.mathworks.com/connections/eigenstru.shtml`

Les méthodes issues de [CP1994a, Cho1994, BP1997, PL1994, LP1996, LP1998] conduisent à des problèmes d'optimisation non linéaires difficiles à résoudre. C'est le cas de celui que nous présentons ici.

Dans cette partie, nous utilisons la flexibilité mise en évidence en §IV.3 pour formuler un problème d'optimisation correspondant à l'amélioration de la robustesse du placement des pôles du système incertain suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \mathbf{A}x + \mathbf{B}e \\ \\ y & = & \mathbf{C}x \end{array} \right. \tag{IV.46}$$

qui n'est autre que le système décrit par (I.9) dont la matrice d'évolution A est soumise à une incertitude additive E de telle sorte que $\mathbf{A} = A + E$. Bien entendu, nous considérons, comme dans les chapitres précédents que l'incertitude E est de deux natures : soit elle est non structurée, soit elle est structurée et sa structure est définie en (I.28). La matrice E peut résulter d'incertitudes sur A_0, B, C voire K. Les incertitudes additives sur B et C induisent des matrices de commande et d'observation incertaines $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$.
L'idée est alors d'essayer d'obtenir une matrice de retour qui, appliquée au système nominal en boucle ouverte (I.8), place les pôles du système bouclé nominal (I.9) dans des régions de tolérances spécifiées (performances nominales) et qui soit optimale au sens d'une d'une des bornes $\mathcal{LMI}$ (ρ_u, ρ_s, $\hat{\mu}_u$ et $\hat{\mu}_s$ respectivement données en (III.9), (III.10), (III.47) et (III.48)), relativement à une région $\mathcal{D}$ choisie, c'est-à-dire qui puisse garantir que les pôles du système incertain (IV.46) restent dans $\mathcal{D}$ pour une incertitude la plus grande possible (performances robustes).
Le premier paragraphe de cette partie est consacré à la formulation précise de ce problème d'optimisation puis le second propose une méthode pour le résoudre.

IV.4.1 Formulation du problème d'optimisation

Nous détaillons ici la procédure permettant de formuler clairement le problème d'optimisation précédemment évoqué, ceci en trois points :

1. Il convient dans un premier temps de préciser les performances nominales et robustes souhaitées et la méthode de placement choisie, en spécifiant :
   - le spectre nominal auto-conjugué (c'est-à-dire $\{\lambda_{i_0}, \forall i \in \{1, ..., n\}\}$) ainsi que les tolérances appropriées (c'est-à-dire les diverses valeurs des paramètres fixes η_j, a_k et b_k).
   - la région $\mathcal{LMI}$ ou $\mathcal{GLMI}$ de robustesse $\mathcal{D}$ qui doit bien sûr contenir les régions de tolérances.
   - la technique de placement de structure propre utilisée pour calculer la matrice de retour.
2. On peut alors clarifier ce qui se passe à chaque itération du processus d'optimisation :

- Les valeurs courantes des paramètres κ_j, r_k, s_k et $\mathbf{z}_i$ sont utilisées pour calculer une matrice de retour K et donc une matrice d'état en boucle fermée A.
- une borne de $\mathcal{D}$-stabilité robuste ((ρ_u, ρ_s, $\hat{\mu}_u$ ou $\hat{\mu}_s$ selon la nature de l'incertitude E et de la région $\mathcal{D}$) est déduite de A et de la valeur courante de la matrice T.

3. Le problème d'optimisation proprement dit peut alors s'exprimer de la façon suivante :

$$\max_{\kappa_j, r_k, s_k, \mathbf{z}_i, T} \left\{ \begin{array}{c} \rho_u \\ \text{ou} \\ \rho_s \\ \text{ou} \\ \hat{\mu}_u \\ \text{ou} \\ \hat{\mu}_s \end{array} \right\} \qquad \text{(IV.47)}$$

Remarque IV.5 *: La méthode d'optimisation proposée ci-dessus est indépendante du choix de la technique de placement de pôles. Ainsi, d'autres spécifications peuvent être ajoutées concernant les vecteurs propres désirés. Ceci implique bien sûr de perdre tout ou partie de la flexibilité apportés par les vecteurs* $\mathbf{z}_i$.

Le problème défini en (IV.47) est un problème non-contraint. Toutefois, le critère optimisé est extrêmement non linéaire ce qui rend la résolution particulièrement délicate et l'optimalité de la solution n'est pas garantie.

Remarque IV.6 *: A chaque itération est calculée une borne $\mathcal{LMI}$ de $\mathcal{D}$-stabilité robuste. Or, nous avons vu au chapitre précédent que plusieurs méthodes de calcul de ces bornes pouvaient être utilisées. Il est important de préciser ici que les* **méthodes 2** *et* **T2** *peuvent réduire considérablement le temps de résolution du problème. En effet, dans le cas où $\mathcal{D}$ est une région $\mathcal{LMI}$, la résolution du système $\mathcal{LMI}$ est évitée à chaque itération par la* **méthode 2**. *Dans le cas où $\mathcal{D}$ est une union de sous régions comme définie au paragraphe III.4.2, le système $\mathcal{LMI}$ à résoudre devient plus simple avec la* **méthode T2**. *Notons toutefois que la valeur du critère n'est pas la même selon que l'on utilise une méthode de calcul de borne $\mathcal{LMI}$ plutôt qu'une autre.*

IV.4.2 Heuristique de résolution

Nous venons de voir que le problème d'optimisation formulé reposait sur un critère non linéaire qui rendait très délicate la résolution. Il n'existe pas de méthode pouvant garantir une solution optimale à ce type de problème. Certains algorithmes heuristiques proposent des solutions parfois très convenables mais il existe toujours

un risque de non-convergence ou de convergence vers un optimum local.
Confrontés à ce problème, nous avons choisi de voir la procédure d'optimisation comme une boîte noire dans laquelle nous ne pouvions intervenir et nous avons opté pour les fonctions d'optimisation proposées par l'Optimization Toolbox de MATLAB [Gra1990]. Pour certains exemples, ces procédures se sont montrées très efficaces [BP1998b, BP1998a] mais d'autres exemples ont laissé apparaître de sérieuses limites de cette boîte à outils. Parfois, le processus d'optimisation est bloqué par une boucle infinie malgré un nombre maximal d'itérations imposé, parfois, il converge très rapidement vers un maximum local. Ces obstacles relèvent à la fois de l'extrême difficuté du problème à résoudre et du manque évident de robustesse (au sens informatique du terme) des procédures poposées par MATLAB.
Cependant, comme on peut s'y attendre, la qualité de l'optimisation dépend beaucoup, entre autres, de la valeur initiale du vecteur des variables d'optimisation. Alors que le processus ne converge pas (ou converge vers un maximum local) pour une initialisation donnée (venant naturellement à l'esprit), il peut se comporter très bien pour une autre moins immédiate, moins naturelle. Partant de cette constatation, nous avons choisi de résoudre notre problème en deux temps :

1. Obtention d'une initialisation "convenable".
2. Résolution du problème à partir de cette initialisation.

Nous présentons brièvement, dans les deux paragraphes suivants, les deux phases de cette résolution.

Recherche d'une bonne initialisation

Il est donc parfois nécessaire de partir d'une bonne intialisation du processus pour converger vers un bon placement, le but étant d'éviter les maxima locaux qui pourraient bloquer le processus. Alors pourquoi ne pas commencer une première optimisation qui puisse dégager une solution, pas forcément optimale ni même bonne mais au moins meilleure que les instances correspondant aux maxima locaux ? Pour déterminer une telle initialisation, nous avons choisi de nous inspirer des algorithmes génétiques [Hol1975]. Il est à noter que l'utilisation de tels concepts n'est pas nouvelle en commande robuste comme le montrent les travaux de [dPSMF1997, PL1994, LP1996].
Sans entrer dans les détails techniques des algorithmes génétiques, nous présentons succinctement quelques concepts que nous empruntons à [MLS1994] : posons $\underline{p}$, une concaténation en colonne des vecteurs et scalaires réels κ_j, r_k, s_k, $\mathbf{z}_i$ ainsi que des lignes transposées de T, correspondant à une instance de variables d'optimisation. Il s'agit alors de faire évoluer une population initiale P_0 de N de vecteurs réels (dits individus) $\underline{p}_{0_l}$, $l \in \{1, ..., N\}$ vers une population finale $P_{S_{max}}$ de même taille et constituées d'individus $\underline{p}_{S_{max\,l}}$, $l \in \{1, ..., N\}$ ayant une meilleure "qualité" au sens du critère de robustesse utilisé (ρ_u, ρ_s, $\hat{\mu}_u$ ou $\hat{\mu}_s$) que nous notons de manière générale

F. Pour cela, des opérateurs qualifiés de génétiques sont utilisés. La taille de la population reste constante (N) pendant toute l'évolution qui correspond à un nombre prédéfini de générations (en d'autres termes, on fixe un nombre maximal d'itérations S_{max} du processus dont la convergence n'a jamais été démontrée). En général, dans la théorie des algorithmes génétiques [Hol1975], les individus $\underline{p}_l$ sont binarisés, mais, dans notre problème, conformément aux propositions de [MLS1994], le code réel est conservé. Voici quelques opérations qui peuvent être effectuées sur les populations P_s, à chaque génération G_s.

<u>Génération d'une population initiale P_0</u> (uniquement au début du processus) :
Il s'agit d'instancier l'ensembles des composantes de tous les vecteurs $\underline{p}_{0_l}$, à des valeurs réelles aléatoires, $\forall l \in \{1, ..., N\}$, ceci pour un nombre impair N d'individus.

<u>Evaluation des performances d'une population P_s</u> :
Pour une génération G_s, on calcule la valeur du critère $F_{s_l}(\underline{p}_{s_l})$, pour chaque individu $\underline{p}_{s_l}$ de la population P_s, $\forall l \in \{1, ..., N\}$, $\forall s \in \{0, ..., S_{max}\}$.

<u>Sélection</u> :
Pour chaque population P_s, $\forall s \in \{0, ..., S_{max} - 1\}$, on élimine les $\mathbf{N} = (N - 1)/2$ individus les plus faibles au sens du critère et on ordonne les individus restants selon leur "qualité" dans l'ordre décroissant. Ces individus, appelés parents, se reproduiront pour régénérer la population P_s en P_{s+1} dans la phase suivante.

<u>Croisement</u> :
On produit $\mathbf{N} = (N-1)/2$ enfants à partir de deux parents consécutifs selon l'ordre du critère, ceci de la façon suivante :

$$\underline{p}_{s+1_l} = r_s(\underline{p}_{s_l} - \underline{p}_{s_{l+1}}) + \underline{p}_{s_l}, \ \forall l \in \{1, ..., \mathbf{N}\}, \ \forall s \in \{0, ..., S_{max} - 1\} \qquad \text{(IV.48)}$$

où r_s peut être vu comme un indice de non-ressemblance réel pris de manière aléatoire dans l'intervalle $[0; 1]$ et pouvant changer à chaque génération.

<u>Mutation</u> :
Il s'agit d'une opération qui consiste à altérer volontairement les composantes des enfants crées lors de la phase précédente de manière à éviter une évolution trop systématique de la population vers un individu type et éviter une forme de "consanguinité" qui risquerait de faire converger la population vers un optimum local. On choisit aléatoirement n_m (spécifié par l'opérateur) composantes c_i, $i \in \{1, ..., n_m\}$ parmi celles des individus $\underline{p}_{s_l}$ que l'on modifie de la façon suivante :

$$[\underline{p}_{s+1_l}]_{\{c_i,1\}} = [\underline{p}_{s+1_l}]_{\{c_i,1\}} + d_{m_i}, \ \forall \{i; l\} \in \{1, ..., n_m\} \times \{1, ..., \mathbf{N}\}, \forall s \in \{0, ..., S_{max} - 1\} \qquad \text{(IV.49)}$$

où d_{m_i} est un réel aléatoire de moyenne nulle tel que $|d_{m_i}| \leq D_m$, $\forall i \in \{1, ..., n_m\}$ avec D_m spécifié par l'opérateur.

Elitisme :
Il s'agit là d'une stratégie qui vise à augmenter la performance d'un algorithme génétique en réimplantant systématiquement à la génération G_{s+1} le super individu $\underline{p}_{s_{sup}}$ c'est-à-dire le meilleur individu sur l'ensemble des générations jusqu'à G_s en posant :

$$\underline{p}_{s+1_{\mathbf{N}+1}} = \underline{p}_{s_{sup}} \ \forall s \in \{0, ..., S_{max} - 1\} \tag{IV.50}$$

Génération spontanée :
Cette étape consiste normalement à générer le reste de la population de manière aléatoire. Toutefois, on peut suivre la stratégie de [LP1996] qui consiste à générer cette population restante en faisant muter le super individu :

$$\begin{aligned} [\underline{p}_{s+1_{\mathbf{N}+l+1}}]_{\{i,1\}} &= [\underline{p}_{s_{sup}}]_{\{i,1\}} + d_{n_i}, \\ \forall \{i, l\} \in \{1, ..., \dim(\underline{p})\} \times \{1, ..., \mathbf{N}\}, &\ \forall s \in \{0, ..., S_{max} - 1\} \end{aligned} \tag{IV.51}$$

où d_{n_i} est un réel aléatoire de moyenne nulle tel que $|d_{n_i}| \leq D_n$, $\forall i \in \{1, \ldots, \dim(\underline{p})\}$ avec D_n spécifié par l'opérateur. Cette technique parachève la stratégie elitiste de la phase précédente.

Lorsque S_{max} générations se sont succédées, on dégage le super individu $\underline{p}_{S_{max_{sup}}}$ qui correspond au maximum maximorum de tous les critères calculés. C'est ce super individu qui servira d'initialisation à la seconde phase d'optimisation.

Remarque IV.7 *: Il existe bien d'autres opérateurs proches de ceux mentionnés ici et susceptibles d'accroître les performances d'un algorithme génétique et les paramètres n_m, D_m, D_n, N, et S_{max} peuvent être judicieusement choisis pour approcher de façon parfois très précise le maximum. Quoi qu'il en soit, ces algorithmes permettent de déterminer assez rapidement (c'est à dire pour N et S_{max} pas trop élevés), une initialisation souvent proche de ce qui semble être le maximum global.*

Il faut noter que de tels algorithmes sont disponibles dans des versions plus complètes sur le réseau Internet. Citons en particulier le paquetage GENOCOP, que l'on doit à Zbignew Michalewicz, écrit en langage "C " et proposé à l'adresse :

```
http://www-cgi.cs.cmu.edu/afs/cs/project/ai-repository/ ...
  ...  ai/areas/genetic/ga/systems/michal/genocop/0.html
```

Toutefois, nous avons implanté nous-même une version simplifiée d'un de ces algorithmes de manière à conserver l'intégralité de nos procédures écrite en langage MATLAB.

Phase finale de l'optimisation

L'algorithme génétique présenté précédemment a tendance à dégager une instance des variables d'optimisation correpondant à un critère assez proche de ce qui semble être le maximum global. Cette instance sert alors d'initialisation à la fonction **fminu** de MATLAB pour achever, affiner l'optimisation. Un éventuel ensemble d'optima locaux ayant été contourné par l'algorithme génétique, la fonction **fminu** se comporte nettement mieux que si elle partait d'une initialisation quelconque et la robustesse du placement de pôles s'en trouve d'autant améliorée.

IV.5 Illustrations

Dans cette partie nous présentons quelques exemples de placement robuste de pôles utilisant le principe d'optimisation de la section IV.4. Les deux premiers sont assez classiques dans le sens où la région de robustesse $\mathcal{D}$ est un disque. Le troisième est plus complexe puisque $\mathcal{D}$ est choisie non connexe.

IV.5.1 Placement dans une région $\mathcal{LMI}$

Nous consacrons ce paragraphe à l'application de la méthode de placement robuste vue précédemment dans le cas où $\mathcal{D}$ est une région $\mathcal{LMI}$, c'est-à-dire, entre autres, simple, convexe, symétrique par rapport à l'axe réel.

Premier problème

Nous présentons ici le modèle utilisé, les incertitudes envisagées, les spécifications des performances nominales et robustes ainsi que la flexibilité utilisée lors du placement robuste et enfin les résultats numériques.

Modèle nominal
Le modèle considéré pour cette illustration, emprunté à [Yed1993a], est à nouveau celui d'un hélicoptère VTOL dont le comportement en boucle ouverte est décrit de manière simplifiée par la représentation d'état (I.8) avec les valeurs suivantes :

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0,0366 & 0,0271 & 0,0188 & -0,4555 \\ 0,0482 & -1,0100 & 0,0024 & -4,0208 \\ 0,1002 & 0,2855 & -0,7070 & 1,3229 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} ;$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,4422 & 0,1761 \\ 3,0447 & -7,5922 \\ -5,5200 & 4,4900 \\ 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{IV.52}$$

Le système décrit par le triplet de matrices (IV.52) est commandable et observable. Puisque l'on a $\mathbf{m} = 2$, $\mathbf{p} = 3$ et $n = 4$, la condition de Kimura (IV.18) est vérifiée ce qui permet d'envisager un placement complet de pôles aussi bien par retour d'état que par retour de sortie.

Modèle incertain

Nous considérons maintenant que le modèle est incertain. Ces incertitudes sont soit totalement inconnues et une fois le système bouclé, on peut décrire son comportement par (IV.46) où E est dénué d'une quelconque structure. Une autre possibilité envisagée ici est qu'uniquement deux composantes de A_0 et une composante de B soient respectivement dépendantes de paramètres incertains δ_1, δ_2 et δ_3, de telle sorte que l'on puisse écrire les matrices incertaines d'état et d'entrée en boucle ouverte :

$$\mathbf{A_0} \;=\; A_0 \;+\; \sum_{\xi=1}^{2} \delta_\xi A_\xi \;;\; \mathbf{B} = B + \delta_3 B_3 \tag{IV.53}$$

avec :

$$A_1 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1603 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;;\; A_2 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5820 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;; \tag{IV.54}$$

$$B_3 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^* \tag{IV.55}$$

Pour pouvoir établir le critère d'optimisation, il faut ramener ces incertitudes en une seule matrice d'incertitudes E agissant sur A. On déduit facilement :

$$E \;=\; \sum_{\xi=1}^{3} \delta_\xi E_\xi \tag{IV.56}$$

avec :

$$E_1 \;=\; A_1 \quad ; \quad E_2 \;=\; A_2 \tag{IV.57}$$

et, dans le cas du retour d'état :

$$E_3 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ [K]_{\{1,1\}} & [K]_{\{1,2\}} & [K]_{\{1,3\}} & [K]_{\{1,4\}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{IV.58}$$

ou, dans le cas du retour de sortie, compte tenu de C :

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ [K]_{\{1,1\}} & [K]_{\{1,2\}} & 0 & [K]_{\{1,3\}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{IV.59}$$

On constate que la structure de l'incertitude est évolutive au cours du processus d'optimisation puisqu'elle dépend de la matrice de retour K, ce qui complique un peu plus la résolution du problème.

Performances nominales

Les spécifications sur les pôles à placer pour le système (I.9) sont les suivantes : nous décidons de placer, pour A, deux valeurs propres réelles, λ_1 et λ_4, et deux valeurs propres complexes conjuguées, λ_2 et λ_3, telles que (nous reprenons ici les notations de §IV.3.2) :

$$\lambda_1 \in [-7;-1] \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1_0} = -4,5 \text{ et } \eta_1 = 3,5 \tag{IV.60}$$

$$\lambda_4 \in [-11;-3] \quad \Rightarrow \quad \lambda_{4_0} = -7 \text{ et } \eta_4 = 4 \tag{IV.61}$$

et telles que λ_2 et λ_3 décrivent respectivement des disques de centres associés à $\lambda_{2_0} = -6 + 3\mathbf{i}$ et $\lambda_{3_0} = -6 - 3\mathbf{i}$ et de rayon $2,4$. Il vient donc :

$$a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 2,4 \tag{IV.62}$$

Performances robustes

Pour spécifier les performances robustes, nous choisissons une région de robustesse $\mathcal{D}$ contenant les régions de tolérance des valeurs propres explicitées ci-dessus, à savoir le disque de centre $(-6;0)$ et de rayon $5,5$. Les performances nominales et robustes désirées sont résumées sur la figure IV.1

Flexibilité utilisée

Il apparaît clairement que nous allons bénéficier de ddl sur les performances nominales c'est-à-dire sur les valeurs propres placées à chaque itération. En reprenant les notations du paragraphe IV.3.2, nous notons ces ddl $[\kappa_1, \kappa_4, r_2, s_2]^* \in \mathbb{R}^4$.
Les lois de placement robuste que nous allons déterminer utilisent alors *dans le cas du retour d'état* 4 paramètres de la matrice de retour et il en reste donc 4 autres qui peuvent être utilisés pour jouer sur les 4 directions propres à droite. Puisque $\mathbf{m} = 2$, ces directions sont de dimension 1 et nous ajoutons aux précédentes variables d'optimisation les paramètres libres $\{\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}, \forall \in \{1, ..., 4\}\}$, ce qui permet d'utiliser les 8 ddl du retour d'état (on utilisera la technique de placement de [SL1993] basée sur la résolution de deux équations de Sylvester couplées).
Dans le cas du retour de sortie (on utilisera la même technique de placement), dès lors que les valeurs propres sont définies, il ne reste que 2 ddl qui servent à utiliser la flexibilité de la $4^{\text{ème}}$ direction propre à gauche, justement de dimension 2 puisque

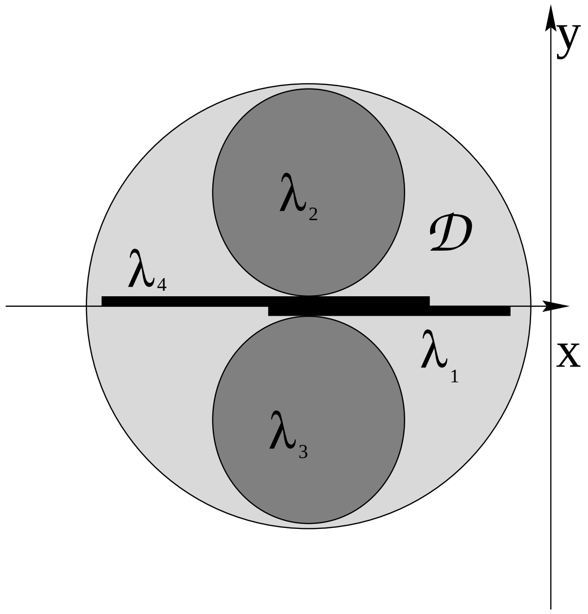

Figure IV.1: Région $\mathcal{D}$ et spectre désiré de A dans le plan complexe

$\mathbf{p} = 3$, ceci par l'intermédiaire d'un vecteur de paramètres libres $\mathbf{z}_4 \in \mathbb{R}^2$.
La flexibilité sur T n'est pas utilisée ici car elle fait passer notre problème de 6 ou 8 variables d'optimisation à 22 ou 24 variables d'optimisation. Pendant le calcul de la loi de commande, T est toujours égal à l'identité d'ordre 4.

Calcul d'un placement robuste par retour d'état

Placement initial :
La matrice de retour d'état plaçant le spectre $\{\lambda_{i_0}, i \in \{1, ..., 4\}\}$ est :

$$K_e^{init} = \begin{bmatrix} -89,7223 & -8,8292 & -8,3635 & 22,3756 \\ -31,1773 & -2,5363 & -3,3678 & 4,8087 \end{bmatrix} \tag{IV.63}$$

Elle correspond à des valeurs $\mathbf{z}_i = 1$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$ et induit les valeurs de bornes suivantes (cf. les notations du chapitre III) :

$$\rho_{u_1}^{init}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0065\,;\; \rho_{u_2}^{init}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0031\,;\; \rho_{u_3}^{init}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0035$$

$$\rho_{u_{T1}}^{init} \;=\; 0,0083\,;\; \rho_{u_{T2}}^{init} \;=\; 0,0032\,;\; \rho_{u_{T3}}^{init} \;=\; 0,0066$$

pour une incertitude non structurée, et :

$$\rho_{s_1}^{init}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0615\;;\; \rho_{u_2}^{init}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0469\;;\; \rho_{s_{T1}}^{init} \;=\; 0,1124\;;\; \rho_{u_{T2}}^{init} \;=\; 0,0507$$

pour la structure d'incertitude évolutive définie pour ce modèle.

Placements optimaux :
Nous appliquons maintenant le principe de placement robuste vu en §IV.4 en utilisant plusieurs critères selon le type d'incertitude considérée.
Si nous optimisons le critère ρ_{u_1} (incertitude non structurée, solution non particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous aboutissons à une matrice de retour d'état :

$$K_e^{\rho_{u_1}} = \begin{bmatrix} -8,4166 & -0,4724 & 1,2346 & 7,3587 \\ -4,5968 & -0,0525 & 0,5623 & 3,4662 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-1,000; -3,8038 \pm 2,0321\mathbf{i}; -3,070\}$ et amène les valeurs de bornes suivantes :

$$\rho_{u_1}^{\rho_{u_1}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0514\,;\ \rho_{u_2}^{\rho_{u_1}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0403\,;\ \rho_{u_3}^{\rho_{u_1}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0526$$

$$\rho_{u_{T1}}^{\rho_{u_1}} = 0,0899\,;\ \rho_{u_{T2}}^{\rho_{u_1}} = 0,0457\,;\ \rho_{u_{T3}}^{\rho_{u_1}} = 0,0842$$

Cette amélioration du critère est illustrée par la figure IV.2 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_e^{init} = A_0 + BK_e^{init} + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_e^{\rho_{u_1}} = A_0 + BK_e^{\rho_{u_1}} + E$ (retour final) pour diverses valeurs de E telles que $||E||_2 \leq 0,0083$ (à gauche) et $||E||_2 \leq 0,0899$ (à droite).

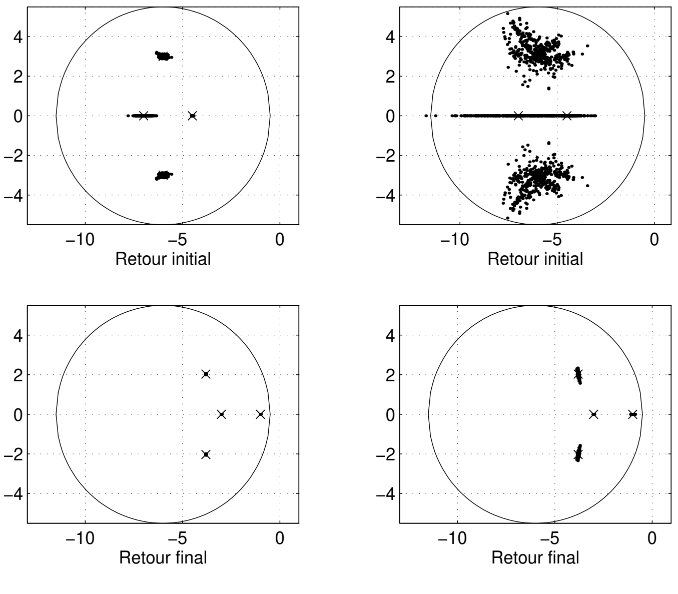

Figure IV.2: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_e^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_e^{\rho_{u_1}}$ (Retour final) pour $||E||_2 \leq 0,0083$ et $||E||_2 \leq 0,0899$

Si nous optimisons le critère ρ_{u_2} (incertitude non structurée, solution particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous aboutissons à une matrice de retour d'état :

$$K_e^{\rho_{u_2}} = \begin{bmatrix} -20,4719 & 1,1076 & -1,1148 & 10,1569 \\ -15,0851 & 1,1449 & -1,3513 & 5,9365 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-10,3799; -3,6579 \pm 2,4761\mathbf{i}; -1,0005\}$ et amène les valeurs de bornes suivantes :

$$\rho_{u_1}^{\rho_{u_2}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0176\,;\ \rho_{u_2}^{\rho_{u_2}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0551\,;\ \rho_{u_3}^{\rho_{u_2}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0400$$

$$\rho_{u_{T1}}^{\rho_{u_2}} = 0,0544\,;\ \rho_{u_{T2}}^{\rho_{u_2}} = 0,0560\,;\ \rho_{u_{T3}}^{\rho_{u_2}} = 0,0584$$

Cette amélioration du critère est illustrée par la figure IV.3 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_e^{init} = A_0 + BK_e^{init} + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_e^{\rho_{u_2}} = A_0 + BK_e^{\rho_{u_2}} + E$ (retour final) pour diverses valeurs de E telles que $||E||_2 \leq 0,0032$ (à gauche) et $||E||_2 \leq 0,0560$ (à droite).

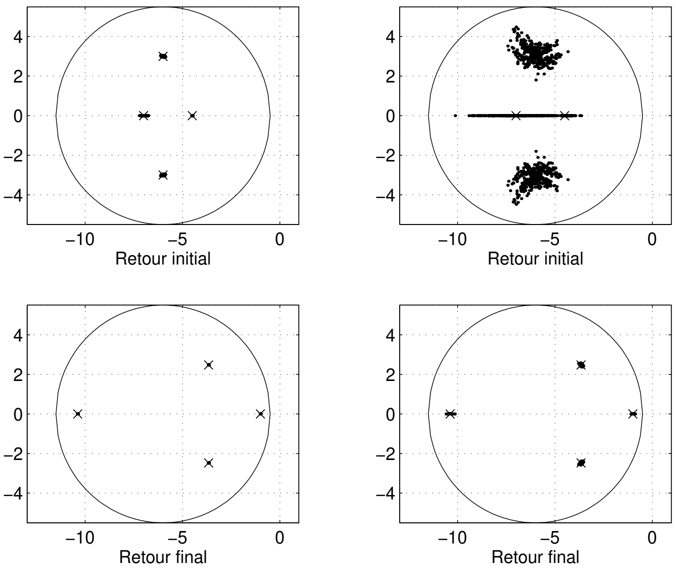

Figure IV.3: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_e^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_e^{\rho_{u_2}}$ (Retour final) pour $||E||_2 \leq 0,0032$ et $||E||_2 \leq 0,0560$

Si nous optimisons le critère ρ_{s_1} (incertitude structurée, solution non particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous aboutissons à une matrice de retour d'état :

$$K_e^{\rho_{s_1}} = \begin{bmatrix} 0,3619 & 0,5234 & 0,9017 & 0,4816 \\ 6,3522 & 1,0309 & -0,0276 & -5,0517 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-3; -3,8439 \pm 1,9459\mathbf{i}; -1,1225\}$ et amène les valeurs de bornes suivantes :

$$\rho_{s_1}^{\rho_{s_1}}(T = \mathbf{I}_4) = 1,5208\,;\ \rho_{s_2}^{\rho_{s_1}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,9582\,;$$

$$\rho_{sT1}^{\rho_{s_1}} = 1,9510\,;\ \rho_{sT2}^{\rho_{s_1}} = 1,3161$$

Cette amélioration du critère est illustrée par la figure IV.4 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_e^{init} = A_0 + BK_e^{init} + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_e^{\rho_{s_1}} = A_0 + BK_e^{\rho_{s_1}} + E$ (retour final) pour diverses valeurs de δ_ξ, $\xi \in \{1;2;3\}$, telles que $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 0,1124$ (à gauche) et $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 1,9510$ (à droite).

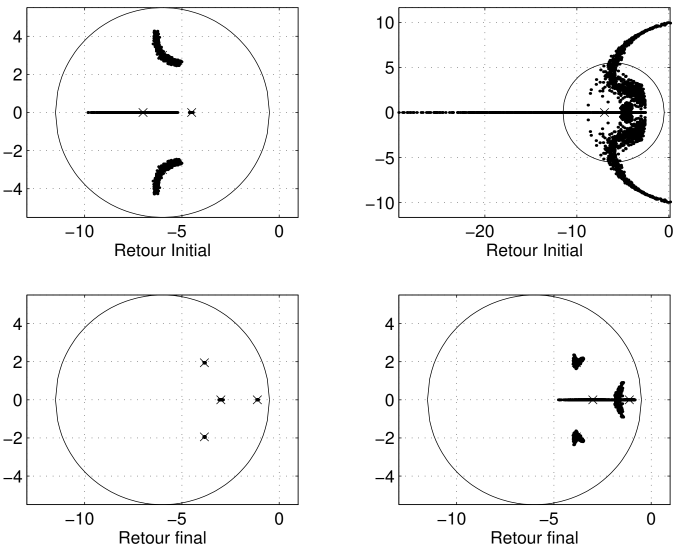

Figure IV.4: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_e^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_e^{\rho_{s_1}}$ (Retour final) pour $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 0,1124$ et $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 1,9510$

Si nous optimisons le critère ρ_{s_2} (incertitude structurée, solution particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous aboutissons à une matrice de retour d'état :

$$K_e^{\rho_{s_2}} = \begin{bmatrix} -4,3854 & 0,2258 & 0,8201 & 2,2507 \\ 12,4592 & 1,2713 & -0,4097 & -10,3607 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-3,7561; -5,9291 \pm 4,4907\mathbf{i}; -1,2155\}$ et amène les valeurs de bornes suivantes :

$$\rho_{s_1}^{\rho_{s_2}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,9539\,;\ \rho_{s_2}^{\rho_{s_2}}(T = \mathbf{I}_4) = 1,2071\,;$$
$$\rho_{sT1}^{\rho_{s_2}} = 1,5164\,;\ \rho_{sT2}^{\rho_{s_2}} = 1,4379$$

Cette amélioration du critère est illustrée par la figure IV.5 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_e^{init} = A_0 + BK_e^{init} + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_e^{\rho_{s_2}} = A_0 + BK_e^{\rho_{s_2}} + E$ (retour final) pour diverses valeurs de δ_ξ, $\xi \in \{1;2;3\}$, telles que $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 0,0507$ (à gauche) et $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 1,4379$ (à droite).

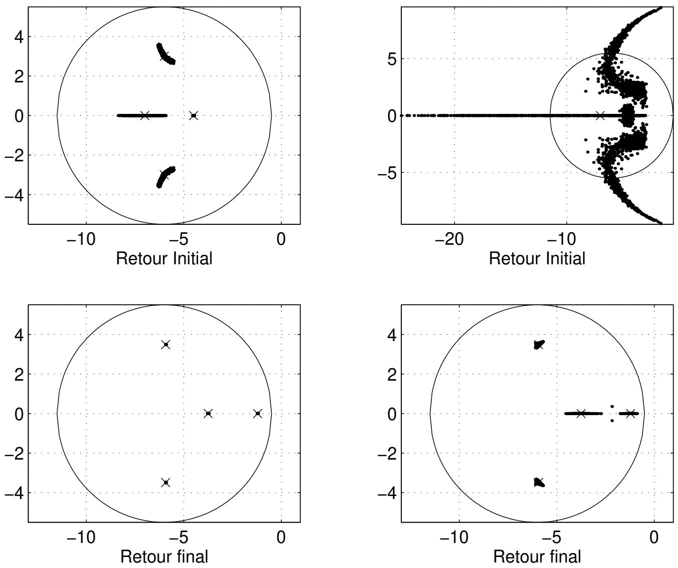

Figure IV.5: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_e^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_e^{\rho_{s_2}}$ (Retour final) pour $\max_{\xi} |\delta_\xi| \leq 0,0507$ et $\max_{\xi} |\delta_\xi| \leq 1,4379$

Calcul d'un placement robuste par retour de sortie

Placement initial :
La matrice de retour de sortie plaçant le spectre $\{\lambda_{i_0}, i \in \{1, ..., 4\}\}$ est :

$$K_s^{init} = \begin{bmatrix} -139,0618 - 48,9061 - 34,4845 \\ -77,0157 - 26,6344 - 18,5753 \end{bmatrix} \tag{IV.64}$$

Elle correspond à l'initialisation $\mathbf{z_4} = [1\ ,\ 1]^*$ et induit les valeurs de bornes suivantes :

$$\rho_{u_1}^{init}(T = \mathbf{I}_4)\ =\ 0,0017\,;\ \rho_{u_2}^{init}(T = \mathbf{I}_4)\ =\ 0,0017\,;\ \rho_{u_3}^{init}(T = \mathbf{I}_4)\ =\ 0,0024$$

$$\rho_{u_{T1}}^{init}\ =\ 0,0038\,;\ \rho_{u_{T2}}^{init}\ =\ 0,0038\,;\ \rho_{u_{T3}}^{init}\ =\ 0,0059$$

pour une incertitude non structurée, et :

$$\rho_{s_1}^{init}(T = \mathbf{I}_4)\ =\ 0,0042\ ;\ \rho_{s_2}^{init}(T = \mathbf{I}_4)\ =\ 0,0031$$
$$\rho_{s_{T1}}^{init}\ =\ 0,0118\ ;\ \rho_{s_{T2}}^{init}\ =\ 0,0035$$

pour la structure d'incertitude évolutive définie pour ce modèle.

Placements optimaux :
Nous appliquons à nouveau le principe de placement robuste vu en §IV.4 pour le

cas du retour de sortie.
Si nous optimisons le critère ρ_{u_1} (incertitude non structurée, solution non particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous aboutissons à une matrice de retour de sortie :

$$K_s^{\rho_{u_1}} = \begin{bmatrix} -20,2327 & 0,8904 & 14,2426 \\ -9,4067 & 0,6137 & 6,0472 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-3,6721; -4,8087 \pm 3,5744\mathbf{i}; -1,0156\}$ et conduit aux valeurs de bornes suivantes :

$$\rho_{u_1}^{\rho_{u_1}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0305\,;\ \rho_{u_2}^{\rho_{u_1}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0259\,;\ \rho_{u_3}^{\rho_{u_1}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0427$$

$$\rho_{uT1}^{\rho_{u_1}} = 0,0495\,;\ \rho_{uT2}^{\rho_{u_1}} = 0,0307\,;\ \rho_{uT3}^{\rho_{u_1}} = 0,0512$$

L'effet de cette augmentation du critère peut être illustrée par la figure IV.6 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_s^{init} = A_0 + BK_s^{init}C + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_s^{\rho_{u_1}} = A_0 + BK_s^{\rho_{u_1}}C + E$ (retour final) pour diverses valeurs de E telles que $||E||_2 \leq 0,0038$ (à gauche) et $||E||_2 \leq 0,0495$ (à droite).

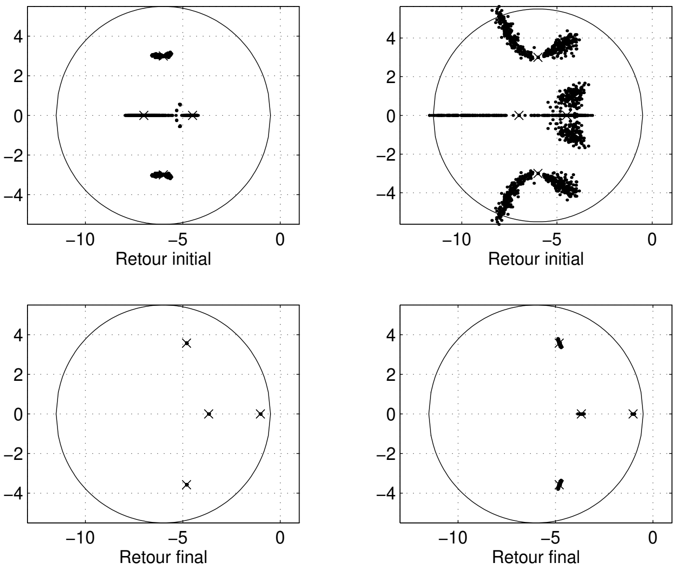

Figure IV.6: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_s^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_s^{\rho_{u_1}}$ (Retour final) pour $||E||_2 \leq 0,0038$ et $||E||_2 \leq 0,0495$

Si nous optimisons le critère ρ_{u_2} (incertitude non structurée, solution particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous aboutissons à une matrice de retour de sortie :

$$K_s^{\rho_{u_2}} = \begin{bmatrix} -14,3111 & 7,0357 & 15,7687 \\ -6,7091 & 3,9056 & 7,2876 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-9,2940; -3,6000 \pm 3,0000\mathbf{i}; -1,0000\}$ et conduit aux valeurs de bornes suivantes :

$$\rho_{u_1}^{\rho_{u_2}}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0035\,;\; \rho_{u_2}^{\rho_{u_2}}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0403\,;\; \rho_{u_3}^{\rho_{u_2}}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0482$$

$$\rho_{u_{T1}}^{\rho_{u_2}} \;=\; 0,0754\,;\; \rho_{u_{T2}}^{\rho_{u_2}} \;=\; 0,0429\,;\; \rho_{u_{T3}}^{\rho_{u_2}} \;=\; 0,0693$$

L'effet de cette augmentation du critère peut être illustrée par la figure IV.7 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_s^{init} = A_0 + BK_s^{init}C + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_s^{\rho_{u_2}} = A_0 + BK_s^{\rho_{u_2}}C + E$ (retour final) pour diverses valeurs de E telles que $||E||_2 \leq 0,0038$ (à gauche) et $||E||_2 \leq 0,0429$ (à droite).

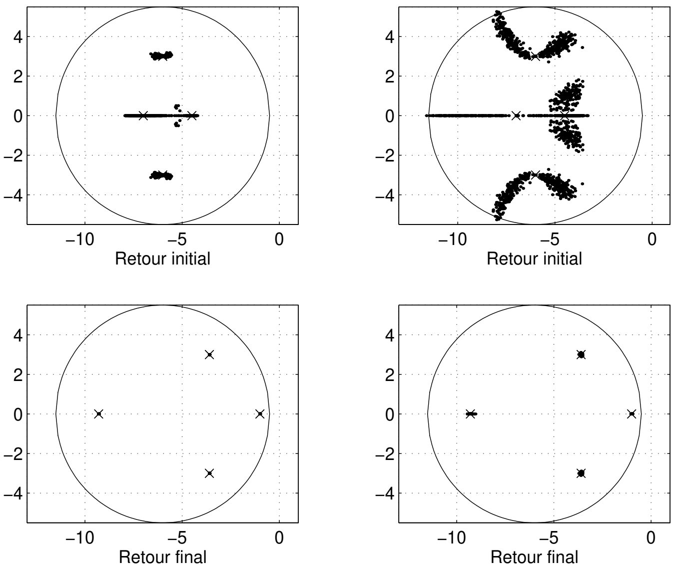

Figure IV.7: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_s^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_s^{\rho_{u_2}}$ (Retour final) pour $||E||_2 \leq 0,0038$ et $||E||_2 \leq 0,0429$

Si nous optimisons le critère ρ_{s_1} (incertitude structurée, solution non particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous aboutissons à une matrice de retour de sortie :

$$K_s^{\rho_{s_1}} \;=\; \begin{bmatrix} -12,3288 & -0,3483 & 2,0630 \\ -48,7738 & 0,5976 & -9,5266 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-8,7612; -5,2862 \pm 3,18622\mathbf{i}; -2,0582\}$ et conduit aux valeurs de bornes suivantes :

$$\rho_{s_1}^{\rho_{s_1}}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,9879\,;\; \rho_{s_2}^{\rho_{s_1}}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,7156$$

$$\rho_{s_{T1}}^{\rho_{s_1}} \;=\; 1,3004\,;\; \rho_{s_{T2}}^{\rho_{s_1}} \;=\; 0,7681\,;$$

L'effet de cette augmentation du critère peut être illustrée par la figure IV.8 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_s^{init} = A_0 + BK_s^{init}C + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_s^{\rho_{s1}} = A_0 + BK_s^{\rho_{s1}}C + E$ (retour final) pour diverses valeurs de δ_ξ, $\xi \in \{1;2;3\}$, telles que $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 0,0118$ (à gauche) et $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 1,3004$ (à droite).

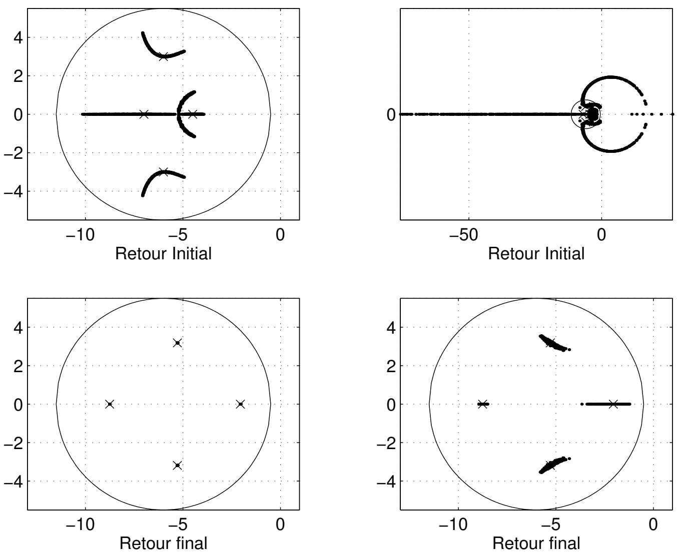

Figure IV.8: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_s^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_s^{\rho_{s1}}$ (Retour final) pour $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 0,0118$ et $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 1,3004$

Si nous optimisons le critère ρ_{s_2} (incertitude structurée, solution particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous aboutissons à une matrice de retour de sortie :

$$K_s^{\rho_{s2}} = \begin{bmatrix} 38,7370 & -0,2764 & 2,8263 \\ -152,3658 & 0,6519 & -5,3545 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-8,3984; -3,7039 \pm 3,0519\mathbf{i}; -1,4408\}$ et conduit aux valeurs de bornes suivantes :

$$\rho_{s1}^{\rho_{s2}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,4503\,;\, \rho_{s2}^{\rho_{s2}}(T = \mathbf{I}_4) = 1,0987$$
$$\rho_{sT1}^{\rho_{s2}} = 0,8405\,;\, \rho_{sT2}^{\rho_{s2}} = 1,3073\,;$$

L'effet de cette augmentation du critère peut être illustrée par la figure IV.9 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_s^{init} = A_0 + BK_s^{init}C + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_s^{\rho_{s2}} = A_0 + BK_s^{\rho_{s2}}C + E$ (retour final) pour diverses valeurs de δ_ξ, $\xi \in \{1;2;3\}$, telles que $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 0,0035$ (à gauche) et $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 1,3073$ (à droite).

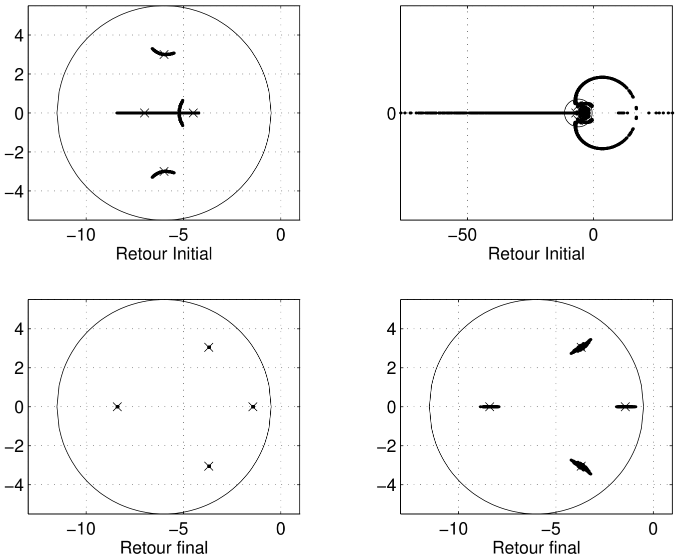

Figure IV.9: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_s^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_s^{\rho_{s_2}}$ (Retour final) pour $\max_{\xi} |\delta_\xi| \leq 0,0035$ et $\max_{\xi} |\delta_\xi| \leq 1,3073$

Second problème

Nous reprenons ici l'exemple de système en boucle ouverte décrit par (III.62) et (III.63), extrait de [GB1995], dejà utilisé au paragraphe III.6.3 pour illustrer les problèmes d'analyse robuste vis-à-vis d'incertitudes structurées. Nous nous attachons maintenant à résoudre un problème de synthèse par retour d'état de telle sorte que les pôles du système incertain bouclé restent dans le disque $\mathcal{D}$ décrit en §III.6.3, c'est-à-dire le disque de centre $(-5;0)$ et de rayon $4,5$, ceci pour la plus grande valeur possible du paramètre incertain δ_1 (cf. §III.6.3).
Dans [GB1995], une matrice de retour d'état K_1 est calculée de telle sorte que les valeurs propres de la matrice d'état en boucle fermée soient localisées à l'intérieur de $\mathcal{D}$ pour $-1 \leq \delta_1 \leq 1$. Nous avons vu en §III.6.3 que le système ainsi bouclé peut tolérer des variations de δ_1 jusqu'à au moins $|\delta_1| < 13,2303$ (et même probablement un peu plus).
Nous nous proposons ici de calculer une matrice de retour d'état en utilisant le principe de placement robuste présenté en §IV.4 pour le critère $\rho_{s_{T1}}$. Les valeurs propres de $A_1 = A_0 + BK_1$ étant réelles, nous nous imposons de placer un spectre nominal réel. Nous choisissons :

$$-9,5 < \lambda_1 < 0,7 \ ; \ -9,5 < \lambda_2 < -1 \ ; \ -9,3 < \lambda_3 < -0,5$$

Ces tolérances sur les valeurs propres correspondent à 3 variables d'optimisation $\kappa_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, ..., 3\}$. Le système étudié étant monovariable, aucun ddl sur les directions d'entrée ne peut être exploité. Cependant, nous utilisons cette fois-ci (le problème étant assez simple) 9 variables d'optimisation supplémentaires. Elles correspondent aux composantes de la matrice T intervenant dans l'expression de ρ_s. La technique de placement de pôles utilisée est celle de [KND1985].

Après optimisation, la matrice de retour d'état obtenue est :

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0,0017 & 0,0165 & 0,9513 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-5,8622; -4,3415; -3,6998\}$ pour la matrice $A_2 = A_0 + BK_2$ et conduit à la valeur suivante du critère :

$$\rho_{s_{T1}} = 20,3943$$

Le système bouclé par K_2 semble pouvoir supporter une incertitude que ne peut supporter le système bouclé par K_1, si l'on se fie à la valeur de ce critère conservatif. Cette supposition est confirmée par la figure IV.10.

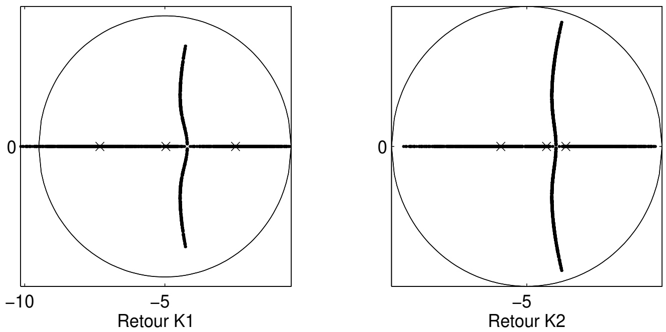

Figure IV.10: Migration des pôles de $\mathbf{A_1} = A_1 + E$ et $\mathbf{A_2} = A_2 + E$ pour $E = \delta_1 E_1$ et $|\delta_1| \leq 20,3943$

IV.5.2 Placement dans une union de sous-régions convexes

Dans ce paragraphe, nous envisageons le cas où la région de robustesse $\mathcal{D}$ n'est plus connexe mais résulte de l'union de deux sous-régions convexes. Nous ne traitons ici qu'un seul exemple.

Modèle nominal

Cette illustration utilise un modèle simplifié d'avion de transport, donné dans l'espace d'état par l'équation (I.8) et par l'instance :

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0,1382 & 0,1191 & -0,9747 & 0,1566 \\ -2,0034 & -0,9654 & 0,7325 & 0,0055 \\ 0,3950 & -0,1236 & -0,2371 & -0,0075 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0760 & 0,0000 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0,0082 & 0,3010 \\ -0,5789 & 0,2824 \\ -0,0225 & -0,4184 \\ 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{IV.65}$$

Le système décrit par (I.8) et (IV.65) est commandable et observable. La condition de Kimura (IV.18) est satisfaite et nous envisagons le cas retour d'état puis du retour de sortie.

Modèle incertain

Comme pour le premier exemple, nous envisageons les deux types d'incertitude. Soit nous considérons que nous n'avons aucune connaissance sur la structure de l'incertitude et le comportement du système bouclé est décrit par (IV.46) où E est quelconque ; soit nous considérons que A_0 est soumise à une incertitude additive E que l'on retrouve sur A, choisie de manière arbitraire et qui est décrite par (IV.56) avec :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \tag{IV.66}$$

Performances nominales

Nous spécifions ici les tolérances relatives aux pôles du système nominal en boucle fermée (I.9). Nous décidons à nouveau de placer, pour A, deux valeurs propres réelles et une paire de valeurs propres complexes conjuguées. En reprenant les notations de §IV.3.2, les valeurs propres réelles λ_1 et λ_4 sont telles que :

$$\lambda_1 \in [-0,45; -0,15] \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1_0} = -0,3 \text{ et } \eta_1 = 0,15 \tag{IV.67}$$

$$\lambda_4 \in [-8; -2] \quad \Rightarrow \quad \lambda_{4_0} = -5 \text{ et } \eta_4 = 3 \tag{IV.68}$$

et les valeurs propres complexes λ_2 et λ_3 décrivent respectivement des ellipses de centres associés à $\lambda_{2_0} = -0,8+2\mathbf{i}$ et $\lambda_{3_0} = -0,8-2\mathbf{i}$, de demi-axe horizontal mineur $0,5$ et de demi-axe vertical majeur $0,7$, ce qui implique :

$$a_2 = a_3 = 0,5 \quad ; \quad b_2 = b_3 = 0,7 \tag{IV.69}$$

Performances robustes

La région de robustesse choisie pour spécifier les performances robustes est non connexe. Elle résulte de l'union du demi-plan vertical situé à gauche de l'axe $x < -2$ (prise en compte du mode rapide λ_4) et de l'ellipse verticale de centre associé à $(-0,9;0)$, de demi-axe transverse $0,8$ et de demi-axe conjugué 3 (prise en compte de la dynamique rapide). Les performances souhaitées (nominales et robustes) sont résumées sur la figure IV.11.

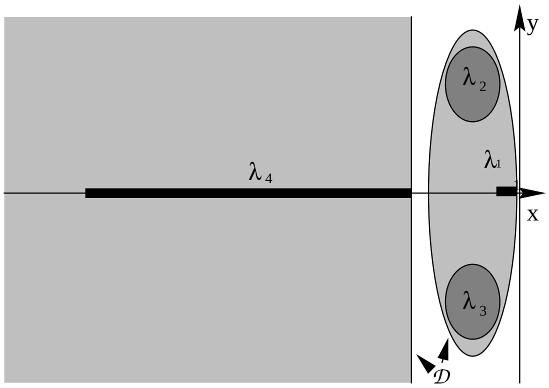

Figure IV.11: Région $\mathcal{D}$ et spectre désiré de A dans le plan complexe

Flexibilité utilisée

Les dimensions du système considéré ici sont exactement les mêmes que celui considéré dans le premier exemple et, toujours dans un souci de ne pas formuler un problème d'optimisation trop difficile à résoudre, nous choisissons de ne pas utiliser la flexibilité offerte par la matrice T apparaissant dans l'expression des bornes $\mathcal{LMI}$ de $\mathcal{D}$-stabilité robuste. Nous retrouvons ainsi les 8 (respectivement 6) variables d'optimisation pour le retour d'état (respectivement pour le retour de sortie) définies dans le paragraphe IV.5.1 (cf. premier exemple).
Comme dans le premier exemple, les lois de commande robuste sont déterminées en utilisant la technique de placement de pôles de [SL1993] et durant tout le processus d'optimisation, la matrice T est fixée égale à l'identité d'ordre 4.

Calcul d'un placement par retour d'état

<u>Placement initial</u> :
La matrice de retour d'état plaçant le spectre central $\{\lambda_{i_0},\ i \in \{1, ..., 4\}\}$ est :

$$K_e^{init} = \begin{bmatrix} -70,0967 & -25,8990 & -84,5219 & -77,2729 \\ 289,6084 & 120,4320 & 344,6724 & 329,9991 \end{bmatrix} \tag{IV.70}$$

Elle correspond à des valeurs $\mathbf{z}_i = 1, \forall i \in \{1, ..., 4\}$ et conduit à des valeurs de bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste suivantes :

$$\hat{\mu}_{u_1}^{init}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 1,679 \times 10^{-4} \;;\; \hat{\mu}_{u_2}^{init}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 3,656 \times 10^{-5}$$
$$\hat{\mu}_{u_{T1}}^{init} \;=\; 0,0010, \;;\; \hat{\mu}_{u_{T2}}^{init} \;=\; 0,0011$$

pour une incertitude non structurée, et :

$$\hat{\mu}_{s_1}^{init}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 3,543 \times 10^{-4} \;;\; \hat{\mu}_{s_2}^{init}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 8,470 \times 10^{-5}$$
$$\hat{\mu}_{s_{T1}}^{init} \;=\; 0,0014 \;;\; \hat{\mu}_{s_{T2}}^{init} \;=\; 0,0010$$

pour l'incertitude structurée définie en (IV.56) et (IV.66).

Placements optimaux :
Nous appliquons à nouveau le principe de placement robuste vu en §IV.4 pour divers critères, selon le type d'incertitude considéré.
Si nous optimisons le critère $\hat{\mu}_{u_1}$ (incertitude non structurée, solution non particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous obtenons la matrice de retour d'état :

$$K_e^{\hat{\mu}_{u_1}} \;=\; \begin{bmatrix} -1,5835 & 1,7473 & 2,1463 & 9,6915 \\ -0,9677 & -0,4475 & 4,1979 & 3,4854 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-0,4428; -0,7976 \pm 2\mathbf{i}; -2,5236\}$ et amène les valeurs de bornes suivantes :

$$\hat{\mu}_{u_1}^{\hat{\mu}_{u_1}}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0657 \;;\; \hat{\mu}_{u_2}^{\hat{\mu}_{u_1}}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0079$$
$$\hat{\mu}_{u_{T1}}^{\hat{\mu}_{u_1}} \;=\; 0,0723 \;;\; \hat{\mu}_{u_{T2}}^{\hat{\mu}_{u_1}} \;=\; 0,0727$$

L'effet de cette augmentation du critère peut être illustrée par la figure IV.12 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_e^{init} = A_0 + BK_e^{init} + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_e^{\hat{\mu}_{u_1}} = A_0 + BK_e^{\hat{\mu}_{u_1}} + E$ (retour final) pour diverses valeurs de E telles que $||E||_2 \leq 0,0723$.

Si nous optimisons le critère $\hat{\mu}_{u_2}$ (incertitude non structurée, solution particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous obtenons la matrice de retour d'état :

$$K_e^{\hat{\mu}_{u_2}} \;=\; \begin{bmatrix} -4,4474 & 2,4792 & 4,7461 & 4,6391 \\ -0.7477 & -1,0079 & 3,5158 & -5,6130 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-0,2733; -1,0521 \pm 1,7942\mathbf{i}; -2,4494\}$ et amène les valeurs de bornes suivantes :

$$\hat{\mu}_{u_1}^{\hat{\mu}_{u_2}}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0501 \;;\; \hat{\mu}_{u_2}^{\hat{\mu}_{u_2}}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0916$$
$$\hat{\mu}_{u_{T1}}^{\hat{\mu}_{u_2}} \;=\; 0,0588 \;;\; \hat{\mu}_{u_{T2}}^{\hat{\mu}_{u_2}} \;=\; 0,0934$$

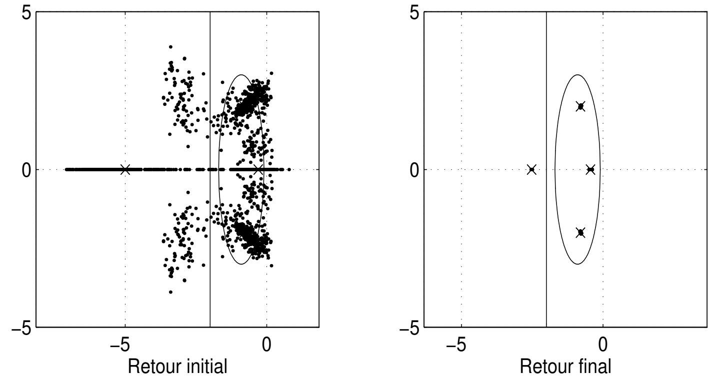

Figure IV.12: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_e^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_e^{\hat{\mu}_{u_1}}$ (Retour final) pour $||E||_2 \leq 0,0723$

L'effet de cette augmentation du critère peut être illustrée par la figure IV.13 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_e^{init} = A_0 + BK_e^{init} + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_e^{\hat{\mu}_{u_2}} = A_0 + BK_e^{\hat{\mu}_{u_2}} + E$ (retour final) pour diverses valeurs de E telles que $||E||_2 \leq 0,0934$.

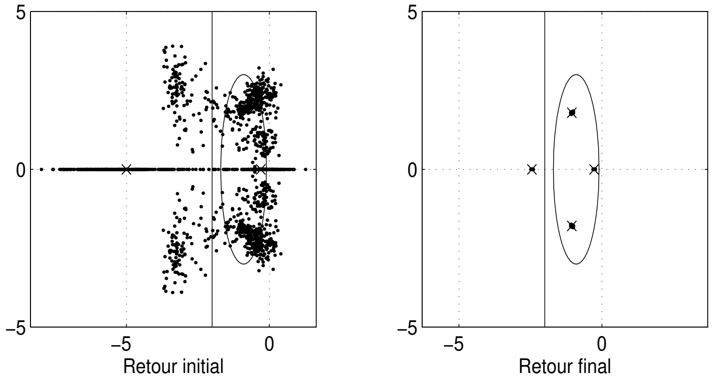

Figure IV.13: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_e^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_e^{\hat{\mu}_{u_2}}$ (Retour final) pour $||E||_2 \leq 0,0934$

Si nous optimisons le critère $\hat{\mu}_{s_1}$ (incertitude structurée, solution non particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous obtenons la matrice de retour d'état :

$$K_e^{\hat{\mu}_{s_1}} = \begin{bmatrix} -4,3687 & 1,1797 & 4,3865 & 4,2683 \\ -2,1252 & -0,2655 & 6,0354 & -0,1396 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-0,3083; -0,8612 \pm 1,3263\mathbf{i}; -3,2956\}$ et amène les valeurs de bornes suivantes :

$$\hat{\mu}_{s_1}^{\hat{\mu}_{s_1}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0966 \; ; \; \hat{\mu}_{s_2}^{\hat{\mu}_{s_1}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,1234$$

$$\hat{\mu}_{sT1}^{\hat{\mu}_{s_1}} = 0,1415 \; ; \; \hat{\mu}_{sT2}^{\hat{\mu}_{s_1}} = 0,1325$$

L'effet de cette augmentation du critère peut être illustrée par la figure IV.14 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_e^{init} = A_0 + BK_e^{init} + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_e^{\hat{\mu}_{s_1}} = A_0 + BK_e^{\hat{\mu}_{s_1}} + E$ (retour final) pour diverses valeurs de δ_ξ, $\xi \in \{1;2;3\}$ telles que $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 0,1415$.

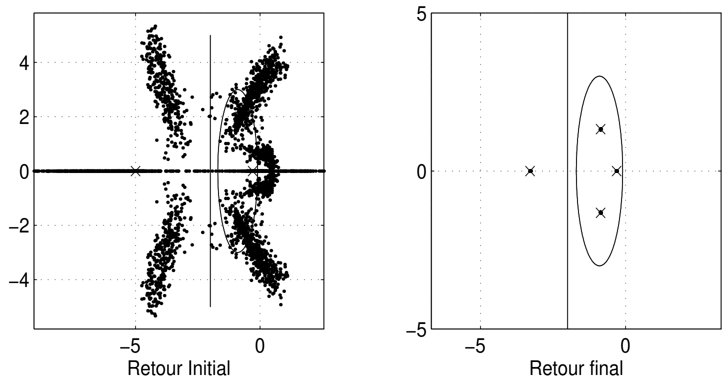

Figure IV.14: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_e^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_e^{\hat{\mu}_{s_1}}$ (Retour final) pour $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 0,1415$

Si nous optimisons le critère $\hat{\mu}_{s_2}$ (incertitude structurée, solution particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous obtenons la matrice de retour d'état :

$$K_e^{\hat{\mu}_{s_2}} = \begin{bmatrix} -4,3463 & 1,2382 & 4,2364 & 4,2928 \\ -1,9868 & -0,3502 & 5,8437 & -0,3302 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-0,3004; -0,8901 \pm 1,3333\mathbf{i}; -3,1784\}$ et amène les valeurs de bornes suivantes :

$$\hat{\mu}_{s_1}^{\hat{\mu}_{s_2}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0956 \; ; \; \hat{\mu}_{s_2}^{\hat{\mu}_{s_2}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,1260$$
$$\hat{\mu}_{sT1}^{\hat{\mu}_{s_2}} = 0,1355 \; ; \; \hat{\mu}_{sT2}^{\hat{\mu}_{s_2}} = 0,1360$$

L'effet de cette augmentation du critère peut être illustrée par la figure IV.15 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_e^{init} = A_0 + BK_e^{init} + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_e^{\hat{\mu}_{s_2}} = A_0 + BK_e^{\hat{\mu}_{s_2}} + E$ (retour final) pour diverses valeurs de δ_ξ, $\xi \in \{1;2;3\}$ telles que $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 0,1360$.

Calcul d'un placement par retour de sortie

Placement initial :

La matrice de retour de sortie plaçant le spectre central $\{\lambda_{i_0},\, i \in \{1, ..., 4\}\}$ est :

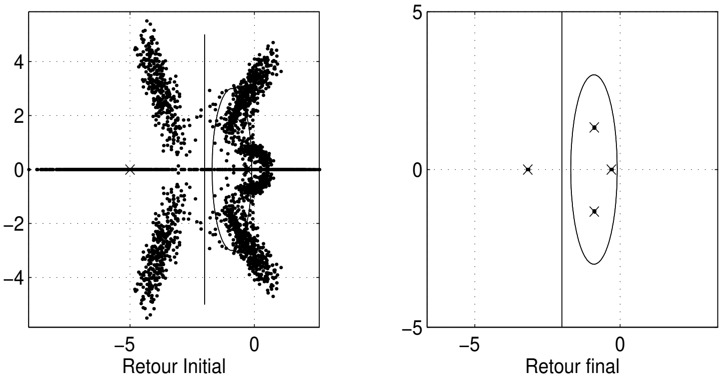

Figure IV.15: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_e^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_e^{\hat{\mu}_{s_2}}$ (Retour final) pour $\max_{\xi} |\delta_\xi| \leq 0,1360$

$$K_s^{init} = \begin{bmatrix} 49,7131 & 53,5296 & 58,2955 \\ 29,6303 & 30,7504 & 32,1491 \end{bmatrix} \tag{IV.71}$$

Elle correspond à l'initialisation $\mathbf{z_4} = [1\,,\,1]^*$ et induit les valeurs de bornes suivantes :

$$\hat{\mu}_{u_1}^{init}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0027\,;\; \hat{\mu}_{u_2}^{init}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 3,398 \times 10^{-4}$$
$$\hat{\mu}_{u_{T1}}^{init} \;=\; 0,0090\,;\; \hat{\mu}_{u_{T2}}^{init} \;=\; 0,0096$$

pour une incertitude non structurée, et :

$$\hat{\mu}_{s_1}^{init}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0069 \;;\; \hat{\mu}_{s_2}^{init}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0011$$
$$\hat{\mu}_{s_{T1}}^{init} \;=\; 0,0116 \;;\; \hat{\mu}_{s_{T2}}^{init} \;=\; 0,0027$$

pour l'incertitude structurée définie en (IV.56) et (IV.66).

Placements optimaux :

Nous appliquons à nouveau le principe de placement robuste vu en §IV.4 pour le cas du retour de sortie et pour divers critères, selon le type d'incertitude considéré. Si nous optimisons le critère $\hat{\mu}_{u_1}$ (incertitude non structurée, solution non particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous obtenons la matrice de retour de sortie :

$$K_s^{\hat{\mu}_{u_1}} \;=\; \begin{bmatrix} 0,8489 & 4,3489 & 5,2513 \\ -4,0735 & 3,9474 & -3,2666 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-0,3411; -0,8 \pm 2\mathbf{i}; -2,3821\}$ et amène les valeurs de bornes suivantes :

$$\hat{\mu}_{u_1}^{\hat{\mu}_{u_1}}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0420 \;;\; \hat{\mu}_{u_2}^{\hat{\mu}_{u_1}}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0072$$

$$\hat{\mu}_{uT1}^{\hat{\mu}_{u_1}} = 0,0537 \; ; \; \hat{\mu}_{uT2}^{\hat{\mu}_{u_1}} = 0,0563$$

L'effet de cette augmentation du critère peut être illustrée par la figure IV.16 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_s^{init} = A_0 + BK_s^{init}C + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_s^{\hat{\mu}_{u_1}} = A_0 + BK_s^{\hat{\mu}_{u_1}}C + E$ (retour final) pour diverses valeurs de E telles que $||E||_2 \leq 0,6$.

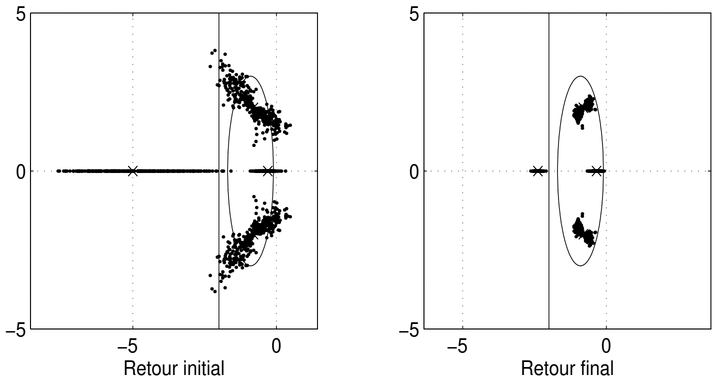

Figure IV.16: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_s^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_s^{\hat{\mu}_{u_1}}$ (Retour final) pour $||E||_2 \leq 0,6$

Si nous optimisons le critère $\hat{\mu}_{u_2}$ (incertitude non structurée, solution particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous obtenons la matrice de retour de sortie :

$$K_s^{\hat{\mu}_{u_2}} = \begin{bmatrix} -3,0035 & 4,5557 & 3,8137 \\ -2,9241 & 3,5500 & -5,5022 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-0,3068; -0,5376 \pm 2,0267\mathbf{i}; -2,4020\}$ et amène les valeurs de bornes suivantes :

$$\hat{\mu}_{u_1}^{\hat{\mu}_{u_2}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0322 \; ; \; \hat{\mu}_{u_2}^{\hat{\mu}_{u_2}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0604$$
$$\hat{\mu}_{uT1}^{\hat{\mu}_{u_2}} = 0,0368 \; ; \; \hat{\mu}_{uT2}^{\hat{\mu}_{u_2}} = 0,0622$$

L'effet de cette augmentation du critère peut être illustrée par la figure IV.17 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_s^{init} = A_0 + BK_s^{init}C + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_s^{\hat{\mu}_{u_2}} = A_0 + BK_s^{\hat{\mu}_{u_2}}C + E$ (retour final) pour diverses valeurs de E telles que $||E||_2 \leq 0,4$.

Si nous optimisons le critère $\hat{\mu}_{s_1}$ (incertitude structurée, solution non particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous obtenons la matrice de retour de sortie :

$$K_s^{\hat{\mu}_{s_1}} = \begin{bmatrix} -4,7797 & 4,1717 & 7,4192 \\ -2,9656 & 5,7323 & 0,1892 \end{bmatrix}$$

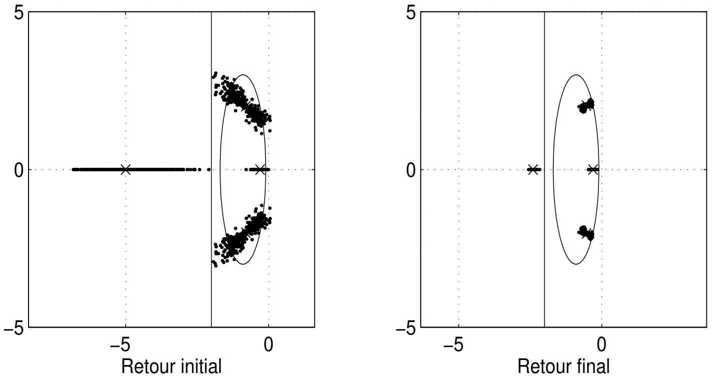

Figure IV.17: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_s^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_s^{\hat{\mu}_{u_2}}$ (Retour final) pour $||E||_2 \leq 0,4$

qui place le spectre $\{-0,4493; -0,4846 \pm 2\mathbf{i}; -3,2679\}$ et amène les valeurs de bornes suivantes :

$$\hat{\mu}_{s_1}^{\hat{\mu}_{s_1}}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0423 \;;\; \hat{\mu}_{s_2}^{\hat{\mu}_{s_1}}(T = \mathbf{I}_4) \;=\; 0,0059$$
$$\hat{\mu}_{sT1}^{\hat{\mu}_{s_1}} \;=\; 0,0479 \;;\; \hat{\mu}_{sT2}^{\hat{\mu}_{s_1}} \;=\; 0,0428$$

L'effet de cette augmentation du critère peut être illustrée par la figure IV.18 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_s^{init} = A_0 + BK_s^{init}C + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_s^{\hat{\mu}_{s_1}} = A_0 + BK_s^{\hat{\mu}_{s_1}}C + E$ (retour final) pour diverses valeurs de δ_ξ, $\xi \in \{1; 2; 3\}$ telles que $\max_{\xi} |\delta_\xi| \leq 0,5$.

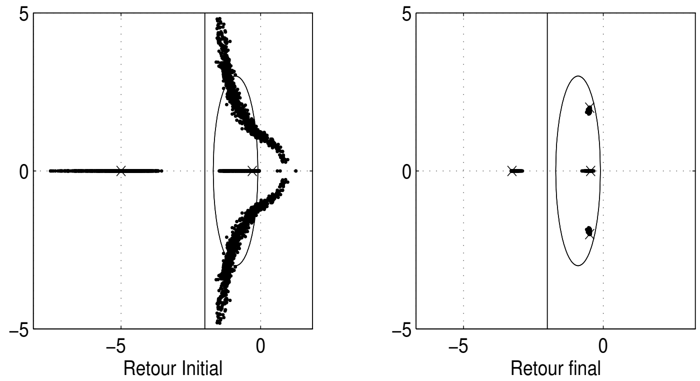

Figure IV.18: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_s^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_s^{\hat{\mu}_{s_1}}$ (Retour final) pour $\max_{\xi} |\delta_\xi| \leq 0,5$

Si nous optimisons le critère $\hat{\mu}_{s_2}$ (incertitude structurée, solution particulière du système $\mathcal{LMI}$), nous obtenons la matrice de retour de sortie :

$$K_s^{\hat{\mu}_{s2}} = \begin{bmatrix} -4,6383 & 6,1555 & 9,3571 \\ -1,7469 & 6,1890 & 2,6692 \end{bmatrix}$$

qui place le spectre $\{-0,2775; -0,5297 \pm 2,004\mathbf{i}; -3,2196\}$ et amène les valeurs de bornes suivantes :

$$\hat{\mu}_{s1}^{\hat{\mu}_{s2}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0321 \ ; \ \hat{\mu}_{s2}^{\hat{\mu}_{s2}}(T = \mathbf{I}_4) = 0,0638$$
$$\hat{\mu}_{sT1}^{\hat{\mu}_{s2}} = 0,0342 \ ; \ \hat{\mu}_{sT2}^{\hat{\mu}_{s2}} = 0,0692$$

L'effet de cette augmentation du critère peut être illustrée par la figure IV.19 où sont tracés les pôles de $\mathbf{A}_s^{init} = A_0 + BK_s^{init}C + E$ (retour initial) et ceux de $\mathbf{A}_s^{\hat{\mu}_{s2}} = A_0 + BK_s^{\hat{\mu}_{s2}}C + E$ (retour final) pour diverses valeurs de δ_ξ, $\xi \in \{1; 2; 3\}$ telles que $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 0,5$.

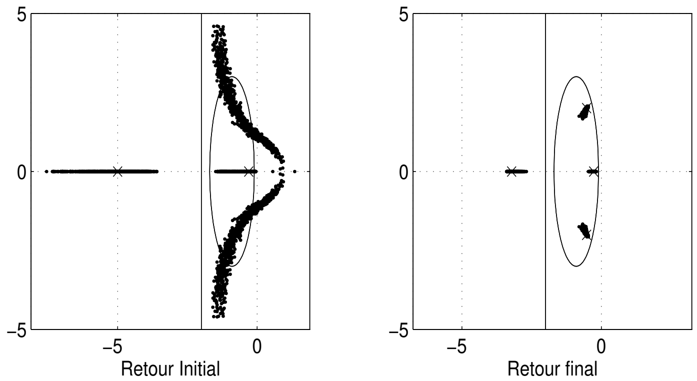

Figure IV.19: Migration des pôles des matrices $\mathbf{A}_s^{init}$ (Retour initial) et de $\mathbf{A}_s^{\hat{\mu}_{s2}}$ (Retour final) pour $\max_\xi |\delta_\xi| \leq 0,5$

IV.6 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons présenté une méthode pour déterminer des lois de placement robuste de pôles, pour des systèmes soumis à des incertitudes non structurées ou structurées, par retour statique d'état ou de sortie. Cette méthode repose sur la relaxation des contraintes de performances nominales liées à la spécification stricte d'un spectre désiré et sur l'utilisation de la flexibilité offerte par les techniques de placement de structure propre. Ces degrés de liberté sont employés lors de la résolution d'un problème d'optimisation non convexe pour maximiser un critère de performances robustes, à savoir une borne $\mathcal{LMI}$ de $\mathcal{D}$-stabilité robuste. Ainsi, on peut, en utilisant cette méthode, déterminer une loi de placement robuste de pôles dans une région non connexe.

Malgré le conservatisme du critère et la non-convexité du problème à traiter, la technique proposée permet d'améliorer considérablement la robustesse d'un placement de pôles comme le montrent les trois illustrations présentées.
Il convient de noter que le principe d'un tel placement robuste est indépendant de la technique de placement de pôles utilisée. De plus, lorsque la condition de Kimura (IV.18) n'est pas satisfaite, la méthode est généralisable au cas du retour de sortie dynamique. La difficulté consiste à prendre en compte les modes du compensateur dans la spécification des performances nominales et robustes (choix des régions de tolérance et choix de la région de robustesse $\mathcal{D}$) mais la flexibilité supplémentaire apportée par le correcteur peut autoriser une plus grande amélioration du critère donc de la robustesse en performances.

Conclusion Générale

Dans cette thèse, le problème de la commande des systèmes multivariables à modèles d'état linéaires invariants dans le temps lorsque ces modèles sont sujets à une incertitude a été abordé. L'objectif à atteindre était de conférer à un système des performances souhaitées sur le régime transitoire de sa réponse, ceci malgré l'incertitude. La commande nominale souvent envisagée pour atteindre ce genre de performances est le placement de pôles. Les lois de commandes proposées dans ce mémoire en sont des extensions aux cas incertain et peuvent donc être classifiées parmi les méthodes dites de "placement robuste de pôles".

Le modèle utilisé étant l'équation d'état, l'incertitude a été envisagée sous la forme d'un terme additif affectant la matrice d'état. Ce terme peut être totalement quelconque (incertitude non structurée) ou traduire des variations de paramètres (incertitude affine structurée).

D'un point de vue analytique, l'influence de l'incertitude a été étudiée à travers le concept de borne de $\mathcal{D}$-stabilité robuste. Il s'agit là d'une borne limitant le domaine de l'incertitude et garantissant que les valeurs propres de la matrice d'état incertaine restent cloisonnées dans une région $\mathcal{D}$ spécifiée du plan complexe lorsque celles de la matrice nominale s'y trouvent déjà. Ces bornes représentent donc des critères de performances robustes du système. Elles sont étudiées dans la littérature grâce à diverses approches. Dans cette thèse, deux approches connues ont été présentées de manière privilégiée : l'approche Lyapunov et l'approche logarithmique. Quelques résultats nouveaux ont été donnés et un lien théorique a notamment été établi entre les deux approches dans le cas ou $\mathcal{D}$ est un secteur.

Toutefois, le choix de régions offert par ces deux approches n'étant pas suffisant pour affiner le compromis entre robustesse et performances dans la spécification des objectifs de synthèse, une autre approche, basée sur les $\mathcal{LMI}$, a été étudiée. Il en a résulté l'établissement de nouvelles bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste valables pour les deux types d'incertitude et surtout pour une vaste gamme de régions $\mathcal{D}$. Parmi ces régions figurent notamment des régions non connexes permettant de prendre en compte des dynamiques séparées dans des sous-régions différentes. Cette approche plus générale induit un conservatisme comparable aux approches déjà existantes et permet d'aborder des problèmes d'analyse robuste plus sophistiqués.

Enfin, ces bornes de $\mathcal{D}$-stabilité robuste ont été utilisées pour la synthèse. Des lois de placement de pôles par retour statique d'état ou de sortie, basées sur les techniques de placement de structure propre, ont été "robustifiées" en maximisant ces bornes. Le problème d'optimisation qui a été formulé pour l'occasion est non linéaire et difficile à résoudre. Une heuristique d'approximation de la solution a été proposée. L'idée de cette heuristique est l'association d'algorithmes basés sur des opérateurs génétiques dégrossissant le problème avec des outils d'optimisation de MATLAB terminant le processus.

Les suites à donner à ce travail sont nombreuses :

- D'une part, la recherche de bornes de robustesse moins conservatives est toujours un sujet d'actualité et tout résultat susceptible de faire progresser les travaux en ce sens est digne d'intérêt. Il peut aussi bien s'agir d'une nouvelle approche que d'une modification de l'expression des bornes ou d'une amélioration des techniques numériques qui tendent à les maximiser.

- Ces bornes sont également susceptibles d'être utilisées pour faire de l'analyse robuste vis-à-vis d'autres incertitudes, notammment des incertitudes bornées en normes.

- D'un point de vue commande, une extension semble facilement réalisable. En effet, le cas du retour dynamique (lorsque la condition de Kimura n'est pas satisfaite par exemple) ne paraît poser problème que dans le choix du spectre du compensateur ou de l'observateur et de la région $\mathcal{D}$. Le problème d'optimisation résultant reste du même type mais il est bien sûr de taille plus élevée.

- Des spécifications de performances supplémentaires en termes de découplage peuvent être ajoutées par l'introduction, dans le problème de synthèse, de desiderata sur les composantes des vecteurs propres. Ces ajouts ne font que diminuer le nombre de degrés de liberté disponibles pour optimiser la borne.

- Bien sûr, le problème d'optimisation reste assez long à resoudre pour des systèmes de dimension élevée et pour des régions de placement très sophistiquées. Tout effort visant à déterminer une meilleure heuristique de résolution est le bienvenu.

Appendix A

Influence de la structure propre de la matrice d'état

Cette annexe est consacrée à montrer l'influence de la structure propre de la matrice d'état sur le comportement du système. Nous rappelons comment valeurs propres et vecteurs propres de la matrice d'état d'un système bouclé peuvent déterminer la forme des réponses de ce système.

A.1 Influence des valeurs propres

Pour étudier l'influence des valeurs propres de la matrice d'état, nous examinons la réponse d'un système en régime libre lorsque ce dernier est soumis à une perturbation instantanée représentée par une condition initiale $x_0 = x(t_0)$. Cette réponse constitue la solution d'un système d'équations différentielles de premier ordre et est donnée par :

$$x(t) = e^{At}x_0 \tag{A.1}$$

Si l'on introduit la structure propre de A dans cette expression, on obtient :

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i e^{\lambda_i t} u_i^* x_0 \tag{A.2}$$

Or, la décomposition de x_0 dans la base constituée par les vecteurs propres à droite de A peut s'exprimer par la combinaison linéaire suivante :

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \tag{A.3}$$

D'où l'on obtient :

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i e^{\lambda_i t} u_i^* (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j) \tag{A.4}$$

Compte tenu de la condition (I.13) qui amène $u_i^* v_j = 0$, $\forall \{i, j \neq i\} \in \{1, ..., n\}^2$ et $u_i^* v_i = 1$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, on a :

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} v_i \tag{A.5}$$

On appelle mode réel la quantité $e^{\lambda_i t} v_i$ lorsque λ_i est réel et mode complexe la quantité $(e^{\lambda_i t} v_i + e^{\lambda_j t} v_j) \in \mathbb{R}$ lorsque $\lambda_i = \tilde{\lambda}_j \in \{\mathbb{C}/\mathbb{R}\}$. Cette expression est essentielle car l'on constate que tous les termes de la réponse convergent vers zéro *(donc le système est asymptotiquement stable)* si et seulement si toutes les valeurs propres de A (parfois également appelées modes) sont à partie réelle strictement négative. Plus précisément, l'on voit bien que le système retrouve d'autant plus vite sa position d'équilibre ($x \to \mathbf{0}_n$) que les parties réelles des valeurs propres de A sont très négatives (on parle de modes lents et de modes rapides). La rapidité de la réponse dépend de toute évidence des modes les plus lents qui sont aussi qualifiés de modes dominants. Bien entendu, la valeur de la condition initiale x_0 conditionne aussi la forme de la réponse par le biais de $\{\alpha_i, i \in \{1, ..., n\}\}$.
De plus, on remarque que l'existence de valeurs propres complexes conjuguées induit un comportement oscillatoire dans la réponse du système. Le caractère oscillatoire

d'un mode complexe est d'autant plus marqué que le rapport (en valeur absolue) entre la partie imaginaire et la partie réelle des valeurs propres correspondantes est élevé. Pour les systèmes de deuxième ordre ($n = 2$), ces considérations sont prises en compte pour définir un coefficient d'amortissement des oscillations ainsi qu'une pulsation particulière dite "pulsation propre non amortie"(voir [Oga1990] pour un traitement détaillé de ces aspects). Selon les valeurs de ces indicateurs, la nature de la réponse peut varier d'une absence d'oscillation à une très forte oscillation en passant par un léger dépassement. On se réfère souvent à ces indicateurs pour caractériser la dynamique dominante d'un système d'ordre plus élevé ($n > 2$) et donc ses performances en termes de temps de réponse, dépassement maximal ... etc... (là encore, voir [Oga1990] pour une information plus complète).
Ce qu'il convient de retenir est que la localisation des valeurs propres de A dans le plan complexe (en particulier les modes dominants) est extrêmement utile pour caractériser le comportement d'un système ou pour spécifier les performances souhaitées d'un procédé à commander.

Ces caractéristiques se retrouvent dans les différents comportements entrées/sorties (correspondant aux transferts $[N(s)]_{\{i,j\}}/D(s)$, $\forall\{i,j\} \in \{1,...,\mathbf{p}\} \times \{1,...,\mathbf{m}\}$). Cependant, si les valeurs propres de A suffisent à caractériser le type des réponses, elles ne caractérisent pas à elles seules la forme précise de ces dernières. Le numérateur $[N(s)]_{\{i,j\}}$ a une influence sur la magnitude avec laquelle chaque mode intervient sur le transfert de la $j^{\text{ème}}$ entrée vers la $i^{\text{ème}}$ sortie (voir à nouveau [Oga1990]). En outre, il peut s'opérer, au niveau d'un transfert, une simplification entre un pôle et un zéro (racine de $[N(s)]_{\{i,j\}}$) qui fait disparaître l'effet du mode associé sur le comportement entrée/sortie, entraînant de surcroît une perte de commandabilité et/ou d'observabilité du mode.

Quoi qu'il en soit, les valeurs propres de A revêtent une importance capitale dans le comportement du système. Les vecteurs propres associés ont également une influence comme nous le rappelons dans le paragraphe suivant.

A.2 Influence des vecteurs propres

A.2.1 Vecteurs propres et découplage

Dans la réponse du système en régime libre, on voit clairement apparaître les vecteurs propres à droite de A. Nous détaillons cette relation :

$$\begin{bmatrix} [x(t)]_{\{1,1\}} \\ \vdots \\ [x(t)]_{\{n,1\}} \end{bmatrix} = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} [v_1]_{\{1,1\}} \\ \vdots \\ [v_1]_{\{n,1\}} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_n e^{\lambda_n t} \begin{bmatrix} [v_n]_{\{1,1\}} \\ \vdots \\ [v_n]_{\{n,1\}} \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

On constate clairement en examinant la relation (A.6) que la composante $[v_i]_{\{j,1\}}$, avec $\{i, j\} \in \{1, ..., n\}^2$, distribue l'effet du mode λ_i sur $[x]_{\{j,1\}}$, la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur d'état. Ainsi annuler $[v_i]_{\{j,1\}}$ revient à éliminer l'influence de λ_i sur $[x]_{\{j,1\}}$. On en déduit que les vecteurs propres à droite de A sont significatifs du couplage existant entre le spectre de A et le vecteur d'état.
Lorsque l'on s'intéresse plus au vecteur de sortie y qu'au vecteur d'état x, un raisonnement tout-à-fait analogue est possible en considérant les vecteurs Cv_i, $\forall i \in \{1, ..., n\}$ plutôt que les vecteurs propres à droite. On peut alors analyser le découplage modes/sorties.

Examinons maintenant ce qui se passe au niveau de la commande du procédé bouclé en régime libre :

$$u(t) = KCx(t) \tag{A.7}$$

$$\Leftrightarrow u(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} KCv_i \tag{A.8}$$

$$\Leftrightarrow u(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} w_i \tag{A.9}$$

De la même manière que pour l'évolution de l'état, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} [u(t)]_{\{1,1\}} \\ \vdots \\ [u(t)]_{\{\mathbf{m},1\}} \end{bmatrix} = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} [w_1]_{\{1,1\}} \\ \vdots \\ [w_1]_{\{\mathbf{m},1\}} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_n e^{\lambda_n t} \begin{bmatrix} [w_n]_{\{1,1\}} \\ \vdots \\ [w_n]_{\{\mathbf{m},1\}} \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

La relation (A.10) permet de déduire que les directions d'entrée répartissent l'effet des modes sur les commandes.

Nous nous intéressons maintenant à l'influence des vecteurs propres à gauche du point de vue du découplage. Pour cela, nous examinons l'évolution du vecteur d'état du système bouclé (I.9) lorsque celui-ci est soumis à un signal de réference e non-nul. Nous considérons une condition initiale nulle sur l'état ($x_0 = \mathbf{0}_n$). La commande est définie par $u(t) = KCy(t) + e(t)$ et l'évolution de x est alors donnée par :

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Be(\tau) d\tau \tag{A.11}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = V \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} U^* Be(\tau) d\tau \tag{A.12}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_i^* Be(\tau) d\tau \tag{A.13}$$

En décomposant B en colonnes ($B = [b_1, ..., b_\mathbf{m}]$), on obtient :

$$x(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} u_i^* \sum_{j=1}^{m} b_j [e(\tau)]_{\{j,1\}} d\tau \qquad \text{(A.14)}$$

On constate grâce à (A.14) que le produit $u_i^* b_j$ est significatif de l'interaction entre la $j^{\text{ème}}$ composante du signal de référence et le $i^{\text{ème}}$ mode. Si ce produit est nul, le $i^{\text{ème}}$ mode n'est pas excité par $[e(\tau)]_{\{j,1\}}$. Les vecteurs propres à gauche u_i, $\forall i \in \{1, ..., n\}$ ont donc une influence prépondérante sur la répartition de l'excitation du signal de référence sur les modes.

En resumé, il apparaît donc que l'effet du monde extérieur sur la dynamique interne du système est décrit par la structure propre à gauche alors que la répartition de cette dynamique sur les sorties est essentiellement décrite par la structure propre à droite (phrase empruntée à [Cho1994])

A.2.2 Vecteurs propres à gauche et rejet de perturbation

Pour mettre en évidence un autre intérêt de la structure propre à gauche, nous étendons l'idée de découplage évoquée au paragraphe précédent au cas où la commande du procédé est soumise à des perturbations exogènes représentées par le vecteur $f(t)$ et agissant sur ce procédé par l'intermédiaire d'une matrice d'entrée $\bar{B} = [\bar{b}_1, ..., \bar{b}_\mathbf{m}]$. Il en résulte le modèle de système bouclé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& Ax \;+\; Be \;+\; \bar{B}f \\ \\ y &=& Cx \end{array} \right. \qquad \text{(A.15)}$$

En tenant un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, l'évolution du vecteur de sortie $y(t)$ est décrite par :

$$\begin{aligned} y(t) \;=\; & \sum_{i=1}^{n} \{ C v_i \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} u_i^* \sum_{j=1}^{m} b_j [e(\tau)]_{\{j,1\}} d\tau \} + \\ & \sum_{i=1}^{n} \{ C v_i \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} u_i^* \sum_{j=1}^{m} \bar{b}_j [f(\tau)]_{\{j,1\}} d\tau \} \end{aligned} \qquad \text{(A.16)}$$

La sortie peut donc être décomposée en deux termes, l'un correspondant à la réponse attendue du système, directement déduit de (A.14) et relatif au signal de référence, l'autre relatif au signal de perturbation en entrée.
De la même façon que précédemment, on constate que si les vecteurs propres à gauche sont orthogonaux aux colonnes de $\bar{B}$ (cas idéal), alors l'effet des perturbations sur les sorties est nul. Si, dans un cadre de synthèse, l'on cherche à réduire cet effet en assurant cette orthogonalité, on peut aussi involontairement réduire l'effet de e sur y (si les colonnes de B et de $\bar{B}$ sont quasiment parallèles). De ce fait, il existe

une sorte de compromis entre commandabilité et rejet de perturbation. Ce problème est envisagé dans [CLKK1995].

A.2.3 Vecteurs propres et conditionnement des valeurs propres

Les développements précédents ont toujours considéré le modèle linéaire comme parfait, toujours valide et décrivant avec exactitude le comportement du système. Cette supposition est irréaliste. Bien que nous consacrions une partie du mémoire à introduire de manière plus formelle ce problème, nous considérons dès maintenant le cas où la matrice A n'est pas une matrice connue avec précision et supposons que celle-ci est soumise à une légère incertitude additive, une petite variation E de telle sorte que $A + E$ est la véritable matrice d'évolution du système. Ainsi, les performances en régime transitoire de ce dernier sont caractérisées par les valeurs propres de $A + E$, c'est-à-dire $\lambda_i + \Delta\lambda_i$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$. Nous nous intéressons aux variations $\Delta\lambda_i$ des valeurs propres λ_i de A en présence de E. Ce problème est connu sous le nom de "problème de conditionnement des valeurs propres" ou "problème de sensibilité locale des valeurs propres" (voir par exemple [Cia1982]).
L'équation de la structure propre à droite devient :

$$(A + E)(v_i + \Delta v_i) \;=\; (\lambda_i + \Delta\lambda_i)(v_i + \Delta v_i) \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{A.17}$$

En négligeant les variations de deuxième ordre *(ce qui suppose que l'on reste dans une gamme de variations assez faibles et qui explique l'expression "sensibilité locale")* et en prémultipliant chaque membre de l'égalité par u_i^*, il vient :

$$\Delta\lambda_i \;=\; u_i^* E v_i \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{A.18}$$

$$\Rightarrow\; |\Delta\lambda_i| \leq ||E||_2.||u_i^*||_2.||v_i||_2 \;= \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{A.19}$$

La variation de valeur propre est donc majorée par une expression dépendant bien sûr de la variation E mais aussi de la structure propre de A. La quantité $c_i = ||u_i^*||_2.||v_i||_2$ qui est un indicateur de variation de λ_i proportionnellement à $||E||_2$ est appelée coefficient de sensibilité de λ_i. Il est redémontré dans [KND1985] que :

$$c_i \;\geq\; 1 \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{A.20}$$

D'un point de vue géométrique, le coefficient de sensibilité c_i est l'inverse du cosinus de l'angle entre v_i et u_i.
Le cas idéal où $c_i = 1, \forall i \in \{1, ..., n\}$ correspond au cas où A est une matrice normale. Les vecteurs propres (à droite ou à gauche) peuvent alors être choisis de manière à constituer une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$.
Cependant, ces critères sont spécifiques à chaque mode et si l'on veut un critère unique pour quantifier approximativement la sensibilité du spectre dans son intégralité, on peut utiliser la majoration bien connue [Cia1982] :

$$\max_{i \in \{1,...,n\}} c_i \leq \text{cond}(V) = ||V||_2||V^{-1}||_2 \geq 1 \tag{A.21}$$

Lorsque A est normale, V est idéalement conditionnée et on a $cond(V) = 1$.
Dans [KND1985], une méthode de calcul de retour d'état plaçant un spectre donné et minimisant la sensibilité locale en jouant sur les vecteurs propres est développée. Très efficace, elle a été implantée dans la Control Toolbox de MATLAB [ctr1996] (fonction **place**).

Il faut également noter que dans le cadre de la commande des systèmes multivariables par placement de pôles, les vecteurs propres fournissent des degrés de liberté pour n'importe quel problème d'optimisation formulé (cf. chapitre IV).

Appendix B

Formulations de quelques régions usuelles

Cette annexe est un petit catalogue non exhaustif de formulations polynomiales, $\mathcal{LMI}$ voire $\mathcal{GLMI}$ de quelques régions qui peuvent être utilisées dans les problèmes d'analyse de de commande robustes.

B.1 Formulations polynomiales

Dans cette partie nous nous intéressons à la description polynomiale de quelques régions **transformables**, généralement symétriques par rapport à l'axe réel. Les détails exposés dans cette partie peuvent être retrouvés pour partie dans [Yed1993b, BLJ1993, Cho1994, CP1995b].
Les descriptions ne sont bien entendu pas uniques. Elles répondent aux formulations déjà mentionnées au premier chapitre et que nous rappelons ici :

Formulation cartésienne :

Il s'agit d'une formulation qui utilise une équation cartésienne de la frontière de la région.

$$D = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, F(x,y) = \sum_{u,v \geq 0} \{d_{u,v} x^u y^v\} < 0\} \tag{B.1}$$

où les coefficients d_{uv} sont réels. Lorsque $d_{uv} = 0$ pour v impair, la région $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à l'axe réel.

Formulation polynomiale :

En considérant l'expression de x et y en fonction de z et $\tilde{z}$, on peut passer de la description cartésienne à la formulation polynomiale :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) = \sum_{r,t \geq 0} \{c_{rt} z_r \tilde{z}^t\} < 0\} \tag{B.2}$$

où les coefficients c_{rt} sont des nombres complexes tels que $\tilde{c}_{rt} = c_{tr}$. Pour le cas où $\mathcal{D}$ est une région symétrique par rapport à l'axe réel, les coefficients sont réels donc $c_{rt} = c_{tr}$.

Nous examinons d'abord les régions de premier ordre puis celles de deuxième ordre.

B.1.1 Régions de premier ordre

Les régions de premier ordre sont décrites de manière cartésienne par :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, d_{00} + d_{10}x + d_{01}y < 0\} \tag{B.3}$$

Puisque l'on a

$$x = \frac{z + \tilde{z}}{2} \quad ; \quad \frac{z - \tilde{z}}{2\mathbf{i}}, \tag{B.4}$$

on peut déduire :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, d_{00} + d_{10}(\frac{z + \tilde{z}}{2}) + d_{01}(\frac{z - \tilde{z}}{2\mathbf{i}}) < 0\} \tag{B.5}$$

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, d_{00} + \frac{1}{2}(d_{10} - \mathbf{i}d_{01})z + \frac{1}{2}(d_{10} + \mathbf{i}d_{01})\tilde{z} < 0\} \tag{B.6}$$

Cette formulation est identifiable avec la formulation polynomiale d'une région de premier ordre :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, c_{00} + c_{10}z + c_{01}\tilde{z} < 0\} \tag{B.7}$$

grâce à :

$$c_{00} = d_{00} \; ; \; c_{10} = \frac{1}{2}(d_{10} - \mathbf{i}d_{01}) \; ; \; c_{01} = \frac{1}{2}(d_{10} + \mathbf{i}d_{01}) \tag{B.8}$$

Nous pouvons alors examiner les régions usuelles de premier ordre.

Demi-plan complexe gauche

Cette région peut être décrite par :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, x < 0\}$$

ce qui correspond aux coefficients suivants :

$$\begin{array}{lllll} d_{00} = 0 & ; & d_{10} = 1 & ; & d_{01} = 0 \\ c_{00} = 0 & ; & c_{10} = \frac{1}{2} & ; & c_{01} = \frac{1}{2} \end{array}$$

Demi-plan vertical

Cette région peut être décrite par :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, x < -\gamma\}$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$ correspond, par exemple, à une marge de stabilité absolue. Il vient :

$$\begin{array}{lllll} d_{00} = \gamma & ; & d_{10} = 1 & ; & d_{01} = 0 \\ c_{00} = \gamma & ; & c_{10} = \frac{1}{2} & ; & c_{01} = \frac{1}{2} \end{array}$$

Secteur $S_1(-\sigma, \vartheta)$

Le secteur S_1 de sommet $(-\sigma; 0)$ $(\sigma \in \mathbb{R}^+)$ ouvert vers la gauche et faisant un angle $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ avec l'axe imaginaire est une région symétrique. Elle n'est toutefois pas de premier ordre. Lorsque l'on s'intéresse à la S_1-stabilité d'une matrice réelle (de spectre auto-conjugué), on ne prend en compte qu'une des deux obliques du secteur S_1, c'est-à-dire que l'on considère un demi-plan oblique $\mathcal{D}$. On alors affaire à une région non symétrique mais transformable et d'ordre 1.
Soit le demi-plan considéré est :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, y < \tan(\frac{\pi}{2} - \vartheta)(-x - \sigma)\}$$
$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, \sigma \cos(\vartheta) + \cos(\vartheta)x + \sin(\vartheta)y < 0\}$$

ce qui conduit aux coefficients suivants :

$$d_{00} = \sigma \cos(\vartheta) \;;\; d_{10} = \cos(\vartheta) \;;\; d_{01} = \sin(\vartheta)$$
$$c_{00} = \sigma \cos(\vartheta) \;;\; c_{10} = \frac{1}{2}(\cos(\vartheta) - \mathbf{i}\sin(\vartheta)) \;;\; c01 = \frac{1}{2}(\cos(\vartheta) + \mathbf{i}\sin(\vartheta)),$$

soit c'est l'autre demi-plan qui est est considéré :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, y > -\tan(\frac{\pi}{2} - \vartheta)(-x - \sigma)\}$$
$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, \sigma \cos(\vartheta) + \cos(\vartheta)x - \sin(\vartheta)y < 0\}$$

Ceci amène alors les coefficients suivants :

$$d_{00} = \sigma \cos(\vartheta) \;;\; d_{10} = \cos(\vartheta) \;;\; d_{01} = -\sin(\vartheta)$$
$$c_{00} = \sigma \cos(\vartheta) \;;\; c_{10} = \frac{1}{2}(\cos(\vartheta) + \mathbf{i}\sin(\vartheta)) \;;\; c01 = \frac{1}{2}(\cos(\vartheta) - \mathbf{i}\sin(\vartheta)),$$

Ce sont ces derniers coefficients qui sont utilisés dans les développements du chapitre II. Comme un demi-plan oblique est non symétrique, on n'a pas $c_{01} = c_{10} \in \mathbb{R}$ mais $c_{10} = \tilde{c}_{01} \in \mathbb{C}$.

B.1.2 Régions de deuxième ordre

Une région de deuxième ordre est décrite de manière cartésienne par :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, d_{00} + d_{10}x + d_{01}y + d_{11}xy + d_{20}x^2 + d_{02}y^2 < 0\} \quad \text{(B.9)}$$

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, d_{00} + d_{10}(\frac{z + \tilde{z}}{2}) + d_{01}(\frac{z - \tilde{z}}{2\mathbf{i}}) + d_{11}(\frac{z + \tilde{z}}{2})(\frac{z - \tilde{z}}{2\mathbf{i}}) +$$
$$d_{20}(\frac{z + \tilde{z}}{2})^2 + d_{02}(\frac{z - \tilde{z}}{2\mathbf{i}})^2 < 0\}$$

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, d_{00} + (\frac{d_{10}}{2} - \mathbf{i}\frac{d_{01}}{2})z + (\frac{d_{10}}{2} + \mathbf{i}\frac{d_{01}}{2})\tilde{z}$$
$$(\frac{d_{20}}{2} + \frac{d_{02}}{2})z\tilde{z} + (\frac{1}{4}d_{20} - \frac{1}{4}d_{02})z^2 + (\frac{1}{4}d_{20} - \frac{1}{4}d_{02})\tilde{z}^2 - \mathbf{i}\frac{d_{11}}{4}(z^2 - \tilde{z}^2) < 0\}$$

ce qui permet de déduire une formulation polynomiale des régions d'ordre 2 :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, c_{00} + c_{10}z + c_{01}\tilde{z} + c_{11}z\tilde{z} + c_{20}z^2 + c_{02}\tilde{z}^2 < 0\} \tag{B.10}$$

grâce à l'identification suivante :

$$c_{00} = d_{00} \; ; \; c_{10} = \frac{1}{2}(d_{10} - \mathbf{i}d_{01}) \; ; \; c_{01} = \frac{1}{2}(d_{10} + \mathbf{i}d_{01}) \; ; \; c_{11} = \frac{1}{2}(d_{20} + d_{02})$$
$$c_{20} = \frac{1}{4}\{(d_{20} - d_{02}) - \mathbf{i}d_{11}\} \; ; \; c_{02} = \frac{1}{4}\{(d_{20} - d_{02}) + \mathbf{i}d_{11}\} \tag{B.11}$$

Nous examinons maintenant quelques régions répondant à ces formulations.

Disque

Le disque de centre $(\gamma; 0)$ et de rayon r peut être décrit par :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, (x - \gamma)^2 + y^2 - r^2 < 0\}$$
$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, x^2 - 2\gamma x + y^2 + \gamma^2 - r^2 < 0\}$$

ce qui conduit aux coefficients suivants :

$$d_{00} = \gamma^2 - r^2 \,; \, d_{10} = -2\gamma \,; \, d_{01} = 0 \,; \, d_{11} = 0 \,; \, d_{20} = 1 \,; \, d_{02} = 1$$
$$c_{00} = \gamma^2 - r^2 \,; \, c_{10} = -\gamma \,; \, c_{01} = -\gamma \,; \, c_{11} = 1 \,; \, c_{20} = 0 \,; \, c_{02} = 0$$

Ellipse

L'ellipse horizontale ou verticale de centre $(\gamma; 0)$ de demi-axe transverse a et de demi-axe conjugué b peut être décrite par :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, (x - \gamma)^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 - a^2 < 0\}$$
$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, x^2 - 2\gamma x + \frac{a^2}{b^2}y^2 + \gamma^2 - a^2 < 0\}$$

ce qui conduit aux coefficients suivants :

$$d_{00} = \gamma^2 - a^2 \,; \, d_{10} = -2\gamma \,; \, d_{01} = 0 \,; \, d_{11} = 0 \,; \, d_{20} = 1 \,; \, d_{02} = \frac{a^2}{b^2}$$
$$c_{00} = \gamma^2 - a^2 \,; \, c_{10} = -\gamma \,; \, c_{01} = -\gamma \,; \, c_{11} = \frac{a^2 + b^2}{2b^2} \,;$$
$$c_{20} = \frac{b^2 - a^2}{4b^2} \,; \, c_{02} = \frac{b^2 - a^2}{4b^2}$$

Hyperbole

Une hyperbole de centre $(\gamma; 0)$ peut être décrite par :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, -\frac{(x-\gamma)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 < 0\}$$
$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, -\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{\gamma x}{a^2} + 1 - \frac{y^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0\}$$

Remarque B.1 *: Pour des raisons de transformabilité de la région et de validité du calcul de certaines bornes de Lyapunov de $\mathcal{D}$-stabilité robuste (voir [Cho1994] pour plus de détails), une hypothèse restrictive est ajoutée : $a > b$.*

Remarque B.2 *: Cette région est la seule région polynomiale non connexe de ce catalogue.*

Ceci conduit aux coefficients suivants :

$$d_{00} = 1 - \frac{\gamma^2}{a^2}\,;\; d_{10} = 2\frac{\gamma}{a^2}\,;\; d_{01} = 0\,;\; d_{11} = 0\,;\; d_{20} = -\frac{1}{a^2}\,;\; d_{02} = \frac{1}{b^2}$$
$$c_{00} = \frac{a^2-\gamma^2}{a^2}\,;\; c_{10} = \frac{\gamma}{a^2}\,;\; c_{01} = \frac{\gamma}{a^2}\,;\; c_{11} = \frac{a^2-b^2}{2a^2b^2}\,;$$
$$c_{20} = -\frac{a^2+b^2}{4a^2b^2}\,;\; c_{02} = -\frac{a^2+b^2}{4a^2b^2};$$

Parabole

Une parabole de sommet $(\gamma; 0)$ et de foyer $(\gamma - p; 0)$ peut être décrite par :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, -4p\gamma + 4px + y^2 < 0\}$$

ce qui conduit aux coefficients suivants :

$$d_{00} = -4p\gamma\,;\; d_{10} = 4p\,;\; d_{01} = 0\,;\; d_{11} = 0\,;\; d_{20} = 0\,;\; d_{02} = 1$$
$$c_{00} = -4p\gamma\,;\; c_{10} = 2p\,;\; c_{01} = 2p\,;\; c_{11} = \frac{1}{2}\,;\; c_{20} = -\frac{1}{4}\,;\; c_{02} = -\frac{1}{4}$$

Bande verticale

Une bande verticale centrée en $x = \gamma$ et de largeur 2ω peut être décrite par :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, x^2 - 2\gamma x + (\gamma^2 - \omega^2) < 0\}$$

ce qui conduit aux coefficients suivants :

$$d_{00} = (\gamma^2 - \omega^2)\,;\; d_{10} = -2\gamma\,;\; d_{01} = 0\,;\; d_{11} = 0\,;\; d_{20} = 1\,;\; d_{02} = 0$$
$$c_{00} = (\gamma^2 - \omega^2)\,;\; c_{10} = -\gamma\,;\; c_{01} = -\gamma\,;\; c_{11} = \frac{1}{2}\,;\; c_{20} = \frac{1}{4}\,;\; c_{02} = \frac{1}{4}$$

Bande horizontale

Une bande horizontale, symétrique par rapport à l'axe réel et de largeur 2ω, peut être décrite par :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, y^2 - \omega^2 < 0\}$$

ce qui conduit aux coefficients suivants :

$$d_{00} = \omega^2\,;\; d_{10} = 0;\; d_{01} = 0\,;\; d_{11} = 0\,;\; d_{20} = 0\,;\; d_{02} = 1$$
$$c_{00} = \omega^2\,;\; c_{10} = 0\,;\; c_{01} = 0\,;\; c_{11} = \frac{1}{2}\,;\; c_{20} = -\frac{1}{4}\,;\; c_{02} = -\frac{1}{4}$$

B.2 Formulations $\mathcal{LMI}$ ou $\mathcal{GLMI}$

Cette partie est essentiellement à consacrée à la description de quelques régions symétriques simples convexes par une formulation $\mathcal{LMI}$. Toutefois, deux régions non symétriques convexes seront présentées commes des régions $\mathcal{GLMI}$. Certains points de ces développements sont empruntés à [CG1996, Chi1996].

Formulation $\mathcal{LMI}$:

Nous rappelons qu'une région est dite $\mathcal{LMI}$ s'il existe deux matrices $\alpha = \alpha^* \in \mathbb{R}^{l\times l}$ et $\beta \in \mathbb{R}^{l\times l}$ telles que :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f_{\mathcal{D}}(z) = \alpha + \beta z + \beta^* \tilde{z} < 0\} \tag{B.12}$$

Notre objectif consiste alors à déterminer α et β permettant de formuler quelques régions usuelles comme des régions $\mathcal{LMI}$.

Formulation $\mathcal{GLMI}$:

Nous rappelons qu'un sous-ensemble $\mathcal{D}$ du plan complexe est dit région $\mathcal{GLMI}$ s'il existe θ_k, ψ_k, H_k et J_k ($\forall k \in \{1, ..., m\}$), matrices complexes carrées d'ordre l, telles que :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m, f_{\mathcal{D}}(z,w) < 0, g_{\mathcal{D}}(w) = \mathbf{0}_l\} \tag{B.13}$$

où les matrices $f_{\mathcal{D}}(z,w)$ et $g_{\mathcal{D}}(w)$ sont définies par :

$$f_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{k=1}^{m} (\theta_k w_k + \theta_k^* \tilde{w}_k + \psi_k z w_k + \psi_k^* \tilde{w}_k \tilde{z}) \tag{B.14}$$

$$g_{\mathcal{D}}(w) = \sum_{k=1}^{m}(H_k w_k + J_k \tilde{w}_k) \tag{B.15}$$

Notre objectif consiste alors à determiner les matrices θ_k, ψ_k, H_k et J_k qui permettent de décrire un disque ou une ellipse excentrée.

Nous examinons d'abord les régions de premier ordre ($l = 1$) puis celles de deuxième ordre ($l = 2$).

B.2.1 Régions de premier ordre

Nous nous contentons de considérer le cas de régions symétriques (c'est-à-dire $\mathcal{LMI}$).

Demi-plan complexe gauche

La région peut-être décrite par :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, 2x = z + \tilde{z} < 0\}$$

On peut prendre :

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = 1$$

Demi-plan vertical $x < -\gamma$

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, 2x + 2\gamma = z + \tilde{z} + 2\gamma < 0\}$$

On peut prendre :

$$\alpha = 2\gamma \quad ; \quad \beta = 1$$

Demi-plan vertical $x > -\gamma$

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, -2x - 2\gamma = -z - \tilde{z} - 2\gamma < 0\}$$

On peut prendre :

$$\alpha = -2\gamma \quad ; \quad \beta = -1$$

Remarque B.3 *: Le secteur symétrique n'est pas considéré d'un point de vue "$\mathcal{LMI}$" comme une région de premier ordre mais comme une région de deuxième ordre. Nous le verrons par la suite.*

B.2.2 Régions de deuxième ordre

Nous examinons d'abord le cas de quelques régions symétriques (c'est-à-dire $\mathcal{LMI}$).

Disque

Le disque de centre $(\gamma; 0)$ et de rayon r peut être décrit par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-\gamma| < r\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, (z-\gamma)(\tilde{z}-\gamma) - r^2 < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, -r + \frac{(z-\gamma)(\tilde{z}-\gamma)}{r} < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, -r + \begin{bmatrix} -r & z-\gamma \\ \tilde{z}-\gamma & -r \end{bmatrix} < 0\}
\end{aligned}$$

On peut prendre :

$$\alpha = \begin{bmatrix} -r & -\gamma \\ -\gamma & -r \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ellipse

L'ellipse horizontale ou verticale de centre $(\gamma; 0)$, de demi-axe transverse a et de demi-axe conjugué b peut être décrite par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, (x-\gamma)^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 - a^2 < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, (\frac{z+\tilde{z}-2\gamma}{2})^2 - \frac{a^2}{4b^2}(z-\tilde{z})^2 - a^2 < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, \frac{(z+\tilde{z}-2\gamma)^2 - \frac{a^2}{b^2}(z-\tilde{z})^2}{2a} - 2a < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, -2a + \frac{(z+\tilde{z}-2\gamma+\frac{a}{b}z-\frac{a}{b}\tilde{z})(z+\tilde{z}-2\gamma-\frac{a}{b}z+\frac{a}{b}\tilde{z})}{2a} < 0\}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \begin{bmatrix} -2a & -2\gamma + (1+\frac{a}{b})z + (1-\frac{a}{b})\tilde{z} \\ -2\gamma + (1-\frac{a}{b})z + (1+\frac{a}{b})\tilde{z} & -2a \end{bmatrix} < 0\}$$

On peut prendre :

$$\alpha = \begin{bmatrix} -2a & -2\gamma \\ -2\gamma & -2a \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & (1+\frac{a}{b}) \\ (1-\frac{a}{b}) & 0 \end{bmatrix}$$

Secteur hyperbolique

Une hyperbole de centre $(\gamma;0)$ peut être décrite par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, -\frac{(x-\gamma)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, -\frac{(x-\gamma)^2 b^2}{a^2} + y^2 + b^2 < 0\}
\end{aligned}$$

Supposons que nous nous ramenions au secteur correspondant à $(x-\gamma) < 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, \frac{(x-\gamma)b}{a} - \frac{y^2 + b^2}{\frac{(x-\gamma)b}{a}} < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z = x \in \mathbb{C} \,|\, \frac{(z+\tilde{z}-2\gamma)b}{2a} - \frac{b^2 - (\frac{z-\tilde{z}}{2})^2}{\frac{(z+\tilde{z}-2\gamma)b}{2a}} < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z = x \in \mathbb{C} \,|\, \frac{(z+\tilde{z}-2\gamma)b}{2a} - \frac{(b + \frac{z-\tilde{z}}{2})(b - \frac{z-\tilde{z}}{2})}{\frac{(z+\tilde{z}-2\gamma)b}{2a}} < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z = x \in \mathbb{C} \,|\, \begin{bmatrix} \frac{b}{2a}(-2\gamma + z + \tilde{z}) & b + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\tilde{z} \\ b - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tilde{z} & \frac{b}{2a}(-2\gamma + z + \tilde{z}) \end{bmatrix} < 0\}
\end{aligned}$$

On peut prendre :

$$\alpha = \begin{bmatrix} -\frac{b\gamma}{a} & b \\ b & -\frac{b\gamma}{a} \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} \frac{b}{2a} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{b}{2a} \end{bmatrix}$$

Remarque B.4 *: Il n'existe pas à notre connaissance de formulation $\mathcal{LMI}$ de la parabole.*

Bande verticale

Une bande verticale centrée en $x = \gamma$ et de largeur 2ω peut être décrite par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, |x-\gamma| < \omega\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, (\frac{z+\tilde{z}-2\gamma}{2})(\frac{z+\tilde{z}-2\gamma}{2}) - \omega^2 < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, \frac{(z+\tilde{z}-2\gamma)(z+\tilde{z}-2\gamma)}{2\omega} - 2\omega < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, \begin{bmatrix} -2\omega & (z+\tilde{z}-2\gamma) \\ (z+\tilde{z}-2\gamma) & -2\omega \end{bmatrix} < 0\}
\end{aligned}$$

On peut prendre :

$$\alpha = \begin{bmatrix} -2\omega & -2\gamma \\ -2\gamma & -2\omega \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque B.5 : *La bande verticale peut-être également vue comme la région $\mathcal{LMI}$ que constitue l'intersection de deux demi-plans verticaux.*

Bande horizontale

Une bande horizontale, symétrique par rapport à l'axe réel et de largeur 2ω, peut être décrite par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, |y|^2 - \omega^2 < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, \frac{(z-\tilde{z})(\tilde{z}-z)}{4} - \omega^2 < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, \frac{(z-\tilde{z})(\tilde{z}-z)}{+2\omega} - 2\omega < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, \begin{bmatrix} -2\omega & (z-\tilde{z}) \\ (\tilde{z}-z) & -2\omega \end{bmatrix} < 0\}
\end{aligned}$$

On peut prendre :

$$\alpha = \begin{bmatrix} -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Secteur $S_1(-\sigma, \vartheta)$

Le secteur S_1 peut être décrit par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, |y| < -\tan(\frac{\pi}{2} - \vartheta)(x+\sigma)\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, y\tilde{y} < \frac{\cos^2(\vartheta)}{\sin^2(\vartheta)})(x+\sigma)^2\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, \sin^2(\vartheta)(z-\tilde{z})(\tilde{z}-z) - \cos^2(\vartheta)(z+\tilde{z}+2\sigma)(z+\tilde{z}+2\sigma) < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, \cos(\vartheta)(z+\tilde{z}+2\sigma) + \frac{\sin(\vartheta)(z-\tilde{z})\sin(\vartheta)(\tilde{z}-z)}{-\cos(\vartheta)(z+\tilde{z}+2\sigma)} < 0\} \\
\Leftrightarrow \mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, \begin{bmatrix} \cos(\vartheta)(z+\tilde{z}+2\sigma) & \sin(\vartheta)(z-\tilde{z}) \\ \sin(\vartheta)(\tilde{z}-z) & \cos(\vartheta)(z+\tilde{z}+2\sigma) \end{bmatrix} < 0\}
\end{aligned}$$

On peut prendre :

$$\alpha = \begin{bmatrix} 2\sigma\cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 2\sigma\cos(\vartheta) \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{bmatrix}$$

Disque excentré

Le disque de centre $(\gamma_1; \gamma_2)$ et de rayon r peut etre décrit par :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - \gamma| < r\}$$

où $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \begin{bmatrix} -r & z-\gamma \\ \tilde{z}-\tilde{\gamma} & -r \end{bmatrix} < 0\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists w \in \mathbb{R}^+, \begin{bmatrix} -r & z-\gamma \\ \tilde{z}-\tilde{\gamma} & -r \end{bmatrix} < 0\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists w \in \mathbb{C}, \begin{bmatrix} -r & z-\gamma & 0 \\ \tilde{z}-\tilde{\gamma} & -r & 0 \\ 0 & 0 & -w \end{bmatrix} < 0,\, w\mathbf{I}_3 - \tilde{w}\mathbf{I}_3 = \mathbf{0}_3\}$$

On prend prendre, pour définir $\mathcal{D}$ comme une région $\mathcal{GLMI}$ les expressions (B.14) et (B.15) avec $m = 1$ et :

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -r & -\gamma & 0 \\ -\tilde{\gamma} & -r & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ;\, \psi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = -J_1 = \mathbf{I}_3$$

Ellipse excentrée

L'ellipse horizontale ou verticale, de centre $(\gamma_1; \gamma_2)$ associé au nombre complexe $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \mathbf{i}$, de demi-axe transverse a et de demi-axe conjugué b peut être vue comme un ellipsoïde de dimension 2 :

$$\mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \right)^* \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \right) < 1\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D} = \{(z = x + \mathbf{i}y) \in \mathbb{C} \,|\, \frac{1}{a^2}(x-\gamma_1)^2 + \frac{1}{b^2}(y-\gamma_2)^2 < 1\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \frac{1}{4a^2}(z+\tilde{z}-2\gamma_1)^2 - \frac{1}{4b^2}(z-\tilde{z}-2\gamma_2\mathbf{i})^2 < 1\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, -4a^2b^2 + b^2(z+\tilde{z}-2\gamma_1)^2 - a^2(z-\tilde{z}-2\gamma_2\mathbf{i})^2 < 0\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, -4a^2b^2 + (bz+b\tilde{z}-2b\gamma_1+az-a\tilde{z}-2a\gamma_2\mathbf{i})(bz+b\tilde{z}-2b\gamma_1-az+a\tilde{z}+2a\gamma_2\mathbf{i}) < 0\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, -2ab + \frac{(bz+b\tilde{z}-2b\gamma_1+az-a\tilde{z}-2a\gamma_2\mathbf{i})(bz+b\tilde{z}-2b\gamma_1-az+a\tilde{z}+2a\gamma_2\mathbf{i})}{2ab} < 0\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \begin{bmatrix} -2ab & (bz+b\tilde{z}-2b\gamma_1+az-a\tilde{z}-2a\gamma_2\mathbf{i}) \\ (bz+b\tilde{z}-2b\gamma_1-az+a\tilde{z}+2a\gamma_2\mathbf{i}) & -2ab \end{bmatrix} < 0\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists w \in \mathbb{C} \begin{bmatrix} -2ab & (bz+b\tilde{z}-2b\gamma_1+az-a\tilde{z}-2a\gamma_2\mathbf{i}) & 0 \\ (bz+b\tilde{z}-2b\gamma_1-az+a\tilde{z}+2a\gamma_2\mathbf{i}) & -2ab & 0 \\ 0 & 0 & -w \end{bmatrix} < 0,$$

$$\mathbf{I}_3 w - \mathbf{I}_3 \tilde{w} = \mathbf{0}_3\}$$

La région $\mathcal{D}$ peut alors être définie comme une région $\mathcal{GLMI}$ en prenant (B.14), (B.15), $m = 1$ et :

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} -ab & (-b\gamma_1 - a\gamma_2\mathbf{i}) & 0 \\ (-b\gamma_1 + a\gamma_2\mathbf{i}) & -ab & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ; \psi_1 = \begin{bmatrix} 0 & (a+b) & 0 \\ (-a+b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = -J_1 = \mathbf{I}_3$$

Appendix C

Quelques pages Web intéressantes

Nous présentons dans cette annexe une petite liste de quelques pages du réseau Internet qui nous paraissent intéressantes à consulter et qui sont en relation avec des points évoqués dans ce mémoire. Nous donnons ici des adresses `http` qui sont bien sûr susceptibles de changer au cours du temps. Elles sont regroupées selon plusieurs thèmes et ne constituent en aucun cas une liste exhaustive pour chacun de ces thèmes. Il est à noter que quoique l'on puisse trouver des références à la $\mathcal{D}$-stabilité sur le réseau, nous n'avons pas pu trouver de page réellement dignes d'intérêt et porteuse d'informations complémentaires sur ce sujet. Voici néanmoins quelques pages intéressantes.

Pour en savoir plus sur ...

...les rayons de stabilité :

A défaut de donner une adresse pertinente concernant l'analyse des performances robustes d'un système en termes de $\mathcal{D}$-stabilité, nous proposons de limiter la recherche d'information à la simple propriété de stabilité robuste et nous conseillons alors deux adresses `http` :

• L'adresse de la page personnelle du professeur Paul Van Dooren sur le site de l'Université Catholique de Louvain en Belgique. On peut notamment consulter une liste de ses publications qui peuvent être téléchargées en format `.ps` par FTP et dont certaines concernent l'analyse de stabilité robuste.

`http://www.auto.ucl.ac.be/∼vdooren`

• Une autre page intéresasante à ce propos est celle de Diederich Hinrinchsen, professeur de Mathématiques à l'Unveristé de Brême, Allemagne. On peut également télécharger certaines de ses publications sur les rayons de stabilité.

`http://www.math.uni-bremen.de/∼dh/publications.html♯3`

...les $\mathcal{LMI}$ et leurs applications à la commande :

Tout d'abord nous précisons qu'un logiciel *freeware* concurrent de la LMI Control Toolbox de MATLAB et baptisé LMITOOL est disponible en version BETA sur le site Web de l'Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées (E.N.S.T.A.). Developpé par Laurent El Ghaoui, François Delebèque et Ramine Nikoukhah, cet outil utilise l'environnement de travail de MATLAB. Toutes les instructions sur le téléchargement et l'installation figurent à l'adresse :

`http://www.ensta.fr/uer/uma/gropco/lmi/lmitool.html`

• Toujours a propos des $\mathcal{LMI}$ utilisées pour la commande et toujours sur le site de l'E.N.S.T.A., citons la page personelle du professeur Laurent El Ghaoui à l'adresse :

`http://www.ensta.fr/uer/uma/gropco/staff/elghaoui/cv_fr.html`

où l'on peut également télécharger quelques publications en format `.ps` ou consulter le plan du livre [BGFB1994].

• Une autre page intéressante à consulter comprenant des publications et des cours à télécharger, est celle de Stephen Boyd, professeur à l'Université de Stanford :

`http://www-isl.stanford.edu/~boyd/`

• Enfin, pour en terminer avec cette liste d'adresse concernant les $\mathcal{LMI}$ et la commande, on peut aussi citer la page personnelle de Carsten W. Scherer, sur le site de l'Université de Delft aux Pays-Bas, qui permet aussi d'accéder à des publications en format `.ps` :

`http://www-mr.wbmt.tudelft.nl/~scherer`

...le placement robuste de pôles :

• Comme nous l'avons dit, il existe beaucoup de méthodes de placement robuste de pôles mais le réseau Internet n'est pas toujours riche en informations sur ce sujet. Nous conseillons toutefois la page personnelle du Docteur James Lam, exerçant à l'Université de Hong-Kong, à l'adresse :

`http://hkumea.hku.hk/acad_jlam.html`

• Citons aussi la page de R. J. Patton, professeur à l'Université de Hull en Angleterre, que l'on peut consulter à l'adresse :

`http://www.enc.hull.ac.uk/EE/CONTROL/rjp.htm`

...les algorithmes génétiques :

• Nous nous sommes inspirés des algorithmes génétiques pour résoudre notre problème de placement robuste, à l'instar de R. J. Patton et G. P. Liu. Même si les algorithmes utilisés sont un peu spécifiques à notre problème, il peut être intéressant dans le but d'améliorer les stratégies d'optimisation, d'approfondir sa connaissance des algorithmes génétiques, de leur origine et de leurs applications. Pour cela, on peut commencer en consultant une première adresse correspondant à un guide des algorithmes génétiques avec des présentations assez générales :

`http://www.cs.purdue.edu/coast/archive/clife/FAQ/www/intro.htm`

• Une deuxième adresse, déjà mentionnée dans le mémoire, correspondant au travail de Zbignew Michalewicz et autorisant le téléchargement par FTP du paquetage GENOCOP (GEnetic alghorithm for Numerical Optimization for COnsatrained Problems), écrit en langage “C”. Ce paquetage permet de résoudre des problèmes d'optimisation contraints, ceci par l'utilisation d'algorithmes génétiques conservant le code réel des variables d'optimisation.

`http://www-cgi.cs.cmu.edu/afs/cs/project/ai-repository/ai/areas/...`
`...genetic/ga/systems/michal/genocop/0.html`

• Enfin, une troisième adresse sur le même site que la précédente, permet de télécharger une libraire (appelée TOLKIEN) pour utiliser les algorithmes génétiques dans un environnement de programmation objet en langage “C^{++}” :

`http://www-cgi.cs.cmu.edu/afs/cs/project/ai-repository/ai/areas/...`
`...genetic/ga/systems/tolkien/0.html`

...MATLAB :

Nous proposons ici trois adresses de pages Internet concernant ce logiciel largement répandu au sein de la communauté des Automaticiens, edité par “The MATH WORKS Inc.”.

• La première est tout simplement l'adresse du site de MATH WORKS présentant dans leurs généralités les fonctionnalités des logiciels MATLAB et SIMULINK :

`http://www.mathworks.com`

• La deuxième, plus spécifique et plus proche de notre travail (déjà mentionnée dans le mémoire) correspond à une page présentant la boîte à outil MATLAB sur le placement robuste de structure propre :

`http://www.mathworks.com/connections/eigenstru.shtml`

• Enfin, la troisième est à nouveau plus générale et correspond à une page indépendante du site commercial de MATH WORKS. On y propose une liste de liens, une introduction au logiciel, des commentaires sur ses diverses fonctionnalités, des réponses à des questions courantes :

`http://www.indiana.edu/∼statmath/math/matlab`

...les liens Internet sur la commande :

Il existe plusieurs pages Internet qui réaiguillent sur des sites où l'on peut trouver des informations sur la commande en général (éventuellement robuste) et plus particulièrement sur certaines équipes de recherche s'y intéressant. Nous ne les avons bien entendu pas tous explorés. Citons cependant deux adresses proposant une liste intéressante de liens :

• La première est celle de la page personnelle de Didier Henrion sur le serveur du LAAS-CNRS :

`http://www.laas.fr/~henrion`

• La seconde est intitulée "Zoom's Control systems resources" :

`http://alfa.ist.utl.pt/~l34000/control.html`

...les maths :

Enfin pour terminer ce petit panel de pages Internet, nous conseillons une adresse où est proposée une encyclopédie de mathématiques actuellement en construction. On peut y retrouver ou découvrir de nombreuses définitions, de nombreux théorèmes et autres résultats. Ce travail de recoupement est dû à Eric W. Weisstein :

`http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/math/math.html`

Références bibliographiques

[ACM1989] P. Apkarian, C. Champetier, et J. F. Magni. Design of a helicopter output feedback control law using modal and structured robustness techniques. *International Journal of Control*, 50(4):1195–1215, 1989.

[AM1990] B. D. O. Anderson et J. B. Moore. *Optimal control, Linear Quadratic methods*. Prentice Hall, New York, 1990.

[ASC1983] A. N. Andry, E. Y. Shapiro, et J. C. Chung. Eigenstructure assignment for linear systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 19(5):711–729, 1983.

[Ath1986] M. Athans. A tutorial on the LQG/LTR method. Dans *American Control Conference ACC'86*, pages 1289–1296, Juin 1986.

[AY1997] C. R. Ashokkumar et R. K. Yedavalli. Eigenstructure perturbation analysis in disjointed domains for linear uncertain systems. *International Journal of Control*, 67(6):887–899, 1997.

[Bar1985] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Otimization Theory and Applications*, 46(4):399–408, Août 1985.

[Bar1994] B. R. Barmish. *New tools for robustness of linear systems*. Macmillan Publishing Company, New York, 1994.

[BGFB1994] S. Boyd, L. El. Ghaoui, E. Feron, et V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in system and control theory*. Volume 15 of SIAM Studies in Applied Mathematics, USA, 1994.

[BGP1989] J. Bernussou, J. C. Geromel, et P. L. D. Peres. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems and Control Letters*, 13:65–72, Juillet 1989.

[BLJ1993] W. Bakker, J. S. Luo, et A. Johnson. Performance robustness bounds for linear systems to guarantee root-clustering in second order subregions of the complex plane. Dans *32nd CDC*, pages 3467–3472, San Antonio Texas USA, Decembre 1993.

[Bod1945] H. W. Bode. *Network analysis and feedback amplifier design.* D. Van Nostrand Company inc. Princeton, 1945.

[BP1997] O. Bachelier et B. Pradin. Robust pole assignment in a second order region via Lyapunov approach. Dans *2nd IFAC Symposium ROCOND'97*, pages 417–422, Budapest, Hungary, Juin 1997.

[BP1998a] O. Bachelier et B. Pradin. Robust pole placement in a specified convex region of the complex plane. Dans *Conférence IFAC SSC'98*, Nantes, France, Juillet 1998.

[BP1998b] O. Bachelier et B. Pradin. Robust regional eigenvalue assignment. Dans *Multi-conférence IMACS-IEEE CESA'98*, Nabeul-Hammamet, Tunisie, Avril 1998.

[BPC1997] O. Bachelier, B. Pradin, et I. Chouaib. Bounds for robust eigenvalue assignment in a sector. Dans *European Control Conference ECC'97*, volume 3, Brussels, Belgium, Juillet 1997.

[BPG1989] J. Bernussou, P . L. D. Peres, et J. C. Geromel. A linear programming oriented for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems and Control Letters*, 13:65–72, 1989.

[BYDM1994] R. D. Braatz, P. M. Young, J. C. Doyle, et M. Morari. Computational complexity of μ calculation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39:1000–1002, 1994.

[CBG1998] C. Courties, J. Bernussou, et G. Garcia. H_∞ robust control for polytopic uncertain systems. Dans *Multi-conférence IMACS-IEEE CESA'98*, Nabeul-Hammamet, April 1998.

[CG1996] M. Chilali et P. Gahinet. H_∞ design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):358–367, Mars 1996.

[Chi1996] M. Chilali. Méthode LMI pour la synthèse multi-critère. Thèse de doctorat, Université PARIS IX-DAUPHINE, U.F.R. Mathématiques de la Décision, Paris-France, 1996.

[Cho1994] I. Chouaib. Placement et robustesse de structure propre. Thèse de doctorat, INSA, Toulouse-France, 1994.

[Cia1982] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* Masson Ed., France, 1982.

[CLKK1995] J. W. Choi, J. G. Lee, Y. Kim, et T. Kang. Design of an effective controller via disturbance accomodating left eigenstructure assignment. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 18(2):347–354, Mars-avril 1995.

[CM1989] C. Champetier et J. F. Magni. Analyse et synthèse de lois de commande modale. *La Recherche Aérospatiale*, 6:17–35, 1989.

[CM1991] C. Champetier et J. F. Magni. On eigenstructure assignment by gain output feedback. *SIAM Journal of Control and Optimisation*, 29(4):848–865, 1991.

[CP1972] S. S. L. Chang et T. K. C. Peng. Adaptative guaranteed cost control systems with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17:474–483, 1972.

[CP1994a] I. Chouaib et B. Pradin. Eigenstructure assignment with robust root clustering in an ellipse. Dans *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Rio de Janeiro, Brazil, Septembre 1994.

[CP1994b] I. Chouaib et B. Pradin. Logarithmic and vector norms for robust root clustering. Dans *IEEE, Workshop on Robust Control via Variable Structure & Lyapunov Techniques VSLT'94*, Benevento, Italy, Septembre 1994.

[CP1995a] I. Chouaib et B. Pradin. Eigenstructure assignment with robust root clustering using logarithmic norms. Dans *3rd European Control Conference*, volume 4, pages 3400–3405, Rome, Italy, Septembre 1995.

[CP1995b] I. Chouaib et B. Pradin. Parameters bounds for root clustering of uncertain matrices. *International Journal of Systems Science*, 26(9):1601–1615, Septembre 1995.

[ctr1996] Control System Toolbox for MATLAB: User's guide, 1996.

[CW1987] B. S. Chen et C. C. Wong. Robust linear controller design: time domain approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(2):161–164, Février 1987.

[Daa1997] J. Daafouz. Robustesse en performance des systèmes linéaires incertains : placement de pôles et coût garanti. Thèse de doctorat, INSA de Toulouse, Toulouse-France, 1997.

[Des1637] R. Descartes. *La géométrie*. Maire-Leyden, France, 1637.

[Deu1975] E. Deutsch. On matrix norms and logarithmic norms. *Numerical Mathematics*, 24:49–51, 1975.

[DGKF1989] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, et B. A. Francis. State space solutions to H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–847, Août 1989.

[dL1989] Ph. de Larminat. La commande robuste un tour d'horizon. Dans *Journées nationales du G.R. Automatique*, Biarritz-France, 1989.

[Doy1978] J. C. Doyle. Guaranteed margins for LQG regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(8):756–757, Août 1978.

[Doy1982] J. C. Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEE, Proc., Pt. D,*, 129(6):242–250, Novembre 1982.

[dPSMF1997] E. C. de Paiva, R. Santos-Mendes, et P. A. V. Ferreira. A constrained optimization approach for robust pole placement. Dans *European Control Conference ECC'97*, volume 6(B), Bruxelles, Belgique, 1997.

[DR1970] E. J. Davison et N. Ramesh. A note on the eigenvalues of a real matrix. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16:252–253, Avril 1970.

[Dua1992] G. R. Duan. Simple algorithm for robust pole assignment in linear output feedback. *IEE Proceedings Pt D*, 139(5):465–469, Septembre 1992.

[Dua1993] Guang-Ren Duan. Robust eingenstructure assignement via dynamical compensators. *Automatica*, 29:469–474, 1993.

[Duc1994] G. Duc. Robustesse des systèmes linéaires multivariables. Technical Report 03317/..ª1994, Ecole Supérieure d'électricité, 1994.

[FHZ1984] B. A. Francis, J. W. Helton, et G. Zames. H_∞-optimal feedack controllers for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29:888–900, 1984.

[FK1987] K. Furuta et S. B. Kim. Pole assignment in a specified disk. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(5):423–427, Mai 1987.

[FKKN1985] L. R. Fletcher, J. Kautsky, G. K. G. Kolka, et N. K. Nichols. Some necessary and sufficient conditions for eigenstructure assignment. *International Journal of Control*, 42(6):1457–1468, 1985.

[FO1982] M. M. Fahmy et J. O'Reilly. On eigenstructure assignment in linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(3):690–693, 1982.

[FTD1991] M. K. H. Fan, A. L. Tits, et J. C. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(1):25–38, Janvier 1991.

[GA1994] P. Gahinet et P. Apkarian. A LMI approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Non-linear Control*, 4:421–448, 1994.

[Gar1997] J. D. Gardiner. Computation of stability bounds for state-space models with structured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(2):253–256, Février 1997.

[GB1990] L. El Ghaoui et S. Boyd. Stability robustness determination of linear systems to real parametric perturbations. Dans *29th Conference on Decision and Control*, pages 46–51, Honolulu, HI, USA, 1990.

[GB1995] G. Garcia et J. Bernussou. Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1):184–190, Janvier 1995.

[GBA1993] G. Garcia, J. Bernussou, et D. Arzelier. Robust stabilization of discrete-time linear systems with norm bounded time varying uncertainty. *Systems and Control Letters*, 1993.

[GBA1994] G. Garcia, J. Bernussou, et D. Arzelier. Robust stabilization of discrete-time linear systems with norm-bounded time varying uncertainy. *Systems and Control Letters*, Vol 22:327–339, 1994.

[GBDA1997] G. Garcia, J. Bernussou, J. Daafouz, et D. Arzelier. Robust quadratic stabilization. *Chapitre 5 dans Robust Flight Control : A design challenge, LNCIS 224, Springer-Verlag*, 1997.

[GBO1997] J. C. Geromel, J. Bernussou, et M.C. Olivieira. H_2 norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers : decentralized and reliable control. *accepté à IEEE Tran. on Auto. Cont.*, 1997.

[GDB1996] G. Garcia, J. Daafouz, et J. Bernussou. Ouput feedback disk pole assignment for systems with positive real uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(9):1385–1391, Septembre 1996.

[GJ1981] S. Gutman et E. I. Jury. A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4):853–863, Août 1981.

[GNLC1995] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, et M. Chilali. *LMI control toolbox*. The MathWorks, Inc., 1995.

[GPS1992] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, et P. L. D. Souza. H_2 guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. *Systems and Control Letters*, 19, 1992.

[Gra1990] A. Grace. *Optimisation toolbox: user's guide*. The MathWorks, Inc., 1990.

[Gut1979] S. Gutman. Root clustering of a real matrix in an algebraic region. *International Journal of Control*, 29(5):871–880, 1979.

[HB1991] W. M. Haddad et D. S. Bernstein. Robust stabilization with positive real uncertainty : beyond the small gain theorem. *Systems and Control Letters*, 14:13–24, 1991.

[HB1993] W. M. Haddad et D. S. Bernstein. Explicit construction of quadratic lyapuonv functions for the small gain, positivity, circle and Popov theorems and their application to robust stability. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13:331–339, 1993.

[HJ1991] R. A. Horn et C. R. Johnson. *Topics in matrix analysis*. Cambridge University Press, 1991.

[HO1987] P. Hippe et J. O'Reilly. Parametric compensator design. *International Journal of Control*, 45(4):1455–1468, 1987.

[**Hol1975**] J. H. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Univ of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

[**HP1986a**] D. Hinrichsen et A. J. Pritchard. Stability radii of linear systems. *Systems & Control Letters*, 7(1):1–10, Février 1986.

[**HP1986b**] D. Hinrichsen et A. J. Pritchard. Stability radius for structured perturbations and the algebraic riccati equation. *Systems & Control Letters*, 8(2):105–113, Décembre 1986.

[**HP1997**] M. Hou et A. C. Pugh. An explicit solution to eigenstructure assignment. Dans *European Control Conference ECC'97*, volume 6, Bruxelles, Belgium, Juillet 1997.

[**Hur1895**] A. Hurwitz. Über die bedingungen, unter welchem eine gleichung nur wurzeln mit negativen relen teilen besitzt. *Math. Ann.*, 46:273–284, 1895.

[**JA1974**] E. I. Jury et S. M. Ahn. Remarks on the root-clustering of a polynomial in a certain region of the complex plane. *Quart. Appl. Math.*, pages 203–205, Juillet 1974.

[**JHW1989a**] Y. T. Juang, Z. C. Hong, et Y. T. Wang. Lyapunov approach to robust pole assignment analysis. *International Journal of Control*, 49:921–927, 1989.

[**JHW1989b**] Y. T. Juang, Z. C. Hong, et Y. T. Wang. Robustness of pole-assignment in a specified region. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(7):758–760, Juillet 1989.

[**Jur1971**] E. I. Jury. Ineers, approach to some problems of system theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16:233–240, Juin 1971.

[**Jur1974**] E. I. Jury. *Inners and stability of dynamic systems*. Wiley-New York, 1974.

[**Kal1960**] R. E. Kalman. On the theory of control systems. Dans *Premier Congrès international IFAC*, Moscou, URSS, 1960.

[**Kal1969**] R. E. Kalman. Algebraic characterization of polynomial whose zeros lie in a certain algebraic domain. *Actes de la National Acad. Sci.*, 64:818–823, Mai 1969.

[**KAS1992**] H. Kiendl, J. Adamy, et P. Stelzner. Vector norms as Lyapunov functions for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):839–842, Juin 1992.

[**KB1997**] L. H. Keel et S. P. Bhattacharyya. Robust, fragile or optimal ? Dans *American Control Conference ACC'97*, pages 1307–1313, Albuquerque, New Mexico, USA, Juin 1997.

[**KBH1988**] L. H. Keel, S. P. Bhattacharyya, et JO. W. Howze. Robust control with structured perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(1):68–78, Janvier 1988.

[KFA1969] R. E. Kalman, P. L. Falb, et M. Arbib. *Topics in mathematical system theory*. McGraw-Hill-New York, 1969.

[Kha1978] V. L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differentsial'nye Uravnenya*, 14:2086–2088, 1978.

[Kim1975] H. Kimura. Pole assignment by gain output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 509–516, 1975.

[KK1997] F. Kraus et V. Kucera. Robust assignment of polynomial matrix polytopes. Dans *European Control Conference ECC'97*, volume 3, Bruxelles, Belgique, Juillet 1997.

[KND1985] J. Kautsky, N. K. Nichols, et P. Van Dooren. Robust pole assignment in linear state feedback. *International Journal of Control*, 41(5):1129–1155, 1985.

[KPZ1990] P. Khargonekar, I. R. Petersen, et K. Zhou. Robust stabilization of uncertain linear systems : Quadratic stabilizability and h_∞ control theory. *IEEE Tran. on Auto. Cont.*, Vol 35:356–361, 1990.

[Lan1969] P. Lancaster. *Theory of matrices*. New York : Academic, 1969.

[Lan1993] I.D. Landau. *Identification et commande des procédés*. Editions Hermes - Deuxième édition, 1993.

[LBW1996] J. S. Luo, P. P. J. Van Den Bosch, et S. Weiland. New sufficient condition for robust root clustering of linear state space models with structured uncertainty. *IEE Proceedings on Control Theory Applications*, 143(3):244–246, Mai 1996.

[Lew1992] F. L. Lewis. *Applied optimal control and estimation - Digital design and implementation*. Prentice Hall and Digital Signal Processing Series - Texas Instruments, 1992.

[LJB1993] J. S. Luo, A. Johnson, et P. P. J. Van Den Bosch. New Lyapunov robustness bounds for pole assignment in a specified region. Dans *IFAC World Congress*, volume 2, pages 495–498, Sydney Australia, Juillet 1993.

[LJB1995] J. S. Luo, A. Johnson, et P. P. J. Van Den Bosch. Lyapunov stability robust analysis and robustness design for linear continuous-time systems. *International Journal of Control*, 61(6):1233–1251, 1995.

[Lju1986] L. L. Ljung. *System identification - Theory for the user*. Prentice Hall, 1986.

[LP1996] G. P. Liu et R. J. Patton. Robust control design using eigenstructure assignment and multi-objective optimization. *International Journal of Systems Science*, 27(9):871–879, 1996.

[LP1998] G. P. Liu et R. J. Patton. Robust control design based on parametric eigenvalue assignment. *International Journal of Systems Science*, 29(1):65–74, 1998.

[LT1997] J. Lam et H. K. Tam. Regional pole placement with eigenstructure robustness. *International Journal of Systems Science*, 28(5):507–515, 1997.

[Lue1964] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Miltary Electr.*, 8:74–80, 1964.

[Lue1966] D. G. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11:190–197, Avril 1966.

[Lya1892] A. Lyapunov. *Problème général de la stabilité du mouvement.* Annales de la Faculté de Sciences de Toulouse, 1907, traduit de l'ouvrage original, Kharkov, 1892.

[Mag1987] J. F. Magni. Commande modale des systèmes multivariables. Thèse de doctorat es sciences, Université Paul Sabatier, Toulouse-France, 1987.

[MGC1997] J. F. Magni, Y. Le Gorrec, et C. Chiappa. Multi modal control. Rapport technique, ONERA-CERT, DERA, Toulouse-France, 1997.

[MLS1994] Z. Michalewicz, T. D. Logan, et S. Swaminathan. Evolutionary operators for continuous convex parameter spaces. Dans *Proc. of the 3rd Annual Conf. on Evolutionary Programming*, 1994.

[Moo1976] B. C. Moore. On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21:689–692, 1976.

[Nic1987] N. K. Nichols. Robustness in partial pole assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-32(8):727–732, Août 1987.

[Oga1990] K. Ogata. *Modern control engineering - Deuxième édition.* Prentice Hall International Editions, 1990.

[O'R1983] J. O'Reilly. *Observers For Linear Systems.* Academic Press, Londres, 1983.

[Ous1994] A. Oustaloup. *La robustesse - Analyse et synthèse de commandes robustes.* Editions Hermes, 1994.

[Ous1995] A. Oustaloup. *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications.* Editions HERMES, 1995.

[Pet1987] I. R. Petersen. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Systems and Control Letters*, 8:351–357, 1987.

[PL1994] R. J. Patton et G. P. Liu. Robust control design via eigenstructure assignment, genetic algorithms and gradient-based optimisation. *IEE Proceedings on Control Theory Applications*, 141(3):202–208, Mai 1994.

[PT1980] R. V. Patel et M. Toda. Quantitative measures of robustness for multivariable systems. Dans *Joint Automatic Control Conference*, 1980.

[RO1987] G. Roppenecker et J. O'Reilly. Parametric output feedback controller design. Dans *Proceedings of the 10th. IFAC World Congress*, pages 275–280, Munich-Germany, 1987.

[RO1989] G. Roppenecker et J. O'Reilly. Parametric ouptut feedback controller design. *Automatica*, 25(2):259–265, 1989.

[Rop1983] G. Roppenecker. Minimum norm output feedback design under specified eigenvalues areas. *Systems and Control Letters*, 3:101–103, Juillet 1983.

[Rou1877] E. J. Routh. *Stability of a given state of motion.* Taylor & Francis - Londres, 1877.

[SA1977] M. G. Safonov et M. Athans. Gain and phase margin for multiloop LQG regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(2):173–179, Avril 1977.

[SADG1997] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato, et K. Grigoriadis. Static output feedback - a survey. *Automatica*, 33(2):125–137, 1997.

[Saf1982] M. G. Safonov. Stability margins for diagonally perturbed multivariable feedback systems. *IEE, Proc., Pt. D.*, 129:251–256, Novembre 1982.

[SL1993] V. L. Syrmos et F. L. Lewis. Output feedback eigenstructure assignment using two sylvester equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(3):495–499, Mars 1993.

[SM1997] M. T. Söylemez et N. Munro. Robust pole assignment in uncertain systems. *IEE Proceedings on Control Theory Applications*, 144(3):217–224, Mai 1997.

[SMN1990] M. Sampei, T. Mita, et N. Nakamichi. An algebraic approach to H_∞ output feedack control problems. *Systems and Control Letters*, 14:13–24, 1990.

[SRFG1998] G. Schreier, J. Ragot, P. M. Franck, et G. L. Gissinger. Bounds of parameter uncertainties for robust stability of linear uncertain systems. *International Journal of Systems Science*, 29(1):85–90, 1998.

[Str1975] T. Ström. On logarithmic norms. *SIAM J. Numer. Anal.*, 12(5):741–753, Octobre 1975.

[Sté1900] C. Stéphanos. Sur une extension du calcul des substitutions linéaires. *Journal des Mathématiques Pures Appliquées*, 6:73–128, 1900.

[Tru1997] N. F. Trubitsyn. Synthesis of the characteristic polynomial of a linear system. *Journal of Computer and Systems Sciences International,* Traduction anglaise officielle de Izvestiya Akademika Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya, 36(1):21–24, 1997.

[TV1990] A. Tesi et A. Vicino. Robust stability of state-space models with structured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(2):191–195, Février 1990.

[Vid1978] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis.* Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.

[WL1992] S. S. Wang et W. G. Lin. On the analysis of eigenvalue assignment robustness. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(10):1561–1564, Octobre 1992.

[Won1985] W. M. Wonham. *Linear multivariable control: a geometric approach.* Springer-Verlag, New York, 3ème édition, 1985.

[Yed1985] R. K. Yedavalli. Improved mesures of stability robustness for linear state space models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(6):577–579, Juin 1985.

[Yed1993a] R. K. Yedavalli. Flight control application of new stability robustness bounds for linear uncertain systems. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 16(6):1032–1037, Novembre-Décembre 1993.

[Yed1993b] R. K. Yedavalli. Robust root clustering for linear uncertain systems using generalized Lyapunov theory. *Automatica*, 29(1):237–240, Janvier 1993.

[YH1986] O. Yaniv et I. Horowitz. A quantitative design method for mimo linear feedback systems having uncertain plants. *International Journal of Control*, 43:401–421, 1986.

[YL1986] R. K. Yedavalli et Z. Liang. Reduced conservatism in stability robustness bounds by state transformation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(9):863–866, Septembre 1986.

[Zam1981] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2):301–320, Avril 1981.

[ZK1987] K. Zhou et P. P. Khargonekar. Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(7):621–623, Juillet 1987.