
UNIVERSITÉ DE POITIERS

LABORATOIRE D'AUTOMATIQUE ET D'INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

HABILITATION À DIRIGER LES RECHERCHES

spécialité

Automatique

présentée à

L'ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS DE POITIERS

par

Olivier BACHELIER

Ingénieur et docteur de
l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Toulouse
Maître de conférences à l'Institut Universitaire de Technologie de Poitiers

Placement de pôles et \mathcal{D} -stabilité robuste : approche temporelle

Soutenue à l'ESIP le 12 mars 2009

JURY

Président du jury :	B. PRADIN	Professeur des universités INSA de Toulouse
Rapporteurs :	J.-F. LAFAY	Professeur des universités Ecole Centrale de Nantes
	J. RAGOT	Professeur des universités ENSG (INP de Lorraine)
	F. TADEO RICO	Professeur Université de Valladolid
Examineur :	J. DAAFOUZ	Professeur des universités ENSEM (INP de Lorraine)
Directeur de recherche :	D. MEHDI	Professeur des universités IUT de Poitiers

*À ma chère Fatiha ;
À mon amour de petite Lily ;
À mes parents ;
À mon frère (pour qui le placement de pôles n'a pas plus de secret qu'à l'épisode précédent),
ma belle sœur, et leurs deux « adorables monstres ».*

Avant-propos

Ce mémoire présente des travaux qui ont été effectués en grande majorité au Laboratoire d'automatique et d'informatique industrielle (LAI) de Poitiers, équipe d'accueil au sein de l'École supérieure d'ingénieurs de Poitiers (ESIP), elle-même entité de l'Université de Poitiers. Je tiens donc à remercier Gérard Champenois, directeur du LAI, d'avoir mis à ma disposition les moyens matériels nécessaires au bon déroulement de mon activité de recherche. Je lui sais également gré de sa promptitude à résoudre de nombreux petits soucis quotidiens du laboratoire, sans ménager sa peine, contribuant en cela à une ambiance agréable.

Je remercie vivement les rapporteurs de ce travail, à savoir :

- M. Jean-François Lafay, professeur à l'École centrale de Nantes, chercheur à l'Institut de recherche en communications et en cybernétique de Nantes (IRCCyN) ;
- M. José Ragot, professeur à l'École nationale supérieure de géologie (ENSG) de l'Institut national polytechnique de Lorraine (INPL) et chercheur au Centre de recherche en automatique de Nancy (CRAN) du CNRS ;
- M. Fernando Tadeo, professeur à l'Université de Valladolid en Espagne, qui accepte de franchir quelques obstacles linguistiques en lisant ce mémoire rédigé en Français.

Je comprends que la tâche qui leur est proposée est fastidieuse et je les remercie de l'accepter.

J'exprime bien sûr également ma reconnaissance aux autres membres du Jury :

- Driss Mehdi, professeur à l'IUT de Poitiers, qui, depuis mon recrutement au LAI, est pour moi un « chef amical », un collaborateur privilégié, et qui m'a convaincu de passer cette habilitation à diriger les recherches. Je le remercie de ces quelques années de recherche commune, de la sympathie et du soutien quotidiens dont il fait preuve à mon égard ;
- Jamal Daafouz, professeur à l'École supérieure d'électricité et de mécanique (ENSEM) de l'Institut national polytechnique de Lorraine (INPL) et chercheur au Centre de recherche en automatique de Nancy (CRAN) du CNRS, mon « major de promo », un ami qui saura me montrer du doigt les nombreuses sottises contenues dans ce rapport et que je remercie de remplir cette longue et ennuyeuse mission ;
- Bernard Pradin, professeur émérite à l'Institut national des sciences appliquées (INSA) de Toulouse, à qui je dois tant que je lui consacre l'exclusivité du prochain paragraphe...

En effet, j'éprouve une profonde gratitude envers lui. Il a su par ses cours d'Automatique à l'INSA, me donner le goût de cette discipline à laquelle j'occupe maintenant une grande partie mon temps. J'avais opté pour le département de génie électrique et plus précisément la spécialité

Automatique-Électronique-Informatique, avec l'intention (sans doute pas assez ferme) de faire de l'électrotechnique, ce qui peut aujourd'hui faire sourire, si ce n'est franchement rire, mes collègues du LAII. Mais il était dit que je découvrirais l'automatique au travers de cours plaisants et d'un « polycopié » que je conserve toujours précieusement. L'on dit que les générations insaisissables appellent ces notes de cours « le polycop de Garcia », démontrant ainsi toute leur inculture. Sans rien enlever aux qualités didactiques avérées de Germain Garcia, franchement, je le crie haut et fort : « Quelle hérésie ! ». Il fut une époque où l'on finissait au bâcher pour moins que cela. Bien sûr, je devrais reprocher à Bernard Pradin d'être à l'origine de ma grave addiction pour la \mathcal{D} -stabilité robuste. Toutefois, comme toute personne dépendante, je ne peux en avoir pleinement conscience que lors de rares moments de lucidité (telle cette phrase, unique exemple du mémoire). Bernard Pradin s'est vu confier la douloureuse charge d'encadrer mon stage de DEA et ma thèse, ce qui, je crois, l'a vacciné de l'encadrement. Qu'il soit aujourd'hui grandement remercié de juger à nouveau le travail du dernier docteur qu'il a formé.

Il serait bien ingrat de ne pas remercier *tous* les collègues du LAII et de l'IUT de Poitiers. Je ne peux les citer tous sans risque de commettre un irréparable oubli. Mentions spéciales néanmoins à quelques uns d'entre eux (les autres, ne vous vexez pas !) :

- Jean-Denis Gabano qui a su, par son sens didactique, presque me transformer en enseignant d'électronique (ce n'était pas gagné !)
- Thierry Poinot, pour l'encourager dans la rééducation de sa cheville ;
- Régis Ouvrard, mon pourvoyeur de presse mensuelle ;
- Guillaume Mercère qui m'épuise en m'obligeant à courir deux fois par semaine ;
- Erik Etien, chanteur invétéré, partenaire de bureau, qui contribue à mon épanouissement culturel et artistique d'une façon qui ne peut s'appréhender qu'en visitant notre bureau.

Je n'oublie pas Sébastien, Patrick, Patrice, Slim, Jean-Paul, Nezha, Jean-Claude, Sandrine, Claude 1, Claude 2, Laurent 1, Laurent 2, Frédéric, Benoît, Afzal, Pascal, Antoine, Marlène, Stéphanie, Pierre, Jean-Michel, ... et tous les étudiants que j'ai pu cotoyer durant ces quelques années au LAII. Je remercie particulièrement les doctorants que j'ai co-encadrés ou co-encadre encore avec Driss Mehdi :

- Jérôme Bosche, aujourd'hui docteur, maître de conférences et champion de canicross avec Uzo, qui m'a fait croire jusqu'à la fin qu'encadrer une thèse était facile ;
- Ouiem Rejjichi, qui s'attache actuellement avec ardeur et conviction à la rédaction de son mémoire de thèse et à laquelle j'adresse tous mes encouragements ;
- Bilal Sari, toujours volontaire, que je prie de m'excuser de lui avoir confié un sujet aussi difficile, mais qui s'en sort très bien quand même.

Il serait enfin très cruel d'oublier, dans ces remerciements, ma famille et en particulier celles qui supportent au quotidien ma mauvaise humeur et qui tolèrent que mon esprit s'évade, de temps à autre, sans crier gare, du foyer familial vers une région non connexe du plan de Laplace. Je veux bien sûr parler de ma chère épouse Fatiha et de notre petite Lily dont la tendance à faire de mes articles des brouillons sur lesquels elle s'exerce à dessiner un petit personnage de dessin animé répondant au sobriquet étrange de « Caillou » a pu retarder quelque peu mon activité. Le lecteur de ce rapport aura matière à juger du bien fondé de l'utilisation que fait notre fille de ce que j'écris.

Sommaire

Avant-propos	i
Sommaire	iv
Notations	v
Sigles utilisés	vii
Introduction générale	1
I ANALYSE DE LA LOCALISATION D'UN SPECTRE	7
1 Analyse nominale	9
2 Analyse robuste	41
II PLACEMENT D'UN SPECTRE	75
3 Placement nominal	77
4 Placement robuste	115
Conclusion générale	141

Annexes : travaux connexes	147
A Systèmes multidimensionnels : une version n-D du lemme KYP	149
B \mathcal{D}-admissibilité des systèmes implicites	175
C Un théorème utile	205
Références bibliographiques	217
Curriculum vitæ détaillé	241
Table des matières	280

Notations

Nous présentons ici une liste non exhaustive de notations utilisées dans ce rapport.

\mathbb{R}	Corps des nombres réels
\mathbb{R}^+	Ensemble des nombres réels strictement positifs
\mathbb{R}^n	Espace des vecteurs réels de dimension n
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Espace des matrices réelles de dimension de $m \times n$
\mathbb{C}	Corps des nombres complexes
\mathbb{C}^-	Sous-ensemble des nombres complexes associé au demi-plan gauche ouvert
\mathbb{C}^+	Sous-ensemble des nombres complexes associé au demi-plan droit ouvert
\mathbb{C}^n	Espace des vecteurs complexes de dimension n
$\mathbb{C}^{m \times n}$	Espace des matrices complexes de dimension de $m \times n$
\mathbf{D}	Disque unitaire
\mathfrak{c}	Cercle unitaire
\mathcal{J}	Axe imaginaire
\mathbf{i}	Unité imaginaire
0	Zéro ou toute matrice nulle de dimension appropriée
I_n	Matrice Identité d'ordre n
I	Matrice Identité d'ordre approprié
\tilde{I}_x^y	Matrice carrée d'ordre x dont toutes les composantes sont nulles... ... sauf la composante (y, y) égale à 1
$\ M\ _\bullet$	Norme \bullet de la matrice M
$\bar{\sigma}(M)$	Valeur singulière maximale de la matrice M égale à $\ M\ _2$ (norme euclidienne induite)
M'	Transposée conjuguée de la matrice M
M^H	Matrice hermitienne définie par $M + M'$
\bar{M}	Conjuguée de la matrice M
M^{-1}	Inverse de la matrice carrée M
M^+	Pseudo-inverse de la matrice M (ex : pseudo-inverse de Moore-Penrose)
$\lambda(A)$	Spectre de la matrice carrée A
$\text{tr}(A)$	Trace de la matrice carrée A
$A \otimes B$	Produit matriciel (ou tensoriel) de Kronecker des matrices A et B [190]
$\text{Rang}(M)$	Rang de la matrice M
$\text{Im}(M)$	Sous-espace engendré par les colonnes de M
$\text{Ker}(M)$	Noyau du sous-espace engendré par les colonnes de M et par extension (abusive ?)... ... la matrice dont les colonnes engendrent ce noyau, également notée M_\perp
M_\perp	Matrice telle que $\text{Im}(M_\perp) = \text{Ker}(M)$

\mathcal{A}/\mathcal{B}	Ensemble \mathcal{A} privé des éléments de \mathcal{B}
\mathcal{A}^*	Ensemble \mathcal{A} privé de l'élément absorbant de la multiplication
$\overline{\mathcal{A}}$	Fermeture de l'ouvert \mathcal{A}
$A \oplus B$	Matrice bloc-diagonale définie par $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$
$\bigoplus_{i=1}^k M_i$	Matrice bloc-diagonale définie par $\text{diag}_{i=1, \dots, k} \{M_i\}$
$\mathcal{H}(A, d, \nu)$	Matrice définie par $\begin{bmatrix} I \\ I_d \otimes A \\ I_d \otimes A^2 \\ \vdots \\ I_d \otimes A^\nu \end{bmatrix}$

Sigles utilisés

Nous présentons une liste de sigles utilisés dans ce rapport.

LTI	<i>Linear time-invariant</i> (linéaire invariant dans le temps)
CS	Condition suffisante
CNS	Condition nécessaire et suffisante
LMI	<i>Linear matrix inequality</i> (inégalité matricielle linéaire)
BMI	<i>Bilinear matrix inequality</i> (inégalité matricielle bilinéaire)
EMI	<i>Ellipsoidal matrix inequality</i> (inégalité matricielle ellipsoïdale)
GLMI	<i>Generalized linear matrix inequality</i> (inégalité matricielle linéaire généralisée)
E ² MI	<i>Extended ellipsoidal matrix inequality</i> (inégalité matricielle ellipsoïdale étendue)
CMI	<i>Combined matrix inequality</i> (inégalité matricielle combinée)
ECMI	<i>Extended combined matrix inequality</i> (inégalité matricielle combinée étendue)
PMI	<i>Polynomial matrix inequality</i> (inégalité matricielle polynomiale)
PMI/R	<i>Polynomial matrix inequality/real</i> (inégalité matricielle polynomiale/réelle)
PMI/P	<i>Polynomial matrix inequality/positive</i> (inégalité matricielle polynomiale/positive)
PMI/RP	<i>Polynomial matrix inequality/real positive</i> (inégalité matricielle polynomiale/réelle positive)
GLE	<i>Generalized Lyapunov equation</i> (équation de Lyapunov généralisée)
LFT	<i>Linear fractional transform</i> (transformation fractionnaire linéaire)

Introduction générale

Contexte

L'automatique peut partiellement se définir comme une discipline s'intéressant à des problèmes d'interaction entre les procédés (généralement physiques, industriels quoique pouvant s'étendre aux domaines biologique, économique, financier) et l'environnement dans lequel ils doivent évoluer. L'on désigne un tel procédé par *système en boucle ouverte*. L'automatique vise, entre autres objectifs, la compréhension des phénomènes caractérisant le comportement des systèmes. Ceci requiert bien souvent la description mathématique de ces phénomènes. En outre, un autre objectif éventuel consiste en la maîtrise du comportement du système par l'action d'un autre système agissant sur le procédé, conçu spécialement à cet effet, conformément à un modèle mathématique calculé au préalable. L'association de ces deux systèmes en interaction constitue un *système bouclé* ou *système en boucle fermée* et doit généralement fonctionner sans l'intervention humaine. Du clepsydre de Ktesybios (160 av. JC) [161] aux techniques les plus actuelles de l'automatique, en passant par la rétroaction mécanique intelligente mais « technologique » de James Watt et sa turbine à vapeur (1788, [301, 265, 43, 44]) et par la première rétroaction « formalisée » de Black en électronique [48], bien de l'eau a coulé sous les ponts de l'automatique. Cette eau forme aujourd'hui un océan de techniques et d'outils plus ou moins théoriques et formels qui permettent de voir la fusée Ariane s'envoler verticalement malgré quelques caprices du vent, serein et majestueux pendule inversé. Ce rapport n'a qu'une ambition : grossir l'océan d'une petite goutte et ne surtout pas contribuer à faire tomber, même virtuellement, la fusée.

La vision de l'automatique présentée ci-dessus suggère trois phases lors de la mise en œuvre d'un système bouclé. La première est la *modélisation* qui consiste à traduire le comportement d'un système en termes de modèle, généralement mathématique, afin de pouvoir étudier le procédé de façon indirecte, sans même l'utiliser. Cette phase conduit entre autres à mettre en évidence les actions de l'environnement sur le système (les *entrées* : *commandes* maîtrisées et *perturbations* non souhaitées) ainsi que les réponses du système à ces sollicitations (les *sorties*). Un modèle peut être issu d'expérimentations menées sur le système (*identification*) ou de l'utilisation des lois de la physique (ou de tout autre domaine concerné).

La seconde étape est l'*analyse*. Elle utilise le modèle mathématique pour apprécier les diverses propriétés du système et répondre à la question fatidique : « dans quelle mesure le procédé satisfait-il aux exigences des utilisateurs ? ». Pour ce faire, il faut généralement recourir à un

éventail d'outils théoriques. Il est à noter que l'analyse se pratique aussi bien sur le système en boucle ouverte que sur le système en boucle fermée.

Si les propriétés du système en boucle ouverte ne sont pas satisfaisantes, il convient donc de procéder à la modification de ces dernières en construisant le second système (appelé *correcteur* ou *compensateur*) qui agit par rétroaction sur le procédé. Ce correcteur est généralement la concrétisation tangible d'un modèle mathématique appelé *loi de commande*, lui-même déduit du modèle du procédé. Cette phase est appelée *commande*.

Les trois phases (modélisation, analyse, commande) représentent trois aspects fondamentaux de l'automatique.

Il n'existe pas, de manière tranchée, de bons systèmes bouclés dès lors que tout dépend de la satisfaction subjective que donne ce dernier au regard des propriétés escomptées, souvent utopiques. Cependant, parmi ces propriétés, il en existe une essentielle : la *stabilité asymptotique*. Elle traduit l'aptitude d'un système à rejoindre une position d'équilibre lorsqu'il en est écarté. De façon moins rigoureuse et plus pratique, elle correspond souvent à la capacité d'un système à conserver des sorties bornées lorsque ses entrées le sont. L'on comprend l'importance d'une telle propriété en termes de sécurité des utilisateurs et de pérennité du matériel. S'il n'existe pas forcément de bons systèmes, un système instable peut être qualifié de mauvais.

D'autres performances, moins impératives mais plus sophistiquées, peuvent être requises : un meilleur rendement, une moindre consommation (considérations économiques, écologiques), un bon rejet des perturbations exogènes, un suivi de consigne précis, un comportement dynamique (transitoire) acceptable en termes de rapidité, d'oscillation, etc.

La compréhension des diverses performances et la recherche de ces dernières se concrétise au travers des trois phases de modélisation, analyse et commande. Ces étapes sont parfois envisagées de manière un peu trop dissociée. En particulier, si la loi de commande ne tient pas compte des problèmes inhérents à la modélisation, l'automaticien s'expose à voir cette loi (pour-tant validée numériquement sur le modèle du procédé) engendrer de bien piètres performances en boucle fermée. La raison en est simple : le modèle du procédé n'est qu'une image de son comportement réel, image qui comporte un certain degré d'inexactitude. Dans certains cas, la moindre approximation dans le modèle induit une sérieuse dégradation des performances voire l'instabilité. Jusqu'à la fin des années 1970, l'on ne voyait dans ces cas de figure que le sempiternel fossé entre théorie et pratique. C'est à cette époque que le fossé a commencé d'être comblé : la théorie s'est fort judicieusement emparée du problème en introduisant la notion d'*incertitude* de modèle. Les différentes phases de la conception automatique doivent prendre en compte cette incertitude. L'on parle en premier lieu de *modélisation incertaine*. Le modèle est exprimé avec son incertitude. Il y a donc un modèle nominal et un modèle d'incertitude (plus ou moins structuré). Il faut être capable d'estimer les performances d'un système malgré la présence d'une incertitude, ce qui amène le concept de *robustesse*. La robustesse d'un système se définit, en automatique, par la relative invariance de ses propriétés vis-à-vis d'une incertitude de modèle. L'analyse de ces propriétés dans le cadre de la robustesse est dite, par abus de langage, *analyse robuste*. Enfin, la loi de commande doit tenir compte de l'incertitude pour conférer au système bouclé des *performances robustes*. Le même abus de langage conduit au vocable *commande robuste*.

Motivations

Le contexte est maintenant affiné pour en venir aux motivations précises de ce rapport.

Les seuls modèles qui sont considérés ici sont des modèles *linéaires invariants dans le temps* (en anglais, *linear time-invariant* : LTI). Bien que les modèles issus d'une modélisation rigoureuse soient le plus souvent non linéaires, il est classique de recourir à une approximation linéaire (*linéarisation*) autour de points de fonctionnement. Les systèmes multivariables (à plusieurs commandes et plusieurs sorties) sont envisagés. Le modèle mathématique retenu est la *représentation d'état linéaire* donc l'approche temporelle, à l'opposé de l'approche fréquentielle, est privilégiée. Ces modèles sont indifféremment à temps continu ou à temps discret, mais toujours à état continu.

De même, les seules performances étudiées sont les performances transitoires. Or, il est bien connu que ces dernières sont très étroitement liées à localisation des valeurs propres de la matrice d'évolution A dans le plan complexe. Ainsi, par exemple, un système à temps continu est asymptotiquement stable si et seulement si le spectre de A est contenu dans le demi-plan complexe gauche ouvert (stabilité au sens de Hurwitz); un système à temps discret est asymptotiquement stable si et seulement si le spectre de A est contenu dans le disque unitaire ouvert (stabilité au sens de Schur). Pour tenter d'estimer les performances transitoires, il convient de vérifier l'appartenance du spectre de A à une région plus sophistiquée \mathcal{D} du plan complexe. L'on parle alors de \mathcal{D} -stabilité de A et c'est cette propriété qui est étudiée tout au long du rapport. De nombreuses régions sont envisagées. L'on note que le problème considéré devient matriciel et qu'à ce titre, il est inutile de distinguer le cas discret du cas continu. Seul le choix de la région permet de faire cette distinction. L'un des buts de ce travail est d'offrir un vaste choix de régions pour permettre une analyse élaborée des performances. Une attention particulière et originale est apportée aux régions non connexes qui présentent l'avantage d'affiner le compromis entre spécifications de performances transitoires et robustesse.

Puisque le problème se ramène à la \mathcal{D} -stabilité d'une matrice, l'incertitude considérée ne porte que sur la matrice d'évolution. Il existe quantité de structures plus ou moins compliquées d'incertitude. Dans ce rapport, une incertitude relativement générale est retenue : l'incertitude *polytopique LFT* (*linear fractional transform* c'est-à-dire issue d'une transformation fractionnaire linéaire). Sa description comprend un grand nombre d'incertitudes plus classiques. Elle permet notamment d'associer des incertitudes paramétriques (imprécisions des paramètres impliqués dans le modèle) et des incertitudes non structurées (issues de la linéarisation, des dynamiques négligées, d'une implantation imprécise du correcteur, etc.). Il s'agit alors d'analyser la \mathcal{D} -stabilité robuste de la matrice d'état incertaine vis-à-vis d'une incertitude polytopique LFT. Le concept de bornes de \mathcal{D} -stabilité robuste est notamment employé.

Comme il est question de localisation du spectre de la matrice dynamique (c'est-à-dire les *pôles* du système), les aspects de commande sont envisagés sous l'angle du *placement de pôles*. Les seules structures de loi de commande retenues sont statiques, à savoir le *retour statique d'état* et le *retour statique de sortie*. Il faut noter que le placement de pôles permet généralement de

résoudre un sous-problème de commande mais constitue rarement la solution à un problème complet de commande, dans la mesure où seules les performances transitoires (incluant la stabilité) sont recherchées. C'est toutefois ce problème qui fait l'objet du présent document.

Le placement de pôles devant induire la \mathcal{D} -stabilité robuste en boucle fermée, il est essentiel de concevoir la loi de commande en ce sens. L'idée proposée dans ce rapport est, grossièrement, de faire évoluer une loi de commande nominale vers une loi de commande plus robuste, et ainsi de tolérer davantage d'incertitude. Cette approche peut être appelée *commande roborante* (voir chapitre 4) dans le sens où elle ne fige pas *a priori* le domaine d'incertitude. Plus précisément et en cohérence avec les objectifs, c'est le *placement roborant de pôles* qui est présenté.

Enfin, concernant les outils utilisés, ils sont à classer selon deux catégories. D'une part, la représentation d'état conduit à exploiter les propriétés de l'algèbre linéaire pour tous les calculs analytiques qui peuvent être rigoureusement effectués. D'autre part, pour ce qui relève des aspects numériques, nombre de problèmes sont exprimés, lorsque ceci se révèle possible, en termes d'*inégalités matricielles linéaires* (LMI en anglais), dont la résolution numérique est aujourd'hui envisageable. Pour les problèmes d'optimisation plus compliqués, des heuristiques de résolution basés sur la notion d'*algorithmes génétiques* sont utilisés.

Structure du mémoire

Conformément aux motivations exposées ci-avant, le rapport se décompose en deux parties comportant chacune deux chapitres :

- La première partie traite de l'analyse.
 - Dans le premier chapitre consacré à l'analyse nominale, de nombreuses régions de cloisonnement des pôles sont présentées. Les régions PMI occupent une part importante de ce catalogue car elle regroupe de nombreuses descriptions rencontrées dans la littérature. Par ailleurs d'autres régions échappant à ce formalisme sont également introduites. Une fois toutes ces formulations possibles de \mathcal{D} données, des conditions de \mathcal{D} -stabilité associées sont proposées en termes de LMI. Les régions non PMI sont traitées au travers du concept de $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice.
 - Dans le second chapitre de cette partie, l'analyse robuste est abordée. L'on y revient sur les concepts d'incertitude, de robustesse, de \mathcal{D} -stabilité (ou de $\partial\mathcal{D}$ -régularité) robuste, quadratique ou poly-quadratique. L'incertitude polytopique LFT est décrite avec ses cas particuliers connus. Différentes conditions LMI de \mathcal{D} -stabilité robuste sont présentées, notamment pour les régions dites E²MI et ECMI. Les conditions étant souvent conservatives, elles sont établies de manière à rester cohérentes, dans leur expression, avec de puissants résultats tels que le lemme borné réel voire le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov, comme le gage d'un pessimisme limité. Ces conditions génèrent des bornes de \mathcal{D} -stabilité robuste ou bornes de robustesse qui apparaissent comme des critères de performances transitoires

robustes.

- La seconde partie traite de la commande donc du placement de pôles.
 - Le troisième chapitre expose essentiellement des techniques de placement de pôles ou plus exactement de *commande modale* c'est-à-dire que l'approche utilisée est basée sur la notion de *structure propre*. Le retour statique de sortie est bien sûr mis en évidence car c'est lui qui amène les principales difficultés. L'accent est en particulier placé sur le cas où la condition de Kimura est vérifiée de manière non stricte (nombre d'entrées + nombre de sorties = ordre du système).
 - Le quatrième et dernier chapitre explique le principe du placement roborant de pôles qui consiste à trouver une loi de commande plaçant les pôles à l'intérieur de \mathcal{D} tout en maximisant une borne de \mathcal{D} -stabilité robuste. Il s'agit donc d'associer les conditions d'analyse robuste du chapitre 2 aux techniques de placement du chapitre 3. La tâche d'optimisation inhérente à cette approche étant particulièrement ardue, une heuristique de résolution s'appuyant sur les algorithmes génétiques est utilisée.

Dans ce rapport, les références bibliographiques en langue française sont le plus souvent privilégiées. Peu d'exemples sont insérés. Seuls quelques uns illustrent des aspects techniques mis en relief. Les démonstrations sont généralement omises et le lecteur est renvoyé aux articles et ouvrages cités. Plus que de réellement servir à démontrer les assertions, les preuves restantes ont pour vocation de concourir à la compréhension des concepts.

Première partie

ANALYSE DE LA LOCALISATION D'UN SPECTRE

CHAPITRE 1

ANALYSE NOMINALE

Ce chapitre traite de la notion de \mathcal{D} -stabilité d'une matrice, que l'on peut traduire en anglais par le vocable « *matrix root-clustering* ». Une matrice est \mathcal{D} -stable si et seulement si toutes ses valeurs propres appartiennent à une région \mathcal{D} du plan complexe. Il importe de disposer de conditions qui puissent assurer d'une telle propriété pour une matrice donnée (en pratique la matrice d'évolution A). Ce chapitre rappelle certaines des conditions existantes. En outre, chaque condition dépendant de la description mathématique de \mathcal{D} , il est nécessaire de faire au préalable un petit tour d'horizon des descriptions utilisées.

Sommaire

1.1	Présentation du problème	11
1.2	Description mathématiques des régions	12
1.2.1	Formulation générale directe : régions PMI	13
1.2.2	Formulation indirecte par les frontières	23
1.3	Conditions de cloisonnement	27
1.3.1	Régions PMI	28
1.3.2	Régions non PMI	34
1.4	Conclusion	40

1.1 Présentation du problème

Comme il a été expliqué dans l'introduction de ce mémoire, l'objectif général est de déterminer des lois de commande qui confèrent aux systèmes linéaires incertains des performances transitoires robustes. Il est bien connu que les pôles d'un système LTI sont prépondérants dans le comportement transitoire de ce dernier. Si ce système est décrit par une représentation d'état, il est donc souvent souhaitable que les valeurs propres de la matrice d'évolution A soient bien localisées dans le plan complexe. Cette relation entre les performances transitoires et le spectre de A est suffisamment bien établie pour qu'il ne soit pas utile d'y revenir ici. Le lecteur peut consulter des ouvrages de référence tels que [277, 135, 211, 116, 136] pour s'en convaincre. Notons toutefois que le spectre de A n'est pas le seul à déterminer le comportement transitoire du système. L'ensemble de la structure propre influe sur ce dernier. Des rapports de thèse tels que [255, 6, 84, 163, 115] (entre autres) peuvent permettre de se faire une idée assez précise de cette influence.

Quoi qu'il en soit, nous nous focalisons ici sur le spectre de A . Pour autant, il n'est pas aisé de traduire explicitement les performances transitoires désirées par un spectre bien précis. Il est souvent plus facile d'envisager un certain niveau d'amortissement ou une certaine rapidité de sorte que les pôles sont espérés non pas en un lieu très précis mais plutôt dans une région du plan complexe correspondant aux performances semblant acceptables.

Ainsi, en considérant qu'une telle région du plan complexe est appelée \mathcal{D} , il s'agit de vérifier la propriété de \mathcal{D} -stabilité de A ainsi définie :

Définition 1.1 Soient une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et une région \mathcal{D} du plan de Laplace. La matrice A est \mathcal{D} -stable si et seulement si

$$\lambda(A) \subset \mathcal{D}. \quad (1.1)$$

Les auteurs anglo-saxons utilisent souvent le vocable de *matrix root-clustering*, ce qui peut se traduire de façon grossière par « cloisonnement » ou « enclouement des racines ». La traduction exacte serait plutôt « regroupement » mais elle donne une image erronée du concept. C'est pourquoi nous lui préférons toutefois l'expression *\mathcal{D} -stabilité*. Lorsque la matrice A est connue, l'on parle de \mathcal{D} -stabilité nominale. Cette propriété fait l'objet de ce chapitre. Lorsque A présente une incertitude, l'on parle plutôt de \mathcal{D} -stabilité robuste, propriété qui sera étudiée au chapitre suivant.

Les problèmes de \mathcal{D} -stabilité pour une région \mathcal{D} autre que \mathbb{C}^- sont apparus en Automatique, entre autres, avec l'étude des systèmes à temps discret [206] et avec les premières questions soulevées par Kalman [213], reprises par Jury et Ahn [209, 207]. Il s'agissait plutôt, le plus souvent, de tester la localisation des racines d'un polynôme. De ce fait, les sources d'inspiration de ces travaux remontaient à Descartes [110] en passant par les critères de stabilité

de Routh, de Hurwitz et de Hermite [316, 194, 195, 178], voire le travail moins connu de Schur [326]. Les premières réflexions sur la \mathcal{D} -stabilité sont des extensions de ces critères. Le fait de raisonner par rapport à des valeurs propres de matrices émane davantage des travaux de Lancaster [234]. Les contributions marquantes de ce changement d'approche à notre sens sont [105, 168, 167, 169, 266] mais aussi les articles moins connus et pourtant fondamentaux [332, 193, 179]. Quoique les raisonnements y figurant soient matriciels, ils peuvent être présentés comme des extensions de la seconde méthode de Lyapunov [252] appliquée aux modèles linéaires. Ce ne sont en fait que des généralisations des fameuses équation et inéquation de Lyapunov. Nous y reviendrons dans la suite de ce chapitre.

Nous nous limitons ici à l'étude de critères matriciels. Ces critères sont très étroitement liés à la formulation choisie pour décrire la région \mathcal{D} . Il n'est pas déraisonnable de prétendre qu'à chaque formulation de \mathcal{D} peut être associée une ou plusieurs CNS de \mathcal{D} -stabilité. C'est dans cet esprit qu'est organisé ce chapitre. Nous envisageons diverses descriptions mathématiques de \mathcal{D} dans la prochaine partie. La troisième partie leur associe des CNS.

1.2 Description mathématiques des régions

La région est une notion géométrique. Il s'agit d'un ensemble quelconque de points d'un espace, en l'occurrence, ici, d'un ensemble de points du plan affine. Chaque point peut être repéré dans un repère cartésien par son abscisse $x \in \mathbb{R}$ et son ordonnée $y \in \mathbb{R}$. Par le plongement de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C} défini par :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ \{x; y\} &\mapsto x + iy, \end{aligned} \tag{1.2}$$

l'on assimile le plan affine au plan complexe et chaque point à son affixe. Les valeurs propres d'une matrice (réelle ou complexe) A étant complexes, l'on peut donc leur faire correspondre un point de ce plan ou réciproquement, à chaque point peut correspondre une valeur propre potentielle. Les automaticiens français parlent alors du plan de Laplace. Dans ce qui suit, la région \mathcal{D} sera donc un sous-ensemble du plan de Laplace c'est-à-dire un ensemble de valeurs possibles de $\{x; y\} \in \mathbb{R}^2$ (description cartésienne) ou $s \in \mathbb{C}$ (description complexe). Les descriptions complexes seront privilégiées.

Plusieurs descriptions possibles de \mathcal{D} sont rappelées ou proposées ci-après. Nous commençons, dans une première sous-partie, par une formulation assez générale qui permet de regrouper un large panel de descriptions rencontrées dans la littérature. Nous en profitons pour en décliner les différentes instances connues et citer quelques contributions associées. Dans cette formulation, \mathcal{D} est décrite par des relations mathématiques directes qui utilisent implicitement la frontière de \mathcal{D} . Dans une seconde sous-partie, une autre formulation de \mathcal{D} est présentée. \mathcal{D} y est décrite explicitement au travers de frontières.

Remarque 1.1 Cette remarque a pour but de faire un point sur le vocabulaire utilisé dans la littérature. Il y est parfois question d' α -stabilité lorsque \mathcal{D} est un demi-plan vertical défini par $x < -\alpha < 0$ ou de \mathcal{S} -stabilité lorsque \mathcal{D} est un secteur symétrique \mathcal{S} ouvert vers la gauche tel que dans [105, 31].

1.2.1 Formulation générale directe : régions PMI

Définition 1.2 Soient les matrices Θ_k , Υ_k et Ψ_k définies par

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} \Theta_{k00} & \Theta_{k01} & \cdots & \Theta_{k0\nu} \\ \Theta'_{k01} & \Theta_{k11} & \cdots & \Theta_{k1\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta'_{k0\nu} & \Theta'_{k1\nu} & \cdots & \Theta_{k\nu\nu} \end{bmatrix} = \Theta'_k \in \mathbb{C}^{d(\nu+1) \times d(\nu+1)}, \quad \Theta_{krt} \in \mathbb{C}^{d \times d}, \quad (1.3)$$

$$\Upsilon_k = \begin{bmatrix} \Upsilon_{k00} & \Upsilon_{k01} & \cdots & \Upsilon_{k0\nu} \\ \Upsilon_{k10} & \Upsilon_{k11} & \cdots & \Upsilon_{k1\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Upsilon_{k\nu0} & \Upsilon_{k\nu1} & \cdots & \Upsilon_{k\nu\nu} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{d(\nu+1) \times d(\nu+1)}, \quad \Upsilon_{krt} \in \mathbb{C}^{d \times d}, \quad (1.4)$$

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} \Psi_{k00} & \Psi_{k01} & \cdots & \Psi_{k0\nu} \\ \Psi_{k10} & \Psi_{k11} & \cdots & \Psi_{k1\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{k\nu0} & \Psi_{k\nu1} & \cdots & \Psi_{k\nu\nu} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{d(\nu+1) \times d(\nu+1)}, \quad \Psi_{krt} \in \mathbb{C}^{d \times d}. \quad (1.5)$$

Toute région $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ définie par

$$\mathcal{D} = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \left(\exists w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{\bar{k}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{\bar{k}} \mid f_{\mathcal{D}}(s, w) < 0, g_{\mathcal{D}}(w) = 0 \right) \right\} \quad (1.6)$$

avec

$$\begin{cases} f_{\mathcal{D}}(s, w) &= \left(\sum_{k=1}^{\bar{k}} \left(w_k \sum_{r=0, t=0}^{r=\nu, t=\nu} (\Theta_{krt} s^r s^t) \right) \right)^H = \mathcal{H}'(s, d, \nu) \left(\sum_{k=1}^{\bar{k}} w_k \Theta_k \right)^H \mathcal{H}(s, d, \nu), \\ g_{\mathcal{D}}(w) &= \sum_{k=1}^{\bar{k}} \left(w_k \sum_{r=0, t=0}^{r=\nu, t=\nu} (\Upsilon_{krt} s^r s^t) + w'_k \sum_{r=0, t=0}^{r=\nu, t=\nu} (\Psi_{krt} s^r s^t) \right) \\ &= \mathcal{H}'(s, d, \nu) \left(\sum_{k=1}^{\bar{k}} (w_k \Upsilon_k + w'_k \Psi_k) \right) \mathcal{H}(s, d, \nu) \end{cases} \quad (1.7)$$

est appelée région PMI (polynomial matrix inequality) ouverte d'ordre d , de degré ν , et de pluralité \bar{k} .

Par ailleurs, si $\Upsilon_k = \Psi_k = 0 \forall k$, l'on parle de région PMI réduite.

En outre, si w est restreint à l'ensemble $\mathbb{R}^{\bar{k}}$, l'on parle de région PMI/R (real).

Si w est restreint à l'ensemble $\{\mathbb{C}^+\}^{\bar{k}}$, l'on parle de région PMI/P (positive).

Enfin, si w est restreint à l'ensemble $\{\mathbb{R}^+\}^{\bar{k}}$, l'on parle de région PMI/RP (real positive).

Remarque 1.2 L'inégalité donnée en (1.6) est stricte de manière à ce que la stabilité asymptotique puisse apparaître comme un cas particulier de la \mathcal{D} -stabilité. Cependant, l'on peut définir $\bar{\mathcal{D}}$, une région fermée, en utilisant une inégalité au sens large mais ceci permet difficilement de considérer les problèmes de stabilité simple et est donc assez inapproprié à l'étude des problèmes traités dans ce mémoire.

Les formulations PMI/R et PMI/P (voire PMI/RP) qui consistent à imposer que les scalaires w_k soient tous à partie réelle positive ou tous réels (respectivement tous réels positifs) ne sont que des cas particuliers de la formulation PMI générale puisque ces contraintes de positivité ou de réalité peuvent être intégrées aux matrices $\Theta_{k_{rt}}$ (pour la positivité), Υ_k et Ψ_k (pour la réalité) en augmentant l'ordre d . En effet, il suffit de procéder aux substitutions

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_{k_{00}} \rightarrow \begin{bmatrix} \Theta_{k_{00}} & 0 \\ 0 & -\tilde{I}_{\bar{k}}^k \end{bmatrix} \\ \left\{ \Theta_{k_{rt}} \rightarrow \begin{bmatrix} \Theta_{k_{rt}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \forall \{\{r; t\} \neq \{0; 0\}\} \in \{0, \dots, \nu\}^2 \right\} \end{array} \right. \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\} \quad (1.8)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \Upsilon_{k_{00}} \rightarrow \begin{bmatrix} \Upsilon_{k_{00}} & 0 \\ 0 & \tilde{I}_{\bar{k}}^k \end{bmatrix} \\ \Upsilon_{k_{rt}} \rightarrow \begin{bmatrix} \Upsilon_{k_{rt}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \forall \{\{r; t\} \neq \{0; 0\}\} \in \{0, \dots, \nu\}^2 \\ \Psi_{k_{00}} \rightarrow \begin{bmatrix} \Psi_{k_{00}} & 0 \\ 0 & -\tilde{I}_{\bar{k}}^k \end{bmatrix} \\ \Psi_{k_{rt}} \rightarrow \begin{bmatrix} \Psi_{k_{rt}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \forall \{\{r; t\} \neq \{0; 0\}\} \in \{0, \dots, \nu\}^2 \end{array} \right. \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\} \quad (1.9)$$

pour passer d'une formulation RP à une formulation générale. Le degré de la région PMI passe alors de d à $(d + \bar{k})$. La substitution (1.8) assure la positivité de $\text{Re}(w)$ et (1.9) assure que $w_k = w'_k \forall k$. Toutefois, ces augmentations d'ordre alourdissent les notations et les formules, c'est pourquoi nous préférons introduire ces descriptions PMI simplifiées que sont les déclinaisons PMI/P, PMI/R et PMI/RP.

Certes, il s'agit là d'une formulation très sophistiquée dont l'utilité dans le contexte de l'automatique n'est pas d'une évidence absolue. Toutefois, cette formulation a le mérite de regrouper un certain nombre de classes de régions que l'on rencontre dans la littérature sur la \mathcal{D} -stabilité et qui sont répertoriées ci-après. En pratique, la formulation réduite est quasi suffisante pour traiter les divers problèmes d'analyse et de commande.

1.2.1.1 Régions simples et régions composées

Définition 1.3 *On appelle :*

- région PMI simple toute région PMI de pluralité 1 ;
- région PMI composée toute région PMI de pluralité $\bar{k} > 1$.

À ce propos, il est intéressant de noter que le mot « composée » trouve tout son sens lorsque l'on envisage \mathcal{D} comme une union de plusieurs sous-régions PMI/RP réduites simples. L'indice k correspond alors à celui d'une sous-région réduite simple d'ordre d et de degré ν que l'on peut définir par

$$\mathcal{D}_k = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid f_{\mathcal{D}_k}(s) = \sum_{r=0, t=0}^{r=\nu, t=\nu} \Theta_{k_{rt}} s^r s^t < 0 \right\} \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}. \quad (1.10)$$

Soit l'union de ces sous-régions :

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k=1}^{\bar{k}} \mathcal{D}_k. \quad (1.11)$$

Cette union \mathcal{D} peut se définir ainsi :

$$\mathcal{D} = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \left(\exists w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{\bar{k}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{+\bar{k}} \mid \sum_{k=1}^{\bar{k}} (w_k f_{\mathcal{D}_k}(s)) < 0 \right) \right\}. \quad (1.12)$$

La définition (1.12) peut être interprétée comme une CNS de cloisonnement d'un point d'affixe s dans une région \mathcal{D} définie par (1.11) et (1.10). En effet, si $s \in \mathcal{D}$, cela signifie qu'il se

trouve dans une sous-région \mathcal{D}_h et donc il suffit de prendre w_h très grand et tous les autres $w_{k \neq h}$ suffisamment petits pour satisfaire (1.12). Réciproquement, si (1.12) est vérifiée, au moins un terme de la somme présente en (1.12) est négatif donc s appartient au moins à une sous-région \mathcal{D}_k .

Dès lors, cette façon de décrire l'union \mathcal{D} se ramène à une description PMI/RP composée avec

$$\Upsilon_k = \Psi_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}. \quad (1.13)$$

Remarque 1.3 *Il n'est pas restrictif de considérer que l'ordre et le degré sont les mêmes pour toutes les sous-régions \mathcal{D}_k . Si ce n'est pas le cas après avoir déterminé les différentes inégalités (1.10), l'on peut arbitrairement augmenter la dimension des matrices θ_k et en ajouter quelques unes nulles pour s'y ramener.*

1.2.1.2 Régions de stabilité asymptotique

Il est bien connu qu'un modèle LTI de système à temps continu est asymptotiquement stable si et seulement si le spectre de sa matrice d'état A est entièrement contenu dans le demi-plan complexe gauche ouvert $\mathcal{D} = \mathbb{C}^-$. L'on parle dans ce cas de stabilité au sens de Hurwitz. Le demi-plan \mathbb{C}^- répond à la formulation PMI/RP avec le choix

$$\bar{k} = 1; \quad \Theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Upsilon_1 = \Psi_1 = 0, \quad (1.14)$$

c'est-à-dire que \mathbb{C}^- est décrit par

$$\mathbb{C}^- = \{s \in \mathbb{C} \mid s^H < 0\}. \quad (1.15)$$

Il s'agit donc d'une région PMI/RP simple d'ordre 1 et de degré 1.

De même, un modèle LTI de système à temps discret est asymptotiquement stable si et seulement si le spectre de A appartient au disque unitaire \mathbf{D} . L'on parle alors de stabilité au sens de Schur ou de Schur-Cohn [324, 325, 94, 375]. Ce disque s'avère être une région PMI/RP simple d'ordre 1 et de degré 1 grâce au choix

$$\bar{k} = 1; \quad \Theta_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Upsilon_1 = \Psi_1 = 0, \quad (1.16)$$

c'est-à-dire que \mathbf{D} est décrit par

$$\mathbf{D} = \{s \in \mathbb{C} \mid -1 + s's < 0\}. \quad (1.17)$$

1.2.1.3 Formulation Ω

Les régions Ω sont parmi les plus utilisées dans la littérature. Elles ne furent pas les premières à constituer une classe pertinente puisque les régions Γ les précèdent. Toutefois, les régions Γ interviennent plutôt dans un contexte polynomial (scalaire) alors que les régions Ω font aussi l'objet d'un critère matriciel d'où notre choix de ne présenter que les régions Ω . Il est à noter que ces deux ensembles de régions ne sont pas équivalents. Aucun n'inclut l'autre mais leur intersection est non négligeable

Remarque 1.4 *Le terme « régions Γ » fut introduit par Kalman en 1969 [213]. Cependant, il fut montré que cet ensemble avait déjà été défini sous une autre forme par Hermite en 1856 [178] (la contribution de Kalman reste significative à divers égards). Le lecteur trouvera plus ample information dans [38, 169]. Il est troublant de constater à ce propos que Hermite avait établi un critère de \mathcal{D} -stabilité d'un polynôme avant même que Routh et Hurwitz ne proposent leurs critères de stabilité asymptotique. Le travail de Hermite fut quelque peu relégué aux oubliettes jusqu'à ce que Parks en démontrât l'intérêt [280]. Nous conseillons par ailleurs vivement la lecture du mémoire de thèse de Remaud pour comprendre la corrélation entre ces critères de stabilité [301].*

Nous nous référons ici essentiellement à [169] et aux références citées dans cet article. Les régions Ω sont génériquement notées Ω d'où leur nom. Leur description originale est cartésienne :

$$\Omega = \left\{ \{x; y\} \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{u=0, v=0}^{u+v=\eta} d_{uv} x^u y^v < 0 \right\}. \quad (1.18)$$

Les coefficients d_{uv} sont réels. Lorsqu'ils sont nuls pour toute valeur impaire de l'indice v , Ω est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Le degré de Ω (au sens des régions Ω) est défini par $\eta = \max((u + v) \mid d_{uv} \neq 0)$.

La description cartésienne est assez peu utilisée et la formulation complexe lui est préférée dans la définition suivante :

Définition 1.4 [169] *L'ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ défini par*

$$\Omega = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \mathbf{f}(s, s') = \sum_{r=0, t=0}^{r+t=\eta} c_{rt} s^r s'^t < 0 \right\}, \quad c_{rt} = c'_{tr} \in \mathbb{C} \forall \{r; t\}, \quad (1.19)$$

est appelé région Ω ouverte de degré $\eta = \max((r+t) | c_{rt} \neq 0)$.

Les coefficients c_{rt} peuvent être déduits des coefficients d_{uv} . La symétrie par rapport à l'axe réel se traduit par $c_{rt} = c_{tr} \in \mathbb{R} \forall \{r; t\}$ (l'on parle simplement de symétrie par souci de concision).

Toute région Ω répond à la formulation PMI/RP simple. En effet, il suffit de choisir

$$\bar{k} = 1; \quad \Theta_{1rt} = \frac{1}{2} c_{rt} \forall \{r; t\}; \quad \Upsilon_1 = \Psi_1 = 0. \quad (1.20)$$

La relation (1.6) avec (1.7) et $w \in \{\mathbb{R}^+\}^{\bar{k}}$ est alors recouverte. L'ordre d'une telle région PMI/RP est 1 et son degré est $\mu \leq \eta$. Le degré PMI/RP n'est donc pas nécessairement égal au degré Ω .

Pour des raisons techniques inhérentes aux conditions d' Ω -stabilité associées [169] qui seront rappelées ultérieurement (existence et unicité de la solution vérifiant la condition que nous présenterons), l'on se restreint parfois aux régions dites Ω -transformables (ou simplement *transformables*). De telles régions sont en fait ainsi baptisées parce qu'elles sont transformables en \mathbb{C}^- . La transformation existe si

$$\{\alpha; \beta\} \in \Omega^2 \Rightarrow \operatorname{Re} [\mathbf{f}(\alpha, \beta')] < 0. \quad (1.21)$$

Cette notion est développée dans [168, 169]. Il y est démontré que toute région Ω de degré 1 est transformable et qu'une région Ω de degré 2 est transformable si $c_{11} \geq 0 \Leftrightarrow d_{20} + d_{02} \geq 0$.

Parmi les régions Ω de degré 1, l'on peut citer les demi-plans verticaux ou obliques. Parmi les régions Ω -transformables de degré 2, l'on trouve les disques, les intérieurs d'ellipses, les bandes verticales ou horizontales, les intérieurs des paraboles et de certaines hyperboles. À titre d'exemple, \mathbb{C}^- et \mathbf{D} sont recouverts pour les choix respectifs

$$\begin{aligned} \eta = 1; \quad c_{00} = 0; \quad c_{10} = c_{01} = 1; \\ \& \\ \eta = 2; \quad c_{00} = -1; \quad c_{10} = c_{01} = 0; \quad c_{11} = 1; \quad c_{20} = c_{02} = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

1.2.1.4 Formulation LMI

Si les régions Ω apparurent à la fin des années 1970, elles furent en quelque sorte supplantées par une autre classe de régions à partir de 1996 : les régions LMI [80]. En fait, comme on le verra pas la suite, la possibilité d'exploiter directement des inégalités linéaires matricielles

(LMI) conduisit Mahmoud Chilali et Pascal Gahinet à considérer un ensemble de régions ainsi définies :

Définition 1.5 [80] L'ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ défini par

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} \mid \alpha + (\beta s)^H < 0\} \quad (1.23)$$

où $\alpha = \alpha' \in \mathbb{C}^{d \times d}$ et $\beta \in \mathbb{C}^{d \times d}$ est appelé région LMI d'ordre d .

L'article [80] se limite en fait à des matrices α et β réelles, ce qui implique que \mathcal{D} est symétrique. Lorsque α et β sont des matrices complexes comme dans la définition 1.5, \mathcal{D} est potentiellement non symétrique. Dans les deux cas, \mathcal{D} est une région convexe.

La relation (1.23) apparaît comme une instance particulière de (1.6-1.7) se limitant aux régions PMI/RP simples ($\bar{k} = 1$) d'ordre d et de degré $\nu = 1$ pour lesquelles

$$\Theta_{100} = \frac{1}{2}\alpha; \quad \Theta_{101} = \frac{1}{2}\beta; \quad \Theta_{111} = 0; \quad \Upsilon_1 = \Psi_1 = 0. \quad (1.24)$$

Il n'y a pas d'équivalence entre la classe des régions LMI et celle des régions Ω même si, en pratique, de nombreuses régions répondent aux deux formulations. Vu sous l'angle des régions PMI, le principe de la description LMI est de diminuer le degré ν par une augmentation de l'ordre d afin d'obtenir la linéarité de l'inégalité en s et s' . Ceci se fait généralement à l'aide d'un outil mathématique aujourd'hui célèbre : le complément (ou lemme) de Schur [65]. L'on retrouve beaucoup de régions en pratique tels que les demi-plans, les disques, les intérieurs d'ellipses, les secteurs classiques et hyperboliques, les bandes verticales ou horizontales, etc. Il n'existe pas de description LMI de l'intérieur d'une parabole. \mathbb{C}^- et \mathbb{D} peuvent être décrits sous forme LMI grâce aux choix respectifs

$$\alpha = 0; \quad \beta = 1; \quad \& \quad \alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

Remarque 1.5 L'intersection de plusieurs régions LMI est une région LMI. En pratique, ceci confère à cet ensemble un avantage sur celui des régions Ω .

1.2.1.5 Formulation EMI

Il s'agit là d'une formulation très proche de la formulation LMI. Elle est due à [287].

Définition 1.6 [284, 287] *Soit la matrice*

$$R = \begin{bmatrix} R_{00} & R_{01} \\ R'_{01} & R_{11} \end{bmatrix} = R' \in \mathbb{C}^{2d \times 2d} \quad \text{avec} \quad R_{rt} \in \mathbb{C}^{d \times d} \forall \{r; t\} \in \{0, 1\}^2. \quad (1.26)$$

La région \mathcal{D} définie par

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{H}'(s, d, 1)R\mathcal{H}(s, d, 1) = R_{00} + (R_{01}s)^H + R_{11}s's < 0\} \quad (1.27)$$

est appelée région EMI (ellipsoidal matrix inequality) ouverte d'ordre d .

La définition originale proposée dans [287] considère une matrice R réelle qui induit une symétrie de \mathcal{D} . Il est toutefois facile d'étendre cette définition au cas où R est complexe comme dans [25], à l'instar de ce qui a été fait pour les régions LMI. \mathcal{D} est alors potentiellement non symétrique. Le terme « region EMI » n'a pas été introduit dans [287]. Il est utilisé pour la première fois dans [284] en référence à la forme de l'inégalité donnée en (1.27). Le terme « région QMI » (*quadratic matrix inequality*) est parfois aussi utilisé. En raison de la caractérisation d'une telle région au travers d'une matrice R , le nom générique des régions EMI est \mathcal{D}_R et conduit au concept de \mathcal{D}_R -stabilité.

Une fois encore, cette description est englobée par celle des régions PMI/RP simples (d'ordre d) puisqu'il suffit de choisir

$$\bar{k} = 1; \quad \Theta_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_{00} & R_{01} \\ R'_{01} & R_{11} \end{bmatrix} \quad \& \quad \Upsilon_1 = \Psi_1 = 0. \quad (1.28)$$

Pour des raisons techniques inhérentes aux conditions de \mathcal{D} -stabilité, l'ensemble des régions EMI est souvent restreint aux régions convexes en ajoutant l'hypothèse $R_{11} \geq 0$. Ceci a pour conséquence de rendre ce sous-ensemble de régions EMI équivalent à l'ensemble des régions LMI (par complément de Schur [65]). L'on peut ainsi retrouver, en pratique, les mêmes régions. \mathbb{C}^- et \mathbb{D} sont obtenues par les choix respectifs

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \& \quad R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Il est à noter que si le disque est une région LMI d'ordre 2, il devient une région EMI d'ordre 1.

Remarque 1.6 *L'intersection de plusieurs régions EMI convexes est une région EMI convexe.*

1.2.1.6 Formulation $U\Omega$

Nous entrons maintenant dans la catégorie des régions composées ($\bar{k} > 1$). L'expression « région $U\Omega$ » est en fait introduite ici pour la première fois. Nous en donnons une définition à partir de celle des régions PMI/RP.

Définition 1.7 *Toute région PMI/RP \mathcal{D} répondant à la définition 1.2 avec*

$$\Theta_{k_{rt}} = \frac{1}{2}c_{k_{rt}} \in \mathbb{C} \forall \{r; t\}; \quad \Upsilon_k = \Psi_k = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\} \quad (1.30)$$

est appelée région $U\Omega$ ouverte de degré $\eta = \max((r + t) | (\exists k | c_{k_{rt}} \neq 0))$.

Cette description est sensiblement équivalente à celle utilisée dans [32]. Une telle formulation s'inspire beaucoup de la formulation GLMI présentée au prochain paragraphe. En pratique, elle permet de considérer des unions de régions Ω ce qui élargit considérablement la gamme des régions non connexes de cloisonnement. Pour ce faire, il suffit de se référer au paragraphe 1.2.1.1.

1.2.1.7 Formulation GLMI

Nous nous référons ici à un travail considérable dans le domaine de la \mathcal{D} -stabilité (et dans bien d'autres), celui de Mahmoud Chilali [79]. Ce dernier propose une généralisation de la définition des régions LMI (cf. paragraphe 1.2.1.4) dont nous nous sommes largement inspirés pour définir les régions PMI au paragraphe 1.2.1. Dans [79], les régions GLMI sont ainsi présentées :

Définition 1.8 [79] *Toute région $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ définie par (1.6) avec*

$$\begin{cases} f_{\mathcal{D}}(s, w) = \left(\sum_{k=1}^{\bar{k}} (w_k (U_k + sV_k)) \right)^H, \\ g_{\mathcal{D}}(w) = \sum_{k=1}^{\bar{k}} (w_k E_k + w'_k F_k) \end{cases} \quad (1.31)$$

où $\{U_k; V_k; E_k; F_k\} \in \{\mathbb{C}^{d \times d}\}^4 \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}$, est appelée région GLMI (generalized linear matrix inequality) d'ordre d .

Il est clair qu'une région GLMI est une région PMI (pas nécessairement R ou P) particulière de degré $\nu = 1$ pour laquelle

$$\begin{cases} \Theta_{k00} = U_k; & \Theta_{k01} = V_k; & \Theta_{k11} = 0; & \Upsilon_{k00} = E_k; & \Psi_{k00} = F_k; \\ \Upsilon_{krt} = \Psi_{krt} = 0 \quad \forall \{r; t\} \neq \{0; 0\} \in \{0; 1\}^2 \end{cases} \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}. \quad (1.32)$$

De même que la formulation PMI permet de générer des régions PMI/RP composées qui sont des unions de sous-régions PMI/RP réduites simples (conformément au paragraphe 1.2.1.1), les régions GLMI permettent d'envisager des unions de sous-régions LMI. La gamme des régions non connexes que l'on peut considérer s'en trouve donc élargie.

La différence fondamentale, en pratique, entre les régions PMI et les régions GLMI est que la complexité d'une région est systématiquement traduite, dans la formulation GLMI, par un ordre élevé en conservant la linéarité en s et s' . Il est à noter que les régions GLMI sont des régions PMI *a priori* non réduites.

1.2.1.8 Formulation E²MI

De même que les régions GLMI ont été introduites dans [79] pour généraliser les régions LMI de [80], et en particulier pour considérer des unions, les régions E²MI (*Extended EMI*) étendent la notion de régions EMI. Cette formulation fut implicitement introduite dans [25], plus explicitement dans [18] mais une approximation dans cette présentation conduisit à une reformulation plus rigoureuse dans [59, 58, 55] :

Définition 1.9 [55, 59] Soit un ensemble de \bar{k} matrices R_k définies par

$$R_k = R'_k = \begin{bmatrix} R_{k00} & R_{k01} \\ R'_{k01} & R_{k11} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{2d \times 2d}, \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}. \quad (1.33)$$

L'ensemble de points \mathcal{D}_U défini par

$$\mathcal{D}_U = \left\{ s \in \mathbf{C} \mid \left(\exists w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{\bar{k}} \end{bmatrix} \in \{\mathbf{R}^+\}^{\bar{k}} \mid \right. \right. \\ \left. \left. f_{\mathcal{D}_U}(w, s) = \mathcal{H}'(s, d, 1) \left(\sum_{k=1}^{\bar{k}} w_k R_k \right) \mathcal{H}(s, d, 1) = \sum_{k=1}^{\bar{k}} (w_k (R_{k00} + (R_{k01} s)^H + R_{k11} s' s)) < 0 \right) \right\} \quad (1.34)$$

est appelé région E^2MI (extended ellipsoidal matrix inequality) ouverte d'ordre d .

La notation \mathcal{D}_U est générique pour désigner une région E^2MI et conduit au concept de \mathcal{D}_U -stabilité [18, 59, 55].

Toute région E^2MI d'ordre d répond à la formulation PMI/RP d'ordre d et de degré $\nu = 1$ grâce au choix

$$\Theta_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_{k00} & R_{k01} \\ R'_{k01} & R_{k11} \end{bmatrix}; \quad \Upsilon_k = \Psi_k = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}. \quad (1.35)$$

Contrairement aux formulations PMI et GLMI, la formulation E^2MI est plus spécifiquement dédiée à l'union de régions. Elle est particulièrement utile pour décrire une union de sous-régions EMI (cf. [55, 59] et paragraphe 1.2.1.1). Si l'on ajoute l'hypothèse technique classique $R_{k11} \geq 0, \forall k$, l'on peut alors montrer, par complément de Schur, que cet ensemble restreint de régions E^2MI est un sous-ensemble des régions GLMI.

La formulation PMI peut paraître bien trop générale pour les besoins en automatique. Il n'est souvent pas déraisonnable de se contenter de la formulation PMI/RP réduite. La complexité de la région se traduit à la fois par l'ordre d et par le degré ν , ce qui peut sembler redondant. Il est plus facile, tant dans un cadre d'analyse que de synthèse, mais surtout dans le formalisme LMI, de privilégier l'ordre au degré pour déterminer des conditions de \mathcal{D} -stabilité. Par ailleurs, la pluralité \bar{k} sert bien souvent à générer des unions de régions. À ces titres, les régions GLMI et E^2MI peuvent suffire aux besoins d'un automaticien. Pour des raisons qui apparaîtront plus claires au prochain chapitre, nous privilégions les régions E^2MI ainsi que d'autres régions, que nous appelons CMI (voire ECMI). Ces dernières échappent *a priori* à la formulation PMI. Nous les présentons ci-après.

1.2.2 Formulation indirecte par les frontières

Dans cette sous-partie, nous envisageons la \mathcal{D} -stabilité sous un autre aspect. Plutôt que de donner une définition directe de \mathcal{D} , nous définissons davantage son contour ce qui conduit à la notion de $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice. Les résultats qui suivent correspondent aux articles [17, 21].

1.2.2.1 $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice

La $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice est définie de la manière suivante :

Définition 1.10 [33, 17] Soit $\partial\mathcal{D}$ un ensemble du plan de Laplace. La matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est dite

- $\partial\mathcal{D}$ -singulière quand $\lambda(A) \cap \partial\mathcal{D} \neq \emptyset$;
- $\partial\mathcal{D}$ -régulière quand $\lambda(A) \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset$.

Ainsi, en supposant que l'ensemble $\partial\mathcal{D}$ est une courbe du plan complexe qui sépare deux régions ouvertes \mathcal{D} et $\tilde{\mathcal{D}}^C$ (de sorte que $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D} \cup \tilde{\mathcal{D}}^C = \mathbb{C}$ et $\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{D}}^C = \emptyset$), pour que la matrice A soit \mathcal{D} -stable, il est nécessaire qu'elle soit $\partial\mathcal{D}$ -régulière. Elle devient \mathcal{D} -stable ou $\tilde{\mathcal{D}}^C$ -stable si, de plus, tout son spectre est situé d'un côté ou de l'autre de $\partial\mathcal{D}$.

Remarque 1.7 La $\partial\mathcal{D}$ -régularité est une notion qui peut s'étendre à des ensembles du plan complexes qui ne sont pas des frontières. Ainsi, plutôt que de raisonner par rapport à $\partial\mathcal{D}$, la frontière de \mathcal{D} , l'on peut aussi considérer un ensemble \mathcal{S} défini, par exemple, comme le complément dans \mathbb{C} de \mathcal{D} , c'est-à-dire \mathcal{D}^C . Il est alors clair que la \mathcal{S} -régularité d'une matrice équivaut à sa \mathcal{D} -stabilité. Par ailleurs, la notion de \mathcal{S} -régularité d'une matrice peut s'étendre à la \mathcal{S} -régularité d'un faisceau de matrices. L'annexe B revient largement sur cette notion.

1.2.2.2 Régions unitaires

Soit la matrice R ainsi composée :

$$R = R' = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} \\ r'_{01} & r_{11} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}. \quad (1.36)$$

Soit aussi la courbe $\partial\mathcal{D}$ définie par

$$\partial\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} \mid f(s) = \mathcal{H}'(s, d, 1)R\mathcal{H}(s, d, 1) = r_{00} + (r_{01}s)^H + r_{11}s's = 0\}. \quad (1.37)$$

[59, 55]

Toute courbe $\partial\mathcal{D}$ ne se réduisant pas à l'ensemble vide est une droite ou un cercle (pas forcément symétrique par rapport à l'axe réel).

Remarque 1.8 L'ensemble $\partial\mathcal{D}$ est une région PMI/RP non réduite pour laquelle

$$\bar{k} = 1; \quad \Theta_1 = 0; \quad \Upsilon_1 = \Psi'_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r_{00} & r_{10} \\ 0 & \frac{1}{2}r_{11} \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

L'on définit la région suivante :

Définition 1.11 *L'ensemble \mathcal{D} défini par*

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} \mid f(s) < 0\}, \quad (1.39)$$

où la fonction scalaire f caractéristique d'une courbe $\partial\mathcal{D}$ est donnée par (1.37), est appelé région unitaire.

Une telle région est exploitée, entre autres, dans [17]. Il peut s'agir d'un cas particulier de région EMI d'ordre 1 ou encore d'un cas particulier de région Ω de degré 2 (pas nécessairement transformable). Le qualificatif « unitaire » est ici spécifiquement introduit pour exprimer que la complexité de la région est de 1 en ce sens que l'ordre et le degré PMI/RP sont tous deux égaux à 1. En pratique, une telle région est un demi-plan, un disque ou l'extérieur d'un cercle même si \mathbb{C} dans son ensemble répond à la formulation. La frontière $\partial\mathcal{D}$ est exclue de la région comme le montre l'inégalité stricte.

1.2.2.3 Formulation CMI

Définition 1.12 [17] *Soient les matrices*

$$R_k = R'_k = \begin{bmatrix} r_{k00} & r_{k01} \\ r'_{k01} & r_{k11} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}. \quad (1.40)$$

Soient également les courbes définies par

$$\partial\mathcal{D}_k = \{s \in \mathbb{C} \mid f_k(s) = \mathcal{H}'(s, d, 1)R_k\mathcal{H}(s, d, 1) = r_{k00} + (r_{k01}s)^H + r_{k11}s's = 0\} \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\} \quad (1.41)$$

ainsi que les sous-régions unitaires \mathcal{D}_k définies par

$$\mathcal{D}_k = \{s \in \mathbb{C} \mid f_k(s) < 0\} \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}. \quad (1.42)$$

Toute combinaison \mathcal{D} (c.-à-d. intersection et/ou union) des différentes sous-régions \mathcal{D}_k est appelée région CMI (combined matrix inequality) de pluralité \bar{k} .

Bien que la définition soit proposée dans [17], le sigle CMI est introduit spécifiquement dans ce mémoire pour clairement distinguer toutes les classes de régions.

Pour ce qui est du choix des régions, la description CMI couvre la plupart des besoins en analyse et synthèse. L'ensemble des régions CMI n'est pas équivalent à celui des régions PMI même s'ils incluent tous deux une vaste gamme de régions non connexes.

Remarque 1.9 La frontière $\partial\mathcal{D}$ est une région PMI/RP composée non réduite pour laquelle

$$\Theta_k = 0; \quad \Upsilon_k = \Psi'_k = \tilde{I}_{\bar{k}}^k \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r_{k00} & r_{k01} \\ 0 & \frac{1}{2}r_{k11} \end{bmatrix} \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}. \quad (1.43)$$

C'est aussi une région PMI/RP non réduite simple pour laquelle

$$\Theta_1 = 0; \quad \Upsilon_1 = \Psi'_1 = \bigoplus_{k=1}^{\bar{k}} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}r_{k00} & r_{k01} \\ 0 & \frac{1}{2}r_{k11} \end{bmatrix} \right). \quad (1.44)$$

1.2.2.4 Formulation ECMI

Comme il vient d'être vu, une région CMI \mathcal{D} est définie au travers de sa frontière, ou, plus rigoureusement, au travers des frontières des sous-régions \mathcal{D}_k qui la composent. Cette nuance est importante car elle est à l'origine d'une limite des résultats fournis dans [17] qui a conduit les auteurs de [21] à proposer une description rigoureuse de la frontière de \mathcal{D} .

Soient les \bar{k} courbes $\partial\mathcal{D}_k$ définies en (1.41). Soient aussi les matrices

$$\Phi_{k,l} = \begin{bmatrix} \phi_{k,l00} & \phi_{k,l01} \\ \phi'_{k,l01} & \phi_{k,l11} \end{bmatrix} = \Phi'_{k,l} \in \mathbf{C}^{2 \times 2} \quad \forall \{k, l\} \in \{1, \dots, \bar{k}\} \times \{1, \dots, \bar{l}_k\}. \quad (1.45)$$

L'on peut définir les ensembles \mathcal{E}_k par

$$\mathcal{E}_k = \{s \in \mathbf{C} \mid g_{k,l}(s) = \mathcal{H}'(s, d, 1)\Phi_{k,l}\mathcal{H}(s, d, 1) = \phi_{k,l00} + \phi_{k,l01}s)^H + \phi_{k,l11}s's \geq 0 \quad \forall l \in \{1, \dots, \bar{l}_k\} \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}\}. \quad (1.46)$$

Chaque région \mathcal{E}_k est en réalité l'intersection de plusieurs sous-régions fermées $\mathcal{E}_{k,l}$ caractérisées chacune par une inégalité large $g_{k,l}(s) \geq 0$. Ces sous-régions sont des demi-plans, des disques ou des extérieurs de cercles qui peuvent être non symétriques. Soient maintenant les ensembles $\partial\Gamma_k$ définis par

$$\partial\Gamma_k = \partial\mathcal{D}_k \cap \mathcal{E}_k = \{s \in \mathbf{C} \mid f_k(s) = 0 \ \& \ g_{k,l}(s) \geq 0 \quad \forall l \in \{1, \dots, \bar{l}_k\}\} \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}. \quad (1.47)$$

Chaque ensemble $\partial\Gamma_k$ est l'intersection d'une droite ou d'un cercle avec \bar{l}_k demi-plans, disques ou extérieurs de cercles fermés. En d'autres termes, il s'agit d'une droite ou d'un cercle dont seulement certains points sont sélectionnés par un choix de matrices $\Phi_{k,l}$.

Remarque 1.10 *Chaque ensemble $\partial\Gamma_k$ peut être interprété comme une région PMI/RP non réduite simple fermée si l'on modifie, sans perte de généralité, les fonctions $g_{k,l}$ de telle sorte que $\bar{l}_k = \bar{l} \forall l$ et pour le choix*

$$\Theta_k = \hat{\Theta}_k = -\frac{1}{2} \bigoplus_{l=1}^{\bar{l}} \left(\begin{bmatrix} \phi_{k,l_{00}} & \phi_{k,l_{01}} \\ \phi'_{k,l_{01}} & \phi_{k,l_{11}} \end{bmatrix} \right); \quad \hat{\Upsilon}_k = \Upsilon_k = \Psi'_k = I_{\bar{l}} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r_{k_{00}} & r_{k_{01}} \\ 0 & \frac{1}{2}r_{k_{11}} \end{bmatrix}. \quad (1.48)$$

De ces considérations, l'on peut définir la classe de régions suivante :

Définition 1.13 *Tout ensemble de points du plan de Laplace qui admet pour frontière l'ensemble $\partial\mathcal{D}$ défini par*

$$\partial\mathcal{D} = \bigcup_{k=1}^{\bar{k}} \partial\Gamma_k, \quad (1.49)$$

où les ensembles $\partial\Gamma_k$ sont définis par (1.47) avec (1.41-1.45-1.46), est appelé région ECMI (extended CMI) de pluralité \bar{k} .

Toute région CMI est une région ECMI c'est-à-dire que la frontière d'une région CMI peut être décrite par (1.49).

Remarque 1.11 *La région $\partial\mathcal{D}$ est une région PMI/RP réduite composée fermée pour laquelle*

$$\Theta_k = \tilde{I}_{\bar{k}}^k \otimes \hat{\Theta}_k \quad \& \quad \Upsilon_k = \Psi'_k = \tilde{I}_{\bar{k}}^k \otimes \hat{\Upsilon}_k, \quad (1.50)$$

où $\hat{\Theta}_k$ et $\hat{\Upsilon}_k$ sont définis en (1.48).

1.3 Conditions de cloisonnement

Dans cette deuxième partie, nous associons aux diverses descriptions de \mathcal{D} fournies en première partie, des CNS de \mathcal{D} -stabilité d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Nous privilégions des conditions formulées en termes d'inégalités matricielles voire d'égalités matricielles.

1.3.1 Régions PMI

Nous nous référons ici aux régions PMI introduites au paragraphe 1.2.1. Nous proposons une CNS d'appartenance du spectre d'une matrice à une telle région.

Théorème 1.1 *Soient la matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ainsi qu'une région PMI \mathcal{D} répondant à la définition 1.2. La matrice A est \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe un ensemble $\{P_k\}$ de \bar{k} matrices $P_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, vérifiant*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_{\mathcal{D}}(A, \{P_k\}) = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \left(\sum_{r=0, t=0}^{r=\nu, t=\nu} (\Theta_{k_{rt}} \otimes (A^r P_k A^t)) \right)^H \\ \quad = \mathcal{H}'(A, d, \nu) \left(\sum_{k=1}^{\bar{k}} (\Theta_k \otimes P_k) \right)^H \quad \mathcal{H}(A, d, \nu) < 0, \\ \mathcal{N}_{\mathcal{D}}(A, \{P_k\}) = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \left(\sum_{r=0, t=0}^{r=\nu, t=\nu} (\Upsilon_{k_{rt}} \otimes (A^r P_k A^t)) + \sum_{r=0, t=0}^{r=\nu, t=\nu} (\Psi_{k_{rt}} \otimes (A^r P'_k A^t)) \right) \\ \quad = \mathcal{H}'(A, d, \nu) \left(\sum_{k=1}^{\bar{k}} (\Upsilon_k \otimes P_k + \Psi_k \otimes P'_k) \right) \quad \mathcal{H}(A, d, \nu) = 0. \end{array} \right. \quad (1.51)$$

Bien que ce résultat soit original, nous n'en présentons pas la démonstration. Outre le souci de concision, l'on peut trouver les arguments nécessaires à cette preuve dans [79, Théorème 4.4.2] (*The Pole Clustering Theorem*), [79, Théorème 4.6.1] et dans [18, Théorème 4].

Lorsque \mathcal{D} est une région PMI/R, l'on peut considérer que P_k est hermitienne. Lorsque \mathcal{D} est une région PMI/P, la contrainte $P_k + P'_k > 0$ est implicite. Lorsque \mathcal{D} est une région PMI/RP, chaque matrice P_k est hermitienne définie positive. Cette réflexion s'applique à toutes les conditions qui vont suivre.

1.3.1.1 Cas particulier de la stabilité asymptotique

1.3.1.1.1 Cas continu : stabilité au sens de Hurwitz

Lorsque la région \mathcal{D} se résume au demi-plan complexe gauche ouvert \mathbb{C}^- , le théorème 1.1 se ramène à la proposition suivante :

Théorème 1.2 *Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est stable au sens de Hurwitz si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive P telle que*

$$(PA)^H < 0. \quad (1.52)$$

Remarque 1.12 *P est considérée réelle car A l'est et car \mathcal{D} est une région PMI simple symétrique.*

Ce théorème est généralement vu comme une application de la seconde méthode de Lyapunov [252] aux systèmes linéaires à temps continu. Si A est la matrice d'évolution d'un modèle dont l'état est $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $V(x) = x'Px$ est appelée fonction de Lyapunov. Par extension P est appelée matrice de Lyapunov et l'inégalité (1.52) est appelée inégalité de Lyapunov. Toutefois, Lyapunov se réfère à un problème de dissipation de l'énergie associée à $V(x)$ pour traiter de la stabilité (ce qui a l'avantage d'englober des modèles non linéaires) alors que le raisonnement utilisé ici est purement matriciel. Néanmoins, dans les inégalités rencontrées par la suite, les matrices jouant le même rôle que P seront qualifiées de matrices de Lyapunov.

Dans [278, 209, 190], il est démontré que l'on peut remplacer l'inégalité (1.52) par une égalité, ce qui conduit à la proposition suivante :

Théorème 1.3 *Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est stable au sens de Hurwitz si et seulement si, quelle que soit la matrice symétrique définie positive Q , il existe une matrice symétrique définie positive P telle que*

$$(PA)^H = -Q. \quad (1.53)$$

L'on peut donc choisir arbitrairement la matrice Q et obtenir ainsi ce qu'on appelle l'équation de Lyapunov. Il n'existe pas à notre connaissance de choix à la fois aisé et judicieux de Q (en tout cas dans un contexte où A est une matrice précisément connue) de sorte que le choix simple $Q = I_n$ est souvent retenu *a priori* [170, 41, 201].

1.3.1.1.2 Cas discret : stabilité au sens de Schur

Le théorème 1.2 a un équivalent discret qui peut lui aussi apparaître comme un cas particulier du théorème 1.1 :

Théorème 1.4 *Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est stable au sens de Schur si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive P telle que*

$$-P + A'PA < 0. \quad (1.54)$$

Ce théorème, quoique souvent appelé « théorème de Lyapunov discret », fut en réalité obtenu via des arguments matriciels par Stein en 1952 [332]. Là aussi, il est montré dans [278, 209] que l'on peut choisir arbitrairement une matrice $Q = Q' > 0$ et résoudre en $P = P' > 0$ l'équation de Lyapunov discrète

$$-P + A'PA = -Q. \quad (1.55)$$

1.3.1.2 Régions Ω

L'on peut faire remonter les résultats concernant les régions Ω à l'excellent article de Stéphanos [333] où ce dernier fait une utilisation astucieuse du produit de Kronecker (et du produit matriciel bialterné) pour traiter de la localisation du spectre d'une matrice. Dans cet article, l'on trouve les bases qui permettent plus tard à Howland [193], prolongeant peut-être l'idée de Bellman [42], de formuler une première condition d' Ω -stabilité dont nous donnons une version simplifiée :

Théorème 1.5 (*inspiré de [193, Théorème 1]*) Soient une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et une région Ω répondant à la définition 1.4. La matrice A est Ω -stable si et seulement si il existe une matrice hermitienne définie positive P vérifiant l'inégalité matricielle

$$\sum_{r=0, t=0}^{r+t=\eta} (c_{rt} A^r P A^t) < 0, \quad (1.56)$$

où les coefficients c_{rt} sont issus de la description de la région Ω donnée en (1.19).

Ce résultat, qui est une instance particulière du théorème 1.1, est sensiblement équivalent à [169, Lemme 6].

Le terme « région Ω » n'apparaît en fait qu'avec les travaux de Gutman et Jury [168, 169].

À l'époque où Howland écrit son article [193], une telle condition n'est pas numériquement exploitable. En effet, il s'agit d'une LMI en P mais à cette époque, Willems commençait juste à avertir la communauté automatique quant à l'intérêt des inégalités matricielles [356]. C'est pourquoi Howland propose un autre théorème [193, Théorème 2] pour passer d'une inégalité matricielle à une égalité matricielle. Même si l'approche est intéressante, nous pensons que la démonstration de ce théorème est erronée. Gutman et Jury, qui se sont beaucoup inspirés de Howland, sont confrontés au même défi. Ils proposent la conjecture suivante.

Conjecture 1.1 Soient une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et une région Ω transformable répondant à la définition 1.4. La matrice A est Ω -stable si et seulement si, quelle que soit la matrice hermitienne définie positive Q , il existe une matrice hermitienne définie positive P vérifiant l'égalité

suivante, dite *équation de Lyapunov généralisée* (generalized Lyapunov equation (GLE) en anglais) :

$$\sum_{r=0, t=0}^{r+t=\eta} (c_{rt} A^r P A^t) = -Q. \quad (1.57)$$

Ce résultat admet les équations de Lyapunov continue et discrète (1.53) et (1.55) comme cas particuliers. Un résultat équivalent est obtenu en parallèle par Mazko [266]. Il est intéressant de noter que le choix arbitraire de Q est ici corrélé à la transformabilité d' Ω (de même que la non-singularité et l'unicité de P : voir [169]). Il faut aussi préciser que cette conjecture est prouvée pour un degré $\eta = 2$. Lorsque \mathcal{D} est un disque, ce résultat est équivalent à celui, spécifique, proposé dans [139].

L'on peut se poser la question de l'intérêt d'une telle conjecture alors que l'on sait maintenant résoudre numériquement une LMI telle que (1.56). La raison est justement numérique. Pour un problème de complexité élevée (n et η grands), les logiciels de résolution de LMI peuvent faillir et la résolution d'une GLE est davantage fiable. C'est pourquoi la démonstration de la conjecture 1.1 reste un défi comme le souligne Wang dans le problème 85 issu du recueil publié sur Internet [50] (ce recueil fait suite au premier ouvrage [52] et est aujourd'hui l'objet d'un livre où le problème de Wang est référencé 6.9 [51]). Le lecteur pourra aussi consulter la discussion présentée dans [17].

1.3.1.3 Régions LMI

Nous présentons maintenant, dans une forme duale, le théorème le plus connu et le plus exploité dans le domaine de la \mathcal{D} -stabilité.

Théorème 1.6 (d'après [80]) *Soient une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et une région LMI \mathcal{D} répondant à la définition 1.5. La matrice A est \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe une matrice hermitienne définie positive P vérifiant l'inégalité matricielle*

$$\alpha \otimes P + (\beta \otimes (PA))^H < 0. \quad (1.58)$$

Il s'agit de nouveau d'un cas particulier du théorème 1.1. Ce qui rend ce théorème plus populaire que d'autres est la linéarité de l'inégalité (1.58), soit en P , soit en A . Cette linéarité autorise des extensions en synthèse \mathcal{D} -stabilisante via la forme primale de (1.58). Nous y reviendrons au chapitre 3. De plus, ce genre de contraintes de performances s'insère parfaitement dans la résolution d'un problème de synthèse \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ par une approche LMI [80].

1.3.1.4 Régions EMI

Théorème 1.7 [287] Soient une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et une région EMI \mathcal{D}_R répondant à la définition 1.6. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) La matrice A est \mathcal{D}_R -stable.

(ii)

$$\exists P = P' > 0 | \mathcal{H}'(A, d, 1)(R \otimes P) \mathcal{H}(A, d, 1) = R_{00} \otimes P + (R_{01} \otimes (PA))^H + R_{11} \otimes (A'PA) < 0. \quad (1.59)$$

(iii)

$$\exists P = P' > 0 \quad \& \quad G \in \mathbb{C}^{2dn \times 2dn} \mid R \otimes P + (G \begin{bmatrix} A & -I_n \end{bmatrix})^H < 0. \quad (1.60)$$

L'équivalence entre (i) et (ii) peut-être vue comme un cas particulier du théorème 1.1. Lorsque $R_{11} \geq 0$, cette équivalence correspond au théorème 1.6. L'équivalence entre (ii) et (iii) se démontre grâce au lemme d'élimination des matrices présenté dans [65] ou [329, Théorème 2.3.12], lui-même potentiellement déduit du lemme de Finsler [131]. Une démonstration originale du lemme d'élimination des matrices est donnée en annexe C.

L'apparition d'une variable matricielle additionnelle G (parfois appelée *variable de relaxation* ou *multiplieur*) permet de retrouver la linéarité en A . Si l'intérêt de la condition (1.60) par rapport à (1.59) est nul en analyse nominale et reste souvent difficile à justifier en synthèse nominale, il s'avère évident en analyse robuste comme nous le montrerons au chapitre 2.

L'utilisation de variables de relaxation à des fins de \mathcal{D} -stabilité fut introduite dans [158] pour la stabilité au sens de Hurwitz puis dans [108] pour le placement de pôles dans un disque. Dans [108], le multiplieur permet d'obtenir des résultats pertinents en synthèse nominale ou robuste, par retour d'état et de sortie. Il est vivement conseillé au lecteur de consulter [108].

1.3.1.5 Régions $U\Omega$

Théorème 1.8 [32] Soient une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et une région $U\Omega$ notée \mathcal{D} et répondant à la définition 1.7. La matrice A est \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe un ensemble de \bar{k} matrices hermitiennes définies positives P_k , $k = 1, \dots, \bar{k}$, tel que

$$\sum_{k=1}^{\bar{k}} \sum_{r=0; t=0}^{r+t=\eta} (c_{krt} A'^r X_k A^t) < 0. \quad (1.61)$$

Une fois encore, le théorème 1.8 est un cas particulier du théorème 1.1. Il généralise le théorème 1.5.

1.3.1.6 Régions GLMI

Nous en arrivons à un théorème qui a fortement influencé nos réflexions. Nous l'empruntons à [79] et le présentons dans une forme duale :

Théorème 1.9 [79] *Soient une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et une région GLMI \mathcal{D} répondant à la définition 1.8. La matrice A est \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe un ensemble de \bar{k} matrices hermitiennes P_k , $k = 1, \dots, \bar{k}$ tel que*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\bar{k}} (U_k \otimes P_k + V_k \otimes (P_k A))^H < 0, \\ \sum_{k=1}^{\bar{k}} (E_k \otimes P_k + V_k \otimes P_k') = 0. \end{cases} \quad (1.62)$$

Ce théorème est à peine moins général que le théorème 1.1. Nous utiliserons cependant davantage celui associé aux régions E^2MI et présenté ci-après.

1.3.1.7 Régions E^2MI

Le théorème suivant sera largement exploité par la suite :

Théorème 1.10 [18, 55, 59] *Soient une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et \mathcal{D}_U , une région E^2MI répondant à la définition 1.9. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La matrice A est \mathcal{D}_U -stable.*
- (ii) *Il existe un ensemble \mathcal{P} de \bar{k} matrices hermitiennes définies positives P_k , $k = 1, \dots, \bar{k}$ tel que*

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(A, \mathcal{P}) &= \mathcal{H}'(A, d, 1) \left(\sum_{k=1}^{\bar{k}} R_k \otimes P_k \right) \mathcal{H}(A, d, 1) = \\ &\sum_{k=1}^{\bar{k}} (R_{k00} \otimes P_k + (R_{k01} \otimes (P_k A))^H + R_{k11} \otimes (A' P_k A)) < 0. \end{aligned} \quad (1.63)$$

- (iii) *Il existe un ensemble \mathcal{P} de \bar{k} matrices hermitiennes définies positives P_k , $k = 1, \dots, \bar{k}$ et une matrice $G_U \in \mathbb{C}^{2dn \times dn}$ tels que*

$$\mathbf{G}_U(A, \mathcal{P}, G_U) = \sum_{k=1}^{\bar{k}} (R_k \otimes P_k) + (G_U [I_d \otimes A \mid -I_{dn}])^H < 0. \quad (1.64)$$

Ce cas particulier du théorème 1.1 sera largement repris dans la suite du mémoire. De nouveau, nous précisons que l'utilité du multiplieur G_U apparaîtra au chapitre 2.

1.3.2 Régions non PMI

Dans cette sous-partie, nous présentons des conditions de \mathcal{D} -stabilité d'une matrice pour des régions qui échappent à la formulation PMI. Nous y faisons largement usage du concept de $\partial\mathcal{D}$ -régularité [17].

1.3.2.1 Régions unitaires

Puisque les régions unitaires sont des régions EMI d'ordre 1, il ne semble pas utile *a priori* de leur accorder une importance particulière. Toutefois, nous rappelons les résultats de [17] où le problème est passé à la loupe de la $\partial\mathcal{D}$ -régularité.

Théorème 1.11 *Soient $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $\partial\mathcal{D}$, une courbe de \mathbb{C} défini par (1.37). La matrice A est $\partial\mathcal{D}$ -régulière si et seulement s'il existe une matrice hermitienne $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ solution de*

$$F(A, P) = \mathcal{H}'(A, 1, 1)(R \otimes P)\mathcal{H}(A, 1, 1) = r_{00}P + (r_{01}PA)^H + r_{11}A'PA < 0. \quad (1.65)$$

Par ailleurs, la matrice A possède n_+ valeurs propres dans \mathcal{D} et n_- valeurs propres en dehors de \mathcal{D} si et seulement si toute solution hermitienne P de (1.65) a pour inertie $\text{In}(P) = \begin{bmatrix} n_+ & & \\ & n_- & \\ & & 0 \end{bmatrix}$.

Ce théorème, valable pour toute droite ou tout cercle du plan de Laplace, regroupe en un seul énoncé les deux propositions formulées dans [179]. Le travail de [179] s'appuie sur le théorème d'Ostrowski et Schneider [278] et sur une autre proposition due à Frobenius. Le théorème 1.11 se situe plus dans le contexte dit « de Lyapunov » et de la \mathcal{D} -stabilité en ce sens qu'il émane davantage des réflexions de [333, 193, 169]. En outre, l'approche de [17] ne nécessite pas de développement préliminaire autre que le lemme bien connu de Sylvester ($\text{In}(H) = \text{In}(MHM')$ pour toute matrice inversible M).

La force du théorème 1.11 ou de [179] est de constater que la \mathcal{D} -stabilité est un cas particulier de la $\partial\mathcal{D}$ -régularité correspondant à $\text{In}(P) = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$. Ainsi les théorèmes de Lyapunov en continu et discret (théorèmes 1.2 et 1.4) sont ils des cas particuliers du théorème 1.11 pour lesquels P est définie positive.

Ces considérations avaient été abordées dans un cadre polynomial par Hermite [178] mais aussi, sur le plan matriciel, par Howland [193] dont la contribution a été hélas involontairement reléguée en second plan suite aux contributions de Gutman et Jury [168, 167, 169]. Le lecteur intéressé peut aussi se référer au chapitre 19 écrit par D. Hershkowitz dans l'ouvrage collectif [185] ou encore à l'article [176] dont certains aspects sont à rapprocher du présent paragraphe.

Remarque 1.13 *Si A est $\partial\mathcal{D}$ -singulière, ce test de $\partial\mathcal{D}$ -régularité échoue car la LMI (1.65) n'est pas strictement satisfaite. En effet P présenterait alors une singularité qui entrainerait celle de $F(A, P)$ [17].*

1.3.2.2 Régions CMI

L'intérêt de la $\partial\mathcal{D}$ -régularité est d'essayer d'analyser la \mathcal{D} -stabilité d'une matrice lorsque \mathcal{D} se compose de plusieurs sous-régions \mathcal{D}_k éventuellement dissociées de \mathcal{D} et ce, en traitant ces sous-régions dans des conditions indépendantes. Il n'existe pas de CNS de \mathcal{D} -stabilité nominale pour une région CMI telle que définie en (1.12). En revanche, l'on peut décliner le théorème 1.11 pour toutes les instances de k .

Théorème 1.12 *(inspiré de [17]) Soient $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, \mathcal{D} une région CMI répondant à la définition 1.12 et $\partial\mathcal{D}$ sa frontière. La matrice A est $\partial\mathcal{D}$ -régulière s'il existe \bar{k} matrices hermitiennes $P_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$ solutions de*

$$F_k(A, P_k) = \mathcal{H}'(A, 1, 1)(R_k \otimes P_k)\mathcal{H}(A, 1, 1) = r_{k00}P_k + (r_{k01}P_k A)^H + r_{k11}A'P_k A < 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}. \quad (1.66)$$

Par ailleurs, la matrice A possède n_{k+} valeurs propres dans chaque sous-région \mathcal{D}_k et n_{k-} valeurs propres en dehors de \mathcal{D}_k si et seulement si toute solution hermitienne P_k de (1.66) a pour inertie $\text{In}(P_k) = [n_{k+}, n_{k-}, 0]$.

De plus, si $\partial\mathcal{D} = \bigcup_{k=1}^{\bar{k}} \partial\mathcal{D}_k$, la condition (1.66) devient nécessaire.

Il en résulte que pour chaque sous-région \mathcal{D}_k , l'inertie de la matrice P_k ou, plus précisément, le nombre n_{k+} , indique le nombre de valeurs propres de A dans \mathcal{D}_k . À partir des \bar{k} valeurs n_{k+} , il peut s'avérer possible de conclure quant à la \mathcal{D} -stabilité mais ce n'est pas toujours vrai.

La condition du théorème 1.12 n'est que suffisante car en fait, c'est une CNS de $\partial\mathcal{D}_k$ -régularité pour toutes les courbes $\partial\mathcal{D}_k$. Or, la $\partial\mathcal{D}$ -régularité implique la $\partial\mathcal{D}_k$ -régularité $\forall k$. Hélas, la

réciproque est fautive comme le montre la figure 1.1 où le spectre d'une matrice de dimension 2 est localisé dans une union \mathcal{D} de deux disques \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . La matrice A est $\partial\mathcal{D}$ -régulière mais elle est $\partial\mathcal{D}_k$ -singulière quel que soit $k \in \{1; 2\}$. Dans un tel cas, la LMI (1.66) ne peut être vérifiée.

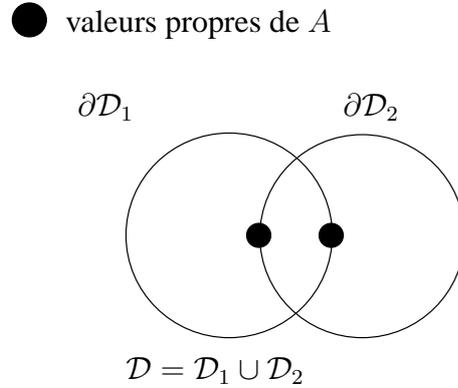


FIG. 1.1 – cas de non-nécessité de la condition (1.66)

Remarque 1.14 *L'on n'exploite pas ici le fait que $\partial\mathcal{D}_k$ est une région PMI/RP. En effet, la $\partial\mathcal{D}_k$ -régularité de A est en fait sa $\partial\mathcal{D}_k^C$ -stabilité. Or $\partial\mathcal{D}_k^C$, la région complémentaire de $\partial\mathcal{D}_k$, n'est pas une région PMI. Le théorème 1.1 ne peut donc être appliqué.*

1.3.2.3 Régions ECMI

Ici encore, il faut se garder de raisonner en termes de \mathcal{D} -stabilité mais plutôt en termes de $\partial\mathcal{D}$ -régularité.

Théorème 1.13 [16] *Soient $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, \mathcal{D} une région ECMI répondant à la définition 1.13 et $\partial\mathcal{D}$ sa frontière définie par (1.49). La matrice A est $\partial\mathcal{D}$ -régulière si et seulement s'il existe des matrices hermitiennes $P_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $k = 1, \dots, \bar{k}$ et des matrices hermitiennes définies positives $Q_{k,l}$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, $l = 1, \dots, \bar{l}_k$ solutions de*

$$\mathcal{W}(A, P_k, \{Q_{k,l}\}) = \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix}' \left(R_k \otimes P_k + \sum_{l=1}^{\bar{l}_k} (\Phi_{k,l} \otimes Q_{k,l}) \right) \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix} < 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}. \quad (1.67)$$

Démonstration : une fois n'est pas coutume dans ce mémoire, nous fournissons une preuve pour ce théorème. En effet, celle-ci propose un très bon aperçu du type de raisonnement qui permet d'établir l'ensemble des résultats de ce chapitre.

L'on note tout d'abord que la condition (1.67) peut se récrire

$$\mathcal{W}_k(A, P_k, \{Q_{k,l}\}) = F_k(A, P_k) + \sum_{l=1}^{\bar{l}_k} G_{k,l}(A, Q_{k,l}) < 0 \quad (1.68)$$

avec, en accord avec (1.66),

$$F_k(A, P_k) = r_{k00}P_k + (r_{k01}P_kA)^H + r_{k11}A'P_kA \quad (1.69)$$

et

$$G_{k,l}(A, Q_{k,l}) = \phi_{k,l00}Q_{k,l} + (\phi_{k,l01}Q_{k,l}A)^H + \phi_{k,l11}A'Q_{k,l}A = \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix}' (\Phi_{k,l} \otimes Q_{k,l}) \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix}. \quad (1.70)$$

Suffisance : supposons que la condition (1.68) soit satisfaite. Il existe pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A , un vecteur non nul $v \in \mathbb{C}^n$, tel que $Av = \lambda v$ (il est un vecteur propre de A). Par congruence, il vient

$$\begin{aligned} v' \mathcal{W}_k(A, P_k, \{Q_{k,l}\}) v &< 0 \\ \Leftrightarrow f_k(\lambda) v' P v + \sum_{l=1}^{\bar{l}_k} g_{k,l}(\lambda) v' Q_{k,l} v &< 0, \end{aligned}$$

où les fonctions $f_k(\cdot)$ émanent de la définition 1.12 des régions CMI et plus précisément de l'équation (1.41). Donc si λ appartient à $\partial\Gamma_k$, le premier terme de cette somme est nul (car $\lambda \in \partial\mathcal{D}_k \Leftrightarrow f_k(\lambda) = 0$) et le second terme est positif ou nul (car $v' Q_{k,l} v > 0 \forall v$ & $\lambda \in \mathcal{E}_k \Leftrightarrow g_{k,l}(\lambda) \geq 0 \forall \{k, l\}$). Une telle hypothèse contredit l'inégalité. Cette hypothèse est donc fautive et λ n'appartient pas à $\partial\Gamma_k$ quel que soit k , donc $\lambda \notin \partial\mathcal{D}$. Ce raisonnement est valable pour toute valeur propre de A donc A est $\partial\mathcal{D}$ -régulière.

Nécessité : si A est $\partial\mathcal{D}$ -régulière, alors elle est $\partial\Gamma_k$ régulière quel que soit $k \in \{1, \dots, \bar{k}\}$. L'on raisonne donc par rapport à une courbe $\partial\Gamma_k$. Les n valeurs propres de A , notées λ_i , vérifient l'une des trois conditions suivantes :

- (i) $f_k(\lambda_i) > 0$;
- (ii) $f_k(\lambda_i) < 0$;

(iii) $f_k(\lambda_i) = 0$ & $g_{k,l}(\lambda_i) < 0 \quad \forall l \in \{1, \dots, \bar{l}_k\}$.

Soit la matrice Λ ainsi définie :

$$\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{bmatrix}.$$

$\Lambda_1 \in \mathbb{C}^{n_{k-}}$ contient les valeurs propres pour lesquelles $f_k(\lambda_i) > 0$ donc vérifiant la condition (i). $\Lambda_2 \in \mathbb{C}^{n_{k+}}$ contient les valeurs propres pour lesquelles $f_k(\lambda_i) < 0$ donc vérifiant la condition (ii). $\Lambda_3 \in \mathbb{C}^{n_{k_0}}$ contient les valeurs propres pour lesquelles $f_k(\lambda_i) = 0$ donc vérifiant la condition (iii).

Il est possible de trouver deux scalaires $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\begin{cases} \alpha F_k(\Lambda_1, -I_{n_{k-}}) + \beta \sum_{l=1}^{\bar{l}_k} G_{k,l}(\Lambda_1, I_{n_{k-}}) < 0 \\ \alpha F_k(\Lambda_2, I_{n_{k+}}) + \beta \sum_{l=1}^{\bar{l}_k} G_{k,l}(\Lambda_2, I_{n_{k+}}) < 0 \\ \alpha F_k(\Lambda_3, 0) + \beta \sum_{l=1}^{\bar{l}_k} G_{k,l}(\Lambda_3, I_{n_{k_0}}) < 0 \end{cases}$$

où les trois inégalités sont déduites des conditions respectives (i), (ii) et (iii). Pour cela, constatant que les matrices impliquées dans ces inégalités sont diagonales, il suffit de prendre α suffisamment grand par rapport à β pour s'assurer que l'inégalité est vérifiée sur chaque élément diagonal.

En définissant \mathcal{I} par

$$\mathcal{I} = \alpha \begin{bmatrix} -I_{n_{k-}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_{k+}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

il vient

$$\mathcal{W}_k(\Lambda, \mathcal{I}, \{\beta I\}) = \underbrace{F_k(\Lambda, \mathcal{I})}_{< 0} + \sum_{l=1}^{\bar{l}_k} G_{k,l}(\Lambda, \beta I) < 0. \quad (1.71)$$

Soit \mathcal{J} la forme canonique de Jordan de la matrice A . Il existe une suite de matrices régulières T_h telle que [80] :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} (T_h \mathcal{J} T_h^{-1}) = \Lambda \quad (1.72)$$

(par exemple, si \mathcal{J} est un simple bloc de Jordan $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, T_h est égale à $\begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$). Puisque F_k et les diverses $G_{k,l}$ sont continues en leur premier argument, de (1.71), l'on peut déduire que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{W}_k(T_h \mathcal{J} T_h^{-1}, \mathcal{I}, \{\beta I\}) < 0. \quad (1.73)$$

Soit \mathcal{T} , une instance de T_h pour une valeur de h suffisamment grande mais vérifiant $h < \infty$ (assurant ainsi l'existence de \mathcal{T}^{-1}). L'on a

$$\mathcal{W}_k(\mathcal{T} \mathcal{J} \mathcal{T}^{-1}, \mathcal{I}, \{\beta I\}) < 0.$$

Si l'on applique l'opération de congruence suivante, l'on obtient

$$\mathcal{T}' \mathcal{W}_k(\mathcal{T} \mathcal{J} \mathcal{T}^{-1}, \mathcal{I}, \{\beta I\}) \mathcal{T} = \mathcal{W}_k(\mathcal{J}, \mathcal{T}' \mathcal{I} \mathcal{T}, \{\beta \mathcal{T}' \mathcal{T}\}) < 0.$$

Soit V la matrice modale de A telle que $\mathcal{J} = V A V^{-1}$. Une nouvelle congruence permet de retrouver (1.68) avec

$$P_k = V' \mathcal{T}' \mathcal{I} \mathcal{T} V = P'_k; \quad Q_{k,l} = \beta V' \mathcal{T}' \mathcal{T} V = Q'_{k,l} > 0 \quad \forall l \in \{1, \dots, \bar{l}_k\}. \quad (1.74)$$

Ce raisonnement est valable quel que soit k donc la condition (1.68) (ou (1.67)) est bien une condition nécessaire et suffisante de $\partial \mathcal{D}$ -régularité de A . ■

Ce théorème, quoiqu'originellement proposé dans [16], emprunte un certain nombre de concepts à [17] ainsi qu'à [21]. Il permet, par un choix judicieux des matrices $\Phi_{k,l}$, de lever les limites du théorème 1.12. Le cas de la figure 1.1 peut par exemple être traité sans difficulté.

L'on peut se poser la question de l'intérêt de la $\partial \mathcal{D}$ -régularité si celle-ci ne permet pas toujours de conclure sur la \mathcal{D} -stabilité nominale. C'est justement dans le cas robuste que cet intérêt apparaît. Si la matrice A est nominale \mathcal{D} -stable, il suffit, en présence d'une incertitude, que A reste $\partial \mathcal{D}$ -régulière pour conserver sa \mathcal{D} -stabilité. Les théorèmes 1.12 et 1.13 peuvent alors être avantageusement exploités. Nous y reviendrons dans le chapitre 2.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, de nombreuses conditions de \mathcal{D} -stabilité ainsi que quelques conditions de $\partial\mathcal{D}$ -régularité ont été présentées. Deux tendances se dégagent dans ces conditions, l'approche par régions PMI (dont les régions E²MI seront privilégiées par la suite) et l'approche ECMI associée à la notion de $\partial\mathcal{D}$ -régularité. Elles ne sont pas équivalentes et présentent toutes deux un intérêt dès lors que l'on souhaite pouvoir considérer une vaste gamme de régions \mathcal{D} non connexes.

Il serait sans doute intéressant de savoir si ces deux formulations de régions peuvent être réunies ou englobées en une seule description quoique cette perspective nous paraisse difficile à suivre. En revanche, d'autres perspectives plus modestes (bien que non triviales) peuvent être mentionnées :

- élargir la gamme de cas pratiques couvertes par les formulations PMI ou même GLMI à d'autres régions que des unions de régions, en particulier en exploitant les matrices Υ_k et Ψ_k , c'est-à-dire en considérant des régions non réduites ;
- résoudre le « problème 85 » de Wang [50] (ou « problème 6.9 » de [51]) c'est-à-dire prouver la conjecture de Gutman et Jury [169] (conjecture 1.1) ;
- déterminer une règle, si elle existe, qui permette de déduire du théorème 1.12, à partir des inerties des matrices P_k , une condition de \mathcal{D} -stabilité ;
- étudier l'inertie des matrices P_k vérifiant la condition (1.67) en fonction de la localisation du spectre de A (à l'instar de ce qui est mentionné dans le théorème 1.12) pour éventuellement compléter le théorème 1.13 ;
- trouver un moyen d'exploiter le caractère PMI/RP des ensembles $\partial\Gamma_k$ ou $\partial\mathcal{D}$ dans la formulation ECMI ;
- fusionner les deux approches présentées dans ce chapitre en une seule. Cette perspective nécessiterait probablement d'étendre la gamme des régions PMI en ajoutant une relation de type différence ($h_{\mathcal{D}}(s) \neq 0$).

Mais les conditions présentées ici conduisent avant tout à des conditions de \mathcal{D} -stabilité robuste. C'est tout l'enjeu du chapitre 2.

CHAPITRE 2

ANALYSE ROBUSTE

Ce chapitre reprend les conditions présentées dans le chapitre précédent. Néanmoins, la matrice considérée est soumise à une incertitude. Il s'agit donc d'analyser la \mathcal{D} -stabilité robuste de cette matrice. La nécessité des conditions nominales ne peut généralement pas être préservée. Cependant, pour certaines structures d'incertitude, des conditions suffisantes numériquement exploitables peuvent être obtenues. Elles sont ici présentées. Mais auparavant, il importe de préciser les incertitudes envisagées dans ce mémoire.

Sommaire

2.1	Présentation du problème	43
2.1.1	\mathcal{D} -stabilité robuste et $\partial\mathcal{D}$ -régularité-robuste	43
2.1.2	\mathcal{D} -stabilité quadratique et $\partial\mathcal{D}$ -régularité quadratique	44
2.1.3	\mathcal{D} -stabilité poly-quadratique et $\partial\mathcal{D}$ -régularité poly-quadratique	46
2.2	Incertitudes	48
2.2.1	Structure considérée : incertitude polytopique LFT	48
2.2.2	Divers cas particuliers	50
2.3	Conditions d'analyse robuste	52
2.3.1	Analyses qualitative et quantitative : notion de borne de robustesse	53
2.3.2	Stabilité robuste	55
2.3.3	Régions simples	60
2.3.4	Régions composées	62

2.4 Conclusion 72

2.1 Présentation du problème

Le chapitre précédent est dédié à la notion de \mathcal{D} -stabilité d'une matrice nominale. Ainsi peut-on aborder, au moins partiellement, les performances transitoires d'un modèle linéaire de système en analysant la localisation des valeurs propres de sa matrice dynamique A dans le plan de Laplace. Cependant, en pratique, cette analyse est loin d'être toujours judicieuse, en tout cas suffisante. Elle peut conduire à quelques désillusions. En effet, il est bien connu que les modèles des systèmes sont entachés d'incertitudes. En présence de ces incertitudes, il importe néanmoins d'attester ou non des performances, entre autres des performances transitoires. Or, de petites altérations de A peuvent engendrer une forte migration de son spectre. Aussi est-il utile de pouvoir analyser la \mathcal{D} -stabilité d'une matrice dynamique même si cette dernière est soumise à une incertitude.

Dans ce chapitre, nous détaillons d'abord, au cours de cette même partie, divers concepts en relation avec la notion d'analyse de la \mathcal{D} -stabilité d'une matrice incertaine. Dans une seconde partie, nous présentons l'incertitude considérée, à savoir l'incertitude polytopique LFT (*linear fractional transform*), ainsi que différents cas particuliers souvent rencontrés dans la littérature. Enfin, dans une troisième partie, nous exposons des outils d'analyse robuste en nous référant, entre autres, à diverses publications.

2.1.1 \mathcal{D} -stabilité robuste et $\partial\mathcal{D}$ -régularité-robuste

Dans ce paragraphe, nous précisons ce que l'on entend par \mathcal{D} -stabilité robuste et $\partial\mathcal{D}$ -régularité robuste.

Définition 2.1 Soient une région \mathcal{D} du plan de Laplace et une matrice incertaine $A(\Delta)$ où Δ représente une incertitude appartenant à un domaine Δ dit « domaine d'incertitude ». La matrice $A(\Delta)$ est \mathcal{D} -stable de manière robuste si et seulement si elle est \mathcal{D} -stable quel que soit $\Delta \in \Delta$.

De la même manière, l'on peut définir la $\partial\mathcal{D}$ -régularité robuste d'une matrice incertaine :

Définition 2.2 Soient un ensemble $\partial\mathcal{D}$ du plan de Laplace et une matrice incertaine $A(\Delta)$ où Δ appartient à un domaine d'incertitude Δ . La matrice $A(\Delta)$ est $\partial\mathcal{D}$ -régulière de manière robuste si et seulement si elle est $\partial\mathcal{D}$ -régulière quel que soit $\Delta \in \Delta$.

Pour ce qui est des conditions de \mathcal{D} -stabilité robuste, il est plus facile de raisonner en termes de matrices de Lyapunov. Le principe est de faire varier ces matrices en fonction de l'incertitude Δ . L'on peut alors, pour la classe des régions PMI décliner le théorème 1.1 de la façon suivante :

Théorème 2.1 Soient la matrice incertaine $A(\Delta) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ où $\Delta \in \Delta$ ainsi qu'une région PMI \mathcal{D} répondant à la définition 1.2. La matrice $A(\Delta)$ est \mathcal{D} -stable de manière robuste si et seulement s'il existe un ensemble $\{P_k(\Delta)\}$ de \bar{k} matrices $P_k(\Delta) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, dépendantes de l'incertitude et vérifiant

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{\mathcal{D}}(A(\Delta), \{P_k(\Delta)\}) < 0 \\ \mathcal{N}_{\mathcal{D}}(A(\Delta), \{P_k(\Delta)\}) = 0 \end{cases} \quad \forall \Delta \in \Delta, \quad (2.1)$$

où les expressions de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot)$ et $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot)$ sont données par (1.51).

De façon analogue, l'on peut traiter la $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice lorsque \mathcal{D} est une région ECMI. Il s'agit alors de faire dépendre de l'incertitude non seulement les matrices de Lyapunov P_k mais aussi les matrices $Q_{k,l}$ introduites au théorème 1.13. Ceci conduit à une déclinaison de ce même théorème de la façon suivante :

Théorème 2.2 Soient $A(\Delta) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice incertaine où $\Delta \in \Delta$, \mathcal{D} une région ECMI répondant à la définition 1.13 et $\partial\mathcal{D}$ sa frontière définie par (1.49). La matrice $A(\Delta)$ est $\partial\mathcal{D}$ -régulière de manière robuste si et seulement s'il existe des matrices hermitiennes $P_k(\Delta) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, et des matrices hermitiennes définies positives $Q_{k,l}(\Delta)$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, $l = 1, \dots, \bar{l}_k$, toutes dépendantes de l'incertitude, solutions de

$$\mathcal{W}(A(\Delta), P_k(\Delta), \{Q_{k,l}(\Delta)\}) < 0 \quad \forall \{k, \Delta\} \in \{1, \dots, \bar{k}\} \times \Delta, \quad (2.2)$$

où l'expression de $\mathcal{W}(\cdot, \cdot, \cdot)$ est donnée en (1.67).

Malheureusement, le test des conditions (2.1) et (2.2) est un problème qualifié de NP-difficile [68], c'est-à-dire qu'il est impossible de le résoudre en un temps polynomial. C'est pourquoi, sur la base de ces CNS, il convient de déduire des CS qui soient, certes pessimistes, mais exploitables sur le plan numérique. Ceci a conduit certains auteurs à introduire les concepts de \mathcal{D} -stabilité quadratique et de \mathcal{D} -stabilité poly-quadratique.

2.1.2 \mathcal{D} -stabilité quadratique et $\partial\mathcal{D}$ -régularité quadratique

Il s'agit là d'un concept issu de celui de stabilité quadratique. L'on doit cette idée à Barmish qui comprend qu'il est peut-être souhaitable, pour analyser la stabilité robuste, de se contenter de déterminer, si possible, une fonction de Lyapunov unique pour tout le domaine d'incertitude [36, 37, 47, 40]. L'extension naturelle de ce concept au cas de la \mathcal{D} -stabilité robuste conduit, dans le cas des régions PMI, à la définition suivante :

Définition 2.3 Soient la matrice incertaine $A(\Delta) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ où $\Delta \in \Delta$ ainsi qu'une région PMI \mathcal{D} répondant à la définition 1.2. La matrice $A(\Delta)$ est quadratiquement \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe un ensemble $\{P_k\}$ de \bar{k} matrices $P_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, indépendantes de l'incertitude et vérifiant

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{\mathcal{D}}(A(\Delta), \{P_k\}) < 0 \\ \mathcal{N}_{\mathcal{D}}(A(\Delta), \{P_k\}) = 0 \end{cases} \quad \forall \Delta \in \Delta, \quad (2.3)$$

où les expressions de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot)$ et $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot)$ sont données par (1.51).

Si la condition (2.3) est par définition nécessaire et suffisante pour que $A(\Delta)$ soit quadratiquement \mathcal{D} -stable, il n'en reste pas moins que l'implication

$$\mathcal{D}\text{-stabilité quadratique} \Rightarrow \mathcal{D}\text{-stabilité robuste}$$

est vraie alors que la réciproque l'est rarement.

Le test, direct ou indirect, de la condition (2.3) reste NP-difficile pour une structure quelconque d'incertitude. Cependant, pour certaines structures d'incertitude très classiques (que nous aborderons par la suite), il peut se révéler envisageable.

De la même manière, il est possible de définir la $\partial\mathcal{D}$ -régularité quadratique d'une matrice lorsque \mathcal{D} est une région ECMI :

Définition 2.4 Soient $A(\Delta) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice incertaine où $\Delta \in \Delta$, \mathcal{D} une région ECMI répondant à la définition 1.13 et $\partial\mathcal{D}$ sa frontière définie par (1.49). La matrice $A(\Delta)$ est quadratiquement $\partial\mathcal{D}$ -régulière si et seulement s'il existe des matrices hermitiennes $P_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, et des matrices hermitiennes définies positives $Q_{k,l}$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, $l = 1, \dots, \bar{l}_k$, toutes indépendantes de l'incertitude, solutions de

$$\mathcal{W}(A(\Delta), P_k, \{Q_{k,l}\}) < 0 \quad \forall \{k, \Delta\} \in \{1, \dots, \bar{k}\} \times \Delta, \quad (2.4)$$

où l'expression de $\mathcal{W}(\cdot, \cdot, \cdot)$ est donnée en (1.67).

Cette condition est exploitable pour certaines structures d'incertitude et l'implication

$$\partial\mathcal{D}\text{-régularité quadratique} \Rightarrow \partial\mathcal{D}\text{-régularité robuste}$$

est vraie alors que la réciproque l'est rarement.

2.1.3 \mathcal{D} -stabilité poly-quadratique et $\partial\mathcal{D}$ -régularité poly-quadratique

Ce paragraphe se limite au cas où le domaine d'incertitude est tel que tout Δ pris à l'intérieur de $\mathbf{\Delta}$ s'écrit comme une combinaison convexe d'instances $\Delta_i \in \mathbf{\Delta}$. En d'autres termes, Soient N instances d'incertitudes $\Delta_i \in \mathbf{\Delta}$ et le simplexe unitaire des coordonnées barycentriques

$$\Theta = \left\{ \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix} \in \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}^N \mid \sum_{i=1}^N \theta_i = 1 \right\}. \quad (2.5)$$

Tout $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ s'écrit

$$\Delta = \Delta(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i \Delta_i, \quad \theta \in \Theta. \quad (2.6)$$

Lorsque la dépendance de A en Δ est telle que A décrit elle-même une combinaison convexe de sommets A_i , l'on parle d'incertitude polytopique. Nous y reviendrons par la suite.

En corrélation avec cette structure d'incertitude, l'on peut définir la \mathcal{D} -stabilité poly-quadratique lorsque \mathcal{D} est une région PMI :

Définition 2.5 Soient la matrice incertaine $A(\Delta) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ où $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ vérifie la structure définie en (2.5-2.6) ainsi qu'une région PMI \mathcal{D} répondant à la définition 1.2. La matrice $A(\Delta)$ est poly-quadratiquement \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe un ensemble $\{P_k(\theta)\}$ de \bar{k} matrices $P_k(\theta) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, dépendantes de l'incertitude et vérifiant

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{\mathcal{D}}(A(\Delta(\theta)), \{P_k(\theta)\}) < 0 \\ \mathcal{N}_{\mathcal{D}}(A(\Delta(\theta)), \{P_k(\theta)\}) = 0 \end{cases} \quad \forall \theta \in \Theta, \quad (2.7)$$

où les expressions de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot)$ et $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot)$ sont données par (1.51) et où les matrices $P_k(\theta)$ vérifient

$$P_k(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i P_k(\Delta_i) \quad \forall \{k; \theta\} \in \{1, \dots, \bar{k}\} \times \Theta \quad (2.8)$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{\mathcal{D}}(A(\Delta_i), \{P_k(\Delta_i)\}) < 0 \\ \mathcal{N}_{\mathcal{D}}(A(\Delta_i), \{P_k(\Delta_i)\}) = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.9)$$

L'idée présente dans cette définition est donc que, lorsque Δ décrit $\mathbf{\Delta}$ selon une combinaison convexe de sommets Δ_i , les matrices de Lyapunov P_k suivent la même évolution convexe (c'est-à-dire avec les mêmes coordonnées barycentriques) en fonction de matrices de Lyapunov $P(\Delta_i)$ associées aux incertitudes extrémales.

De la même manière, l'on peut définir la $\partial\mathcal{D}$ -régularité poly-quadratique lorsque \mathcal{D} est une région ECMI :

Définition 2.6 Soient $A(\Delta) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice incertaine où $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ vérifie la structure définie en (2.5-2.6), \mathcal{D} une région ECMI répondant à la définition 1.13 et $\partial\mathcal{D}$ sa frontière définie par (1.49). La matrice $A(\Delta)$ est poly-quadratiquement $\partial\mathcal{D}$ -régulière si et seulement s'il existe des matrices hermitiennes $P_k(\theta) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, et des matrices hermitiennes définies positives $Q_{k,l}(\theta)$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, $l = 1, \dots, \bar{l}_k$, dépendantes de l'incertitude, solutions de

$$\mathcal{W}(A(\Delta(\theta)), \{P_k(\theta)\}, \{Q_{k,l}(\theta)\}) < 0 \quad \forall \{k, \theta\} \in \{1, \dots, \bar{k}\} \times \Theta, \quad (2.10)$$

où l'expression de $\mathcal{W}(\dots)$ est donnée en (1.67) et où les matrices $P_k(\theta)$ et $Q_{k,l}(\theta)$ vérifient

$$\begin{cases} P_k(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i P_k(\Delta_i) \\ Q_{k,l}(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i Q_{k,l}(\Delta_i) \quad \forall l \in \{1, \dots, \bar{l}_k\} \end{cases} \quad \forall \{k; \theta\} \in \{1, \dots, \bar{k}\} \times \Theta \quad (2.11)$$

et

$$\mathcal{W}(A(\Delta_i), P_k(\Delta_i), \{Q_{k,l}(\Delta_i)\}) < 0 \quad \forall \{k, \Delta\} \in \{1, \dots, \bar{k}\} \times \mathbf{\Delta}. \quad (2.12)$$

Les implications

\mathcal{D} -stabilité quadratique \Rightarrow \mathcal{D} -stabilité poly-quadratique \Rightarrow \mathcal{D} -stabilité robuste,
 $\partial\mathcal{D}$ -régularité quadratique \Rightarrow $\partial\mathcal{D}$ -régularité poly-quadratique \Rightarrow $\partial\mathcal{D}$ -régularité robuste,

sont vraies mais les réciproques respectives sont généralement fausses.

Il est difficile d'exploiter directement les conditions (2.7) et (2.10) mais pour certaines structures d'incertitudes dites polytopiques et pour certaines descriptions de régions, l'approche polyquadratique peut être efficacement utilisée. Nous y reviendrons dans la suite de ce chapitre.

Le qualificatif « poly-quadratique », que nous choisissons d'adopter ici, fut utilisé pour la première fois dans l'article [98] consacré à la stabilité des systèmes discrets variant dans le temps.

2.2 Incertitudes

Il existe pléthore de structures d'incertitude possibles. Nous ne pouvons les étudier toutes ni ne souhaitons même en établir un catalogue. Nous nous limitons évidemment à des descriptions dans l'espace d'état. Plus précisément, nous présentons d'abord la plus générale des incertitudes *que nous traiterons dans le corps de ce rapport*. Nous en déclinons ensuite divers cas particuliers connus en nous référant à la littérature.

Remarque 2.1 *Il est important de rappeler ici que la notion étudiée dans ce mémoire est la \mathcal{D} -stabilité d'une matrice (en pratique la matrice dynamique d'un modèle linéaire). Ce sont donc des incertitudes de matrices et non de systèmes qui sont présentées dans ce qui suit.*

2.2.1 Structure considérée : incertitude polytopique LFT

2.2.1.1 Transformée fractionnaire linéaire (LFT)

Il existe plusieurs façons de présenter le formalisme de la transformée fractionnaire linéaire (LFT en anglais), qui peut être vue comme une instance particulière du produit de Redheffer [299]. Nous nous contentons ici d'une vision simpliste largement suffisante pour nos besoins d'analyse robuste. Le principe de la LFT consiste à séparer l'incertitude de la matrice nominale en rejetant la première dans une boucle, définissant ainsi un modèle LTI bouclé, comme indiqué sur la figure 2.1.

Les équations décrivant ce système bouclé sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + Jw(t) \\ z(t) &= Lx(t) + Zw(t) \\ w(t) &= \Delta z(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

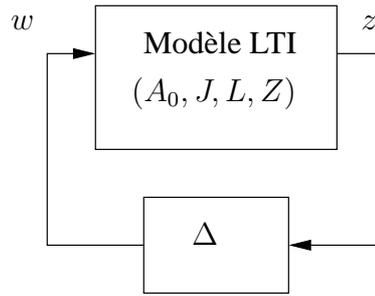


FIG. 2.1 – Principe de la LFT appliqué à une incertitude

Le vecteur $x(t)$ correspond à l'état du modèle alors que $w(t)$ et $z(t)$ sont des signaux fictifs uniquement dédiés à cette modélisation d'incertitude. La matrice d'état du système ainsi bouclé (donc incertain) s'écrit

$$A(\Delta) = A_0 + J\bar{\Delta}L \quad \text{avec} \quad \bar{\Delta} = \Delta(I - Z\Delta)^{-1}. \quad (2.14)$$

La LFT est dite bien posée si $\bar{\Delta}$ existe pour toute instance de l'incertitude Δ . Par la suite, nous supposons que toutes les LFT sont bien posées.

Il est facile de montrer que $\bar{\Delta}$ admet en fait deux expressions :

$$\bar{\Delta} = \Delta(I - Z\Delta)^{-1} = (I - \Delta Z)^{-1}\Delta. \quad (2.15)$$

Une matrice de transfert associée à une réalisation (A, B, C, D) , c.-à-d. $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$, est une LFT en $\frac{1}{s}$. Ainsi, le principe d'une LFT ne s'applique pas qu'à la description d'incertitude comme nous le verrons encore au chapitre 3.

2.2.1.2 Incertitude polytopique LFT

La matrice incertaine $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est décrite par

$$A = A(\theta, \Delta) = A_0(\theta) + J(\theta)\bar{\Delta}(\theta)L(\theta), \quad \text{avec} \quad \bar{\Delta} = \Delta(I - Z(\theta)\Delta)^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta \in (\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Delta}(\rho)). \quad (2.16)$$

Le domaine d'incertitude $\mathbf{\Delta}(\rho)$ est la boule des matrices complexes $\Delta \in \mathbb{C}^{q \times r}$ vérifiant $\|\Delta\|_2 \leq \rho$. Le scalaire ρ est appelé rayon de la boule. La matrice incertaine $\mathbb{M} \in \mathbb{C}^{(n+r) \times (n+q)}$, définie par

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_0 & \mathbb{J} \\ \mathbb{L} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

appartient au polytope de matrice \mathbb{M} défini par

$$\mathbb{M} = \left\{ \mathbb{M} = \mathbb{M}(\theta) \in \mathbf{C}^{(n+r) \times (n+q)} \mid \mathbb{M}(\theta) = \sum_{i=1}^N (\theta_i M_i); \theta \in \Theta \right\}, \quad (2.18)$$

où les matrices M_i , qui se décomposent donc en

$$M_i = \begin{bmatrix} A_{0_i} & J_i \\ L_i & Z_i \end{bmatrix}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (2.19)$$

sont des matrices extrêmes connues appelées sommets du polytope \mathbb{M} et où Θ est l'ensemble des coordonnées barycentriques définies en (2.5).

L'incertitude définie ici est dite polytopique LFT. En effet, il existe deux éléments incertains : θ et Δ . La nature de la dépendance de Δ , par similitude entre (2.16) et (2.14) montre qu'il s'agit d'une LFT. Par ailleurs, lorsque θ décrit Θ , la matrice M décrit un polytope de matrices. C'est l'incertitude la plus générale que nous étudions dans ce rapport.

Remarque 2.2 *Le fait de limiter le domaine auquel appartient Δ à une boule de matrices $\Delta(\rho)$ peut être interprété comme une restriction. L'on aurait pu envisager un tout autre domaine sans pour autant changer la nature polytopique LFT de l'incertitude (voir annexe B). Toutefois, cet ensemble convient bien aux développements ultérieurs.*

2.2.2 Divers cas particuliers

2.2.2.1 Incertitude LFT simple

Il se peut que le polytope \mathbb{M} se réduise à une seule matrice M constante (c.-à-d. $N = 1$) de sorte que les matrices A_0 , J , L et Z sont aussi constantes. Il est alors impropre d'utiliser le terme « polytopique » pour qualifier l'incertitude. L'on retrouve l'expression (2.14) et il est donc logique que cette incertitude soit simplement appelée LFT.

2.2.2.2 Incertitude bornée en norme

Si l'on suppose maintenant que l'incertitude LFT est telle que $Z = 0$, alors l'on obtient la description suivante :

$$A(\Delta) = A_0 + J\Delta L, \quad \Delta \in \mathbf{\Delta}(\rho). \quad (2.20)$$

Non seulement l'aspect polytopique est oublié mais par ailleurs, Δ et $\bar{\Delta}$ sont confondus. Puisque Δ appartient à $\mathbf{\Delta}(\rho)$, on a donc la contrainte de norme $\|\Delta\|_2 \leq \rho$ et l'incertitude est dite bornée en norme [290]. L'on peut bien sûr considérer une incertitude polytopique LFT ($N \neq 1$) particulière pour laquelle le polytope décrit par \mathbb{Z} se réduit 0 (c.-à-d. $Z_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, N\}$) et l'incertitude peut alors être qualifiée de polytopique bornée en norme.

2.2.2.3 Incertitude non structurée

L'on peut encore limiter la description présentée au paragraphe précédent en supposant que $J = L = I_n$. La matrice incertaine s'écrit alors

$$A(\Delta) = A_0 + \Delta, \quad \Delta \in \mathbf{\Delta}(\rho). \quad (2.21)$$

L'on parle d'incertitude non structurée [75]. Il est bien sûr possible d'envisager une incertitude polytopique LFT pour laquelle, d'une part, seule \mathbb{A}_0 appartient à un polytope \mathbf{A}_0 , et, d'autre part, $\mathbb{J} = \mathbb{L} = I_n$ et $\mathbb{Z} = 0$. Il s'agit d'un cas particulier d'incertitude polytopique bornée en norme.

2.2.2.4 Incertitude polytopique

Dans les différentes déclinaisons d'incertitude des paragraphes précédents, il subsistait toujours une incertitude additive impliquant Δ . Néanmoins, l'on peut considérer que seule \mathbb{A}_0 est affectée par l'incertitude de sorte que la matrice incertaine ne dépend plus que de θ et s'écrit

$$A = A(\theta) = \mathbb{A}_0(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i A_{0_i}, \quad \theta \in \Theta. \quad (2.22)$$

Cette incertitude est tout simplement qualifiée de polytopique [289, 47].

2.2.2.5 Incertitude affine structurée

La structure polytopique d'une incertitude se prête bien au développement d'outils d'analyse et commande robustes. Cependant, elle n'est pas immédiate lorsqu'il s'agit de modéliser un système. L'incertitude polytopique est souvent obtenue par reformulation de l'incertitude dite paramétrique structurée ou encore affine structurée, présentée ci-après. On la rencontre par exemple, avec quelques variantes, dans [377, 370, 84, 130, 250, 249, 13]. Elle se présente ainsi :

$$A = A(p) = A_0 + \sum_{j=1}^{\bar{j}} p_j A_{[j]}, \quad \text{avec } p_j \in [\underline{p}_j; \bar{p}_j]. \quad (2.23)$$

Dans cette expression, A_0 est la matrice nominale, $p \in \mathbb{R}^{\bar{j}}$ est un vecteur de paramètres p_j incertains (en général directement liés aux paramètres physiques) et qui interviennent de manière affine dans A . Les matrices $A_{[j]}$, connues, permettent de spécifier quelles sont les composantes de A entachées par l'imprécision sur p .

Lorsque p décrit l'hyperrectangle dans lequel il est contenu, A décrit en fait un polytope de matrices à $N = 2^{\bar{j}}$ sommets qui, dans ce cas, est précisément un paralléloétope de matrices (ou encore un paralléloétope de matrices). La description affine structurée est donc un cas particulier de l'incertitude polytopique. L'on peut bien sûr associer incertitude affine structurée et incertitude LFT ou bornée en norme.

Des formulations plus sophistiquées de l'incertitude affine structurée peuvent être trouvées dans [345, 24].

Remarque 2.3 *Une approche habituelle (pour ne pas dire classique) consiste à intégrer les incertitudes paramétriques (implicitement contenues dans la structure polytopique) dans le bloc Δ de la figure 2.1 générant ainsi une « LFT de bloc non-plein ». Cette approche, quoique tout à fait rigoureuse, plus générale en termes d'incertitudes prises en compte, et conduisant à des résultats peu conservatifs en analyse robuste, pose en revanche le problème de l'écriture minimale de la LFT (pas toujours aisée) et du temps de calcul inhérent aux outils d'analyse associés. C'est pourquoi nous privilégions l'incertitude polytopique LFT de bloc Δ plein.*

2.3 Conditions d'analyse robuste

Dans cette partie, nous exploitons les conditions du chapitre 1 (et les descriptions de régions associées) pour analyser la robustesse en \mathcal{D} -stabilité d'une matrice soumise à une incertitude polytopique LFT (§2.2.1.2) ou autre instance particulière de cette incertitude (§2.2.2).

Le cas très général des régions PMI n'est pas considéré (car fort difficile à gérer en présence d'incertitude et générant des notations très encombrantes) mais nous lui préférons des classes

de régions un peu moins larges telles que les régions E²MI notamment. Les régions non PMI sont envisagées.

Les conditions obtenues sont conservatives c'est-à-dire suffisantes. Ce conservatisme est inhérent aux concepts utilisés pour déterminer les conditions, à savoir, ceux présentés dans la partie 2.1.

2.3.1 Analyses qualitative et quantitative : notion de borne de robustesse

Nous établissons là une nuance entre deux types d'analyse robuste :

- *analyse qualitative* : elle consiste à figer le domaine d'incertitude, en particulier sa taille et à tenter d'affirmer de manière qualitative (c.-à-d. booléenne) si la matrice incertaine est \mathcal{D} -stable vis-à-vis du domaine défini ;
- *analyse quantitative* : elle consiste à définir une structure d'incertitude et une forme de domaine, sans spécifier sa taille, puis à estimer la taille maximale de ce domaine pour laquelle la \mathcal{D} -stabilité robuste peut être attestée.

Les paragraphes suivants précisent ces deux notions au regard de l'incertitude polytopique LFT.

2.3.1.1 Analyse qualitative

Il s'agit pour notre cas de clairement déterminer par avance le polytope \mathbf{M} défini en (2.18) ainsi que le rayon de la boule de matrices $\Delta(\rho)$. Ensuite, l'analyse consiste à répondre par *oui* ou par *non* à la question : peut-on affirmer que la matrice incertaine décrite en (2.16) est \mathcal{D} -stable (pour une région \mathcal{D} définie au préalable) quel que soit $\{\theta; \Delta\} \in \Theta \times \Delta(\rho)$? C'est généralement ainsi que l'on entend le concept d'analyse robuste.

2.3.1.2 Analyse quantitative : borne et rayon de robustesse

Cette façon de procéder sera plutôt la nôtre. L'on suppose par exemple que le polytope \mathbf{M} défini en (2.18) est parfaitement décrit au travers de ces sommets M_i . L'analyse quantitative peut alors consister à tenter d'estimer la plus grande valeur de ρ , le rayon de la boule de matrices $\Delta(\rho)$, pour laquelle la matrice incertaine (2.16) est \mathcal{D} -stable. Le conservatisme des conditions présentées dans ce chapitre est tel que cette valeur ne peut pas toujours être atteinte. Il faut alors distinguer deux concepts :

- le *rayon de \mathcal{D} -stabilité*, c'est-à-dire la valeur idéale, non pessimiste, du plus grand rayon pour lequel la \mathcal{D} -stabilité robuste est vraie. Cette valeur n'est pas toujours atteignable à l'aide de nos conditions (ni même d'autres d'ailleurs). La notion de rayon de \mathcal{D} -stabilité est directement inspirée de celle de rayon de stabilité [182] ;

- une *borne de \mathcal{D} -stabilité robuste* ou borne de robustesse, qui est une borne inférieure du rayon de \mathcal{D} -stabilité obtenue grâce à une condition conservative de \mathcal{D} -stabilité. Il importe bien sûr d'obtenir des conditions non conservatives qui permettent à une borne de robustesse d'égaliser le rayon de \mathcal{D} -stabilité.

Remarque 2.4 *Il est aussi possible de plutôt figer la valeur du rayon ρ et chercher la taille du plus grand polytope autorisant la \mathcal{D} -stabilité robuste. Ceci est particulièrement adapté au cas où \mathbf{M} est un orthotope de matrices, à l'instar de ce qui est présenté dans [24]. En général, le raisonnement se fait plutôt directement sur l'incertitude affine structurée. Le cas de la stabilité est notamment traité dans [318] et sa célèbre mesure κ_m , ou encore grâce à la notion de valeur singulière structurée (μ -analyse) [117, 129] (voir aussi [258, 123] pour une vision plus abordable de μ). Ce rayon de stabilité « structuré » est clairement défini dans [183]. De nombreuses façons d'estimer ce rayon sont proposées : [377, 327, 250, 369, 155]. L'extension à d'autres régions est proposée dans [370, 35, 249, 87, 92, 88, 91, 30]. Ce ne sera toutefois pas la façon d'aborder le problème dans ce mémoire où le polytope sera fixé préalablement. Les techniques présentées dans le rapport peuvent souvent s'adapter à ce cas de figure par extension des notions présentées dans [24].*

Il faut faire une distinction fondamentale, que connaissent les lecteurs familiers de la μ -analyse, entre deux rayons de \mathcal{D} -stabilité robuste :

- le rayon complexe de \mathcal{D} -stabilité, que l'on notera $r_{\mathcal{D}}^{[\mathbb{C}]}$, et qui désigne donc la plus grande valeur de ρ pour laquelle la \mathcal{D} -stabilité robuste de $A(\theta, \Delta)$ est vraie quels que soient $\theta \in \Theta$ et la matrice *complexe* $\Delta \in \Delta(r_{\mathcal{D}}^{[\mathbb{C}]})$;
- le rayon réel de \mathcal{D} -stabilité, que l'on notera $r_{\mathcal{D}}^{[\mathbb{R}]}$, et qui désigne donc la plus grande valeur de ρ pour laquelle la \mathcal{D} -stabilité robuste de $A(\theta, \Delta)$ est vraie quels que soient $\theta \in \Theta$ et la matrice *réelle* $\Delta \in \Delta(r_{\mathcal{D}}^{[\mathbb{R}]})$.

La distinction porte donc sur le fait que le rayon réel suppose une restriction de la boule de matrices Δ aux matrices réelles. Cette restriction, quoique naturelle en automatique, est difficile à prendre en compte, de même que les automaticiens savent qu'il est souvent plus délicat d'approcher μ réelle que μ complexe. Dans la suite de ce rapport, nous envisageons l'estimation du rayon complexe de \mathcal{D} -stabilité, sans intégrer la réalité de la matrice d'état A et de son incertitude. Pour le calcul d'un rayon réel, si de stabilité robuste seulement il est question, nous conseillons la lecture des articles [181, 295, 45]. Il est à noter que l'on peut définir de la même manière rayons complexe et réel de \mathcal{D} -stabilité quadratique.

Dans ce qui suit, l'analyse est généralement quantitative et le rayon complexe de \mathcal{D} -stabilité est recherché, approché. Pour les résultats concernant les $\partial\mathcal{D}$ -régularité, il en est de même mais l'on parle alors de rayon complexe (voire réel) de $\partial\mathcal{D}$ -régularité $r_{\partial\mathcal{D}}^{[\mathbb{C}]}$ (resp. $r_{\partial\mathcal{D}}^{[\mathbb{R}]}$)

2.3.2 Stabilité robuste

Nous commençons ici par traiter le cas de la stabilité robuste. En d'autres termes, la région considérée dans ce paragraphe est soit le demi-plan gauche ouvert, soit le disque unitaire ouvert.

2.3.2.1 Bornes de stabilité robuste

Aucun résultat n'est clairement exposé ici. Il s'agit simplement de citer quelques résultats de la littérature concernant la stabilité robuste.

La question de la stabilité robuste est venue très tôt avec la notion de marge de stabilité mais pour aborder le problème tel que nous l'avons formulé, il nous paraît judicieux de faire remonter les résultats à l'article de Patel et Toda [282]. Les auteurs cherchent à satisfaire l'inégalité de Lyapunov (1.52) en présence d'une incertitude non structurée (§2.2.2.3) ou affine structurée (§2.2.2.5). Ils obtiennent les premières bornes de robustesse en s'appuyant, sans vraiment le définir, sur le concept de stabilité quadratique (cf. §2.1.2).

Ces bornes sont à l'origine d'un pan de la littérature sur l'analyse robuste quantitative. En effet, de nombreux auteurs se sont évertués à réduire le pessimisme de ces bornes en affinant les conditions présentées ou en revoyant l'approche. En première ligne parmi ces auteurs, citons R. K. Yedavalli [368, 372, 225, 371] et notamment son utilisation du produit bialterné [369] reprise efficacement dans [155], sans oublier d'autres contributions intéressantes telles que [377, 327]. Citons encore [250] qui formalise bien le lien entre les bornes de type « Patel et Toda » et la notion de stabilité quadratique [36] en obtenant notamment des bornes non pessimistes en termes de stabilité quadratique. Notons toutefois que pour une incertitude bornée en norme, le résultat de [295] est le plus abouti et pour tout dire, peut-être définitif car le rayon réel de stabilité est atteint.

Il s'avère que la stabilité quadratique n'est pas aussi conservatrice qu'on pourrait le penser quand d'incertitude non structurée il est question. C'est le point que nous abordons dans le paragraphe suivant.

2.3.2.2 Incertitude LFT et rayon complexe de stabilité

Ce paragraphe résume brièvement les contributions de [290] et surtout [216, 279, 315]. Si l'on suppose que \mathcal{D} est la région de stabilité (au sens de Schur ou de Hurwitz), alors l'on peut montrer que pour une incertitude LFT (non polytopique) (cf. §2.2.2.1), le concept de stabilité quadratique n'est pas conservatif. En effet, il peut être prouvé, dans ce cas, que calculer le rayon complexe de stabilité revient à calculer l'inverse de la norme \mathcal{H}_∞ du modèle de réalisation (A_0, J, L, Z) . Or cette norme peut être atteinte numériquement grâce au lemme de Kalman-Yakubovich-Popov [212, 3, 356] particularisé au lemme bornée réel, notamment dans leurs

versions LMI [140, 298, 295]. Ces conditions ne font intervenir qu'une seule matrice de Lyapunov, indépendante de Δ . Ainsi, l'on déduit que le rayon complexe de stabilité est aussi le rayon (complexe ou réel) de stabilité quadratique. Ceci reste d'ailleurs vrai lorsque \mathcal{D} est tout autre demi-plan ou disque du plan de Laplace, et ce par translation ou similitude appropriées. Nous y reviendrons un peu plus loin.

En résumé de ce paragraphe, lorsque \mathcal{D} est une région unitaire, c'est-à-dire un disque ou un demi-plan, stabilité robuste complexe et stabilité quadratique, vis-à-vis d'une incertitude LFT, sont équivalentes.

Remarque 2.5 À propos du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov, il convient de noter que nombre de résultats de robustesse de ce mémoire font apparaître des formes de LMI qui en sont très proches. Ce lemme est attribué plutôt à Yakubovich et Kalman et son application la plus connue est le lemme borné réel. Toutefois, une autre application en est le lemme positif réel dont l'origine remonte plutôt à Popov, ainsi associé à ce résultat. Enfin, Anderson est également parfois reconnu comme « co-auteur » de ce lemme [3].

2.3.2.3 Le cas polytopique

Lorsque l'incertitude est simplement polytopique telle que celle décrite en (2.22), une analyse qualitative est souvent privilégiée.

Une première approche consiste à étendre les principes de Barmish [36], c'est-à-dire la notion de stabilité quadratique qui consiste à déterminer une seule matrice de Lyapunov pour tout le domaine d'incertitude. Cette approche est largement exploitée dans [47] et les thèses [289, 8, 97] peuvent être consultées. À titre d'illustration de nos propos, nous donnons les théorèmes suivants, inspirés du travail de [36, 47, 289] :

Théorème 2.3 Soit la matrice A définie comme en (2.22). Elle est quadratiquement stable au sens de Hurwitz (ou au sens de Schur) si et seulement s'il existe une matrice $P = P' > 0$ telle que

$$A'_{0_i}P + PA_{0_i} < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (2.24)$$

ou respectivement

$$\begin{bmatrix} -P & A'_{0_i}P \\ PA_{0_i} & -P \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.25)$$

L'inégalité (2.24) est celle de Lyapunov (1.52) déclinée pour chaque sommet mais en conservant la même matrice P . De même pour l'inégalité (2.25) mais en partant de l'inégalité de Stein

(1.54) et en appliquant le complément de Schur [65].

Cette approche associant stabilité quadratique, LMI et approche de type « Lyapunov » est très populaire tant en analyse qu'en synthèse.

Une alternative efficace consiste à envisager la \mathcal{D} -stabilité poly-quadratique plutôt que simplement quadratique. Cette solution est pertinente lorsque l'incertitude est polytopique. L'on peut citer nombre de contributions allant dans ce sens mais puisqu'il faut parfois faire un choix, nous commençons par mentionner la condition suffisante de stabilité poly-quadratique au sens de Hurwitz présentée dans [158] :

Théorème 2.4 [158] *Soit une matrice incertaine A définie comme en (2.22). Cette matrice est poly-quadratiquement stable au sens de Hurwitz s'il existe N matrices $P_i = P_i' > 0$, $i = 1, \dots, N$, ainsi que deux matrices \tilde{F} et \hat{F} telles que :*

$$\begin{bmatrix} A_{0_i}' \tilde{F}' + \tilde{F} A_{0_i} & P_i + A_{0_i}' \hat{F}' - \tilde{F} \\ P_i + \hat{F} A_{0_i} - \tilde{F}' & -\hat{F} - \hat{F}' \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.26)$$

Dans cette condition suffisante, il existe une matrice de Lyapunov P_i par sommet et ce sont les matrices \tilde{F} et \hat{F} qui sont constantes sur tout le polytope. A est poly-quadratiquement \mathcal{D} -stable car la matrice de Lyapunov se décline en fait, sur le polytope, en fonction de θ de la façon suivante :

$$P(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i P_i, \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (2.27)$$

Le cas de la stabilité au sens de Schur est intéressant comme le montre le théorème suivant :

Théorème 2.5 [108] *Soit une matrice incertaine A définie comme en (2.22). Cette matrice est poly-quadratiquement stable au sens de Schur s'il existe N matrices $P_i = P_i' > 0$, $i = 1, \dots, N$, ainsi qu'une matrice \hat{F} telles que :*

$$\begin{bmatrix} -P_i & A_{0_i}' \hat{F}' \\ \hat{F} A_{0_i} & P_i - \hat{F} - \hat{F}' \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.28)$$

En réalité, le théorème 2.5 est très fortement lié au théorème 2.4 en ce sens qu'ils ne sont tous deux que des applications du lemme d'élimination des matrices [329, Théorème 2.3.12] (voir aussi §2.3.3.3 et annexe C) même s'ils n'ont pas initialement été présentés ainsi. Comme dans le cas de la condition (2.26), la condition (2.28) induit une matrice de Lyapunov dépendant des

paramètres telle que celle donnée par (2.27). Si l'on compare la condition (2.28) à la condition (2.26), l'on constate que \tilde{F} n'y apparaît plus. La prendre nulle n'est possible que dans le cas discret. Certes, il en résulte en analyse un accroissement du conservatisme (qui n'est pas inéluctable comme il sera vu au paragraphe 2.3.3.3) mais la condition (2.28) est directement exploitable dans sa forme duale en synthèse par retour statique, et ce de manière très efficace [108].

Il peut être démontré que les conditions (2.26) et (2.28) sont rigoureusement moins conservatives que la stabilité quadratique (conditions (2.24) et (2.25)). Cette amélioration a d'ailleurs été estimée d'un point de vue numérique dans [14]. Il existe, dans le cas discret, une condition encore moins conservatrice [297] qui consiste à augmenter le nombre de LMI. Malheureusement, bien que très efficace pour le disque, elle convient assez mal, pour des raisons purement numériques, à des régions sophistiquées (non connexes par exemple).

2.3.2.4 Le cas étonnant des systèmes variant dans le temps

Ce paragraphe se situe un peu en marge de notre propos puisqu'il concerne des systèmes discrets incertains polytopiques *variant dans le temps*. Néanmoins, il est directement connecté à ce qui vient d'être présenté, plus précisément à la condition (2.28).

Théorème 2.6 [98] *Soit A , la matrice d'évolution d'un modèle discret, décrite par (2.22) où $\theta = \theta(t) \in \Theta$ est une fonction quelconque du temps t . Le modèle est poly-quadratiquement stable si et seulement s'il existe N matrices $P_i = P_i' > 0$, $i = 1, \dots, N$, (ainsi éventuellement que N matrices \hat{F}_j , $i = 1, \dots, N$) telles que*

$$\begin{bmatrix} -P_i & A'_{0_i} P_j \\ P_j A_{0_i} & -P_j \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \{i, j\} \in \{1, \dots, N\}^2 \quad (2.29)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -P_i & A'_{0_i} \hat{F}_j' \\ \hat{F}_j A_{0_i} & P_j - \hat{F}_j - \hat{F}_j \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \{i, j\} \in \{1, \dots, N\}^2. \quad (2.30)$$

L'intérêt de ce résultat, outre d'introduire pour la première fois le vocable « poly-quadratique », est de montrer que la condition (2.28) s'adapte parfaitement au cas variant dans le temps au point de fournir une CNS de stabilité poly-quadratique (qui reste néanmoins suffisante pour la stabilité uniforme asymptotique de tels systèmes). Cette condition est vraie quelle que soit la fonction $\theta(t)$, même si elle n'est pas analytique, de sorte que certaines classes de systèmes hybrides composés de systèmes échantillonnés pouvant commuter d'un modèle à un autre à chaque temps d'échantillonnage peuvent être analysées à partir de cet outil. De plus, la condition duale de (2.30) peut générer une condition suffisante de stabilisation par retour d'état.

De façon générale, le formalisme polytopique peut se prêter à certaines techniques d'analyse de commande LPV (*linear parameter-varying* c.-à-d. relatives à ces systèmes dépendant

linéairement de paramètres variant (lentement) dans le temps). L'on peut associer le contexte au LPV au contexte incertain. Le lecteur trouvera de nombreuses informations et références dans la thèse [95] et une récente évolution dans l'article [99].

2.3.2.5 À propos de l'approche « multimodèles »

Ce paragraphe a valeur de remarque sur la possibilité d'utiliser le formalisme polytopique dans la description des *multimodèles*. Il s'agit là d'un domaine en grande partie inconnu de nous et dans lequel nous ne nous aventurerons pas trop, mais dont le lien avec le propos de ce rapport, s'il n'est facilement détaillable, peut au moins être mentionné. Ce mémoire étant écrit en français, il serait en outre dommage de ne pas évoquer certaines connexions avec les travaux de la communauté française. Grossièrement, sans équation, les multimodèles peuvent être vus comme un moyen d'approcher le comportement d'un système très complexe (admettant un modèle non linéaire par exemple) par un ensemble de modèles entre lesquels le système évoluerait. Ces modèles peuvent entre autres correspondre à divers points de fonctionnement, le système passant des uns aux autres selon une loi pas forcément triviale. L'on retrouve un peu la même idée que dans le paragraphe précédent, puisque les modèles de points de fonctionnement peuvent être associés aux sommets d'un polytope à l'intérieur duquel le multimodèle varie. Il y a donc une variation temporelle des coordonnées barycentriques. De tels multimodèles interviennent aussi dans un contexte de logique floue [374] puisqu'ils coïncident exactement avec les fameux modèles de Takagi-Sugeno [340, 335]. À l'instar des études de robustesse, il est possible de tester la stabilité de multimodèles en prouvant l'existence de fonctions de Lyapunov quadratiques [342, 343, 344, 49] ou poly-quadratiques [200, 49, 341, 165, 273, 72]. Les conditions de l'article [98] évoquées au paragraphe précédent peuvent tout à fait être utilisées dans un tel contexte. La stabilisation des multimodèles est aussi possible grâce à de telles approches mais il ne nous appartient pas de poursuivre plus avant ce cheminement. Force détails peuvent être trouvés dans la thèse [71] qui est le réservoir dans le quel nous avons puisé les présentes explications. Le lecteur intéressé par cet aspect est donc invité à étudier cette thèse.

Toujours dans l'idée d'analyser la stabilité de systèmes non linéaires assimilables à des modèles de Takagi-Sugeno, il est possible d'utiliser l'idée de [267, 268] selon laquelle un système *discret* est stable si l'on peut assurer qu'il existe une fonction de Lyapunov, quadratique ou non, faisant systématiquement apparaître un décrétement sur une suite quelconque de p échantillons consécutifs de l'état (p étant fixé). Si p est égal à 1, la décroissance de la fonction est uniforme et l'on retrouve les concepts classiques. Le fait de considérer une décroissance moyenne sur plusieurs périodes permet de réduire le conservatisme des méthodes classiques, au prix parfois de la complexité numérique (de certaines relaxations LMI par exemple). Cette idée est exploitée tant en analyse qu'en synthèse dans les articles [227, 228, 229] et dans le troisième chapitre de la thèse [226].

2.3.3 Régions simples

Nous nous éloignons maintenant des régions de stabilité pour considérer des régions un peu plus sophistiquées.

2.3.3.1 Régions Ω

C'est d'abord avec le secteur que la généralisation des résultats d'analyse robuste débuta. Inspirés par les conditions nominales telles que celle de [105], divers auteurs ont proposé des bornes de robustesse relatives au secteur [202, 204, 205, 203, 251]. Le lecteur trouvera plusieurs références dans [34, 31]. L'idée reste d'étendre le travail de [282]. Mais les contributions les plus significatives concernent aussi bien les régions de premier ordre que de second ordre et les incertitudes non structurées et/ou affines structurées. Citons pêle-mêle [370, 35, 191, 90, 86, 87, 92, 249, 26, 323]. Quelque peu différente de l'approche de Patel et Toda [282], une autre approche reposant sur la notion de norme logarithmique [112, 352], par extension des résultats de [334] relatifs à la stabilité robuste, a permis d'obtenir des bornes alternatives dans le cas d'une incertitude non structurée [218, 88, 91, 34].

Nous avons choisi de ne pas détailler ces résultats ici car, d'une part, cela aurait nécessité un développement long et fastidieux qui aurait nui à la lisibilité du rapport, d'autre part, il nous semble que ces résultats sont un peu dépassés aujourd'hui. En outre, peu d'entre eux se présentent sous forme LMI. Le lecteur pourra trouver plus ample information sur ces bornes de robustesse dans deux thèses : [84, 13].

2.3.3.2 Régions LMI

Dans ce paragraphe, nous nous contentons d'une incertitude polytopique et d'une analyse qualitative.

Théorème 2.7 [80] *Soient une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ polytopique telle celle définie par (2.22) et une région LMI \mathcal{D} répondant à la définition 1.5. La matrice A est quadratiquement \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe N matrices hermitiennes définies positives $P_i, i = 1, \dots, N$, telles que*

$$\alpha \otimes P + (\beta \otimes (PA_{0_i}))^H < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.31)$$

Ce résultat étend bien sûr le théorème 2.3 à toute région LMI. Il est en outre directement exploitable dans sa forme duale pour une stabilisation quadratique par retour d'état. Il existe des extensions au cas des incertitudes bornées en norme [81] qui nécessitent d'introduire une contrainte de rang sur β mais sont très compétitives néanmoins. La formulation LMI se prête au cas de la \mathcal{D} -stabilité poly-quadratique mais nous préférons pour cela la formulation EMI convexe.

Une analyse quantitative a permis de déterminer des bornes de robustesse par rapport à des incertitudes non structurées et affines structurées [28, 27]. Nous ne mettons pas ces résultats en exergue et leur préférons ceux exposés ultérieurement.

2.3.3.3 Régions EMI

Il a été vu au chapitre 1 que la classe des régions EMI convexes se confondait avec celles des régions LMI et il n'est donc pas surprenant que la condition (2.31) trouve son équivalent en utilisant une description EMI de \mathcal{D} . Cette condition est proposée dans [287] mais nous choisissons de l'ignorer ici pour lui privilégier une autre analyse qualitative en termes de \mathcal{D} -stabilité poly-quadratique.

Théorème 2.8 [287, 284] *Soient une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ polytopique telle que celle définie en (2.22) et une région EMI \mathcal{D}_R répondant à la définition 1.6. A est poly-quadratiquement \mathcal{D}_R -stable s'il existe N matrices $P'_i = P_i > 0$, $i = 1, \dots, N$ et une matrice G telles que :*

$$R \otimes P_i + \left(G \begin{bmatrix} A_{0_i} & -I_n \end{bmatrix} \right)^H < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.32)$$

Ce théorème admet les théorèmes 2.4 et 2.5 comme cas particuliers. Il permet de voir plus facilement le lien avec le lemme d'élimination des matrices [329, Théorème 2.3.12] (voir aussi annexe C) et de voir que le théorème 2.4 a un équivalent en discret. Le théorème 2.5 est un cas particulier de cet équivalent pour lequel

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{F} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

La \mathcal{D}_R -stabilité quadratique est une condition suffisante d'existence d'une solution à (2.32) [287].

L'on peut aussi réaliser une analyse quantitative si l'on considère que l'incertitude est polytopique LFT. Pour cela, l'on peut s'inspirer des travaux de [55, 59] pour déterminer une borne inférieure de $r_{\mathcal{D}_R}^{[\mathbb{C}]}$ ou de l'article [24] si l'analyse quantitative porte sur la taille du polytope. Toutefois, nous préférons ne pas exposer cette analyse ici. Nous précisons cependant que la recherche d'une borne minorante de $r_{\mathcal{D}_R}^{[\mathbb{C}]}$ sera considérée comme un cas particulier dans le paragraphe 2.3.4.3.

De même que la condition proposée dans l'article [297] permet d'améliorer les tests de stabilité poly-quadratique au sens de Schur, aux prix d'une augmentation du nombre de LMI et donc du temps de calcul, suivant le même principe, l'on peut améliorer le théorème 2.8 [236].

Remarque 2.6 *Il est important d'insister ici sur l'intérêt du multiplicateur G introduit en (1.60). C'est lui qui, restant constant plutôt que P , permet d'obtenir une matrice de Lyapunov polytopique. Ceci justifie l'utilisation de la formulation EMI.*

2.3.4 Régions composées

2.3.4.1 Régions $U\Omega$

Nous ne souhaitons pas développer ce point non plus. Il n'est pas exagéré de dire que ce n'est pas cette formulation de régions qui conduit aux meilleurs bornes. Le cas des incertitudes non structurées et affines structurées est étudié dans [32], comme une généralisation des résultats de [282, 370, 35, 92] mais nous lui préférons, pour raison de conservatisme, les résultats exposés au paragraphe 2.3.4.3. Pour une union de n disques disjoints et une incertitude non structurée, voir l'article [12].

2.3.4.2 Régions GLMI

Là encore, nous ne présentons pas de résultat précis. Nous citons cependant quelques documents qui proposent des bornes de \mathcal{D} -stabilité robuste relatives à des incertitudes non structurées et structurées [29, 30]. Par ailleurs, nous conseillons au lecteur de consulter [79] pour son étude de l'incertitude polytopique, des régions GLMI, et pour l'ensemble des concepts qui y sont présentés. Néanmoins, le paragraphe suivant propose, à notre sens, des résultats plus consistants avec le reste du rapport.

2.3.4.3 Régions E^2MI

Les théorèmes suivants figurent parmi les résultats essentiels présentés dans ce chapitre. Ils font suite aux travaux de [18] mais sont essentiellement tirés de [55, 59, 58] avec de petits emprunts à [304].

Théorème 2.9 (« lemme borné réel étendu ») *Soient la matrice incertaine A de type polytopique LFT décrite en (2.16) ainsi qu'une région E^2MI \mathcal{D}_U répondant à la définition 1.9. La matrice A est quadratiquement \mathcal{D}_U -stable vis-à-vis de $\Delta(\rho)$ et Θ s'il existe un ensemble \mathcal{P} de \bar{k} matrices complexes $P_k = P'_k > 0$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, telles que, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$,*

$$\mathbf{Q}_U(M_i, \mathcal{P}, \gamma) = \begin{bmatrix} I_{dn} & 0 & 0 \\ I_d \otimes A_{0_i} & I_d \otimes J_i & 0 \\ 0 & I_{dq} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dr} \end{bmatrix}' \left[\begin{array}{c|c|c} \sum_{k=1}^{\bar{k}} R_k \otimes P_k & 0 & \frac{I_d \otimes L'_i}{0} \\ \hline 0 & -I_{dq} & I_d \otimes Z'_i \\ \hline I_d \otimes L_i & 0 & I_d \otimes Z_i \\ & & -\gamma I_{dr} \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_{dn} & 0 & 0 \\ I_d \otimes A_{0_i} & I_d \otimes J_i & 0 \\ 0 & I_{dq} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dr} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.34)$$

avec $\gamma = \rho^{-2}$.

Il suffit de lire [55] pour trouver tous les arguments nécessaires à la démonstration de ce théorème.

Il faut d'abord noter que (2.34) est une LMI en P_k et γ et qu'elle peut donc être résolue tout en minimisant γ . Ceci revient à faire une analyse quantitative sur la taille de $\Delta(\rho)$ plutôt que qualitative. L'on note ρ^* , la valeur maximale de ρ obtenue grâce à cette condition.

La condition (2.34) est seulement suffisante. Dans le cas où $N = 1$ (incertitude LFT simple) et $d = 1$ (en pratique, \mathcal{D}_U est alors une union de régions EMI d'ordre 1), la condition devient aussi nécessaire pour la \mathcal{D}_U -stabilité quadratique (il s'agit d'une application de la S-procédure [148, 366, 134, 65, 198] avec un seul bloc alors que le cas $d \neq 1$ implique plusieurs blocs).

Dans le cas où $N = 1$ et $\bar{k} = 1$ (une seule sous-région EMI), ce résultat est équivalent à celui de [81] concernant les régions LMI avec contrainte de rang sur β .

Dans le cas où $N = 1$, $d = 1$ et $\bar{k} = 1$, \mathcal{D}_U se réduit à un disque ou à un demi-plan. Le théorème 2.9 peut alors être vu comme une formulation unique des versions LMI continue et discrète du lemme borné réel adaptée à n'importe quel disque ou demi-plan. Dès lors, conformément au paragraphe 2.3.2.2, le calcul de ρ^* est équivalent à un calcul de norme \mathcal{H}_∞ qui prouve que $\rho^* = r_{\mathcal{D}_U}^{[\mathbb{A}]}$. La borne n'est donc pas conservative dans un ensemble de matrices complexes. C'est parce que cette approche est compatible avec les résultats puissants concernant la connexion entre stabilité robuste et analyse \mathcal{H}_∞ que nous la privilégions.

Nous avons vu au paragraphe 2.1.3 que la \mathcal{D} -stabilité quadratique était plus conservative que la \mathcal{D} -stabilité poly-quadratique. Aussi est-il pertinent de faire dépendre les matrices P_k de $\theta \in \Theta$.

Théorème 2.10 Soient la matrice incertaine A de type polytopique LFT décrite en (2.16) ainsi qu'une région $E^2MI \mathcal{D}_U$ répondant à la définition 1.9. La matrice A est poly-quadratiquement \mathcal{D}_U -stable vis-à-vis de $\Delta(\rho)$ et Θ s'il existe N ensemble \mathcal{P}_i de \bar{k} matrices complexes $P_{k_i} = P'_{k_i} > 0$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, $i = 1, \dots, N$, ainsi qu'une matrice complexe \hat{G}_U telles que

$$\hat{G}_U(M_i, \{\mathcal{P}_i\}, \hat{G}_U, \gamma) = \left[\begin{array}{c|c|c} \sum_{k=1}^{\bar{k}} R_k \otimes P_{k_i} & 0 & \frac{I_d \otimes L'_i}{0} \\ \hline 0 & -I_{dq} & I_d \otimes Z'_i \\ \hline I_d \otimes L_i \mid 0 & I_d \otimes Z_i & -\gamma I_{dr} \end{array} \right] + \left(\hat{G}_U \left[\begin{array}{c|c|c} I_d \otimes A_{0_i} & -I_{dn} & I_d \otimes J_i \mid 0 \end{array} \right] \right)^H < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (2.35)$$

avec $\gamma = \rho^{-2}$.

Une fois encore, la justification de ce théorème peut être établie par la lecture de [55, 59]. Il s'agit de l'application du lemme d'élimination des matrices [329, Théorème 2.3.12] à la condition (2.34) mais en faisant intervenir une matrice P_{k_i} par sommet. Les matrices de Lyapunov P_k sont alors données par

$$P_k(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i P_{k_i}, \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}. \quad (2.36)$$

La condition (2.35) est une LMI qui permet de minimiser γ lors de la recherche d'une solution de sorte que la valeur maximale de ρ obtenue, notée ρ^\diamond , est une borne de \mathcal{D}_U -stabilité poly-quadratique.

Il peut être montré que (2.35) est une condition nécessaire de (2.34) et il vient [55] :

$$\rho^* \leq \rho^\diamond. \quad (2.37)$$

Cependant, (2.34) n'étant qu'une condition suffisante de \mathcal{D}_U -stabilité quadratique, il n'est pas pour autant prouvé que (2.35) est une condition nécessaire de stabilité quadratique, sauf dans le cas où $d = 1$. Pour $d > 1$, la question reste ouverte. Dans le cas d'une incertitude simplement polytopique, la \mathcal{D}_U -stabilité quadratique est suffisante pour que la condition (2.35) soit vérifiée (d'après [25]).

Remarque 2.7 *Il est montré dans [59, 55] que la matrice $\hat{G}_U \in \mathbb{C}^{d(2n+q+r) \times dn}$ peut admettre la structure*

$$\hat{G}_U = \begin{bmatrix} G_U \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } G_U \in \mathbb{C}^{2dn \times dn}, \quad (2.38)$$

sans perte de conservatisme. Dans ce cas, le multiplieur simplifié G_U correspond à celui utilisé dans la condition nominale (1.60).

Remarque 2.8 *\hat{G}_U ou G_U , en restant constantes quel que soit $\theta \in \Theta$, permettent de développer des raisonnements qui prouvent la \mathcal{D}_U -stabilité poly-quadratique. Ces matrices sont créées par [329, Théorème 2.3.12] (voir aussi annexe C) et justifient l'utilisation de la formulation E^2MI .*

2.3.4.4 Régions CMI

Nous nous intéressons maintenant à des régions non PMI. Nous considérons d'abord le cas des régions CMI.

Théorème 2.11 Soient la matrice A incertaine de type LFT définie en (2.14), une région CMI \mathcal{D} répondant à la définition 1.12, ainsi que sa frontière $\partial\mathcal{D}$. La matrice A est quadratiquement $\partial\mathcal{D}$ -régulière vis-à-vis de $\Delta(\rho)$ s'il existe un ensemble $\{P_k\}$ de \bar{k} matrices complexes $P_k = P'_k$ (non nécessairement définies positives), $k = 1, \dots, \bar{k}$, telles que

$$\mathbf{F}_U(M, \{P_k\}, \gamma) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ A_0 & J & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}' \left[\begin{array}{c|c|c} R_k \otimes P_k & 0 & \frac{L'}{0} \\ \hline 0 & -I_q & Z' \\ \hline L & 0 & Z \quad -\gamma I_r \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ A_0 & J & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} < 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\} \quad (2.39)$$

avec $\gamma = \rho^{-2}$.

Par ailleurs, la matrice A possède n_{k+} valeurs propres dans chaque sous-région \mathcal{D}_k et n_{k-} valeurs propres en dehors de \mathcal{D}_k si et seulement si toute solution de (2.39) vérifie $\text{In}(P_k) = [n_{k+}, n_{k-}, 0]$.

Pour une incertitude simplement bornée en norme ($Z = 0$), l'on retrouve, le résultat de [17]. La $\partial\mathcal{D}_k$ -régularité et les inerties des matrices P_k permettent d'analyser la \mathcal{D} -stabilité. Le conservatisme de la condition émane de l'intersection possible de \mathcal{D} avec des courbes $\partial\mathcal{D}_k$, conservatisme déjà généré par la condition nominale (cf. théorème 1.12).

Lorsque $\bar{k} = 1$ (une seule région), le théorème 2.11 se révèle être une formulation LMI du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (voir [356] pour une vision assez étendue du lemme, [298] pour une formulation LMI actuelle élégante et [365, 212, 292, 293, 3] pour les travaux d'origine) adapté à tout cercle et toute droite (c'est-à-dire entre autres dans ses versions continue et discrète). Ceci signifie que la borne calculée par minimisation de γ , que l'on peut noter ρ^* , n'est pas conservative et $\rho^* = r_{\partial\mathcal{D}}^{[\mathbb{C}]}$. En effet, son calcul revient au calcul de l'inverse de la norme \mathcal{L}_∞ du modèle (A_0, J, L, Z) , dont on peut montrer qu'il n'est autre que $r_{\partial\mathcal{D}}^{[\mathbb{C}]}$. L'on parle de norme \mathcal{L}_∞ plutôt que de norme \mathcal{H}_∞ puisque les matrices de Lyapunov ne sont pas forcément définies positives. En outre, si $\bar{k} \neq 1$ et si \mathcal{D} se compose de sous-régions disjointes, c'est-à-dire, si $\bigcap_{k=1}^{\bar{k}} \partial\mathcal{D}_k = \emptyset$, alors la borne ρ^* reste égale à $r_{\partial\mathcal{D}}^{[\mathbb{C}]}$.

Nous pourrions étendre ce théorème à la $\partial\mathcal{D}$ -régularité poly-quadratique mais nous préférons reporter cette étude au cas plus général des régions ECMI.

2.3.4.5 Régions ECMI

Nous étendons le résultat du paragraphe précédent de la façon suivante :

Théorème 2.12 (« lemme de Kalman-Yakubovich-Popov étendu ») Soient la matrice A incertaine de type LFT définie en (2.14), une région ECMI \mathcal{D} répondant à la définition 1.13, ainsi que sa frontière $\partial\mathcal{D}$. La matrice A est $\partial\mathcal{D}$ -régulière de manière robuste vis-à-vis de $\Delta(\rho)$ si et seulement s'il existe un ensemble \mathcal{P} de \bar{k} matrices complexes $P_k = P'_k$ (pas nécessairement définies positives), $k = 1, \dots, \bar{k}$, ainsi que \bar{k} ensembles de matrices $Q_{k,l} = Q'_{k,l} > 0$ telles que, $\forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}$,

$$\mathbf{W}_U(M, \mathcal{P}, \{Q_{k,l}\}, \gamma) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ A_0 & J & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}' \left[\begin{array}{c|c|c} R_k \otimes P_k + \sum_{l=1}^{\bar{l}_k} \Phi_{k,l} \otimes Q_{k,l} & 0 & \frac{L'}{0} \\ \hline 0 & -I_q & Z' \\ \hline L & 0 & Z \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ A_0 & J & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} < 0, \quad (2.40)$$

avec $\gamma = \rho^{-2}$.

Le théorème 2.12 correspond au résultat de [21], inspiré du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov à fréquence finie, lui-même déduit de la S-procédure généralisée [198]. Lorsque $\bar{l}_k = 1 \forall k$, le résultat de [197] est recouvert.

Les différences avec le théorème 2.11 sont les suivantes : aucune considération sur les inerties des matrices P_k n'est retenue. La borne associée, obtenue par minimisation de γ et notée ρ^* est non conservative et atteint donc $\rho_{\partial\mathcal{D}}^{[C]}$. L'on ne parle donc plus de $\partial\mathcal{D}$ -régularité quadratique mais de $\partial\mathcal{D}$ -régularité robuste. En effet, le même raisonnement que celui tenu sur le lien entre le rayon de $\partial\mathcal{D}$ -régularité et la norme \mathcal{L}_∞ reste valable. Ainsi, si $\partial\mathcal{D}$ est un segment de l'axe imaginaire, le calcul équivalent de la norme \mathcal{L}_∞ est restreint à « une gamme de fréquences » correspondant au segment choisi.

Nous étendons maintenant cette analyse au cas de la $\partial\mathcal{D}$ -régularité poly-quadratique.

Théorème 2.13 Soient la matrice A incertaine définie en (2.16), une région ECMI \mathcal{D} répondant à la définition 1.13, ainsi que sa frontière $\partial\mathcal{D}$. La matrice A est poly-quadratiquement $\partial\mathcal{D}$ -régulière vis-à-vis de $\Delta(\rho)$ et Θ s'il existe $N\bar{k}$ matrices complexes $P_{k_i} = P'_{k_i}$ (pas nécessairement définies positives), $k = 1, \dots, \bar{k}$, $i = 1, \dots, N$, de même que $N\bar{k}$ ensembles de matrices complexes $Q_{k,l_i} = Q'_{k,l_i} > 0$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, $l = 1, \dots, \bar{l}_k$, $i = 1, \dots, N$ ainsi que \bar{k} matrices G_k , $k = 1, \dots, \bar{k}$, telles que, $\forall \{k; i\} \in \{1, \dots, \bar{k}\} \times \{1, \dots, N\}$,

$$\bar{\mathbf{W}}_U(M_i, \{P_{k_i}\}, \{Q_{k,l_i}\}, G_k, \gamma) = \left[\begin{array}{c|c|c} R_k \otimes P_{k_i} + \sum_{l=1}^{\bar{l}_k} \Phi_{k,l} \otimes Q_{k,l_i} & 0 & \frac{L'_i}{0} \\ \hline 0 & -I_q & Z'_i \\ \hline L_i & 0 & Z_i \end{array} \right] + (G_k [A_{0_i} \quad -I_n \quad J_i \quad 0])^H < 0, \quad (2.41)$$

avec $\gamma = \rho^{-2}$.

Démonstration simplifiée : une seconde fois n'est toujours pas coutume, nous proposons ici les (très) grandes lignes de la démonstration de ce théorème qui éclairera peut-être le lecteur sur les arguments utilisés pour prouver les différentes propositions de ce chapitre.

Lorsque θ décrit Θ , les θ_i restent positifs et l'on peut construire les combinaisons convexes suivantes :

$$\bar{\mathbf{W}}_U(\mathbb{M}(\theta), \{P_k(\theta)\}, \{Q_{k,l}(\theta)\}, G_k, \gamma) = \sum_{i=1}^N \theta_i \bar{\mathbf{W}}_U(M_i, \{P_{k_i}\}, \{Q_{k,l_i}\}, G_k, \gamma) < 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}, \quad (2.42)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} P_k(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i P_{k_i} \\ Q_{k,l}(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i Q_{k,l_i} \end{array} \right. \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}, \quad \forall l \in \{1, \dots, \bar{l}_k\}.$$

À ce stade, l'on peut raisonner pour toute instance de k et de θ . L'utilisation du lemme d'élimination des matrices [329, Théorème 2.3.12] conduit à

$$\begin{bmatrix} I_{dn} & 0 & 0 \\ I_d \otimes \mathbb{A}_0(\theta) & I_d \otimes \mathbb{J}(\theta) & 0 \\ 0 & I_{dq} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dr} \end{bmatrix}' \times \left[\begin{array}{c|c|c} R_k \otimes P_k(\theta) + \sum_{l=1}^{\bar{l}_k} \Phi_{k,l} \otimes Q_{k,l}(\theta) & 0 & \frac{I_d \otimes \mathbb{L}'(\theta)}{0} \\ \hline 0 & -I_{dq} & I_d \otimes \mathbb{Z}'(\theta) \\ \hline I_d \otimes \mathbb{L}(\theta) & 0 & -\gamma I_{dr} \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_{dn} & 0 & 0 \\ I_d \otimes \mathbb{A}_0(\theta) & I_d \otimes \mathbb{J}(\theta) & 0 \\ 0 & I_{dq} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dr} \end{bmatrix} < 0$$

Par application du lemme de Schur [65] et mise à l'échelle appropriée des matrices P_k et $Q_{k,l}$, il vient

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathbb{A}_0(\theta) & \mathbb{J}(\theta) \end{bmatrix}' \left(R_k \otimes P_k(\theta) + \sum_{l=1}^{\bar{l}_k} \Phi_{k,l} \otimes Q_{k,l}(\theta) \right) \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathbb{A}_0(\theta) & \mathbb{J}(\theta) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{L}'(\theta)\mathbb{L}(\theta) & \mathbb{L}'(\theta)\mathbb{Z}(\theta) \\ \mathbb{Z}'(\theta)\mathbb{L}(\theta) & \mathbb{Z}'(\theta)\mathbb{Z}(\theta) - \gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.43)$$

À partir d'ici, nous court-circuitons certaines étapes de la démonstration, qui, pour l'essentiel, s'inspirent de [21], article lui-même inspiré de [198].

Soit l'ensemble de matrices $\mathcal{S}_k(\theta)$ défini par :

$$\mathcal{S}_k(\theta) = \left\{ S(\theta) = \mathbb{F}'(\theta) \left(R_k \otimes X_k(\theta) - \sum_{l=1}^{\bar{l}_k} \Phi_{k,l} \otimes Q_{k,l}(\theta) \right) \mathbb{F}(\theta) : \right. \\ \left. X_k(\theta) = X'_k(\theta), Q_{k,l}(\theta) = Q'_{k,l}(\theta) > 0 \forall l \in \{1, \dots, \bar{l}_k\} \right\},$$

où $\mathbb{F}(\theta)$ est défini par

$$\mathbb{F}(\theta) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathbb{A}_0(\theta) & \mathbb{J}(\theta) \end{bmatrix}.$$

Il est montré dans [21] (passage non trivial) que $\mathcal{S}_k(\theta)$ est « sans perte », selon la définition de [198]. Compte tenu de (2.43), il existe un élément $S_k(\theta) \in \mathcal{S}_k(\theta)$ tel que $\Psi(\theta) < S_k(\theta)$ avec

$$\Psi(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbb{L}'(\theta)\mathbb{L}(\theta) & \mathbb{L}'(\theta)\mathbb{Z}(\theta) \\ \mathbb{Z}'(\theta)\mathbb{L}(\theta) & \mathbb{Z}'(\theta)\mathbb{Z}(\theta) - \gamma I \end{bmatrix} < 0.$$

Puisque $\mathcal{S}_k(\theta)$ est sans perte, la S-procédure généralisée [198] s'applique et

$$\zeta' \Psi(\theta) \zeta < 0 \forall \zeta \in \mathcal{G}_k(\theta),$$

où l'ensemble $\mathcal{G}_k(\theta)$ est défini par

$$\mathcal{G}_k(\theta) = \{ \zeta \in \mathbb{C}^{n+q} \mid \zeta \neq 0, \zeta' S_k(\theta) \zeta \leq 0, \forall S_k(\theta) \in \mathcal{S}_k(\theta) \}.$$

Or, si l'on définit

$$\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \mathbb{F}(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

d'après [21, Lemme2], $\mathcal{G}_k(\theta)$ peut se redéfinir (ce passage est largement éludé et n'est pas trivial)

$$\mathcal{G}_k(\theta) = \left\{ \zeta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{n+m} \mid y \neq 0, (\exists s \in \partial\Gamma_k \mid sx = \mathbb{A}_0(\theta)x + \mathbb{J}(\theta)y) \right\}.$$

Il vient donc

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \Psi(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_k(\theta),$$

ce qui se récrit

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} (sI - \mathbb{A}_0(\theta))^{-1} \mathbb{J}(\theta) \\ I \end{array} \right]' \Psi(\theta) \left[\begin{array}{c} (sI - \mathbb{A}_0(\theta))^{-1} \mathbb{J}(\theta) \\ I \end{array} \right] < 0 \quad \forall s \in \partial\Gamma_k. \\ & \Leftrightarrow \|\mathbb{L}(\theta)(sI - \mathbb{A}_0(\theta))^{-1} \mathbb{J}(\theta) + \mathbb{Z}(\theta)\|_2 < \sqrt{\gamma} = \rho^{-1} \quad \forall s \in \partial\Gamma_k \\ & \Leftrightarrow \left\{ \sup_{s \in \partial\Gamma_k} \bar{\sigma}(\mathbb{G}(s, \theta)) \right\}^{-1} > \rho, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbb{G}(s, \theta) = \mathbb{L}(\theta)(sI - \mathbb{A}_0(\theta))^{-1} \mathbb{J}(\theta) + \mathbb{Z}(\theta).$$

De simples arguments sur les valeurs singulières permettent de retrouver l'expression de la valeur singulière structurée [117] puisque

$$\bar{\sigma}(\mathbb{G}(s, \theta)) = \mu_{\mathbf{C}}(\mathbb{G}(s, \theta)),$$

donc on obtient

$$\begin{aligned} & \left\{ \sup_{s \in \partial\Gamma_k} \mu_{\mathbf{C}}(\mathbb{G}(s, \theta)) \right\}^{-1} < \rho^{-1} \\ \Leftrightarrow \mu_{\mathbf{C}}(\mathbb{G}(s, \theta)) &= \left[\inf_{\Delta \in \mathbf{\Delta}(\rho)} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - \mathbb{G}(s, \theta)\Delta) = 0 \} \right]^{-1} < \rho^{-1} \quad \forall s \in \partial\Gamma_k. \\ \Leftrightarrow \inf_{\Delta \in \mathbf{\Delta}(\rho)} & \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - \mathbb{G}(s, \theta)\Delta) = 0 \} \quad \forall s \in \partial\Gamma_k. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
& \det(I - \mathbb{G}(s, \theta)\Delta) = 0 \\
& \Leftrightarrow \det(I - \mathbb{L}(\theta)(sI - \mathbb{A}_0(\theta))^{-1}\mathbb{J}(\theta)\Delta - \mathbb{Z}(\theta)\Delta) = 0 \\
& \Leftrightarrow \det(I - \mathbb{L}(\theta)(sI - \mathbb{A}_0(\theta))^{-1}\mathbb{J}(\theta)\Delta(I - \mathbb{Z}(\theta)\Delta)^{-1}) \det(I - \mathbb{Z}(\theta)\Delta) = 0.
\end{aligned}$$

Si l'incertitude LFT est bien posée, la matrice $(I - \mathbb{Z}(\theta)\Delta)$ est inversible (donc de déterminant non nul) et l'égalité précédente est équivalente à

$$\begin{aligned}
& \det(I - \mathbb{L}(\theta)(sI - \mathbb{A}_0(\theta))^{-1}\mathbb{J}(\theta)\bar{\Delta}(\theta)) = 0 \\
& \Leftrightarrow \det(I - (sI - \mathbb{A}_0(\theta))^{-1}\mathbb{J}(\theta)\bar{\Delta}(\theta)\mathbb{L}(\theta)) = 0 \\
& \Leftrightarrow \det(I - (sI - \mathbb{A}_0(\theta))^{-1}) \det(sI - \mathbb{A}_0(\theta) - \mathbb{J}(\theta)\bar{\Delta}(\theta)\mathbb{L}(\theta)) = 0.
\end{aligned}$$

Le premier bloc de (2.43) assure la $\partial\Gamma_k$ -régularité de $\mathbb{A}_0(\theta)$ de par le théorème 1.13 donc \mathbb{A}_0 n'a pas de pôle sur $\partial\Gamma_k$ et le premier facteur du produit ci-avant est non nul. Ceci revient à écrire

$$\det(sI - A(\theta, \Delta)) = 0$$

En résumé, l'on a

$$r_{\partial\Gamma_k}^{\mathbb{C}} = \inf_{s \in \partial\Gamma_k} \inf_{\Delta \in \mathbf{\Delta}(\rho)} \{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(sI - A(\theta, \Delta)) = 0\} > \rho$$

et bien sûr

$$r_{\partial\mathcal{D}}^{\mathbb{C}} = \min_{k \in \{1, \dots, \bar{k}\}} \{r_{\partial\Gamma_k}^{\mathbb{C}}\} > \rho. \quad \square$$

Démonstration alternative : le tout début de cette preuve est le même que celui de la précédente, jusqu'à l'inégalité (2.42). L'on raisonne alors pour chaque instance de k et de θ . Si l'on applique l'opération de congruence suivante,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathbb{A}_0(\theta) & 0 \\ \bar{\Delta}(\theta)\mathbb{L}(\theta) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' \bar{\mathbf{W}}_U(\mathbb{M}(\theta), \{P_k(\theta)\}, \{Q_{k,l}(\theta)\}, G_k, \gamma) \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathbb{A}_0(\theta) & 0 \\ \bar{\Delta}(\theta)\mathbb{L}(\theta) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0,$$

une réécriture possible de l'inégalité est

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{W}(A(\theta, \Delta), \{P_k\}, \{Q_{k,l}\}) - \mathbb{L}'(\theta)\bar{\Delta}'(\theta)\bar{\Delta}\mathbb{L}(\theta) & \mathbb{L}'(\theta)(I + \bar{\Delta}'(\theta)\mathbb{Z}'(\theta)) \\ (I + \mathbb{Z}(\theta)\bar{\Delta}(\theta))\mathbb{L}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] < 0$$

où la fonction $\mathcal{W}(\cdot, \cdot, \cdot)$ est définie en (1.67). En appliquant le lemme de Schur [65], il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(A(\theta, \Delta), \{P_k\}, \{Q_{k,l}\}) &< \mathbb{L}'(\theta)\bar{\Delta}'(\theta)\bar{\Delta}(\theta)\mathbb{L}(\theta) - \rho^2 \mathbb{L}'(\theta)(I + \bar{\Delta}'(\theta)\mathbb{Z}'(\theta))(I + \mathbb{Z}(\theta)\bar{\Delta}(\theta))\mathbb{L}(\theta) \\ \Leftrightarrow \mathcal{W}(A(\theta, \Delta), \{P_k\}, \{Q_{k,l}\}) &< \mathbb{L}'(\theta)(\bar{\Delta}'(\theta)\bar{\Delta}(\theta) - \rho^2(I + \bar{\Delta}'(\theta)\mathbb{Z}'(\theta))(I + \mathbb{Z}(\theta)\bar{\Delta}(\theta)))\mathbb{L}(\theta). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Le membre de gauche de cette inégalité est défini négatif si et seulement si celui de droite est semi-défini négatif c.-à-d.

$$\bar{\Delta}'(\theta)\bar{\Delta}(\theta) \leq \rho^2(I + \bar{\Delta}'(\theta)\mathbb{Z}'(\theta))(I + \mathbb{Z}(\theta)\bar{\Delta}(\theta)).$$

En prenant en compte que l'incertitude LFT est bien posée, et en considérant l'égalité (2.15), l'on déduit que

$$\bar{\Delta}(\theta) = \Delta(I - \mathbb{Z}(\theta)\Delta)^{-1} = (I - \Delta\mathbb{Z}(\theta))^{-1}\Delta = \Delta(I + \mathbb{Z}(\theta)\bar{\Delta}(\theta)),$$

et l'on obtient

$$(I + \bar{\Delta}'(\theta)\mathbb{Z}'(\theta))\Delta'\Delta(I + \mathbb{Z}(\theta)\bar{\Delta}(\theta)) \leq \rho^2(I + \bar{\Delta}'(\theta)\mathbb{Z}'(\theta))(I + \mathbb{Z}(\theta)\bar{\Delta}(\theta)).$$

qui est toujours vérifiée dès lors que $\Delta \in \mathbf{\Delta}(\rho)$. Ainsi le membre de gauche de l'inégalité (2.44) est défini négatif donc, d'après le théorème 1.13, $A(\theta, \Delta)$ est $\partial\Gamma_k$ -régulière $\forall k$ donc $\partial\mathcal{D}$ -régulière. ■

La seconde démonstration, même complète, semble plus facile. Aussi, pourquoi ne pas retenir uniquement celle-ci ? Certes, elle est tout aussi valable que la première mais elle cache une information importante. En effet, le raisonnement suivi dans la première est réversible jusqu'à (2.42) ce qui montre que le conservatisme n'est dû qu'à la structure polytopique. En revanche, l'opération de congruence appliquée dans la seconde démonstration n'est pas réversible et cache donc la puissance du résultat. C'est d'ailleurs sur un raisonnement tel que celui de la première preuve qu'il faut s'appuyer pour démontrer la nécessité de la condition du théorème 2.12. C'est là tout l'intérêt de la S-procédure généralisée [198].

Bien entendu, il est possible de résoudre (2.41) tout en maximisant ρ pour obtenir une borne optimale $\rho^\diamond \leq r_{\partial\mathcal{D}}[\mathbb{C}]$.

Remarque 2.9 Dans ce chapitre, il est souvent fait mention de la *S-procedure* [148, 366, 134, 65, 198, 197], généralisée ou non, du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov [298], du lemme borné réel [140], comme le souligne la remarque 2.5. Ce sont effectivement des outils qui sont liés les uns aux autres (voir l'article [166] pour une vision historique impressionnante de ces diverses connexions) et qui sont particulièrement utiles pour l'analyse en \mathcal{D} -stabilité robuste. Encore très récemment, l'article [172] relie le lemme KYP au cloisonnement du spectre d'une matrice dans une région LMI, reprenant entre autres, sans le savoir, bon nombre de concepts développés dans nos travaux et exposés ici. Par ailleurs, l'annexe C expose un théorème original qui relie la *S-procédure de bloc plein* au lemme d'élimination des matrices [65, 329] en intégrant implicitement un contexte de \mathcal{D} -stabilité. À ce titre, un tel théorème se révèle très utile pour démontrer de façon alternative de nombreux résultats (si ce n'est tous) de ce chapitre.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, de nombreuses conditions suffisantes de \mathcal{D} -stabilité ou de $\partial\mathcal{D}$ -régularité robuste d'une matrice incertaine ont été présentées. Les plus notables sont celles concernant l'incertitude polytopique LFT. Lorsque \mathcal{D} est une région E^2MI , l'outil proposé est une extension du lemme borné réel. Lorsque \mathcal{D} est une région ECMI, l'outil proposé est une extension de lemme de Kalman-Yakubovich-Popov. Ceci est une garantie de non conservatisme pour des régions unitaires. Ainsi, une connexion est établie entre la robustesse de la localisation des valeurs propres d'une matrice et le calcul des normes \mathcal{H}_∞ ou \mathcal{L}_∞ .

Les perspectives sont là encore nombreuses. Il serait bien sûr tentant (si ce n'est utile) de développer un outil d'analyse robuste dans le cas de la formulation, plus générale, des régions PMI. Mais nous retiendrons plutôt les pistes suivantes :

- exploiter les techniques proposées dans [181] et [295] pour s'approcher des rayons réels de \mathcal{D} -stabilité et de $\partial\mathcal{D}$ -régularité, la matrice dynamique et son incertitude étant réelles ;
- profiter des progrès numériques à venir pour associer les résultats de ce chapitre tels que les théorèmes 2.10 et 2.13 avec les conditions de [236] ;
- à titre théorique, savoir si la condition (2.35) est nécessaire pour la \mathcal{D}_U -stabilité quadratique ;
- savoir s'il existe une condition analogue à (2.34) pour assurer la $\partial\mathcal{D}$ -régularité quadratique de $A(\theta, \Delta)$ lorsque \mathcal{D} est une région CMI ou ECMI, c'est-à-dire savoir si l'on peut efficacement calculer une borne de $\partial\mathcal{D}$ -régularité quadratique ρ^* même en présence d'un polytope ;
- prendre la mesure de nos récentes lectures [77, 78, 76] qui semblent montrer qu'il est possible d'obtenir des relaxations LMI de certaines CNS de stabilité robuste des systèmes polytopiques, apprécier la pertinence de telles approches notamment quant à leurs coût et efficacité numérique ;

- enfin, la recherche de bornes toujours moins conservatives étant étroitement liée à la recherche de matrices de Lyapunov dépendant de paramètres, l'idée de considérer des matrices dépendant de façon LFT des paramètres s'est largement répandue ces dernières années. À ce titre, la thèse [113] ou l'article [114] proposent une piste des plus intéressantes que nous souhaitons exploiter dans le cadre de la \mathcal{D}_U -stabilité robuste.

Il est à noter que les difficultés techniques associées aux deux dernières perspectives nous ont paru semblables et il n'est pas impossible qu'elles ne constituent qu'un seul et même problème.

Deuxième partie

PLACEMENT D'UN SPECTRE

CHAPITRE 3

PLACEMENT NOMINAL

Après un petit préambule sur le placement de pôles, ce chapitre expose quelques résultats se limitant soit au contexte LMI soit aux approches basées sur la notion de structure propre. Une classification des types de placement de pôles en trois catégories est ainsi obtenue :

- placement non strict (c.-à-d. dans une région) ;
- placement strict (c.-à-d. à des affixes précises) ;
- placement pseudo-strict (c.-à-d. dans des zones de tolérances).

Sommaire

3.1	À propos du placement de pôles	79
3.1.1	Les différents types de placement	79
3.1.2	Les différents types de loi de commande	79
3.2	Placement non strict	80
3.2.1	Retour statique d'état	80
3.2.2	Retour statique de sortie	85
3.3	Placement strict	89
3.3.1	Un problème mathématique toujours d'actualité	89
3.3.2	Notion de structure propre	90
3.3.3	Placement de structure propre par retour d'état	92
3.3.4	Placement de structure propre par retour statique de sortie	98

3.4	Placement pseudo-strict	110
3.4.1	Pourquoi un placement pseudo-strict ?	110
3.4.2	Régions de tolérances	111
3.4.3	Procédure	112
3.5	Conclusion	113

3.1 À propos du placement de pôles

Puisqu'il est question de \mathcal{D} -stabilité dans ce rapport, et que les aspects de commande sont ici abordés, l'on doit s'interroger sur les moyens de rendre un système \mathcal{D} -stable, c'est-à-dire, en termes matriciels, de faire en sorte que la matrice d'état A du système commandé soit \mathcal{D} -stable. De toute évidence, la \mathcal{D} -stabilisation consiste alors à déplacer les pôles du système pour les faire entrer (s'ils n'y sont déjà) dans une région \mathcal{D} , choisie préalablement et correspondant aux spécifications des performances souhaitées. L'on parle de placement de pôles.

3.1.1 Les différents types de placement

Il existe différentes façons d'envisager ce problème parmi lesquelles nous ne considérons que les trois suivantes :

- *Placement non strict* : il s'agit du problème réduit à sa plus simple expression à savoir trouver une loi de commande telle que la matrice dynamique en boucle fermée A vérifie $\lambda(A) \subset \mathcal{D}$. En d'autres termes, l'on ne se préoccupe pas de la valeur précise des pôles placés dès lors que l'on assure la \mathcal{D} -stabilité de A .
- *Placement strict* : ce placement correspond à la définition mathématique « originelle » du placement de pôles. Il consiste à choisir au préalable une valeur précise de spectre $\{\lambda_d\}$ désiré pour A et dont les points associés sont contenus dans \mathcal{D} , puis à calculer une loi de commande telle que $\lambda(A) = \{\lambda_d\}$.
- *Placement pseudo-strict* : il s'agit d'une approche intermédiaire entre les deux approches précédemment citées. L'idée consiste à choisir une région de tolérance nominale $\mathbf{Z} \subset \mathcal{D}$ et à faire le choix d'un vecteur de paramètres qui induit un spectre $\{\lambda_d\} \subset \mathbf{Z}$. L'on calcule ensuite une loi de commande à l'instar de ce qui se pratique pour un placement strict. Lorsque le vecteur de paramètres varie, A reste \mathbf{Z} -stable donc \mathcal{D} -stable. Cette solution consiste en fait à conserver des degrés de liberté sur le placement nominal et à distinguer région de placement nominal \mathbf{Z} et région de placement robuste \mathcal{D} , mais cette dernière distinction sera davantage l'objet du chapitre suivant.

3.1.2 Les différents types de loi de commande

Pour plus de clarté dans la suite de l'exposé, nous présentons ici les lois de commande envisagées. Soit le système LTI décrit dans l'espace d'état par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{bo}x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_{k+1} = A_{bo}x_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (3.1)$$

selon qu'il est continu ou discret. Le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ désigne l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ désigne le signal de commande et $y \in \mathbb{R}^p$ désigne le vecteur de sortie. Il s'agit donc d'un modèle d'ordre n à m entrées et p sorties. Les deux lois de commande considérées sont :

- le *retour statique d'état* décrit par $u = Kx$, où $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, générant la matrice dynamique en boucle fermée $A = A_{bo} + BK$;
- le *retour statique de sortie* décrit par $u = Fy$, où $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$, générant la matrice dynamique en boucle fermée $A = A_{bo} + B\hat{F}C$ avec

$$\hat{F} = F(I_p - DF)^{-1} = (I_m - FD)^{-1}F \Leftrightarrow F = \hat{F}(I_p + D\hat{F})^{-1} = (I_m + \hat{F}D)^{-1}\hat{F}. \quad (3.2)$$

L'on retrouve ainsi une relation de type LFT entre F et \hat{F} .

Les problèmes de placement de pôles n'ont pas forcément de solution. En particulier, ceci peut dépendre de la commandabilité et de l'observabilité du système.

En plus de ces deux lois de commande, l'on peut ajouter le retour dynamique de sortie. Cependant, puisque ce dernier se ramène à un retour statique de sortie sur un système augmenté [184], il ne génère pas, en lui-même, de problème théorique spécifique.

Les trois types de placement brièvement présentés au paragraphe 3.1.1 correspondent aux trois parties suivantes. Plusieurs techniques de placement de pôles sont exposées en fonction de la loi de commande concernée et de la région \mathcal{D} choisie. Nous nous référons bien sûr largement à la littérature sur le sujet.

3.2 Placement non strict

Pour résoudre le problème non strict, l'approche LMI est résolument celle qui nous semble devoir être privilégiée.

3.2.1 Retour statique d'état

3.2.1.1 Idée de départ

Nous exposons ici brièvement l'idée de départ qui permet la synthèse de loi de commande \mathcal{D} -stabilisante par retour d'état. Elle est due à [47]. Si l'on prend l'exemple simple de la stabilité au

sens de Hurwitz, A est stable si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive P telle que (1.53). Puisque A est réelle, l'on peut raisonner par rapport à la forme duale qui, dans le cas présent, devient

$$((A_{bo} + BK)P)^H < 0. \quad (3.3)$$

L'inégalité (3.3) n'est pas une LMI en raison du produit KP . Cependant, l'idée de [47] est de considérer ce produit KP comme une variable à part entière $S = KP$ à l'instar de ce qui se fait sur les équations de Riccati en commande optimale. Ce changement de variable génial est réversible puisque P étant définie positive, elle est aussi inversible. Il a des répercussions énormes dans la littérature actuelle sur la robustesse, particulièrement dans le cadre LMI comme souligné dans [65], puisque, par exemple, (3.3) devient une LMI en P et S :

$$(A_{bo}P + BS)^H < 0. \quad (3.4)$$

Une fois la LMI résolue, il suffit de déduire $K = SP^{-1}$. C'est cette idée qui est exploitée dans une kyrielle d'articles sur la synthèse par approche Riccati ou LMI mais aussi dans la suite de cette partie.

3.2.1.2 \mathcal{D} -stabilisation dans une région LMI

Il faut bien noter que la linéarité en A est exigée pour appliquer la technique présentée ci-avant. De ce fait, les régions LMI sont privilégiées.

Théorème 3.1 [80] *Soient la paire de matrice (A_{bo}, B) et la région LMI \mathcal{D} répondant à la définition 1.5. La paire (A_{bo}, B) est \mathcal{D} -stabilisable par retour statique d'état si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive P et une matrice S vérifiant l'inégalité matricielle*

$$\alpha \otimes P + (\beta \otimes (A_{bo}P + BS))^H < 0. \quad (3.5)$$

Une matrice de retour d'état est alors donnée par

$$K = SP^{-1}. \quad (3.6)$$

3.2.1.3 \mathcal{D} -stabilisation dans une région EMI

Il existe un résultat équivalent se référant au formalisme EMI [287] où la linéarité en A est recouverte par complément de Schur. Toutefois, il n'apporte *a priori* rien de fondamentalement intéressant en synthèse par rapport au résultat de [80]. En revanche, le cas spécifique du disque permet de proposer une alternative largement due à [108].

Théorème 3.2 Soient la paire de matrice (A_{bo}, B) et \mathcal{D} , le disque ouvert de centre $(c; 0)$ et de rayon r répondant à la définition 1.6 avec

$$R = \begin{bmatrix} c^2 - r^2 & -c \\ -c & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

La paire (A_{bo}, B) est \mathcal{D} -stabilisable par retour statique d'état si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive P , une matrice G et une matrice S vérifiant l'inégalité matricielle

$$\begin{bmatrix} (c^2 - r^2)P & -cP + A_{bo}G + BS \\ -cP + GA'_{bo} + S'B' & P - G - G' \end{bmatrix} < 0. \quad (3.8)$$

La matrice de retour d'état est alors donnée par

$$K = SG^{-1}. \quad (3.9)$$

L'on note que l'inversibilité de G est assurée par la condition (3.8). L'idée fondamentale de [108] est de calculer K grâce au multiplieur G et non grâce à P . Cette idée cruciale présente un avantage en commande robuste comme il sera vu au chapitre suivant, mais aussi pour le problème du retour statique de sortie (voir plus loin).

L'on pourrait être tenté d'appliquer le même raisonnement pour n'importe quelle région EMI en utilisant la condition (1.60) mais ceci est impossible car dans (1.60), le multiplieur G n'est pas carré.

3.2.1.4 Régions composées

Il y a une difficulté majeure à appliquer un changement de variable du type $S = KP$ dans le cas des régions PMI composées ou ECMI. En effet, il existe alors plusieurs matrices de Lyapunov P_k (autant que de régions) et il faudrait envisager plusieurs changements de variables associés $S_k = KP_k$. Mais il faudrait aussi pouvoir assurer l'égalité

$$K = S_k P_k^{-1} \quad \forall k \in \{1, \dots, \bar{k}\}, \quad (3.10)$$

ce qui rend le problème profondément non convexe.

Puisque cette piste conduit à une impasse, l'on peut s'interroger sur l'utilisation des multiplieurs et de changements de variables tels que (3.9). Toutefois, si l'on prend le cas des régions E²MI, l'on peut constater que la condition (1.64) fait apparaître un multiplieur G_U rectangulaire rendant ce changement de variable inutilisable. De même, pour des régions ECMI, si l'on étudie la possibilité d'introduire des multiplieurs de la même manière que dans la condition (2.41), l'on est confronté au double obstacle : d'une part, il existe un multiplieur G_k par sous-région, d'autre part, il n'est pas carré.

Néanmoins, il peut exister des cas qui autorisent la synthèse par résolution d'une LMI. Ainsi, par exemple, lorsque la région E²MI est une union de disques ouverts, tous contenus dans \mathbb{C}^- , il est possible de contraindre G_U de sorte que sa partie non nulle se résume à une matrice carrée \bar{G}_U et de calculer $K = S \bar{G}_U^{-1}$. De même, dans le cas de cette même région mais formulée comme une région CMI, il est là aussi possible de réduire les multiplieurs G_k à une sous matrice carrée et de déduire K à condition de poser $G_k = G \forall k$. Or cette dernière hypothèse rend la condition *a priori* conservative et nous n'avons pas exploré les incidences de ce conservatisme.

Devant les restrictions et impossibilités des approches évoquées ci-dessus, nous préférons en privilégier une troisième qui nous paraît plus appropriée à la synthèse nominale par retour d'état. Elle consiste à placer progressivement les pôles, sous-région après sous-région. Plus précisément, il s'agit de placer une partie du spectre dans une sous-région \mathcal{D}_k tout en laissant le reste du spectre inchangé. Cette approche est due à [253]. Elle est brièvement résumée ci-après.

Soient une paire de matrices (A_k, B) et V_k la matrice modale de A_k telle que

$$V_k^{-1} A_k V_k = \Lambda_k = \begin{bmatrix} \Lambda_{k_1} & 0 \\ 0 & \Lambda_{k_2} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

$\Lambda_{k_1} \in \mathbb{C}^{p_k \times p_k}$ contient les pôles devant être déplacés dans une région \mathcal{D}_k . Soient également les matrices X_k , \hat{B}_k et \hat{A}_k définies par

$$X_k = \begin{bmatrix} I_{p_k} & 0 \end{bmatrix} V_k^{-1}, \quad \hat{B}_k = \begin{bmatrix} I_{p_k} & 0 \end{bmatrix} V_k^{-1} B = X_k B, \quad \hat{A}_k = X_k A_k X_k^+. \quad (3.12)$$

L'on considère la matrice de retour d'état

$$K_k = \hat{K}_k X_k. \quad (3.13)$$

Tout repose sur le théorème suivant :

Théorème 3.3 [253] Soient une paire de matrice (A_k, B) et une région EMI \mathcal{D}_{R_k} répondant à la définition 1.6. Il existe une matrice de retour d'état K_k plaçant p_k valeurs propres de $A_k + BK_k$ dans la région \mathcal{D}_{R_k} et ne déplaçant pas les autres si et seulement s'il existe une matrice hermitienne définie positive \hat{P}_k et une matrice \hat{S}_k telles que

$$\begin{bmatrix} R_{k00} \otimes \hat{P}_k + (R'_{k01} \otimes (\hat{A}_k \hat{P}_k + \hat{B}_k \hat{S}_k))^H & Z'_k \otimes (\hat{A}_k \hat{P}_k + \hat{B}_k \hat{S}_k)' \\ Z_k \otimes (\hat{A}_k \hat{P}_k + \hat{B}_k \hat{S}_k) & -I_d \otimes \hat{P}_k \end{bmatrix} < 0 \quad (3.14)$$

où Z_k est déduit de la factorisation de Choleski $R_{k11} = Z'_k Z_k$ et où \hat{A}_k et \hat{B}_k sont fournies par (3.12). Une solution est alors donnée par (3.13) avec (3.12) et

$$\hat{K}_k = \hat{S}_k \hat{P}_k^{-1}. \quad (3.15)$$

Remarque 3.1 Dans le travail de [253], c'est la formulation EMI qui est choisie pour limiter la taille des matrices mais le même raisonnement peut être adapté à une formulation LMI.

Il s'agit ici de placer les pôles de $(A_{bo} + BK)$ dans une région \mathcal{D} résultant tout simplement de l'union de \bar{k} sous-régions EMI :

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k=1}^{\bar{k}} \mathcal{D}_{R_k}. \quad (3.16)$$

Une telle région \mathcal{D} admet une formulation E²MI qui n'est pas requise ici. L'on suppose que chaque sous-région \mathcal{D}_{R_k} doit accueillir p_k pôles de telle sorte que $\sum_{k=1}^{\bar{k}} p_k = n$, c.-à-d. que la somme des nombres de pôles contenus dans chaque sous région \mathcal{D}_{R_k} est bien égale à l'ordre du modèle. Sur la base du théorème 3.3, l'algorithme suivant est proposé.

Algorithme 3.1

- *Étape 1* : $k = 0$, $A_0 = A_{bo}$ et $K_0 = 0$;
- *Étape 2* : $k = k + 1$ et $A_k = A_{k-1} + BK_{k-1}$;

- *Étape 3* : calcul de V_k de telle sorte que Λ_k calculé par (3.11) fasse apparaître les p_k pôles à déplacer ;
- *Étape 4* : calcul de X_k , \hat{A}_k et \hat{B}_k par (3.12) ;
- *Étape 5* : détermination de K_k par résolution du théorème 3.3 ;
- *Étape 6* : si $k = \bar{k}$, aller à l'*étape 7* sinon revenir à l'*étape 2* ;
- *Étape 7* : calcul du retour d'état final :

$$K = \sum_{k=1}^{\bar{k}} K_k. \quad (3.17)$$

Le retour d'état K donné par (3.17) place l'ensemble des pôles dans \mathcal{D} et assure la distribution désirée.

Remarque 3.2 *Lorsque certaines sous-régions \mathcal{D}_{R_k} de \mathcal{D} sont non symétriques, les matrices de retour d'état associées K_k sont complexes. Toutefois, si \mathcal{D} est symétrique dans son ensemble (ce qui est logique lorsque A_{bo} est réelle), alors l'implication de toute sous-région \mathcal{D}_{R_k} entraîne celle de sa symétrique \mathcal{D}_{R_l} . Comme les matrices R_k et R_l sont conjuguées, il en résulte que les deux matrices déduites K_k et K_l le sont aussi. Ainsi, de la formule (3.17), l'on tire une matrice de retour d'état K qui reste réelle.*

3.2.2 Retour statique de sortie

3.2.2.1 Difficulté : problème BMI

Si l'on reste dans la logique de la partie précédente et que l'on cherche à appliquer un changement de variable astucieux tel que celui de [47], l'on est confronté à un problème majeur de l'automatique : la bilinéarité du problème de retour statique de sortie. De façon générale, pour ce qui concerne ce type de retour, il est vivement conseillé de consulter l'excellent tour d'horizon proposé dans [336]. Quoique plus vraiment récent, cet article reste d'actualité quant aux problèmes qui y sont évoqués.

Pour ce qui est du placement de pôles, il faut d'abord se poser la question de la stabilisation par retour statique de sortie. Pour le cas continu, le cadre LMI nous amène à décliner la forme duale de (1.53) ainsi :

$$((A_{bo} + BFC)P)^H < 0. \quad (3.18)$$

Hélas, contrairement à l'inégalité (3.3), (3.18) ne permet pas de changement de variable pertinent car la matrice C est venue s'intercaler entre F et P . Il est donc *a priori* impossible par ce moyen de transformer le problème bilinéaire en problème linéaire. Il existe de nombreuses tentatives de s'attaquer à la stabilisation par retour statique de sortie. Citons par exemple

[286, 154]. Il en existe bien d'autres. Toutes ces tentatives, bien qu'intéressantes, induisent un certain degré de conservatisme ou des restrictions sérieuses et il est bien difficile de contourner l'obstacle initial comme le montre bien l'ouvrage [329]. Plusieurs conditions équivalentes au problème initial y sont exposées : aucune n'apporte la linéarité souhaitée. Cette contrainte est un problème majeur de l'automatique à l'heure actuelle et l'on constate que nombre d'autres pans de la recherche sont bloqués, plus ou moins explicitement, par cet obstacle. Il existe cependant quelques tentatives pour aborder directement les aspects numériques de la bilinéarité [160, 175]. Citons aussi, toujours concernant ces approches numériques, un article aux débouchés prometteurs, [174], dont l'idée repose sur l'utilisation des *décompositions en sommes de carrés* (en anglais, *Sum Of Squares*) [235, 281]), et sur la théorie duale des moments. Cette idée permet de se ramener à un problème de programmation convexe.

Puisqu'un retour statique de sortie doit être calculé, nous présentons maintenant certaines approches qui peuvent être envisagées, dans un cadre LMI, pour faire du placement non strict.

Remarque 3.3 *Lorsque la matrice de transmission directe D est non nulle, la recherche de F se ramène à celle de \hat{F} puis F est déduit de (3.2). Ainsi, par souci de concision, le problème de base est-il posé pour $D = 0$.*

3.2.2.2 Utilisation d'une contrainte de structure

Il faut tout d'abord noter qu'il existe un changement de base dans l'espace d'état tel que la matrice C est transformée en $\begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix}$. Dès lors, si une solution au problème est trouvée dans cette base, il est facile de déduire la solution dans la base initiale. Pour cette raison, dans ce paragraphe, nous poserons sans perte de généralité que

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

La matrice d'état en boucle fermée s'écrit alors

$$A = A_{bo} + BFC = A_{bo} + BK, \quad (3.20)$$

avec

$$K = \begin{bmatrix} F & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Il faut donc déterminer une matrice de retour d'état qui vérifie la contrainte de structure (3.21). Si l'on prend le cas d'une région EMI par exemple, l'on peut éventuellement se satisfaire de la condition suffisante proposée par le théorème suivant.

Théorème 3.4 Soient un triplet de matrices (A_{bo}, B, C) où C vérifie (3.19) et une région EMI \mathcal{D}_R répondant à la définition 1.6. Il existe un retour statique de sortie associé à une matrice F et \mathcal{D}_R -stabilisant la matrice $A_{bo} + BFC$ s'il existe une solution au système LMI

$$\begin{bmatrix} R_{00} \otimes P + (R'_{10} \otimes (A_{bo}P + BS))^H & Z' \otimes (A_{bo}P + BS)' \\ Z \otimes (A_{bo}P + BS) & -I_d \otimes P \end{bmatrix} < 0, \quad (3.22)$$

$$P = \text{diag}\{P_1, P_2\} = P' > 0, \quad P_1 \in \mathbf{R}^{p \times p}, \quad (3.23)$$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

où Z est déduit de la factorisation de Choleski $R_{11} = Z'Z$. Une solution est alors donnée par

$$F = S_1 P_1^{-1}. \quad (3.25)$$

Le fait d'imposer une structure bloc-diagonale à P induit évidemment un très fort conservatisme qu'il convient de réduire. C'est ce qui est proposé dans [108, 14] pour la stabilité au sens de Schur (donc pour le placement dans un disque). L'idée, une fois de plus, est d'utiliser un multiplicateur.

Théorème 3.5 (déduit de [108]) Soient un triplet de matrices (A_{bo}, B, C) où C vérifie (3.19) et le disque ouvert \mathcal{D} de centre $(c; 0)$ et de rayon r . Il existe un retour statique de sortie associé à une matrice F et \mathcal{D} -stabilisant le triplet (A, B, C) s'il existe une solution au système LMI

$$\begin{bmatrix} (c^2 - r^2)P & -cP + A_{bo}G + BS \\ -cP + G'A'_{bo} + S'B' & P - G - G' \end{bmatrix} < 0, \quad (3.26)$$

$$P = P' > 0 \quad (3.27)$$

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{12} & G_{22} \end{bmatrix} \quad G_{11} \in \mathbf{R}^{p \times p}, \quad (3.28)$$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Une solution est alors donnée par

$$F = S_1 G_{11}^{-1}. \quad (3.30)$$

Tout l'intérêt de cette condition est de laisser la matrice de Lyapunov libre et de reporter la contrainte de structure sur G . L'on note par ailleurs que cette structure imposée est moins contraignante que celle exigée de P dans le théorème 3.4 car G est bloc-triangulaire et non bloc-diagonale. En effet, cette dernière n'est pas tenue d'être symétrique.

3.2.2.3 Du retour d'état au retour de sortie

Une autre façon d'essayer de contourner la bilinéarité est ici exposée. Il s'agit d'une idée originale de [285, 11] également reprise sous une autre forme dans [270]. Elle est ici appliquée au cas des régions E^2MI .

Théorème 3.6 *Soient un triplet de matrices $(A_{bo}, B, C) \in \mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times m} \times \mathbb{C}^{p \times n}$ et une région $E^2MI \mathcal{D}_U$ répondant à la définition 1.9. Soit également une matrice de retour d'état K telle que $A_e = A_{bo} + BK$ est \mathcal{D}_U -stable. Il existe une matrice de retour statique de sortie F telle que $A_s = A_{bo} + BFC$ est \mathcal{D}_U -stable s'il existe N matrices hermitiennes définies positives P_k , $k = 1, \dots, \bar{k}$, une matrice X et une matrice H telles que*

$$\mathbf{H}_U = \begin{bmatrix} I_{dn} & I_d \otimes A'_e \\ 0 & I_d \otimes B' \end{bmatrix} \sum_{k=1}^{\bar{k}} (R_k \otimes P_k) \begin{bmatrix} I_{dn} & 0 \\ I_d \otimes A_e & I_d \otimes B \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ I_{dm} \end{bmatrix} \left((I_d \otimes X) \begin{bmatrix} -I_d \otimes K & -I_{dm} \end{bmatrix} + (I_d \otimes H) \begin{bmatrix} I_d \otimes C & 0 \end{bmatrix} \right) \right)^H < 0. \quad (3.31)$$

Une instance possible de la matrice F est alors donnée par

$$F = X^{-1}H. \quad (3.32)$$

La démonstration de ce théorème n'est pas fournie. Toutefois, même s'il est possible de se référer à [55], nous en précisons le principe emprunté à [285, 11]. L'inégalité (3.31) est une condition suffisante de

$$\begin{cases} \mathbf{U}(A_e, \mathcal{P}) < 0 \\ \mathbf{U}(A_s, \mathcal{P}) < 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

où $\mathbf{U}(\cdot, \cdot)$ est définie en (1.59). Or, la seconde inégalité correspond à la \mathcal{D}_U -stabilité de A_s . Le conservatisme de (3.31) par rapport à (3.33) est lié au degré d de la région E^2MI . Si $d = 1$, l'on remplace $I_d \otimes X$ et $I_d \otimes H$ par X et H respectivement et les deux conditions (3.31) et (3.33) sont alors équivalentes. Néanmoins, ce n'est pas la seule source de conservatisme par rapport à l'existence d'une matrice F convenable puisque dans (3.33), l'ensemble \mathcal{P} des matrices P_k est le même pour les deux inégalités. Autrement dit, la condition (3.31) cache une contrainte primordiale : les matrices de Lyapunov P_k qui assurent la \mathcal{D}_U -stabilité de A_s doivent être les mêmes que celles qui assurent la \mathcal{D}_U -stabilité de A_e . Le choix du retour d'état K est donc prépondérant quant au conservatisme de (3.31). Ceci ramène naturellement au problème antérieur, à savoir la détermination d'un retour d'état \mathcal{D}_U -stabilisant, défi qui peut être relevé par exemple en utilisant l'algorithme 3.14 ou bien en envisageant un placement strict ou pseudo-strict par retour d'état, sans pour autant garantir une solution à (3.31).

Remarque 3.4 *Un défi d'importance consisterait donc à établir une méthode pertinente du choix de K qui assurerait de la détermination de F (s'il existe) ou, pour le moins, augmenterait les chances de le trouver. Nous pensons qu'un retour fragile d'état K réduit le conservatisme de (3.31) mais nous n'en avons pas la justification rigoureuse. Par ailleurs, calculer un retour fragile d'état K se révèle aussi ardu que de s'attacher à résoudre directement le problème initial du retour statique de sortie.*

Il est possible de tenir le même style de raisonnement à partir de la condition (1.67) plutôt qu'à partir de (1.63) mais il y aurait alors \bar{k} multiplieurs X_k qu'il faudrait tous prendre égaux. Il en serait de même pour les multiplieurs H_k . Cette contrainte induit sans doute un conservatisme important que nous n'avons pas pris la peine d'étudier.

3.3 Placement strict

Dans cette partie, nous abordons le problème du placement strict de pôles sous l'angle de la structure propre d'une matrice. En d'autres termes, nous exposons davantage des techniques de placement de structure propre, techniques parfois regroupées sous l'appellation *commande modale*.

3.3.1 Un problème mathématique toujours d'actualité

Le problème du placement strict de pôles accepte une formalisation mathématique à la fois simple et précise, tant dans le cas du retour statique d'état que dans le cas du retour statique de sortie.

Problème 3.1 *Soit le triplet de matrices $(A_{bo}, B, C) \in \mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times m} \times \mathbb{C}^{p \times n}$. Soit aussi le spectre désiré $\{\lambda_d\}$, c'est-à-dire un ensemble de n nombres complexes λ_i , $i = 1, \dots, n$. Déterminer une matrice F telle que $\lambda(A) = \{\lambda_d\}$*

Lorsque $C = I_n$ ou $\text{rang}(C) = p = n$, l'on parle de placement de pôles par retour d'état et l'on a $FC = K \Leftrightarrow F = KC^{-1}$. Lorsque $\text{rang}(C) < n$, l'on parle de placement de pôles par retour statique de sortie. Pour plus de clarté et de concision, il est supposé par la suite que les éléments de $\{\lambda_d\}$ sont distincts ce qui signifie que l'on ne cherche pas à placer des valeurs propres multiples. De même, il est admis dans ce qui suit que les matrices B et C sont de rang plein, sans perte de généralité.

Si le problème 3.1 est bien résolu par retour d'état, le cas du retour de sortie, quoique bien étudié, laisse encore un champ d'investigation relativement large à explorer.

3.3.2 Notion de structure propre

La notion de structure propre est au cœur du développement de cette partie, c'est pourquoi nous pensons qu'il est nécessaire de placer ici un léger rappel.

3.3.2.1 Structure propre d'une matrice

$\lambda \in \mathbb{C}$ est *valeur propre* de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si et seulement si

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0. \quad (3.34)$$

Une matrice de dimension n a nécessairement n valeurs propres $\lambda_i, i = 1, \dots, n$. L'on rappelle qu'il est ici supposé que celles-ci sont distinctes (par souci de simplification). Lorsque A est réelle, les valeurs propres constituent un ensemble auto-conjugué. Autrement dit, si λ est valeur propre de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sa quantité conjuguée l'est aussi. Tous ces scalaires constituent un ensemble de cardinal n appelé spectre de A et ici noté $\lambda(A)$.

Il existe n vecteurs non nuls $v_i \in \mathbb{C}^n, i = 1, \dots, n$, appelés *vecteurs propres à droite*, tels que

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.35)$$

Ces vecteurs propres sont tous définis à un facteur près. Si l'on définit V , matrice modale, par

$$V = [v_1, \dots, v_n], \quad (3.36)$$

alors il vient la relation

$$\Lambda = V^{-1}AV \quad (3.37)$$

où Λ est une matrice diagonale définie par

$$\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i. \quad (3.38)$$

La détermination de Λ passe par celle de V . L'on parle de diagonalisation de matrice. Cette diagonalisation n'est pas toujours possible lorsque les valeurs propres ne sont pas distinctes. Des formes canoniques de Jordan peuvent néanmoins être calculées mais ceci n'est pas explicité ici.

L'on peut aussi définir les *vecteurs propres à gauche* u_i (également définis à un facteur multiplicatif près) par la relation

$$u_i' A = \lambda_i u_i' \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.39)$$

En définissant la matrice U par la concaténation

$$U = [u_1, \dots, u_n], \quad (3.40)$$

il apparaît, entre les matrices U et V , pour des choix de u_i et v_i convenablement mis à l'échelle, la condition d'orthogonalité :

$$U'V = I_n. \quad (3.41)$$

L'ensemble constitué des valeurs propres et des vecteurs propres à gauche et à droite est appelé *structure propre*.

Nous renvoyons le lecteur vers un cours voire un ouvrage d'algèbre linéaire ou de calcul matriciel pour trouver toutes les propriétés de la structure propre [190, 189, 93, 300].

3.3.2.2 Structure propre d'un système bouclé

Il s'agit là d'une petite extension de la définition de la structure propre d'une matrice à celle de structure propre d'un système bouclé. Cette extension est relativement simple.

Soit le modèle (3.1). L'on suppose qu'il n'y a pas de transmission directe ($D = 0$). Ainsi, la matrice d'état en boucle fermée est

$$A = A_{bo} + BFC. \quad (3.42)$$

La structure propre du système bouclé n'est autre que la structure propre de la matrice A .

De ce fait, il vient, si l'on respecte la condition d'orthogonalité (3.41),

$$\left\{ \begin{array}{l} Av_i = (A_{bo} + BFC)v_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ u'_i A = u'_i (A_{bo} + BFC) = \lambda_i u'_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ U'V = I_n \quad \text{où} \quad U = [u_1 \quad \dots \quad u_n] \quad \text{et} \quad V = [v_1 \quad \dots \quad v_n] \\ A = A_{bo} + BFC = V\Lambda U' \quad \text{où} \quad \Lambda = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i. \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Remarque 3.5 En pratique, les matrices A_{bo} , B , F et C sont toutes réelles ce qui conduit à considérer des spectres auto-conjugués. Les vecteurs propres v_i (respectivement u_i) et v_j (respectivement u_j) sont conjugués lorsque les valeurs propres λ_i et λ_j le sont.

L'on complète parfois, pour les besoins de la commande, cette définition de la structure propre d'un système bouclé par l'introduction des *directions d'entrée* w_i données par

$$w_i = FCv_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.44)$$

et des *directions de sortie* l_i données par

$$l'_i = u'_i BF \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.45)$$

La structure propre d'un système bouclé a énormément d'influence sur le comportement de ce dernier, en particulier en termes de réponse transitoire et de couplage. Plus précisément, les valeurs propres donnent des indications sur la stabilité, la rapidité et le caractère intrinsèque plus ou moins oscillatoire du système bouclé. Quant aux vecteurs propres, ils influent sur les couplages entre les consignes et les pôles, entre les pôles et les états (donc les sorties), entre certaines perturbations exogènes et les pôles ou encore entre les pôles et les commandes. Par ailleurs, les vecteurs propres sont aussi prépondérants pour la sensibilité locale des pôles en fonction d'une incertitude additive sur A [215]. Pour plus ample information sur ces diverses influences, nous invitons le lecteur à consulter [256, 277, 135, 7, 85, 84, 294, 13].

Dans la suite de ce chapitre, nous proposons des solutions possibles au problème 3.1 sous la forme de placement de structure propre.

3.3.3 Placement de structure propre par retour d'état

Il est rappelé que le problème du placement de pôles par retour d'état consiste à déterminer la matrice K de sorte que le spectre de $A = A_{bo} + BK$ coïncide avec un ensemble de valeurs spécifiées au préalable. Un tel problème a été largement abordé dans le cadre de l'étude

des systèmes monovariabiles (voir les ouvrages à caractère didactique [135, 277, 116, 136] par exemple). Pour ces derniers, le vecteur de retour d'état K comporte n composantes et comme il s'agit de placer n pôles, il n'existe aucun degré de liberté supplémentaire. La solution est donc unique.

Dans le cas des systèmes multivariabiles, la matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ comporte mn composantes ce qui suppose *a priori* l'existence de degrés de liberté. C'est en effet le cas mais il n'est pas forcément aisé de les exploiter. Lors d'un placement de pôles, l'on peut profiter de ces degrés de liberté pour

- optimiser un critère de performances ou de robustesse ;
- placer tout ou partie de la structure propre (à des fins de performances).

L'on peut bien sûr étendre les résultats relatifs aux systèmes multivariabiles en passant par la base canonique de commande, ainsi qu'il est procédé dans [349]. L'on peut aussi utiliser les voies de la commande modale comme dans ce rapport.

3.3.3.1 Condition de placement de pôles

Une première condition pour qu'il soit possible de placer un spectre désiré pour A (indépendamment des vecteurs propres) est analogue à la condition donnée en monovariabiles :

La paire (A_{bo}, B) doit être commandable.

Cette condition est démontrée dans [359, 360].

3.3.3.2 Bilan des ddl

L'on dispose donc de mn degrés de liberté (ddl) apparents. n ddl doivent être utilisés pour placer les pôles. Il en reste $n(m-1)$ pour tenter de placer les vecteurs propres. Il s'agit d'exploiter convenablement ces ddl et pour cela de les identifier.

Par ailleurs, un vecteur propre comporte n composantes. Il peut être défini à un facteur près donc une composante peut être arbitrairement fixée. Ceci signifie qu'un vecteur propre, de façon générale, est caractérisé par $(n-1)$ composantes.

Compte tenu de la condition d'orthogonalité (3.41), tout choix de V implique un choix implicite de U . Il suffit donc de spécifier V . Cependant le choix de tous les vecteurs propres à droite v_i correspond à la spécification de $n(n-1)$ valeurs alors que seuls $n(m-1)$ ddl sont disponibles. Les vecteurs propres ne peuvent donc pas être arbitrairement fixés. En effet, ceux-ci doivent appartenir à des sous-espaces caractéristiques.

3.3.3.3 Sous-espaces caractéristiques

La présentation de cette notion s'inspire entre autres de [256], même s'il faut citer [272, 127] comme travaux antérieurs.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une valeur propre de A et $v \in \mathbb{C}^n$, un vecteur propre associé à λ . Les deux entités sont unies par la relation

$$\begin{aligned}
 Av &= \lambda v \\
 \Leftrightarrow (A_{bo} + BK)v &= \lambda v \\
 \Leftrightarrow (A_{bo} - \lambda I_n)v + BKv &= 0 \\
 \Leftrightarrow (A_{bo} - \lambda I_n)v + Bw &= 0
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

où $w = Kv \in \mathbb{C}^m$ est la direction d'entrée associée à v (ici, la matrice C est considérée comme égale à I_n).

De l'équation (3.46), l'on comprend que v doit appartenir à l'ensemble

$$S(\lambda) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \exists w \in \mathbb{C}^m \mid (A_{bo} - \lambda I_n)z + Bw = 0\}. \tag{3.47}$$

$S(\lambda)$ est appelé sous-espace caractéristique (ou $A_{bo}B$ -caractéristique) associé à λ . Lorsque la paire (A_{bo}, B) est commandable, $S(\lambda)$ est de dimension m . En d'autres termes, un choix implicite ou explicite des m composantes de w conditionne le choix de v . Il convient donc d'exploiter ces ddl, pour toute valeur propre λ , en se souvenant que v étant défini à un facteur près, w l'est aussi. Ainsi, seuls $(m - 1)$ ddl peuvent être exploités pour choisir v ce qui correspond, pour n vecteurs propres, aux $n(m - 1)$ ddl offerts par K .

En pratique, il est assez facile d'obtenir un vecteur propre et sa direction d'entrée associée en suivant [272] (voir [294] pour une vision plus accessible). À chaque valeur complexe λ , l'on peut associer la matrice

$$T_\lambda = \begin{bmatrix} A_{bo} - \lambda I_n & B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times (n+m)}. \tag{3.48}$$

On calcule ensuite une matrice R_λ ainsi décomposée,

$$R_\lambda = \begin{bmatrix} N_\lambda \\ M_\lambda \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad N_\lambda \in \mathbb{C}^{n \times m} \quad \text{et} \quad M_\lambda \in \mathbb{C}^{m \times m}, \tag{3.49}$$

dont les colonnes constituent une base du noyau de T_λ .

Il est clair que tout choix d'un vecteur $z \in \mathbb{C}^m$ non nul implique que le vecteur π défini par

$$\pi = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_\lambda z \\ M_\lambda z \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

appartient à $\text{Im}(R_\lambda) = \text{Ker}(T_\lambda)$ et qu'ainsi l'égalité (3.46) est satisfaite. Ceci signifie que $v \in S(\lambda)$.

Le calcul de la base d'un noyau ne pose pas de problème majeur. Une méthode est cependant très appropriée au calcul de R_λ . La matrice T_λ est décomposable en valeurs singulières :

$$T_\lambda = \mathcal{U} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \end{bmatrix} \mathcal{V}' \quad (3.51)$$

où Σ est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières de T_λ et où \mathcal{U} et \mathcal{V} sont des matrices orthonormales c.-à-d. vérifiant $\mathcal{U}'\mathcal{U} = I_n$ et $\mathcal{V}'\mathcal{V} = I_{n+m}$. De (3.51), l'on déduit que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{bo} - \lambda I_n & B \end{bmatrix} \mathcal{V} = \mathcal{U} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} A_{bo} - \lambda I_n & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 & | & \mathcal{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}\Sigma & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'où il est facile de voir que

$$\begin{bmatrix} A_{bo} - \lambda I_n & B \end{bmatrix} \mathcal{V}_2 = 0. \quad (3.52)$$

L'équation (3.52) fait apparaître qu'un choix possible de R_λ est

$$R_\lambda = \mathcal{V}_2. \quad (3.53)$$

Il suffit ensuite de décomposer \mathcal{V}_2 en N_λ et M_λ selon (3.49).

Une autre technique plus directe consiste à fixer arbitrairement $M_\lambda = I_m$ [127] (voir aussi [308]) et il vient alors

$$N_\lambda = (\lambda I_n - A_{bo})^{-1} B. \quad (3.54)$$

Toutefois, ce choix arbitraire de M_λ implique que l'inversion soit possible ce qui n'est le cas que si λ n'est pas valeur propre de A_0 . Une telle technique de calcul de R_λ nécessite donc le choix d'un spectre désiré pour le système bouclé totalement distinct du spectre en boucle ouverte.

Le choix d'un vecteur propre v se fait donc au travers du choix d'un vecteur de ddl z .

Remarque 3.6 Pour choisir z afin d'obtenir le vecteur v désiré à des fins de découplage, une excellente technique est proposée dans [5] (voir aussi [89]).

3.3.3.4 Calcul de K

Une fois les valeurs propres λ_i choisies et les vecteurs propres admissibles les plus appropriés déterminés, il faut calculer la matrice de retour d'état K . Nous résumons, dans le théorème suivant, deux résultats de Moore [272].

Théorème 3.7 [272] Soient la paire commandable (A_{bo}, B) où $A_{bo} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ainsi que $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$ un ensemble auto-conjugué de n complexes. Il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que

$$(A_{bo} + BK)v_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.55)$$

si et seulement si

- (i) les vecteurs propres v_i sont linéairement indépendants ;
- (ii) $v_i = \tilde{v}_j$ quand $\lambda_i = \tilde{\lambda}_j$;
- (iii) $v_i \in S(\lambda_i)$.

Si K existe et si B est de rang plein, alors K est unique et est donnée par

$$K = WV^{-1} \quad (3.56)$$

où V est la matrice modale issue des vecteurs v_i et où W est la concaténation des n directions d'entrées :

$$W = [w_1 \quad \dots \quad w_n]. \quad (3.57)$$

Compte tenu des développements ci-avant, la justification est assez simple. La condition (iii) correspond à l'admissibilité des vecteurs propres. Ainsi, l'on obtient :

$$A_{bo}v_i + Bw_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.58)$$

Si l'on considère que les vecteurs w_i sont les directions d'entrée alors K est telle que

$$w_i = Kv_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.59)$$

Il vient alors la relation (3.55). Puisque la matrice K doit satisfaire (3.59), elle est nécessairement déterminée par (3.56). La condition (i) assure l'inversion de V et la condition (ii) assure que la solution K apportée au problème est bien réelle et non complexe.

Voici une procédure pour réaliser un placement de structure propre par retour d'état :

Algorithme 3.2 [272]

- *Étape 1* : choix du spectre auto-conjugué désiré $\{\lambda_i\}$;
- *Étape 2* : détermination des matrices R_{λ_i} ;
- *Étape 3* : choix de vecteurs de paramètres z_i tels que $v_j = \tilde{v}_i \Leftrightarrow z_j = \tilde{z}_i$;
- *Étape 4* : calcul des vecteurs propres placés v_i et des directions d'entrée par les relations

$$\begin{cases} v_i = N_{\lambda_i} z_i \\ w_i = M_{\lambda_i} z_i \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}; \quad (3.60)$$

- *Étape 5* : vérification de l'indépendance linéaire des v_i (sinon retour à l'étape 3 voire l'étape 1) ;
- *Étape 6* : calcul de V et W ;
- *Étape 7* : calcul de K par la formule (3.56).

Remarque 3.7 Numériquement, le calcul de K , qui fait intervenir deux matrices complexes dont l'une doit être inversée, peut se révéler quelque peu imprécis et conduire à une faible partie imaginaire. Il existe une technique pour transformer W et V en deux matrices réelles qui sur le plan théorique, conduisent à la même valeur de K . Par souci de concision, ce point n'est pas détaillé (voir [272]).

Remarque 3.8 Il faut noter que l'algorithme 3.2 permet d'exploiter les mn degrés de liberté offerts par la matrice K . n sont utilisés pour choisir les n valeurs propres et $n(m-1)$ correspondent aux vecteurs z_i qui déterminent les v_i dans les sous-espaces admissibles.

Cette approche est qualifiée de directe. Il existe d'autres approches parmi lesquelles l'une est dite paramétrique [127]. L'on peut montrer que l'approche paramétrique correspond en fait au choix restrictif $M_{\lambda_i} = I_m \forall i$ déjà évoqué plus haut.

Remarque 3.9 Dans le cas où le spectre désiré comporte des valeurs propres multiples, l'approche directe est adaptable [222], de même que l'approche paramétrique [128] (des explications sont données dans [83, 85]).

Remarque 3.10 *Un article récent permet de faire du placement strict et robuste de pôles par une approche LMI [2]. Il mérite à notre sens l'attention du lecteur.*

3.3.4 Placement de structure propre par retour statique de sortie

3.3.4.1 Préliminaires et conditions de placement

Il est rappelé que le problème du placement de pôles par retour statique de sortie consiste à déterminer la matrice F de sorte que le spectre de $A = A_{bo} + BFC$ coïncide avec un ensemble de valeurs spécifiées au préalable. Ce problème a fait l'objet de nombreux efforts depuis les premières contributions de Davison [103, 104, 106]. À première vue, il devrait y avoir suffisamment de composantes dans F pour placer n valeurs propres de A si $mp \geq n$. Cependant, en raison de la non-linéarité du problème, une argumentation aussi simpliste ne peut raisonnablement être avancée. Néanmoins, dans [177, 67], il est démontré que $mp \geq n$ est en fait une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution au problème *dans le groupe des matrices complexes*.

Pour un retour *réel*, cette condition n'est plus valable comme le montrent des contre-exemples fournis par [355]. Dans ce cas, une première condition génériquement suffisante de placement fut proposée dans [219, 220] : $m + p > n$. Cette condition est appelée « condition de Kimura ». La même condition fut obtenue dans [67]. Plus récemment, une condition génériquement suffisante moins restrictive fut établie dans [354] : $mp > n$ (seulement générique comme illustré par le contre-exemple de [221]). Cette condition fut également obtenue par une approche très différente dans [313, 314]. Elle est appelée « condition de Wang ».

Cependant, même lorsque l'on peut raisonnablement estimer qu'une solution F existe (c'est-à-dire quand $mp > n$), il importe de disposer d'une technique pour déterminer cette solution. La seule couvrant tous les cas de la condition de Wang qui soit disponible à notre connaissance est justement la technique de Wang [354], basée sur les matrices grassmanniennes. Elle requiert de résoudre un problème d'optimisation basée sur la méthode de Newton. Il faut par ailleurs faire le choix de paramètres à certaines étapes du processus et ce choix n'est pas aisé. Si l'optimisation est évitée au profit d'un calcul plus direct, les meilleurs résultats sont, selon nous, ceux qui s'appuient sur la notion de structure propre. Plusieurs techniques permettent de considérer le placement de pôles par retour statique de sortie. Elles émanent toutes du travail de Moore [272] sur le retour d'état. Parmi les approches possibles, les plus significatives à notre sens sont l'approche paramétrique [309, 310], l'élégante approche géométrique [73, 74] et l'approche basée sur deux équations de Sylvester couplées par une condition d'orthogonalité sur les vecteurs propres [337] (voir aussi [132, 232]). L'on peut aussi citer une approche un peu moins connue, celle de [192]. L'avantage des approches géométrique et paramétrique est qu'elles font plus clairement apparaître les degrés de liberté. En revanche, le spectre désiré doit obéir à certaines restrictions (surtout dans l'approche paramétrique : voir [13] pour un commentaire à ce propos). L'approche « Sylvester » est quant à elle moins restrictive et les degrés de liberté restent localisables et exploitables. Elle est en outre très propice à la programmation. Il convient de noter que la condition de Kimura apparaît comme génériquement nécessaire pour l'application de ces diverses techniques de placement de structure propre par retour statique de

sortie. Ainsi, l'on peut affirmer que, *si l'on s'en tient à ces techniques*, la condition de Kimura peut presque être vue comme une condition génériquement nécessaire et suffisante de placement complet de pôles de retour statique de sortie.

Toutefois, puisque une meilleure condition existe, celle de Wang, beaucoup d'auteurs firent porter leurs efforts vers le cas $m + p \leq n$. Récemment, une forme explicite des équations de placement par rapport aux composantes de F fut proposée dans [69] suivant une approche algébrique. Cette approche permet d'aborder le problème dans certains cas spécifiques parmi lesquels le cas $m = p = 2, n = 4$ nous paraît le plus intéressant. Concernant le placement de structure propre, des éléments de réponse pertinents peuvent être trouvés dans [232] mais le résultat le plus puissant est peut-être celui de [338]. Dans cet article, il faut passer par une procédure d'optimisation pour traiter le cas $m + p = n$.

Jusqu'à récemment, nous privilégions la technique de [337] dans nos travaux. Cependant, nous avons développé une technique qui nous est propre et que nous choisissons de présenter ici [15]. Elle consiste à placer jusqu'à $m + p$ pôles lorsque $mp > m + p$. La conséquence immédiate est que lorsque $m + p = n < mp$, il est possible de placer le spectre dans son intégralité.

Remarque 3.11 *Dans son excellent article [137], Fu démontre que le problème de placement strict de pôles par retour de sortie est par essence NP-difficile. Pour ce faire il prouve son équivalence avec un autre problème avéré NP-difficile. Il suggère (sans certitude mais un peu rapidement néanmoins) que le problème de stabilisation (ou de placement non strict pour ce qui nous occupe) est peut-être lui aussi NP-difficile. Ceci signifierait en substance que la difficulté évoquée au paragraphe 3.2.2.1 serait insurmontable. Nous ne partageons pas entièrement cette conviction pessimiste. Il n'est pas exclu qu'une formulation convexe du problème de stabilisation puisse être trouvée. Si elle est découverte, le monde de l'automatique passera par une phase d'ébullition. Quoique le problème de placement de pôles soit NP-difficile, il n'en reste pas moins que des cas particuliers significatifs tels que ceux que nous présentons ci-après autorisent la détermination d'une solution par un calcul direct.*

Afin de clarifier les conditions dans lesquelles notre technique s'applique, nous reformulons ici le problème de placement (complet ou partiel) de pôles par retour statique de sortie.

Problème 3.2 *Soit $(A_{bo}, B, C) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n}$ un triplet de matrices vérifiant les hypothèses suivantes :*

- (i) *la réalisation (A_{bo}, B, C) est minimale ;*
- (ii) *$mp > m + p$;*
- (iii) *$\text{Rang}(B) = m \leq n$ & $\text{Rang}(C) = p \leq n$.*

Soit $\{\lambda_i, i = 1, \dots, m + q\}$ un ensemble de $m + q$ valeurs complexes distinctes ($q \leq n - m$) tel que $\{\lambda_i, i = 1, \dots, m\}$ et $\{\lambda_j, j = m + 1, \dots, m + q\}$ sont auto-conjugués. Déterminer une matrice $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$ telle que $\{\lambda_i, i = 1, \dots, m + q\} \subset \lambda(A = A_{bo} + BFC)$.

Si $q < n - m$, l'on parle de placement partiel de pôles.

Si $q = n - m$, l'on parle de placement complet de pôles.

Les conditions (i) et (iii) sont habituelles. La condition (ii) s'avérera utile lorsque le placement partiel sera abordé. Par ailleurs, elle peut correspondre à la condition de Wang dans le cas d'un placement complet (nous y reviendrons). Une autre légère restriction est la séparation du spectre désiré entre deux sous-ensembles auto-conjugués. Il s'agit néanmoins d'une restriction très classique.

3.3.4.2 Sous-espaces caractéristiques et retour de sortie

Dans ce paragraphe, la notion de sous-espaces caractéristiques, développée en §3.3.3.3, est adaptée au cas du retour statique de sortie.

L'équation de la structure propre à droite est (3.35) qui équivaut à

$$(A_{bo} - \lambda_i I_n)v_i + BFCv_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.61)$$

$$\Leftrightarrow (A_{bo} - \lambda_i I_n)v_i + Bw_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.62)$$

où les vecteurs $w_i = FCv_i$ sont les directions d'entrées. Par conséquent, chaque v_i appartient au sous-espace (A_{bo}, B) -caractéristique relatif à λ_i , noté $S_i(\lambda_i)$, tel que défini en (3.47). Soient les vecteurs π_i définis par $\pi = [v_i' \ w_i']'$. Alors, il vient, conformément au paragraphe 3.3.3.3,

$$T_{\lambda_i} \pi_i = 0 \quad \text{avec} \quad T_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} A_{bo} - \lambda_i I_n & B \end{bmatrix} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.63)$$

et donc,

$$\pi_i \in \left(\text{Im}(R_{\lambda_i}) = \text{Im} \left(\begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix} \right) = \text{Ker}(T_{\lambda_i}) \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.64)$$

où $N_{\lambda_i} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ et $M_{\lambda_i} \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Soit un vecteur de ddl $z_i \in \mathbb{C}^m$. Les vecteurs propres et les directions d'entrée sont respectivement donnés par

$$\begin{cases} v_i = N_{\lambda_i} z_i \\ w_i = M_{\lambda_i} z_i \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.65)$$

Puisque les vecteurs v_i et w_i peuvent être mis à l'échelle, chaque vecteur z_i apporte en réalité seulement $(m-1)$ ddl, générant la direction propre correspondante. Les ddl z_i doivent respecter la même contrainte d'auto-conjugaison que les valeurs propres (cf. théorème 3.7). Lorsque $C = I_n$, l'on détermine un retour d'état grâce au théorème 3.7. Si $\text{rang}(C) = n$, le retour $F = KC^{-1}$

où K est déduit du théorème 3.7 répond au problème. Si $\text{rang}(C) < n$, le retour statique de sortie donné par

$$F = W_p V_p^{-1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} V_p = [Cv_1 & \dots & Cv_p] \\ W_p = [w_1 & \dots & w_p] \end{cases} \quad (3.66)$$

permet de placer seulement le sous-ensemble $\{\lambda_i, i = 1, \dots, p\}$, sous réserve que les vecteurs Cv_i soient linéairement indépendants [5].

Par dualité, l'on peut raisonner sur la direction propre à gauche caractérisée par (3.39) ce qui signifie qu'un sous-espace (A'_{bo}, C') -caractéristique $\tilde{S}(\lambda_i)$ peut être défini et contient les vecteurs propres admissibles u_i . Ces derniers, ainsi que les directions de sortie associées, sont choisis grâce à des vecteurs de ddl $x_i \in \mathbb{C}^p$ tels que

$$\begin{cases} u'_i = x'_i \tilde{N}_{\lambda_i} \\ l'_i = x'_i \tilde{M}_{\lambda_i}, \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.67)$$

où $\tilde{R}_{\lambda_i} = [\tilde{N}_{\lambda_i} \quad \tilde{M}_{\lambda_i}]$ représente le noyau à gauche de

$$\tilde{T}_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} A_{bo} - \lambda_i I_n \\ C \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

L'on peut alors placer m valeurs propres $\{\lambda_i, i = 1, \dots, m\}$ grâce au retour statique de sortie associé à la matrice

$$F = (U'_m)^{-1} L'_m \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U'_m = [B'u_1 & \dots & B'u_m] \\ L'_m = [l_1 & \dots & l_m] \end{cases} \quad (3.69)$$

Si $\text{rang}(B) = n$, le placement est complet. Lorsque $B = I_n$, l'on retrouve un retour d'état K selon un procédé dual du théorème 3.7.

L'on rappelle que les deux techniques duales ne peuvent être associées sans précaution puisque la condition d'orthogonalité (3.41) doit être respectée.

Remarque 3.12 *Il importe vraiment que les ensembles $\{\lambda_i\}$, $\{z_i\}$ et $\{x_i\}$ respectent la même contrainte de conjugaison et plus précisément que $\lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \{z_i, x_i\} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ et $\lambda_i = \bar{\lambda}_j \Rightarrow (z_i = \bar{z}_j \ \& \ x_i = \bar{x}_j)$, sinon la matrice F plaçant les pôles spécifiés pourrait être complexe (voir [272]).*

3.3.4.3 Équation du placement de structure propre

Dans ce paragraphe, le placement de structure propre est caractérisé par une simple égalité qui est la base de l'approche présentée.

L'on suppose que F place les m premières valeurs propres. Une telle matrice F est définie par (3.69). Si le but est de placer aussi le reste du spectre, alors il est nécessaire que F satisfasse aussi les propriétés de la structure propre pour les q valeurs propres restant à placer (pour les $r = n - m$ valeurs propres restantes dans le cas d'un placement complet).

Les pôles à placer restants, λ_j , $j = m + 1, \dots, m + q$, sont tels que leurs vecteurs propres associés v_j et leurs directions d'entrée associées w_j obéissent à

$$w_j = FCv_j \quad \forall j \in \{m + 1, \dots, m + q\} \quad (3.70)$$

$$\Leftrightarrow M_{\lambda_j} z_j = FCN_{\lambda_j} z_j \quad \forall j \in \{m + 1, \dots, m + q\}. \quad (3.71)$$

D'après (3.69), l'on obtient

$$M_{\lambda_j} z_j = (U'_m)^{-1} L'_m CN_{\lambda_j} z_j \quad \forall j \in \{m + 1, \dots, m + q\} \quad (3.72)$$

$$\Leftrightarrow U'_m M_{\lambda_j} z_j - L'_m CN_{\lambda_j} z_j = 0 \quad \forall j \in \{m + 1, \dots, m + q\} \quad (3.73)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \tilde{N}_{\lambda_1} \\ \vdots \\ x'_m \tilde{N}_{\lambda_m} \end{bmatrix} BM_{\lambda_j} z_j - \begin{bmatrix} x'_1 \tilde{M}_{\lambda_1} \\ \vdots \\ x'_m \tilde{M}_{\lambda_m} \end{bmatrix} CN_{\lambda_j} z_j = 0 \quad \forall j \in \{m + 1, \dots, m + q\}. \quad (3.74)$$

Ces q équations se résument en une seule équation matricielle :

$$XYZ = 0 \quad (3.75)$$

où

$$X = \bigoplus_{i=1}^m x'_i \in \mathbf{C}^{m \times mp}, \quad (3.76)$$

$$Z = \bigoplus_{i=m+1}^{m+q} z_j \in \mathbf{C}^{mq \times q}, \quad (3.77)$$

$$Y = \tilde{N}' BM - \tilde{M}' CN, \quad (3.78)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{N}} = & \begin{bmatrix} \tilde{N}'_{\lambda_1} & \dots & \tilde{N}'_{\lambda_m} \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathcal{M}} = & \begin{bmatrix} \tilde{M}'_{\lambda_1} & \dots & \tilde{M}'_{\lambda_m} \end{bmatrix} \\ \mathcal{N} = & \begin{bmatrix} N_{\lambda_{m+1}} & \dots & N_{\lambda_{m+q}} \end{bmatrix} \\ \mathcal{M} = & \begin{bmatrix} M_{\lambda_{m+1}} & \dots & M_{\lambda_{m+q}} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (3.79)$$

Ce paragraphe est résumé par le théorème suivant.

Théorème 3.8 [15] *Il existe une solution au problème 3.2 si et seulement s'il existe des vecteurs non nuls $x_i \in \mathbb{C}^p$, $i = 1, \dots, m$, et $z_j \in \mathbb{C}^m$, $j = m + 1, \dots, m + q$, tels que*

- (i) $x_k \in \mathbb{R}^p$ si $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $x_h = \bar{x}_l$ si $\lambda_h = \bar{\lambda}_l$, $z_r \in \mathbb{R}^m$ si $\lambda_r \in \mathbb{R}$ et $z_s = \bar{z}_t$ si $\lambda_s = \bar{\lambda}_t$;
- (ii) les vecteurs $(x'_i \tilde{N}_i B)$ sont linéairement indépendants ;
- (iii) L'égalité (3.75) est satisfaite.

Une solution est alors donnée par (3.69).

La condition (i) réduit l'ensemble des solutions aux matrices de retour réelles. La condition (ii) assure que F est calculable par (3.69). La condition (iii) correspond au placement proprement dit et assure l'admissibilité des vecteurs propres (c.-à-d. $v_j \in S(\lambda_j)$, $u_i \in \tilde{S}(\lambda_i)$ et (3.41)). Le problème apparaît alors essentiellement bilinéaire puisqu'il s'agit de trouver X et Z de manière à vérifier (3.75). Il est par essence généralement difficile d'atteindre une solution de cette équation. Cependant, certains cas particuliers sont considérés dans ce qui suit.

3.3.4.4 Procédures de placement

3.3.4.4.1 $m + p > n \Leftrightarrow p > r$ (condition de Kimura)

Dans ce cas, l'on fixe $q = r$. La matrice Z définie en (3.77) est arbitrairement choisie. Le produit matriciel $YZ \in \mathbb{C}^{mp \times q}$ est au plus de rang $q = r$ donc si ce produit YZ est ainsi décomposé,

$$YZ = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_m \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_i \in \mathbb{C}^{p \times q} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad (3.80)$$

il apparaît que le rang générique de \tilde{Y}_i ne peut excéder $q < p$. Une base du noyau à gauche de \tilde{Y}_i peut alors être calculée. Soit \mathcal{X}_i le complément orthogonal à gauche de \tilde{Y}_i tel que

$$\mathcal{X}_i \tilde{Y}_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}. \quad (3.81)$$

La dimension générique de \mathcal{X}_i est $(p-q) \times p$. Soit $\beta_i \in \mathbb{R}^{p-q}$ un vecteur non nul de paramètres ($\forall i \in \{1, \dots, m\}$). Il vient alors $\beta_i' \mathcal{X}_i \tilde{Y}_i = 0$ et donc le choix $x_i = \mathcal{X}_i' \beta_i, \forall i \in \{1, \dots, m\}$ fournit une solution à (3.75) à partir de laquelle F peut être calculée grâce à (3.67) et (3.69).

Remarque 3.13 Cette solution est réelle dès lors que les hypothèses de la remarque 3.12 sont respectées, ce qui n'est pas restrictif puisque Z est libre. Si la matrice Z est convenablement choisie c.-à-d. si l'ensemble $\{z_j\}$ est auto-conjugué, alors $\{x_i\}$ l'est aussi.

Remarque 3.14 Chaque vecteur z_j fournit $(m-1)$ ddl et chaque vecteur β_i fournit $(p-r-1)$ ddl donc $(r(m-1) + m(p-r-1)) = mp - n$ parmi les mp offerts par F sont utilisés pour placer les vecteurs propres. Les n ddl restant dans F correspondent au choix du spectre désiré. Ainsi, toute la flexibilité apportée par F peut être exploitée. Pour plus d'information sur le placement de structure propre, voir [5, 84].

Remarque 3.15 Cette technique induit des résultats équivalents à ceux de [337]. Cependant, l'idée fondamentale peut sembler plus proche de celle développée dans [310].

La mise en œuvre des développements présentés ci-avant peut se faire en respectant l'algorithme suivant.

Algorithme 3.3

- *Étape 1* : choix de deux sous-ensembles auto-conjugués $\{\lambda_i, i = 1, \dots, m\}$ et $\{\lambda_j, j = m+1, \dots, m+q\}$ dont l'union est le spectre désiré, constitué d'éléments distincts ;
- *Étape 2* : détermination des matrices \tilde{R}_{λ_i} et R_{λ_j} associées ;
- *Étape 3* : détermination des matrices $\tilde{M}_{\lambda_i}, \tilde{N}_{\lambda_i}, M_{\lambda_j}$ et N_{λ_j} associées ;
- *Étape 4* : calcul de \tilde{M}, M, \tilde{N} , et N selon (3.79) ;
- *Étape 5* : calcul de Y selon (3.78) ;
- *Étape 6* : choix arbitraire de vecteurs de paramètres z_j tels que $\lambda_k = \bar{\lambda}_l \Leftrightarrow z_k = \bar{z}_l$;
- *Étape 7* : calcul de Z selon (3.77) ;
- *Étape 8* : calcul du produit YZ et décomposition selon (3.80) ;
- *Étape 9* : calcul des bases des noyaux à gauche de chaque \tilde{Y}_i selon (3.81) ;
- *Étape 10* : choix de vecteurs non nuls de paramètres $\beta_i \in \mathbb{R}^{p-q}$;
- *Étape 11* : calcul des vecteurs $x_i = \mathcal{X}_i' \beta_i$;
- *Étape 12* : calcul des vecteurs propres à gauche u_i et des directions de sortie l_i grâce à

$$\begin{cases} u_i = \tilde{N}_{\lambda_i} x_i \\ l_i = \tilde{M}_{\lambda_i} x_i \end{cases} \quad (3.82)$$

- *Étape 13* : calcul de F selon (3.69).

Il s'agit là du cas le plus simple à traiter.

3.3.4.4.2 $q < r$ (placement partiel)

La procédure du paragraphe précédent est tout à fait applicable dès lors que $q < p$. Nous n'y revenons donc pas si ce n'est qu'il faut préciser qu'à l'étape 1 de l'algorithme 3.3, l'union des deux ensembles ne constitue qu'un sous-ensemble du spectre désiré.

Remarque 3.16 *Chaque vecteur z_j fournit $(m - 1)$ ddl et chaque vecteur β_i fournit $(p - q - 1)$ ddl donc $(q(m - 1) + m(p - q - 1)) = mp - q - m$ parmi les mp offerts par F sont utilisés pour placer les vecteurs propres. Les $m + q$ ddl restant dans F correspondent au choix des pôles désirés. Ainsi, toute la flexibilité apportée par F peut être exploitée.*

En revanche, l'algorithme 3.3 échoue si $q = p$ car il devient génériquement impossible dans ce cas de déterminer les noyaux à gauche \mathcal{X}_i (sans qu'il ne se réduisent à 0). En effet, \tilde{Y}_i est génériquement de rang p . L'idée est alors de déterminer la matrice Z telle que chaque bloc \tilde{Y}_i devienne déficient en rang, c'est-à-dire vérifie $\text{rang}(\tilde{Y}_i) \leq p - 1$. Il existe sans doute plusieurs matrices Z acceptables parmi lesquelles certaines peuvent être repérées. L'on définit $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{mp \times (mp - m - p)}$, une matrice dont les colonnes engendrent le noyau à droite de Y (qui est de rang générique $(m + p)$). Tout vecteur non nul $\mu \in \mathbb{R}^{mp - m - p}$ est tel que $g = \mathcal{Z}\mu$ appartient au noyau de Y et vérifie

$$Yg = Y \begin{bmatrix} z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+p} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{avec} \quad z_j \in \mathbb{C}^m \quad \forall j \in \{m + 1, \dots, m + p\}. \quad (3.83)$$

L'on peut écrire Y ainsi :

$$Y = [Y_{m+1} \quad \dots \quad Y_{m+p}] \quad \text{avec} \quad Y_j \in \mathbb{C}^{mp \times m} \quad \forall j \in \{m + 1, \dots, m + p\}. \quad (3.84)$$

De (3.83) et (3.77), l'on peut déduire que les colonnes du produit de matrices YZ sont linéairement dépendantes donc chaque matrice \tilde{Y}_i est de rang générique $(p - 1)$. À ce stade, L'on peut procéder comme dans le paragraphe précédent en calculant les matrices \mathcal{X}_i . Sauf en cas de déficience de rang supplémentaire au niveau de \tilde{Y}_i , chaque matrice \mathcal{X}_i se réduit à un vecteur $x_i = \mathcal{X}_i$. De ces vecteurs, les équations (3.67) et (3.69) conduisent à une solution F .

Remarque 3.17 *La souplesse disponible est celle offerte par μ , d'où l'on tire $(mp - m - p - 1)$ ddl. Puisque F apporte mp ddl dont $m + p$ sont utilisés pour le choix des pôles désirés, cela signifie que seul un ddl n'est pas exploité.*

La condition (ii) du problème 3.2 est maintenant justifiée. En fait, elle est liée à l'existence de \mathcal{Z} . Il est aisé de constater que \mathcal{Z} existe si et seulement si $mp > m + p$. Si cette condition n'est

pas vérifiée, un placement partiel classique peut être appliqué pour placer seulement $\max(m, p)$ pôles.

Une attention particulière doit être portée sur le cas des valeurs propres complexes. Dans le paragraphe précédent, comme Z était libre, il était facile de respecter la remarque 3.12. Cependant, Z ne l'est plus tout à fait si $q = p$. Cette matrice est déduite de \mathcal{Z} . Si \mathcal{Z} est décomposée comme suit,

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} Z_{m+1} \\ \vdots \\ Z_{m+p} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad Z_j \in \mathbb{C}^{m \times (mp-m-p)} \quad \forall j \in \{m+1, \dots, m+p\}, \quad (3.85)$$

L'analyse de la structure de la matrice Y donnée en (3.78) permet de conclure qu'une possibilité pour calculer \mathcal{Z} est de satisfaire

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M} \\ C\mathcal{N} \end{bmatrix} \mathcal{Z} = 0. \quad (3.86)$$

L'on note que $M_{\lambda_k} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $N_{\lambda_k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ lorsque $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, $M_{\lambda_h} = \bar{M}_{\lambda_l}$ et $N_{\lambda_h} = \bar{N}_{\lambda_l}$ lorsque $\lambda_h = \bar{\lambda}_l$. Soit $\hat{\mathcal{M}}$, la matrice obtenue à partir de \mathcal{M} en remplaçant chaque bloc $[M_{\lambda_h} \ M_{\lambda_l}]$ par $[2\text{Re}(M_{\lambda_h}) - 2\text{Im}(M_{\lambda_h})]$. L'application de la même procédure permet de déduire $\hat{\mathcal{N}}$ à partir de \mathcal{N} . L'on peut calculer la matrice

$$\hat{\mathcal{Z}} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{m+1} \\ \vdots \\ \hat{Z}_{m+p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times (mp-m-p)} \quad \text{avec} \quad \hat{Z}_j \in \mathbb{R}^{m \times (mp-m-p)} \quad \forall j \in \{m+1, \dots, m+p\} \quad (3.87)$$

telle que

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{M}} \\ C\hat{\mathcal{N}} \end{bmatrix} \hat{\mathcal{Z}} = 0. \quad (3.88)$$

Une matrice \mathcal{Z} peut être déduite en choisissant

$$\begin{cases} Z_k = \hat{Z}_k & \text{si } \lambda_k \in \mathbb{R}, \\ \begin{bmatrix} Z_h \\ Z_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_h + \mathbf{i}\hat{Z}_l \\ \hat{Z}_h - \mathbf{i}\hat{Z}_l \end{bmatrix} & \text{si } \lambda_h = \bar{\lambda}_l \in \mathbb{C}. \end{cases} \quad (3.89)$$

À ce stade, les matrices \mathcal{X}_i , qui sont en réalité génériquement des vecteurs $\mathcal{X}_i \in \mathbb{C}^p$, peuvent être directement calculées. Néanmoins, il est possible d'éviter le calcul de noyaux de matrices complexes en procédant comme suit. Pour un couple de valeurs propres complexes conjuguées $\{\lambda_h; \lambda_l\}$, il suffit de remplacer la matrice

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}_h \\ \tilde{Y}_l \end{bmatrix} \quad \text{par} \quad \hat{Y}_h = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\tilde{Y}_h) & \operatorname{Im}(\tilde{Y}_h) \\ -\operatorname{Im}(\tilde{Y}_h) & \operatorname{Re}(\tilde{Y}_h) \end{bmatrix}, \quad (3.90)$$

et calculer la matrice

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{X}}_h & \hat{\mathcal{X}}_l \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \{\hat{\mathcal{X}}_h; \hat{\mathcal{X}}_l\} \in \{\mathbb{R}^{2 \times 2p}\}^2. \quad (3.91)$$

telle que

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{X}}_h & \hat{\mathcal{X}}_l \end{bmatrix} \hat{Y}_h = 0. \quad (3.92)$$

Les matrices correspondantes \mathcal{X}_h et \mathcal{X}_l sont données par

$$\begin{cases} \mathcal{X}_h &= \hat{\mathcal{X}}_h + \mathbf{i}\hat{\mathcal{X}}_l \\ \mathcal{X}_l &= \hat{\mathcal{X}}_h - \mathbf{i}\hat{\mathcal{X}}_l. \end{cases} \quad (3.93)$$

Les développements ci-dessus sont résumés par l'algorithme suivant.

Algorithme 3.4

- *Étape 1* : choix de deux sous-ensembles auto-conjugués $\{\lambda_i, i = 1, \dots, m\}$ et $\{\lambda_j, j = m + 1, \dots, m + q\}$ dont l'union est un sous-ensemble du spectre désiré, constitué d'éléments distincts ;
- *Étape 2-4* : *idem* Algorithme 3.3 ;
- *Étape 5* : calcul de la matrice

$$J = \begin{bmatrix} \mathcal{M} \\ C\mathcal{N} \end{bmatrix};$$

- *Étape 6* : s'il existe éléments complexes complexes dans $\{\lambda_j, j = m + 1, \dots, m + p\}$, calcul de

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{M}} \\ C\hat{\mathcal{N}} \end{bmatrix}$$

et de $\hat{\mathcal{Z}}$, noyau de \hat{J} puis déduction de \mathcal{Z} par (3.89),
sinon calcul de \mathcal{Z} , noyau de J ;

- *Étape 7* : choix arbitraire d'un vecteur non nul $\mu \in \mathbb{R}^{mp-m-p}$;
- *Étape 8* : calcul de $g = \mathcal{Z}\mu$;
- *Étape 9* : calcul de Yg ;
- *Étape 10* : extraction des z_i selon (3.83) ;
- *Étape 11-12* : *idem* étapes 7-8 Algorithme 3.3 ;
- *Étape 13* : s'il existe des éléments complexes dans $\{\lambda_i, j = 1, \dots, m\}$, calculer les matrices \hat{Y}_h grâce à (3.90), les matrices $[\hat{\mathcal{X}}_h \hat{\mathcal{X}}_l]$ de manière à vérifier (3.92) et déduire $[\mathcal{X}_h \mathcal{X}_l]$ de (3.93),
sinon calculer directement les \mathcal{X}_i de sorte que (3.81) soit satisfaite ;
- *Étape 14* : choisir (génériquement) $x_i = \mathcal{X}'_i$ (sinon une colonne de \mathcal{X}'_i) ;
- *Étape 15-16* : *idem* étapes 12-13 Algorithme 3.3.

3.3.4.4.3 $m + p = n$ (condition non stricte de Kimura)

Dans ce cas, la condition (ii) du problème 3.2 s'écrit $mp > n$ et correspond donc à la condition de Wang. L'on peut toujours fixer $q = p$ de sorte que placer $m + p$ pôles revient à placer tout le spectre. Ainsi, il ne s'agit que d'un cas particulier du cas traité au paragraphe précédent et l'algorithme 3.4 s'applique sans difficulté. La condition de Kimura au sens strict ($m + p > n$) n'est donc plus une limite pour le placement complet de pôles par voie modale. Il faut lui substituer la condition non stricte $m + p \geq n$.

Remarque 3.18 *Conformément au cas du placement de $m + p$ pôles en général, un seul ddl n n'est pas exploité.*

Remarque 3.19 *À titre de petite perspective, il serait intéressant d'éviter la séparation du spectre désiré en deux sous-ensembles. En effet, en raison de cette restriction (certes acceptable), si $n = 8$, $m = 5$ et $p = 3$ par exemple, il est impossible de placer 8 valeurs propres complexes non réelles. Mais bien davantage, le principal défi est de placer tout le spectre quand $m + p < n$.*

3.3.4.4.4 Petite illustration

Afin que le lecteur puisse vérifier le bien fondé de nos propos et puisque ces algorithmes sont très récents, nous proposons ici, à titre exceptionnel, une petite illustration. Les matrices A_{bo} et B sont empruntées à [12] :

$$A_{bo} = \begin{bmatrix} -0,3400 & 0,0517 & 0,0010 & -0,9970 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ -2,6900 & 0 & -1,1500 & 0,7380 & 0 \\ 5,9100 & 0 & 0,1380 & -0,5060 & 0 \\ -0,3400 & 0,0517 & 0,0010 & 0,0031 & 0 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0,0755 & 0 & 0,0246 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4,4800 & 5,2200 & -0,7420 \\ -5,0300 & 0,0998 & 0,9840 \\ 0,0755 & 0 & 0,0246 \end{bmatrix} .$$

Dans [12], une loi de commande de type retour d'état était calculée afin de placer le spectre $\{-3 \pm 2i; -2 \pm 2i; -0,5\}$. Nous nous proposons ici de poursuivre le même but mais seules deux composantes du vecteur d'état sont mesurées de sorte que la matrice de sortie est

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nous sommes donc dans le cas $m + p = n < mp$. En effet, l'on peut voir que $m + p = 3 + 2 = 5 = n < 6 = 2 \times 3 = mp$. L'algorithme 3.4 conduit à la matrice de retour de sortie

$$F = \begin{bmatrix} -12,7499 & -24,4928 \\ 569,7537 & 781,0785 \\ -86,0455 & -145,3437 \end{bmatrix}$$

qui place bien le spectre désiré.

Du point de vue numérique, la détermination de la matrice de retour nécessite le calcul des bases de plusieurs noyaux. Néanmoins, il n'est nul besoin de recourir à un autre processus d'optimisation (contrairement à la technique de [338]). De nombreux exemples concrets et aléatoires ont conduit à des résultats satisfaisants jusqu'à $n = 8$. Pour de plus grandes valeurs de n , les calculs numériques peuvent occasionnellement se révéler imprécis, spécialement lorsque les valeurs des composantes de F se révèlent très élevées. Dans ce cas, le calcul des valeurs propres est lui-même imprécis et il devient ardu de déterminer si la solution au problème est mauvaise ou si c'est la vérification de cette solution qui est douteuse.

3.3.4.5 Comment faire un placement complet quand $m + p < n$?

Lorsque la condition de Kimura, même non stricte, n'est pas vérifiée, il est à notre connaissance en général impossible de placer l'intégralité d'un spectre désiré par un retour *statique* de sortie basé sur une procédure de placement de structure propre. Cependant, nous avons travaillé sur quelques conditions un petit peu moins restrictives et proposé une légère relaxation de la condition. Ainsi, dans l'article [22], il est montré qu'en étendant l'approche présentée ci-avant et basée sur l'équation (3.75), des cas tels que $m = 8, p = 2, n = 12$, par exemple, peuvent être résolus. Si toutefois la condition de Wang est vérifiée ($mp > n$), il est possible d'appliquer la technique de [353] reposant sur la notion de matrice grassmannienne mais nous confessons ne pas être en mesure de parfaitement la comprendre et l'appliquer nous-mêmes. De plus, nous pensons, comme nous l'avons déjà mentionné, que certains paramètres du problème d'optimisation inhérent sont difficiles à choisir, ce qui rejoindrait l'idée de [137] selon laquelle le problème, dans sa généralité, est NP-difficile. Le cas $m = p = 2, n = 4$ peut occasionnellement être résolu grâce à la technique de [69] mais cette technique est, à notre sens, loin d'être assez générique. Pour ces raisons, nous conseillons plutôt, dans les cas où $m + p < n$ et qui

ne seraient pas couverts par [22], un compensateur dynamique. L'idée sous-jacente est d'augmenter l'ordre du compensateur jusqu'à ce que l'ordre du système bouclé soit tel qu'il vérifie la condition de Kimura (stricte ou non stricte). À cet effet, il est possible d'appliquer une extension de la méthode de placement par retour d'état selon l'approche paramétrique. Cette extension est proposée dans [184]. Il serait, de la même manière, possible d'étendre les procédures proposées en §3.3.4.4. Cependant, nous préconisons plutôt d'utiliser, pour un placement complet, la technique de l'observateur d'ordre minimal [7]. Enfin, il serait injuste de conclure ce passage sans mentionner l'article récent [367] qui s'appuie sur la notion de *trust region* (région de confiance). Il propose une méthode numérique quasi heuristique de placement de pôles par retour statique de sortie, basée sur un processus d'optimisation de type Levenberg-Marquadt. La convergence de ce processus n'est pas prouvée mais, semble-t-il, la technique permet souvent de franchir l'« obstacle Kimura » et se veut assez systématique.

Le lecteur intéressé par le sujet trouvera une information très riche sur les problèmes ouverts liés au placement de pôles dans le problème 37, intitulé *Open problems in the area of pole placement*, proposé par J. Rosenthal and J. C. Willems dans [52].

3.4 Placement pseudo-strict

Il s'agit donc là de la troisième façon d'envisager le placement de pôles, comme une solution intermédiaire entre le placement non strict dans une région et le placement strict.

3.4.1 Pourquoi un placement pseudo-strict ?

L'idée initiale de ce rapport est de placer de manière robuste, les pôles dans une région de performances robustes \mathcal{D} . Du point de vue nominal, l'on a vu deux approches de placement radicalement différentes.

La première est le placement non strict qui consiste à ne pas choisir la localisation exacte des pôles placés mais simplement à développer une méthode qui place ces pôles quelque part dans \mathcal{D} . Sur le plan des performances nominales, une telle approche peut être parfois perçue comme insuffisante dans le sens où l'on ne distingue pas la spécification des performances nominales de celle des performances robustes. Le choix de \mathcal{D} détermine tout. Par ailleurs, dans le cas du retour de sortie, le panel des méthodes est tout aussi limité que leur efficacité.

La seconde approche consiste au contraire à clairement distinguer les performances nominales des performances robustes. Les performances robustes sont toujours traduites par le choix de \mathcal{D} mais les performances nominales sont elles traduites en termes d'un spectre à placer de manière stricte, ce qui peut sembler un peu drastique au moment du choix de ce spectre.

Il est possible d'envisager une approche intermédiaire entre les deux approches rappelées ci-

avant. Elle consiste à spécifier les performances nominales, non pas au travers d'un ensemble de n pôles strictement localisés, mais par une région $\mathbf{Z} \subset \mathbb{C}$ dans laquelle ces pôles nominaux doivent se situer. Il est clair qu'il convient de vérifier $\mathbf{Z} \subset \mathcal{D}$. En pratique, l'on définit une zone de tolérance correspondant à chaque pôle et l'union de ces zones de tolérance constitue \mathbf{Z} . L'on peut ainsi continuer à distinguer performances nominales et performances robustes. En outre, l'on dispose de ddl supplémentaires au niveau des valeurs propres ce qui peut être très profitable dans le cadre d'une commande robuste. Il s'agit alors de spécifier correctement \mathbf{Z} pour exploiter efficacement ces ddl.

3.4.2 Régions de tolérances

Il existe, à notre connaissance, dans la littérature, deux façons de spécifier les zones de tolérance. L'une est proposée dans [307] mais il s'agit, grossièrement, de définir les valeurs propres par des rectangles ou des segments en imposant un minimum et un maximum sur la partie réelle, et éventuellement, sur la partie imaginaire. Cette façon de procéder ne nous convient pas car les ddl sont les valeurs propres elles-mêmes et ces ddl sont contraints. Dans l'approche de [233], les zones de tolérance sont décrites par la variation de ddl non contraints. Cette absence de contrainte sera exploitée au chapitre 4. Nous ne présentons ici qu'une partie des possibilités offertes par [233] en restreignant la gamme de zones de tolérance.

- Chaque valeur propre désirée réelle λ_j est définie par le scalaire réel κ_j , une tolérance $\eta_j \in \mathbb{R}$ et une valeur centrale $\lambda_{j_0} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_j = \lambda_{j_0} + \eta_j \psi(\kappa_j), \quad (3.94)$$

où ψ est la fonction sigmoïde bipolaire

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \psi(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Lorsque κ_i décrit \mathbb{R} , la localisation de λ_j dans le plan complexe varie sur l'axe réel dans l'intervalle $[\lambda_{j_0} - \eta_j; \lambda_{j_0} + \eta_j]$.

- Chaque paire de valeurs propres désirées complexes conjuguées $(\lambda_k; \bar{\lambda}_k)$ est définie par

$$\lambda_k = \lambda_{k_0} + \xi_k(\omega_k)(\cos(\omega_k) + \sin(\omega_k)\mathbf{i}), \quad (3.96)$$

$$\bar{\lambda}_k = \tilde{\lambda}_{k_0} + \xi_k(\omega_k)(\cos(\omega_k) - \sin(\omega_k)\mathbf{i}). \quad (3.97)$$

où λ_{k_0} et $\tilde{\lambda}_{k_0}$ sont les valeurs centrales respectives de λ_k et $\bar{\lambda}_k$. ξ_k et ω_k sont ainsi définies :

$$\xi_k(\omega_k) = \mathcal{R}_k(\omega_k)\phi(r_k) \quad (3.98)$$

avec :

$$\mathcal{R}_k(\omega_k) = \frac{a_k b_k}{(b_k^2 \cos^2(\omega_k) + a_k^2 \sin^2(\omega_k))^{\frac{1}{2}}} \quad (3.99)$$

où a_k et b_k sont des scalaires réels positifs et

$$\omega_k = 2\pi\phi(s_k). \quad (3.100)$$

Les paramètres r_k et s_k sont des nombres réels et la fonction sigmoïde unipolaire ϕ est définie par

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \phi(x) &= \frac{1}{1 + e^{-x}}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Lorsque $\{r_k, s_k\}$ décrit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, les positions dans le plan complexe de λ_k et $\bar{\lambda}_k$ varient dans des ellipses de centres associés λ_{k_0} et $\bar{\lambda}_{k_0}$. Les paramètres a_k et b_k correspondent aux longueurs respectives des demi-axes transverse horizontal et conjugué vertical.

Ainsi pour chaque valeur propre λ_i , l'on peut associer, plutôt qu'une affixe stricte, une zone de tolérance \mathbf{Z}_i qui est soit un segment, soit une ellipse. La région de performances nominales est alors

$$\mathbf{Z} = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{Z}_i. \quad (3.102)$$

Il est absolument indispensable que l'ensemble \mathbf{Z} soit strictement compris dans la région de robustesse \mathcal{D} de sorte que, quels que soient les paramètres κ_j , r_k et s_k réels, le spectre reste strictement à l'intérieur de \mathcal{D} .

Remarque 3.20 Dans l'article [233], d'autres formes de zones de tolérance sont présentées mais nous avons décidé de limiter nos choix à celles détaillées ci-avant.

3.4.3 Procédure

Pour réaliser un placement pseudo-strict, il suffit de procéder ainsi :

- choisir des valeurs propres centrales λ_{i_0} désirées ;
- choisir des zones de tolérances \mathbf{Z}_i en spécifiant η_i , a_k , b_k ;
- choisir des paramètres κ_j , r_k et s_k pour en déduire un spectre désiré $\{\lambda_i\} \subset \mathbf{Z}$;
- appliquer une technique de placement strict de ce spectre.

Ces ddl κ_j , r_k et s_k sont utilisés dans [233] pour optimiser un critère de robustesse lors d'un placement de pôles par retour d'état. Ils sont utilisés dans [13, 55] pour rendre plus robustes des lois de placement de pôles. Nous y reviendrons au chapitre 4.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons repertorié quelques méthodes de placement de pôles strict et non strict. Nous avons privilégié celles qui nous paraissent les plus efficaces ou les plus pertinentes dans notre propos. Nous avons en outre défini ce que nous entendons par placement pseudo-strict. Dans notre exposé, nous nous sommes limités à des lois de commande par retour statique d'état ou de sortie.

En ce qui concerne le retour d'état, nous avons montré qu'il existait diverses méthodes pour résoudre le problème du placement de pôles, qu'il soit strict ou non strict. Le problème du retour statique de sortie reste quant à lui largement ouvert.

Pour ce qui est du placement non strict, le simple problème de stabilisation apparaît au mieux bilinéaire. Il n'est pas exagéré de dire que la plupart des chercheurs en automatique des systèmes linéaires sont, tôt ou tard dans leur carrière, confrontés à ce problème ou à un problème similaire. Pour l'instant, tout le monde « s'y est cassé les dents ». Seules des conditions suffisantes sont exploitées et le conservatisme est parfois (souvent ?) non négligeable. Peut-être la solution viendra-t-elle des numériciens. Par exemple, si une technique numérique pour résoudre les BMI est mise au point, elle s'appliquera directement, et sans doute en premier lieu, à ce problème.

Concernant le placement strict de pôles, une perspective intéressante mais certainement ambitieuse consisterait à chercher des solutions en X et Y à l'équation (3.75) même lorsque $m + p < n$, et ce de façon plus systématique que dans [22]. Il s'agit de nouveau d'un problème bilinéaire.

Bien sûr, dans le cadre de ce rapport, il convient aussi de considérer le placement robuste de pôles mais ceci est l'objet du chapitre 4.

CHAPITRE 4

PLACEMENT ROBUSTE

Ce chapitre est une présentation succincte de la façon dont les outils proposés dans les chapitres précédents peuvent être utilisés dans un cadre de commande robuste. Il s'agit d'établir des techniques qui visent à placer les pôles d'un système incertain bouclé dans une région \mathcal{D} du plan complexe de façon à garantir (en tout cas à rechercher) un niveau de performances au sens de la \mathcal{D} -stabilité robuste, c'est-à-dire une borne de \mathcal{D} -stabilité robuste. À cette fin, le concept de *commande roborante* est privilégié.

Sommaire

4.1	À propos du placement robuste	117
4.1.1	Quel placement robuste ?	117
4.1.2	Présentation du problème formel	121
4.1.3	Un point de vocabulaire	123
4.2	Commande roborante	125
4.2.1	Difficultés inhérentes au problème	126
4.2.2	Tentative de résolution du problème	132
4.3	Conclusion	140

4.1 À propos du placement robuste

Dans ce chapitre, le but est de présenter des méthodes de placement de pôles qui tiennent compte de l'incertitude sur le modèle. Pour ce faire, il est possible d'exploiter les concepts vus dans les chapitres précédents. En effet, il est souvent possible d'estimer la robustesse des performances transitoires d'un système (commandé ou non) vis-à-vis d'une incertitude, grâce, par exemple, aux bornes de \mathcal{D} -stabilité robuste présentées au chapitre 2. Par ailleurs, il est aussi envisageable de commander un système pour lui conférer nominale des performances transitoires, notamment en utilisant des lois de commande de type « placement de pôles » telles que celle présentées au chapitre 3. L'association de ces spécifications de robustesse et de performances peut se faire dès la conception de la loi de commande. L'idée développée dans ce rapport est d'utiliser les ddl offerts par les méthodes de placement de pôles du chapitre 3 afin de maximiser, pour le système ainsi commandé, les bornes de \mathcal{D} -stabilité robuste exposées au chapitre 2. La loi de commande ainsi obtenue peut être appelée *placement robuste de pôles* même si une autre expression sera utilisée.

Dans un premier temps, il est précisé quelles sont les techniques de placement présentées au chapitre 3 qui sont privilégiées dans le cas robuste. Dans un deuxième temps, le problème de placement robuste de pôles est formalisé. Enfin, des éclaircissements sont apportés quant au vocabulaire utilisé dans ce chapitre, conduisant à la notion de *commande roborante*.

Il convient de modifier quelque peu les notations. Dans le chapitre 2, A représente la matrice incertaine et A_0 une éventuelle matrice nominale. Dans le chapitre 3, A représente la matrice d'état en boucle fermée définie par $A = A_{bo} + BK$ ou $A = A_{bo} + BFC$. Il n'y est en effet pas question d'incertitude. Dans ce chapitre, la matrice d'état nominale en boucle fermée est notée $A_0 = A_{bo} + BK$ ou $A_0 = A_{bo} + BFC$ et $A = A(\Delta)$ devient la matrice d'état incertaine en boucle fermée. Les performances transitoires nominales correspondent donc à une localisation du spectre de A_0 , soit précise, soit dans des zones de tolérance. Les performances robustes correspondent à un cloisonnement du spectre de A dans une région \mathcal{D} telle que celles présentées au chapitre 1.

Il n'y a pas de résultat nouveau à proprement parler dans ce chapitre. Il s'agit plus de proposer une méthode réellement implantable pour combiner les techniques de commande nominale et d'analyse robuste des deux chapitres précédents.

4.1.1 Quel placement robuste ?

Au chapitre 3, une distinction a été faite sur les différents types de placement : strict, non strict et pseudo-strict. Or, il s'agit d'exploiter les ddl offerts par ces placements pour maximiser un critère de performances robustes. Toutefois, ces placements n'offrent pas tous les mêmes ddl. C'est pourquoi nous revenons sur ce point.

4.1.1.1 Strict ?... où sont les ddl ?

Si l'on décide de spécifier les performances transitoires en termes de spectre très précisément localisé, il est clair qu'il n'existe plus de flexibilité sur les valeurs propres de A_0 . Les seuls paramètres libres sont les ddl présents au niveau des vecteurs propres (s'il en reste), c'est-à-dire, plus ou moins explicitement, les directions d'entrée et/ou de sortie. Nous ne privilégions pas ce placement pour deux raisons :

- les ddl n'existent pas en quantité suffisante voire n'existent pas ;
- il est déraisonnable de vouloir spécifier les performances transitoires par un spectre strict de A_0 alors que les performances robustes sont en réalité étroitement liées au spectre de $A(\Delta)$. Une telle exigence n'a pas de sens dans le cadre incertain.

4.1.1.2 Non strict ?... multilinéarité apparente

C'est l'approche usuelle pourrait-on dire, celle que l'on rencontre le plus souvent dans la littérature. Elle semble il est vrai plus naturelle au vu des diverses conditions présentées au chapitre 2. Elle peut aboutir à des résultats satisfaisants et ce, essentiellement sous deux conditions :

- l'on applique un placement par retour d'état (si ceci se révèle possible par la mesure ou l'observation du vecteur d'état) ;
- la région \mathcal{D} est une région LMI d'ordre quelconque ou EMI convexe d'ordre 1.

Remarque 4.1 *Le problème de placement de pôles par retour d'état est plus facile car il induit moins de contraintes mathématiques. En revanche une hypothèse pratique est souvent difficile à vérifier : Comme mentionné ci-avant, l'on doit accéder à l'intégralité des composantes du vecteur d'état x , soit par la mesure soit par l'observation. La mesure est préférable. Encore faut-il disposer de capteurs à la fois rapides, précis et aussi linéaires que possible (dont la dynamique puisse être facilement prise en compte voire négligée). De tels capteurs, s'ils existent, peuvent être onéreux. Si la mesure se révèle impossible, il faut envisager l'observation totale ou partielle de x . La synthèse d'un observateur linéaire, qu'il soit de Luenberger [246, 247] ou de Kalman-Bucy [214], est souvent traitée comme duale du placement de pôles par retour d'état. Ceci nous ramène au présent problème. Dans le cas nominal, le principe de séparation nous permet d'envisager de façon totalement indépendante, les deux problèmes : la synthèse de l'observateur et le calcul du retour d'état reconstruit. Les pôles respectifs du procédé et de l'observateur sont alors clairement indentifiés et plaçables dans des régions distinctes. Chacun de ces deux problèmes peut donc être abordé sous l'angle de la \mathcal{D} -stabilité, par une approche LMI. Il n'y a là rien de bien subtil. Toutefois, en présence d'incertitude, le principe de séparation ne tient plus et l'utilisation des outils de ce rapport est loin d'être évidente, même pour l'auteur. Les pôles de l'observateur et du procédé ne sont plus clairement distingués. Est-il alors possible de choisir des régions de placement pour les pôles ? Le choix de régions non connexes peut-il aider à la conception ? Il s'agit là de questions qui relèvent des perspectives donc nous n'y répondrons pas dans ce rapport. Il nous importait néanmoins d'en souligner l'importance.*

Ce cas de figure est maintenant explicité en considérant que A est soumise à une incertitude polytopique telle que celle définie en (2.22), à savoir

$$A = A(\theta) = \mathbb{A}(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i A_{0_i}, \quad \theta \in \Theta. \quad (4.1)$$

Toutefois, chaque sommet A_{0_i} peut être ainsi exprimé :

$$A_{0_i} = A_{bo_i} + B_i K. \quad (4.2)$$

L'incertitude polytopique en boucle fermée résulte donc d'une incertitude sur les matrices de la boucle ouverte :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{bo} & \mathbb{B} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N (\theta_i \begin{bmatrix} A_{bo_i} & B_i \end{bmatrix}), \quad \theta \in \Theta. \quad (4.3)$$

Un placement non strict des pôles de A dans une région LMI \mathcal{D} peut-être obtenu en déclinant le théorème 3.1.

Théorème 4.1 *Soient la paire de matrices $(\mathbb{A}_{bo}, \mathbb{B})$ définie par (4.3) et la région LMI \mathcal{D} répondant à la définition 1.5. La paire $(\mathbb{A}_{bo}, \mathbb{B})$ est \mathcal{D} -stabilisable par retour statique d'état s'il existe une matrice symétrique définie positive P et une matrice S vérifiant l'inégalité matricielle*

$$\alpha \otimes P + (\beta \otimes (A_{bo_i} P + B_i S))^H < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.4)$$

Une matrice de retour d'état est alors donnée par

$$K = SP^{-1}. \quad (4.5)$$

Démonstration : extension immédiate des idées contenues dans [37, 36, 37, 47]. Il suffit de construire la combinaison convexe des inégalités données en (4.4) (en utilisant les coordonnées barycentriques de l'incertitude) et d'appliquer le théorème 3.1. ■

Si l'on se réfère au chapitre 2 et plus précisément au paragraphe 2.1.2, l'on constate que $A(\theta)$

est en fait quadratiquement \mathcal{D} -stable donc \mathcal{D} -stable de manière robuste. L'utilisation du changement de variable (4.5) [47] et de la stabilité quadratique [36] est typique de certaines approches de l'automatique, notamment en France, comme en témoignent de nombreux articles et thèses [159, 8, 10, 151, 150, 46, 153, 152, 97, 96] et n'a sans doute pas encore révélé tous ses secrets. Cependant, la \mathcal{D} -stabilité quadratique recèle un degré de conservatisme qu'il est naturel de vouloir réduire, par exemple à l'aide du concept de stabilité poly-quadratique (cf. §2.1.3). Néanmoins, le seul résultat vraiment très probant à notre sens est celui de [108] qui s'applique au disque lorsqu'il est formulé comme une région EMI. Il s'agit alors de décliner le théorème 3.2.

Théorème 4.2 [108] *Soient la paire de matrice $(\mathbb{A}_{bo}, \mathbb{B})$ définie par (4.3) et \mathcal{D} le disque ouvert de centre $(c; 0)$ et de rayon r répondant à la définition 1.6 avec*

$$R = \begin{bmatrix} c^2 - r^2 & -c \\ -c & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

La paire $(\mathbb{A}_{bo}, \mathbb{B})$ est poly-quadratiquement \mathcal{D} -stabilisable par retour statique d'état s'il existe N matrices symétriques définies positives P_i , $i = 1, \dots, N$, une matrice G et une matrice S vérifiant l'inégalité matricielle

$$\begin{bmatrix} (c^2 - r^2)P_i & -cP_i + A_{bo_i}G + B_iS \\ -cP_i + GA'_{bo_i} + S'B'_i & P_i - G - G' \end{bmatrix} < 0. \quad (4.7)$$

La matrice de retour d'état est alors donnée par

$$K = SG^{-1}. \quad (4.8)$$

Démonstration : immédiate d'après les théorèmes 3.2 et 2.5 [108]. ■

Il convient de rappeler ici que les théorèmes 3.1, 3.2, 4.1 et 4.2 s'appuient sur des formes duales et concernent des matrices réelles et des régions symétriques (c'est-à-dire que l'on raisonne en fait sur le spectre de A').

De tels raisonnements s'étendent relativement facilement au cas d'une incertitude polytopique LFT sur A . Néanmoins, nous ne détaillons pas ces résultats.

L'approche exposée ci-avant (avec toutes ces déclinaisons et extensions) est celle qui, aux yeux de nombreux automaticiens, illustre le mieux le concept de *synthèse robuste*, au point d'ailleurs, parfois, pour certains, d'assimiler purement et simplement les deux. En effet, la synthèse robuste, dont la définition formelle n'est pas universelle, consiste généralement à trouver, *par une méthode directe*, une loi de commande unique qui confère à toute une famille de systèmes

spécifiée au préalable, des performances souhaitées. Il est indéniable que les conditions (4.4) et (4.7) relèvent de cette définition. Sans faire d'assimilation rapide, nous prétendons que les théorèmes 4.1 et 4.2 fournissent des techniques de synthèse robuste. Nous reviendrons sur ces nuances au paragraphe 4.1.3.

Les théorèmes 4.1 et 4.2 s'adaptent très mal au retour statique de sortie et à des régions plus sophistiquées. Pour le comprendre, il suffit de se reporter au début du paragraphe 3.2.1.4 ainsi qu'au paragraphe 3.2.2.1. De telles extensions amènent donc des inégalités multilinéaires qui ne permettent pas la synthèse robuste d'un retour statique de sortie.

Cependant, il est parfois possible d'envisager la synthèse d'un tel retour selon deux approches :

- (a) par extension des théorèmes 3.4 ou 3.5 (contrainte de structure sur P ou G) ;
- (b) par extension du théorème 3.6 (passage d'un retour d'état K à un retour de sortie F).

Si \mathcal{D} est une région simple, les deux approches sont à examiner. Si \mathcal{D} est une région de pluralité $\bar{k} > 1$, l'approche (a) est bien trop pessimiste et pour tout dire quasi inapplicable. Quant à l'approche (b), elle requiert le calcul préalable d'une matrice K , ce qui en soi, est déjà un problème. Dans un cadre de placement non strict, il serait logique de supposer que K corresponde aussi à un placement non strict. L'algorithme 3.1 serait alors applicable sans que l'on puisse bénéficier de quelconques degrés de liberté (nous reviendrons toutefois sur l'approche (b) par la suite : voir §4.2.1.2.2).

Pour toutes ces raisons, le placement non strict, ici associé à la synthèse robuste, n'est pas l'approche retenue dans ce rapport.

4.1.1.3 Pseudo-strict ?

L'idée d'utiliser un placement pseudo-strict (cf. §3.4) est de placer les pôles nominaux (valeurs propres de A_0), non à des valeurs très précises, mais plutôt dans des zones de tolérances \mathbf{Z}_i , conduisant ainsi à des ddl sur les valeurs propres elles-mêmes. Une fois ces ddl utilisés, une technique de placement strict de type « placement de structure propre » permet de bénéficier de la flexibilité offerte par les vecteurs propres. Il apparaît donc que ce placement pseudo-strict est un bon moyen d'exploiter les ddl mais aussi, par le choix des zones \mathbf{Z}_i et de la région d'enclousonnement \mathcal{D} , de spécifier de manière non triviale mais assez précise, le compromis robustesse-performances.

C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous avons choisi de privilégier le placement pseudo-strict.

4.1.2 Présentation du problème formel

À ce stade, il est nécessaire de formaliser les enjeux de manière plus précise, et pour ce faire, de fixer un peu la gamme de problèmes étudiés. L'on considère donc le placement de pôles par

retour statique de sortie (qui est par nature plus compliqué). La matrice d'évolution nominale en boucle fermée est $A_0 = A_{bo} + BFC$ et la matrice incertaine en boucle fermée, notée $A = A(\Delta)$, admet A_0 comme instance particulière. L'on suppose que $A(\Delta)$ est soumise à une incertitude polytopique LFT de sorte qu'il existe un polytope de matrices \mathbf{M} tel que celui défini en (2.18). Les performances robustes souhaitées sont traduites par une région \mathcal{D} de pluralité $\bar{k} \geq 1$ (E²MI ou ECMI par exemple). Les performances nominales sont exprimées en termes de régions de tolérance \mathbf{Z}_i . Il va de soi qu'il est nécessaire de vérifier

$$\mathbf{Z} = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{Z}_i \subset \mathcal{D}. \quad (4.9)$$

Le but est de déterminer, parmi toutes les matrices F qui conviennent nominalement, une matrice F^* qui maximise (ou pour le moins améliore) la \mathcal{D} -stabilité robuste.

Remarque 4.2 *Même quand il n'existe pas initialement, dans le polytope, d'instance nominale, il est toujours possible d'en choisir une arbitrairement (mais néanmoins quelque peu judicieusement, par exemple un barycentre).*

4.1.2.1 Critère à optimiser

Puisqu'il faut maximiser un critère de \mathcal{D} -stabilité robuste, il s'agit, pour un retour F donné, de faire une analyse quantitative, donc de calculer, par exemple, une borne de \mathcal{D} -stabilité robuste ρ^\diamond telle que celles fournies par les théorèmes 2.10 ou 2.13.

4.1.2.2 Localisation des ddl

Les ddl apparaissent donc sur les valeurs propres et sur les vecteurs propres de A_0 . En ce qui concerne le spectre, ce dernier peut évoluer mais doit rester dans \mathbf{Z} . Les paramètres libres qui permettent de décrire cette région \mathbf{Z} sont les κ_j , r_k et s_k introduits au paragraphe 3.4.2. Pour les ddl sur les vecteurs propres, tout dépend de la technique de calcul de F . Puisqu'au chapitre 3, les algorithmes 3.3 et 3.4 ont été privilégiés, les ddl, s'ils existent, peuvent être présents au niveau des vecteurs x_i , d'une part et, z_j ou μ , d'autre part.

L'ensemble de tous ces ddl est regroupé en un seul vecteur qui est noté \mathbf{z} .

4.1.2.3 Problème d'optimisation

Compte tenu des paragraphes précédents et des conditions proposées dans les théorèmes 2.10 et 2.13, le problème d'optimisation peut se formuler ainsi :

Déterminer

$$(\mathbf{z}^*, \gamma^*) = \arg\left(\min_{\mathbf{z}, \{\mathcal{P}_i\}, \hat{G}_U, \gamma} (\gamma = \rho^{-2})\right) \quad (4.10)$$

sous la contrainte

$$\hat{G}_U(M_i(F(\mathbf{z})), \{\mathcal{P}_i\}, \hat{G}_U, \gamma) < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.11)$$

dans le cas d'une région E²MI ou

$$(\mathbf{z}^*, \gamma^*) = \arg\left(\min_{\mathbf{z}, \{P_{k_i}\}, \{Q_{k,l_i}\}, G_k, \gamma} (\gamma = \rho^{-2})\right) \quad (4.12)$$

sous la contrainte

$$\bar{W}_U(M_i(F(\mathbf{z})), \{P_{k_i}\}, \{Q_{k,l_i}\}, G_k, \gamma) < 0 \quad \forall \{k; i\} \in \{1, \dots, \bar{k}\} \times \{1, \dots, N\}. \quad (4.13)$$

dans le cas d'une région ECMI.

Une fois le problème d'optimisation résolu (si possible), le retour F^* est donné par $F^* = F(\mathbf{z}^*)$ et la borne de \mathcal{D} -stabilité robuste est donnée par $\rho^* = (\gamma^*)^{-1/2}$.

4.1.3 Un point de vocabulaire

Quelques éclaircissement lexicaux sont apportés dans ce paragraphe. Ils font suite à quelques critiques formulées envers cette façon d'aborder la robustesse, notamment envers [13]. La question se résume en quelque sorte à ceci : peut-on dire que résoudre le problème 4.10 ou 4.12 revient à faire de la synthèse robuste, de la commande robuste, ou encore autre chose ? Tout est loin d'être simple quand de mettre tout le monde d'accord il s'agit. Nous faisons tout de même une modeste tentative.

4.1.3.1 Synthèse ou commande ?

Comme il a déjà été dit, la synthèse d'une loi de commande consiste à spécifier, *au préalable*, quels sont les objectifs recherchés et à déterminer, par une méthode de calcul analytique di-

recte ou une méthode numérique convergente, une loi de commande qui répond à toutes les spécifications. Une telle acception est inspirée de [336]. En ce sens, la résolution des problèmes 4.10 ou 4.12 est loin de satisfaire cette définition et le vocable « synthèse » est peut-être à rejeter. En revanche, puisque la résolution du problème d'optimisation conduit à une loi de commande, il est difficile de ne pas appeler commande une telle façon de procéder. C'est pourquoi l'on retiendra par la suite commande plutôt que synthèse.

4.1.3.2 Commande robuste ou analyse robuste ?

Une seconde critique formulée suite à [13] concerne l'expression « commande robuste ». Là encore, l'idée est d'imposer les spécifications *de robustesse* du système bouclé et, une fois la commande calculée, de poser la question : le système bouclé est-il robuste vis-à-vis de l'incertitude spécifiée ? *A priori*, la réponse escomptée est booléenne : oui ou non. Or, dans le cas du problème 4.10 ou 4.12, la recherche de ρ^* n'apporte pas de réponse booléenne. Tout ceci est bien sûr formel puisqu'il suffit de préciser une valeur minimale de ρ et de confronter ρ^* à cette valeur mais l'idée inhérente à ce problème d'optimisation est bel et bien de ne pas répondre par oui ou par non à la question et de plutôt chercher à augmenter la robustesse.

De plus, le problème d'optimisation est difficile à résoudre. Loin d'être directe, cette résolution ou toute tentative de résolution conduit à itérer, et à calculer F puis analyser la robustesse à chaque itération. C'est la raison pour laquelle, l'approche proposée dans ce chapitre, de même que dans [84, 13, 55], peut sembler relever plus de l'analyse que de la commande. Nous acceptons cette critique. C'est pourquoi, nous proposons de ne pas qualifier de robuste notre approche de la commande, en tout cas de ne pas associer « commande » et « robuste ». En outre, en toute rigueur, c'est le système bouclé qui est censé être robuste et non la loi de commande.

Il s'agit donc de qualifier une loi de commande qui apporte de la robustesse au système bouclé. Hélas, le verbe « robustifier » n'existe pas. A-t-il un équivalent ? Pas vraiment. Toutefois, à la lecture d'un préambule de chapitre de la thèse de Dimitri Peaucelle [284] qui citait [303], la réponse nous est en partie venue. Dans un premier temps, il s'est avéré que « roboratif » signifie donner de la robustesse et nous avons opté pour « commande roborative » [57]. Mais le vocable a pour beaucoup perdu son acception originale pour ne conserver que sa connotation culinaire (par exemple un repas roboratif qui redonne des forces). C'est pourquoi pour éviter ce genre de comparaison, nous avons « ramené à la vie » un synonyme tombé en désuétude et nous nous proposons d'introduire le concept de *commande roborante* ou *placement roborant* de pôles.

Si des techniques de placement de pôles telles que [150, 153] ou de placement de structure propre telles que [257] relèvent de la synthèse robuste, plusieurs techniques connues de placement robuste de pôles pourrait relever de la commande roborante telle que nous la définissons. Ainsi, citons la méthode consistant à minimiser un critère de sensibilité des pôles par retour d'état [215] (fonction `place` de MATLAB) ou encore ses extensions au placement partiel par retour de sortie [276], au placement complet par retour dynamique de sortie [121, 122], au placement par retour d'état en jouant sur des zones de tolérances [233]. Cependant, les problèmes d'optimisation qui y sont formulés sont rigoureusement résolus et dans un tel contexte, l'expres-

sion « placement robuste » n'a pas paru poser problème. En revanche, les techniques proposées dans [84, 87, 283, 241, 242], par exemple, sont bien plus proches, dans la démarche, de ce que nous appelons commande roborante.

Pour encore distinguer placement robuste et placement roborant, l'on peut noter qu'un placement roborant (tel que nous l'entendons) consiste à partir d'un placement nominal pour le faire évoluer vers un autre placement apportant plus de robustesse au système bouclé (sans garantie d'optimalité au sens du critère de robustesse utilisé). Il est d'ailleurs amusant de constater que ce genre d'approche consistant à initialiser le processus de roboration par une loi de commande *nominale* n'a pas toujours heurté les esprits. C'est en effet le principe même des techniques de commande s'appuyant sur la paramétrisation de Youla, dite également paramétrisation de Youla-Kučera. Cette paramétrisation fréquentielle (ou polynomiale) est traditionnellement attribuée à D. C. Youla et co-auteurs [373], même s'ils furent précédés par V. Kučera [230] et même par J. R. Ragazzini and G. F. Franklin [296]. L'on doit la forme générale à [111], s'appuyant sur le concept de factorisation fractionnelle copremière, et les interprétations dans l'espace d'état à [275, 118]. La paramétrisation de Youla-Kučera consiste à partir d'un correcteur stabilisant un système pour exprimer l'ensemble des correcteurs stabilisant ce même système. L'ensemble en question est en fait caractérisé par un correcteur dépendant d'une matrice de transfert stable qui est libre. C'est la matrice-paramètre de Youla-Kučera. Lorsque celle-ci varie, le correcteur décrit l'ensemble de tous les correcteurs stabilisants. Le paramètre de Youla-Kučera peut alors varier de telle sorte que certaines performances (nominales ou robustes) puissent être atteintes. Ainsi, Youla et Kučera jouèrent-ils sur ce paramètre pour résoudre des problèmes de minimisation \mathcal{H}_2 . G. Zames exprima quant à lui le problème de minimisation \mathcal{H}_∞ en fonction de ce même paramètre [376]. Il ne nous appartient pas d'entrer dans les détails techniques de cette paramétrisation dans le cadre de ce rapport. Le lecteur intéressé peut consulter l'ouvrage [254] très didactique à ce propos. Il faut aussi remarquer que nombre de problèmes formulés au travers de cette paramétrisation présentent des propriétés de convergence et d'optimalité qui ne sont pas retrouvées dans notre approche de placement robuste de pôles. L'approche de Youla-Kučera serait-elle alors une piste à suivre pour le placement roborant de pôles ?

4.2 Commande roborante

Dans cette partie, une approche pour tenter de résoudre les problèmes 4.10 ou 4.12 est proposée. Mais auparavant, les difficultés inhérentes à ces problèmes sont mises en évidence.

4.2.1 Difficultés inhérentes au problème

4.2.1.1 Non-linéarité possible de la matrice incertaine

Il a été mentionné que l'incertitude qui affecte A , la matrice d'état en boucle fermée, dans ce chapitre, est l'incertitude polytopique LFT. Le caractère polytopique de cette incertitude est issu d'une incertitude polytopique en boucle ouverte. Dans le cas du retour d'état, ceci n'amène aucune difficulté comme en témoigne le paragraphe 4.1.1.2 où l'on voit bien que la nature polytopique de l'incertitude décrite en (4.3) se transmet immédiatement à l'incertitude donnée en (4.1). En revanche, dans le cas du retour statique de sortie, ce caractère polytopique peut être perdu lorsqu'on ferme la boucle. En effet, si, par exemple, la boucle ouverte est associée au quadruplet de matrices $(\mathbb{A}_{bo}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D})$, ces quatre matrices présentant toutes une dépendance polytopique, alors la matrice dynamique en boucle fermée est

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 = \mathbb{A}_{bo} + \mathbb{B}F(I - F\mathbb{D})^{-1}\mathbb{C}. \quad (4.14)$$

L'incertitude qui affecte la matrice \mathbb{A} n'est donc absolument pas polytopique. Il est clair qu'il convient dans ce cas de supposer que $\mathbb{D} = D$ n'est pas affectée par cette dépendance et constitue une transmission directe constante. Ainsi, la matrice de retour F est elle aussi constante. Dans la suite de ce mémoire, cette hypothèse est retenue.

De plus, même si D est constante, il reste le produit entre \mathbb{B} et \mathbb{C} qui confère à \mathbb{A} un caractère plutôt « bipolytopique ». Il est toujours possible que l'une des deux matrices soit constante ($\mathbb{B} = B$ ou $\mathbb{C} = C$) auquel cas le problème est résolu. Dans le cas contraire, il faut examiner avec attention l'origine de la formulation polytopique de la boucle ouverte comme suit.

- Les paramètres incertains qui affectent B et C sont distincts (donc indépendants). Deux sous-cas sont à envisager :
 - on augmente la dimension du polytope que décrit $\mathbb{A} = \mathbb{A}_0$;
 - on actualise les résultats en proposant des formulations « biconvexes » qui autorisent des produits de deux paramètres incertains.

En réalité ces deux façons de procéder sont complètement équivalentes comme on peut le comprendre à la lecture de [56] et \mathbb{A} admet une description polytopique sans conservatisme.

- Les paramètres incertains qui affectent B et C ne sont pas indépendants : l'on peut alors raisonner comme s'ils l'étaient et se ramener au cas précédent. Ceci se fait au prix d'un certain conservatisme.

L'on verra toutefois que dans certains cas, la nature polytopique de la matrice $\begin{bmatrix} \mathbb{B} & \mathbb{C} \end{bmatrix}$ peut ne pas être un souci (cf. §4.2.1.2.2).

4.2.1.2 Limites sur les dimensions

Une autre difficulté rencontrée dans cette technique de placement roborant concerne les dimensions du système. L'on a vu au chapitre 3 que le placement de pôles (strict ou pseudo-strict), n'est possible par la technique adoptée ici (cf. §3.3.4) que si la condition de Kimura non stricte est vérifiée, à savoir

$$m + p \geq n. \quad (4.15)$$

Or, tous les systèmes ne vérifient pas cette condition. Par conséquent, il convient de distinguer les systèmes de réalisation (A_{bo}, B, C, D) selon deux classes.

- la classe \mathbb{S}_+ des systèmes vérifiant (4.15) ;
- la classe \mathbb{S}_- des systèmes ne vérifiant pas (4.15).

Pour les deux types de systèmes, il est nécessaire de chercher à calculer une matrice de retour de sortie qui place les pôles souhaités, et ce à chaque étape du processus d'optimisation.

4.2.1.2.1 Cas \mathbb{S}_+

Lorsque le système appartient à la classe \mathbb{S}_+ , il suffit, pour placer un spectre donné, d'appliquer l'algorithme 3.4. Les systèmes de \mathbb{S}_+ sont donc les plus faciles à commander.

4.2.1.2.2 Cas \mathbb{S}_-

Lorsque le système appartient à la classe \mathbb{S}_- , l'algorithme 3.4 ne s'applique pas. Une possibilité reste de passer par un retour d'état. Ainsi, l'on peut calculer une matrice de retour d'état K grâce à l'algorithme 3.2 puis tenter de déterminer une matrice de retour de sortie F telle que $(A_{bo} + BK)$ et $(A_{bo} + BFC)$ partagent la (les) même(s) matrice(s) de Lyapunov vis-à-vis de la région de robustesse considérée. Pour cela, l'on peut s'inspirer de l'idée de [285, 11] exposée dans le paragraphe 3.2.2.3. Dans le cas d'une région E^2MI par exemple, il est possible de faire en sorte que les matrices de Lyapunov soient communes sur tout le domaine incertain. Le théorème 3.6 s'étend donc au résultat que nous détaillons ci-après.

L'incertitude en boucle ouverte est caractérisée par le polytope

$$\left\{ \left[\begin{array}{cc} \mathbb{A}_{bo}(\theta) & \mathbb{B}(\theta) \\ \mathbb{C}(\theta) & D \end{array} \right] = \sum_{i=1}^N \theta_i \left[\begin{array}{cc} A_{bo_i} & B_i \\ C_i & D \end{array} \right], \quad \theta \in \Theta \right\}. \quad (4.16)$$

De ce fait, pour un retour d'état K et un retour de sortie F , l'on définit les deux matrices :

$$\begin{cases} \mathbb{A}_{0_e}(\theta) = \mathbb{A}_{bo}(\theta) + \mathbb{B}(\theta)K \\ \mathbb{A}_0(\theta) = \mathbb{A}_{bo}(\theta) + \mathbb{B}(\theta)F(I - FD)^{-1}C \end{cases} \quad \theta \in \Theta \quad (4.17)$$

Il est important de noter que si \mathbb{A}_{0_e} décrit un polytope de matrices lorsque θ décrit Θ , ce n'est pas forcément le cas de \mathbb{A}_0 .

Enfin, l'on peut supposer qu'une incertitude LFT vienne s'ajouter à celles affectant déjà \mathbb{A}_{0_e} et \mathbb{A}_0 pour générer respectivement les matrices incertaines en boucle fermée :

$$\begin{cases} A_e = A_e(\theta, \Delta) = \mathbb{A}_{bo}(\theta) + \mathbb{B}(\theta)K + \mathbb{J}(\theta)\bar{\Delta}(\theta)\mathbb{L}(\theta) \\ A = A(\theta, \Delta) = \mathbb{A}_{bo}(\theta) + \mathbb{B}(\theta)F(I - FD)^{-1}C + \mathbb{J}(\theta)\bar{\Delta}(\theta)\mathbb{L}(\theta) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \theta \in \Theta \\ \bar{\Delta} = \Delta(I - \mathbb{Z}(\theta)\Delta)^{-1} \text{ et } \Delta \in (\Delta = \Delta(\rho)) \end{array} \quad (4.18)$$

impliquant indirectement le polytope de matrices

$$\left\{ \mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{bo} & \mathbb{B} & \mathbb{J} \\ \mathbb{C} & D & 0 \\ \mathbb{L} & 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N (\theta_i \mathfrak{M}_i) = \sum_{i=1}^N \left(\theta_i \begin{bmatrix} A_{bo_i} & B_i & J_i \\ C_i & D & 0 \\ L_i & 0 & Z_i \end{bmatrix} \right), \quad \theta \in \Theta \right\}. \quad (4.19)$$

Là encore, il faut remarquer que A_e est soumise à une incertitude polytopique LFT alors que A peut être un peu plus complexe. L'on définit les deux matrices

$$\begin{cases} \mathbb{M}_e = \mathbb{M}_e(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{0_e}(\theta) & \mathbb{J}(\theta) \\ \mathbb{L}(\theta) & \mathbb{Z}(\theta) \end{bmatrix} \\ \mathbb{M} = \mathbb{M}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_0(\theta) & \mathbb{J}(\theta) \\ \mathbb{L}(\theta) & \mathbb{Z}(\theta) \end{bmatrix} \end{cases} \quad \theta \in \Theta. \quad (4.20)$$

\mathbb{M}_e décrit un polytope de matrices mais pas forcément \mathbb{M} .

Soit \mathcal{D}_U une région E²MI. La \mathcal{D}_U -stabilité robuste de A_e et A vis-à-vis de $\Theta \times \Delta(\rho)$ est assurée par l'existence des mêmes matrices de Lyapunov s'il existe un ensemble $\mathcal{P}(\theta)$ de matrices dépendantes de paramètres $P_k(\theta) = P'_k(\theta) > 0$ telles que

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_U(\mathbb{M}_e(\theta), \mathcal{P}(\theta), \gamma) < 0 \\ \mathbf{Q}_U(\mathbb{M}(\theta), \mathcal{P}(\theta), \gamma) < 0 \end{cases} \quad \forall \theta \in \Theta \quad (4.21)$$

où $\gamma = \rho^{-2}$ et où l'expression de $\mathbf{U}(\cdot, \cdot, \cdot)$ est donnée dans la condition (2.34) du théorème 2.9. Conformément au paragraphe 2.3.4.3, chaque condition prise indépendamment devient nécessaire si l'ordre de \mathcal{D}_U est $d = 1$.

Nous proposons le théorème suivant qui s'appuie sur [55] et [304] pour associer les théorèmes 2.9 et 3.6.

Théorème 4.3 *Soit \mathcal{D}_U une région E^2MI répondant à la définition 1.9. Soient aussi deux matrices incertaines A_e et A telles que celles définies en (4.18), où K est donnée et où F est inconnue. Il existe une matrice F telle que la condition (4.21) est vérifiée s'il existe N ensembles \mathcal{P}_i , $i = 1, \dots, N$, chacun constitué de \bar{k} matrices hermitiennes définies positives $P_{k_i} \in \mathbf{C}^{n \times n}$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, une matrice non singulière $X \in \mathbf{R}^{m \times m}$, une matrice $G_U \in \mathbf{C}^{d(2n+m) \times dn}$ et une matrice $H \in \mathbf{R}^{m \times p}$ telles que*

$$\mathcal{H}_U(\mathfrak{M}_i, \mathcal{P}_i, G_U, K, X, H, \gamma) < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.22)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_U(\mathfrak{M}_i, \mathcal{P}_i, G_U, K, X, H, \gamma) = & \\ & \left[\begin{array}{c|cc} \sum_{k=1}^{\bar{k}} R_k \otimes P_{k_i} & 0 & 0 & I_d \otimes L'_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -I_{dq} & I_d \otimes Z_i \\ \hline I_d \otimes L_i & 0 & 0 & I_d \otimes Z_i & -\gamma I_{dr} \end{array} \right] + \\ & \left(\left[\begin{array}{c} G_U \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|ccc|c} I_d \otimes A_{e_i} & -I_{dn} & I_d \otimes B_i & I_d \otimes J_i & 0 \end{array} \right] \right)^H + \\ & \left(\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ I_{dm} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] (I_d \otimes X) \left[\begin{array}{c|cc|c} -I_d \otimes K & 0 & -I_{dm} & 0 & 0 \end{array} \right] \right)^H + \\ & \left(\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ I_{dm} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] (I_d \otimes H) \left[\begin{array}{c|ccc|c} I_d \otimes C_i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right)^H \quad (4.23) \end{aligned}$$

et $\gamma = \rho^{-2}$.

La matrice F est donnée par

$$F = \hat{F}(I_p + D\hat{F})^{-1} = (I_m + \hat{F}D)^{-1}\hat{F}, \quad (4.24)$$

où

$$\hat{F} = X^{-1}H. \quad (4.25)$$

Les matrices A_e et A sont alors \mathcal{D}_U -stables de manière robuste vis-à-vis de $\Theta \times \Delta(\rho)$.

La démonstration se déduit de [55, 304]. C'est en fait, de manière suffisante, la \mathcal{D}_U -stabilité poly-quadratique qui est prouvée. Il importe de repérer, pour cette condition suffisante d'existence de F , quelles sont les sources de conservatisme.

- L'on raisonne sur les sommets plutôt qu'à chaque instance θ et il y a donc suffisance lorsque l'on construit la combinaison convexe.
- Il est nécessaire que K \mathcal{D}_U -stabilise la matrice \mathbb{A}_{0_e} pour que (4.22) admette une solution.
- Le cas $d > 1$ rend chacune des conditions de (4.21) déjà pessimiste.
- L'on oblige X et H à être réelles pour que F le soit aussi.

Bien que l'on puisse tenter de minimiser γ donc de maximiser ρ pour obtenir ρ^\diamond , ce qui permet de faire en même temps la commande et l'analyse en robustesse, il faut bien comprendre que selon la valeur de K , le système (4.22) peut être insoluble.

Quoique A ne soit pas forcément soumise à une incertitude polytopique LFT dès lors que \mathbb{B} et \mathbb{C} présentent toutes deux cette formulation polytopique, le raisonnement reste valable car dans (4.22), les matrices B_i et C_i n'apparaissent pas dans le même bloc, contrairement à l'application directe de la relation (2.35) sur \mathbb{A} . C'est sans doute le seul avantage à se retrouver dans le cas des systèmes de la classe \mathbb{S}_- .

Il est possible de tenir le même style de raisonnement pour une région ECMI. Le conservatisme lié à $d > 1$ n'a plus lieu d'être. En revanche, il y a $\bar{k}N$ LMI à traiter mais il faut conserver une seule matrice X et une seule matrice H , comme le montre le théorème suivant.

Théorème 4.4 *Soit \mathcal{D} une région ECMI répondant à la définition 1.13. Soient aussi deux matrices incertaines A_e et A telles que celles définies en (4.18), où K est donnée et \mathcal{D} -stabilise une paire $(\mathbb{A}_{bo}(\theta^\bullet), \mathbb{B}(\theta^\bullet))$ pour une instance $\theta^\bullet \in \Theta$, et où F est inconnue. Il existe une matrice F telle que A est \mathcal{D} -stable de manière robuste vis-à-vis de $\Theta \times \Delta(\rho)$ s'il existe $N\bar{k}$ matrices hermitiennes $P_{k_i} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, $i = 1, \dots, N$, des matrices hermitiennes définies positives $Q_{k,l_i} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, $l = 1, \dots, \bar{l}_k$, $i = 1, \dots, N$, ainsi que \bar{k} matrices $G_k \in \mathbb{C}^{(2n+m) \times n}$, $k = 1, \dots, \bar{k}$, une matrice non singulière $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$, et une matrice $H \in \mathbb{R}^{m \times p}$ telles que*

$$\mathcal{H}_W(\mathfrak{M}_i, P_{k_i}, Q_{k,l_i}, G_k, K, X, H, \gamma) < 0 \quad \forall \{i, k\} \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, \bar{k}\}, \quad (4.26)$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_W(\mathfrak{M}_i, P_{k_i}, Q_{k,l_i}, G_k, K, X, H, \gamma) = & \\
& \left[\begin{array}{c|ccc} R_k \otimes P_{k_i} + \sum_{l=1}^{\bar{l}_k} \Phi_{k,l} \otimes Q_{k,l_i} & 0 & 0 & L'_i \\ & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & L_i & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -I_q & Z_i \\ & 0 & Z_i & -\gamma I_r \end{array} \right] + & \\
& \left(\left[\begin{array}{c} G_k \\ 0 \end{array} \right] \left[A_{e_i} \mid -I_n \mid B_i \mid J_i \mid 0 \right] \right)^H + & \\
& \left(\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ I_m \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] X \left[-K \mid 0 \mid -I_m \mid 0 \mid 0 \right] \right)^H + & \\
& \left(\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ I_m \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] H \left[C_i \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \right] \right)^H & \tag{4.27}
\end{aligned}$$

et $\gamma = \rho^{-2}$.

La matrice F est donnée par (4.24) et (4.25). La matrice A_e est alors elle aussi \mathcal{D} -stable de manière robuste vis-à-vis de $\Theta \times \Delta(\rho)$.

Il est nécessaire d'imposer que K \mathcal{D} -stabilise une instance $(\mathbb{A}_{bo}(\theta^\bullet), \mathbb{B}(\theta^\bullet))$ car en réalité, la condition (4.26) n'est qu'une condition de $\partial\mathcal{D}$ -régularité robuste. Cette hypothèse assure donc, par continuité, une bonne répartition des valeurs propres de A .

Il faut également préciser que, si cette technique est adoptée, les problèmes (4.10) et (4.12) se réexpriment respectivement :
déterminer

$$(\mathbf{z}^*, \gamma^*) = \arg\left(\min_{\mathbf{z}, \{\mathcal{P}_i\}, G_U, X, H, \gamma} (\gamma = \rho^{-2})\right) \tag{4.28}$$

sous la contrainte

$$\mathcal{H}_U(\mathfrak{M}_i, P_i, G_U, K(\mathbf{z}), X, H, \gamma) < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \tag{4.29}$$

ou déterminer

$$(\mathbf{z}^*, \gamma^*) = \arg(\min_{\mathbf{z}, \{P_{k_i}\}, \{Q_{k,l_i}\}, G_k, \gamma} (\gamma = \rho^{-2})) \quad (4.30)$$

sous la contrainte

$$\mathcal{H}_W(\mathfrak{M}_i, P_{k_i}, Q_{k,l_i}, G_k, K(\mathbf{z}), X, H, \gamma) < 0 \quad \forall \{k; i\} \in \{1, \dots, \bar{k}\} \times \{1, \dots, N\}. \quad (4.31)$$

4.2.2 Tentative de résolution du problème

Dans ce paragraphe une approche pour tenter de résoudre, soit le problème (4.10) ou (4.12) (dans le cas d'un système de classe \mathbb{S}_+), soit le problème (4.28) ou (4.30) (dans le cas d'un système de classe \mathbb{S}_-) est proposée. L'on ne parle que de tentative pour deux raisons :

- l'optimalité de la solution fournie n'est pas garantie (commande roborante) ;
- il est possible qu'aucune solution ne soit trouvée (il peut d'ailleurs ne pas en exister).

La difficulté du problème est d'abord mise en évidence. Ensuite, puisqu'il est nécessaire d'aborder un problème d'optimisation de façon itérative, le déroulement de certains aspects d'une itération est détaillé. Enfin, la technique d'optimisation elle-même est résumée.

4.2.2.1 Non-linéarité du problème

Dans les problèmes (4.10), (4.12), (4.28) et (4.30), de nombreuses variables d'optimisation apparaissent. Toutefois, il est extrêmement difficile de les exploiter toutes sur le même plan. En effet, si l'on prend par exemple, le problème (4.10), γ , \mathcal{P}_i et \hat{G}_U sont des variables qui permettent d'optimiser le critère de robustesse et ce sans altérer la loi de commande (c'est-à-dire un choix de \mathbf{z}). *A contrario*, \mathbf{z} correspond aux paramètres de choix de cette loi de commande. Ce sont finalement les composantes de \mathbf{z} qui sont les vrais paramètres pertinents, les autres variables n'intervenant qu'en second lieu dans une phase analytique.

Compte tenu de la non-linéarité profonde de K ou de F par rapport à \mathbf{z} , le critère d'optimisation est lui aussi très non linéaire. Pour cette raison, il n'est pas très approprié d'exploiter des techniques d'optimisation basées sur les gradients ou sur les méthodes de Newton (chaque itération peut générer un souci numérique et des cycles infinis ont été constatés). Cependant, le calcul analytique étant exclu, il faut néanmoins passer par une technique numérique itérative. L'idée est de faire évoluer le vecteur \mathbf{z} en fonction de la valeur de ρ qu'il génère. L'évaluation de $\rho(\mathbf{z})$ constitue une partie intégrante de l'itération.

4.2.2.2 Détail d'une partie d'une itération

Le processus d'optimisation se schématise donc *a priori* comme indiqué par la figure 4.1, même si ce schéma sera ultérieurement modifié.

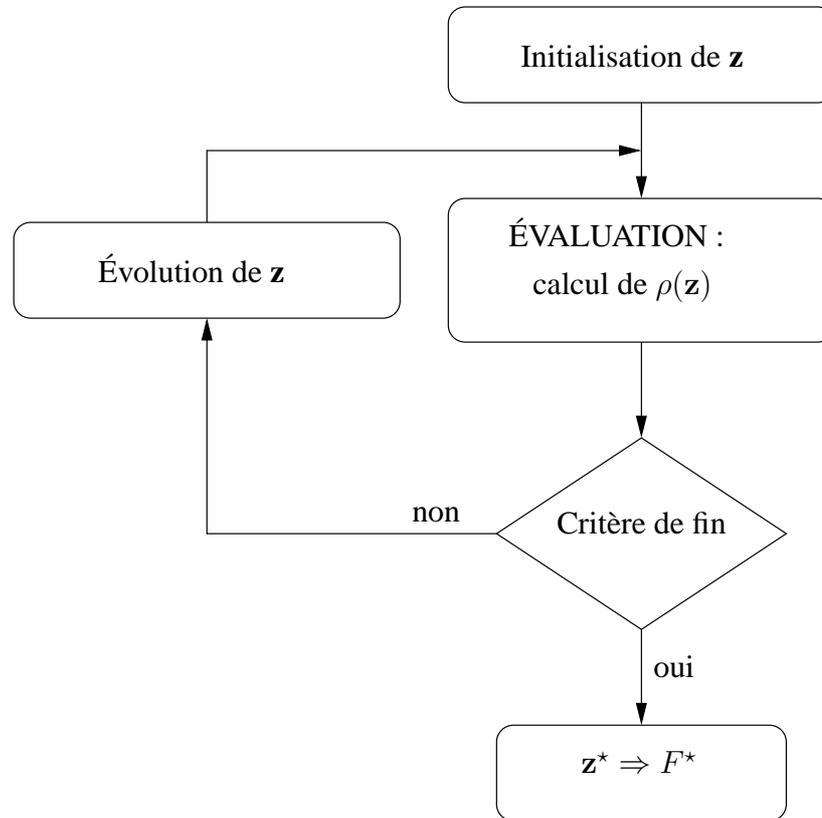


FIG. 4.1 – Principe du processus d'optimisation

Par ce schéma, l'évaluation se révèle importante dans une itération du processus. Il convient de distinguer le cas \mathbb{S}_- du cas \mathbb{S}_+ . Les organigrammes respectifs pour l'évaluation au cours d'une itération sont donnés par la figure 4.2.

4.2.2.3 Heuristique de résolution

L'évolution de z est l'autre point essentiel d'une itération. Comme il a été mentionné plus avant, il est difficile de faire évoluer z selon des techniques d'optimisation classique. C'est pourquoi, la souplesse numérique requise nous a conduit à envisager une heuristique d'évolution basée sur les algorithmes génétiques ou plus exactement ici, chromosomiaux.

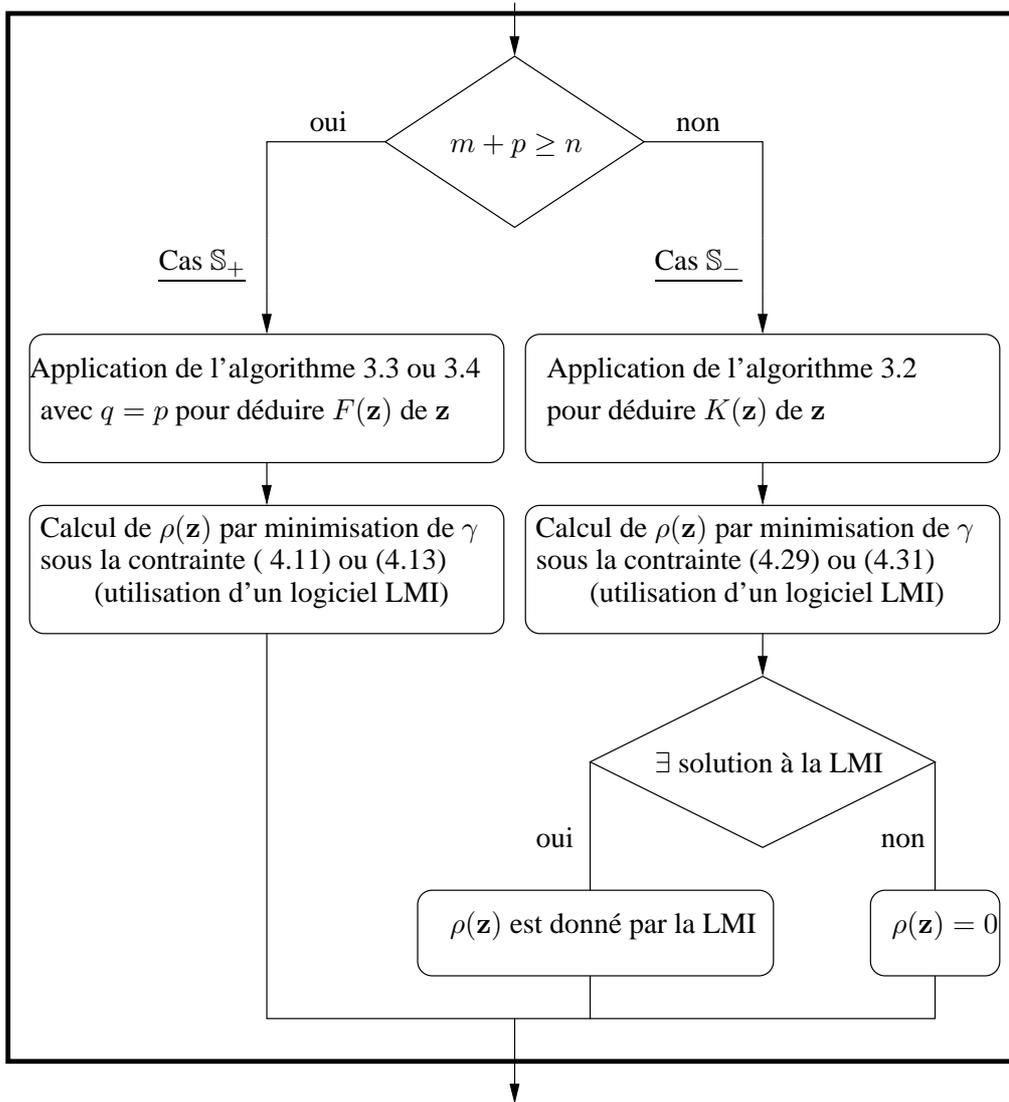


FIG. 4.2 – Principe de l'évaluation

4.2.2.3.1 Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques sont inspirés de la théorie darwinienne [101, 102], en particulier du concept de sélection naturelle. Darwin explique que l'apparition d'espèces distinctes ainsi que leur évolution se fait à travers cette sélection naturelle. Assez grossièrement, cette théorie se résume à l'idée qu'au sein d'une même espèce, ce sont les individus les plus forts ou les plus adaptés à leur milieu qui orientent l'évolution de l'espèce en se reproduisant plus que les autres et en mutant (« la survivance du plus apte » selon la propre expression de Darwin).

En dehors de toute considération de biologie humaine, l'on peut reprendre cette notion de sélection naturelle dans nombre de disciplines où un problème d'optimisation compliqué apparaît. Chaque individu correspond alors à un jeu de variables et le critère retenu permet de

déterminer les individus les plus forts jusqu'à faire émerger le plus fort. Il faut donc partir d'une population d'individus initiale et la faire évoluer de générations en générations pour améliorer la qualité de la population au sens du critère, ce qui, par sélection naturelle, privilégie l'émergence de meilleurs individus. Ce principe est schématisé par la figure 4.3.

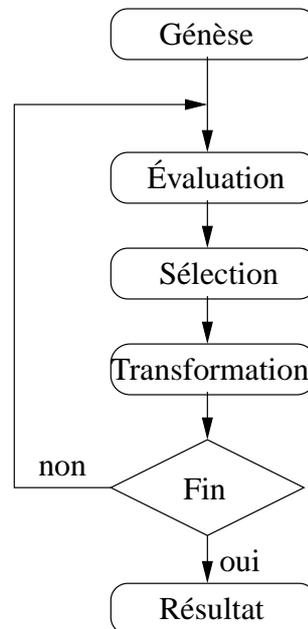


FIG. 4.3 – Processus de sélection naturelle

Pour désagréable que soit l'utilisation des différents vocables de la terminologie des algorithmes génétiques, il est néanmoins préférable de commenter ce schéma. Un tel processus commence par la génèse d'une population initiale d'individus. Chaque individu est évalué au sens du critère d'où la phase d'évaluation. Cette phase conduit à sélectionner les individus ayant le mieux répondu au critère. Ainsi, seuls ces individus seront à l'origine de la génération suivante, par le biais d'une transformation correspondant elle-même à différentes opérations. La nouvelle génération comporte le même nombre d'individus que la précédente (espace restreint suscitant la sélection). Si la génération obtenue est satisfaisante (en particulier le meilleur individu), le processus est arrêté et les résultats sont extraits. Dans le cas contraire, la nouvelle génération subit à son tour une phase d'évaluation-sélection-transformation et ainsi de suite, de générations en générations, jusqu'à ce que le processus soit estimé à sa fin. C'est ce principe que retient Holland pour inventer une heuristique de résolution d'un problème d'optimisation appelée *algorithme génétique* [188]. Les extensions de son idée sont maintenant fort nombreuses [302, 162].

Avant de détailler les phases de sélection et de transformation, il est nécessaire d'introduire un peu de vocabulaire. Il n'y a pas toujours cohérence d'un travail à l'autre aussi utilisons nous un formalisme que nous ne prétendons pas universel mais qui, au contraire, nous est peut-être

partiellement propre.

- Un *individu* est donc un jeu de variables d'optimisation.
- L'ensemble des individus constitue la *population*.
- Chaque évolution de la population (de taille constante) conduit à une *génération*.
- Un individu peut se scinder en sous-ensembles de variables d'optimisation appelées *cellules* (concept non utilisé ici).
- Chaque variable d'optimisation peut être appelée *chromosome*.
- Chaque chromosome admet une approximation en code binaire dont les digits sont appelés *gènes*.

À ce stade, l'évaluation d'une génération est assez facile à définir. Si l'on part du principe que la population est de taille constante \bar{z} , il s'agit d'utiliser le critère retenu pour définir la qualité de l'espèce à chacun des \bar{z} individus de cette génération. Une fois tous ces individus évalués, il est alors possible de procéder aux phases de sélection et de transformation dont quelques opérations possibles sont maintenant exposées.

Il existe principalement deux types de sélection :

- **Sélection proportionnelle** : dans sa version la plus simple, elle consiste à éliminer de la population une proportion d'individus correspondants aux plus faibles au sens du critère, selon la phase d'évaluation. Seuls les individus restants, appelés *parents*, engendreront la génération suivante (voir la phase de transformation).
- **Sélection par tournoi** : un peu plus complexe, cette alternative consiste, pour chaque individu à retenir, à « organiser » un tournoi parmi un échantillon de la population et ne retenir comme parent, que le vainqueur du tournoi, à savoir le participant le mieux évalué. Il faut gérer autant de tournois que de parents à retenir. L'intérêt d'une telle sélection en comparaison de la précédente ne nous semble pas évident même si son but est de réduire le risque de convergence locale.

Une fois cette sélection des parents assurés, ils doivent engendrer, lors de la phase de transformation, la génération suivante. Cette transformation peut correspondre aux opérations suivantes :

- **Croisement** : il constitue l'opération absolument essentielle d'un processus évolutif. Il s'agit de la création de nouveaux individus appelés *enfants* à partir de deux parents (quel beau programme !). Une distinction est ici faite sur la nature du croisement.
 - *Croisement génétique* : dans le cas où les individus sont binarisés, il s'agit d'opérer entre deux parents, une permutation de séquences de gènes (donc deux séquences binaires). Ces séquences sont localisées de façon aléatoire, ce qui implique bien sûr l'existence de nombreuses variantes.
 - *Croisement chromosomal* : dans le cas où le codage binaire n'est pas exploité, l'idée est

de combiner les mêmes chromosomes de deux parents j et k de la génération i (ex : des variables d'optimisation) ici notés c_j^i et c_k^i (c_j^i étant le mieux évalué) pour générer un « chromosome enfant » noté $c_{j,k}^{i+1}$, selon l'opération

$$c_{j,k}^{i+1} = r_i(c_j^i - c_k^i) + c_j^i. \quad (4.32)$$

Le scalaire $r_i \in [0; 1]$ est un indice de non-ressemblance qui peut être choisi aléatoirement à chaque génération et même à chaque opération de croisement. Il constitue un degré de liberté pour tenter de régler la vitesse de l'évolution. Cette opération mathématique peut être appliquée à chaque chromosome mais aussi à chaque cellule ou à chaque individu (comme dans les cas que nous avons traités).

- **Mutation** : elle consiste à modifier (altérer) un ou plusieurs gènes (ou chromosomes) de façon aléatoire sur une partie des parents pour générer de nouveaux individus. Le nombre de mutations que peut subir un parent ainsi que leurs intensités sont des paramètres de réglage de l'algorithme. Cette opération ne doit pas être négligée car elle évite une trop grande ressemblance des individus de la population, ressemblance inhérente à la sélection et au croisement. Du point de vue de l'optimisation, cela signifie que la mutation réduit le risque de convergence locale.
- **Stratégie élitiste** : moins essentielle que les deux opérations précédentes, elle consiste à toujours porter au nombre des parents le meilleur individu au sens du critère, ce en vue d'améliorer la convergence du processus. Cet individu, non seulement subira croisement et mutation, mais en outre, sera dupliqué (donc cloné) pour produire un enfant identique. Ainsi, il devient impossible qu'une génération voie son champion moins bon que celui des générations précédentes. En pratique, ceci signifie que le critère ne peut diminuer en cours d'évolution.

Le test de convergence d'un tel processus peut être soit fondé sur une faible évolution du critère à l'issue de plusieurs générations successives, soit simplement consister en un nombre maximal d'itérations (ce que nous conseillons plutôt), soit encore répondre à une association des deux façons de procéder. Quoi qu'il en soit, la convergence globale n'est pas démontrée. Cela étant, bien des problèmes extrêmement non linéaires peuvent voir leur solution approchée par ce genre d'algorithmes et ce de manière très souple sur le plan numérique. Le *maximum maximorum* (maximum obtenu sur toutes les générations) a toutes les chances de se situer à proximité du maximum global.

4.2.2.3.2 Algorithmes chromosomiaux

Parce que les codes binaires sont parfois difficiles à manipuler (ils requièrent des outils de conversion de code réel à code binaire et réciproquement dont la manipulation augmente le temps de calcul et induit un quantum de conversion), il est parfois plus simple de conserver le code réel des variables d'optimisation. Si chaque variable constituant l'individu est assimilé à

un chromosome (comme suggéré plus avant), l'on peut parler d'algorithmes chromosomiaux plutôt que génétiques. C'est l'idée (si ce n'est le vocabulaire) retenu dans [271]. Le croisement chromosomal est alors de rigueur. Cette version simple des processus évolutionnaires a toujours été retenue dans le cadre des études qui suscitent ce rapport.

L'application des algorithmes chromosomiaux au problème de placement roborant de pôles consiste donc à générer une population initiale de \bar{z} individus z_j . Cette population doit subir un processus évolutionnaire selon le principe de la figure 4.3. Dans la phase d'évolution, chaque individu d'une génération est évalué selon le schéma de la figure 4.2. Lorsqu'une loi de commande nominale (*non roborée*) est initialement disponible, ce qui est possible lorsque la condition non stricte de Kimura est satisfaite ($m + p \geq n$: système de classe \mathbb{S}_+), et *a fortiori* lorsqu'il s'agit d'une commande par retour d'état, il est judicieux d'insérer l'individu z_{init} correspondant à cette loi nominale dans la population initiale afin que toute commande roborée générée par le processus évolutionnaire soit au moins aussi « robuste » que la commande initiale.

Remarque 4.3 *Dans le cas \mathbb{S}_- , il est possible que plusieurs générations se succèdent sans qu'aucun individu ne génère une borne non nulle. Si le problème n'a pas de solution, il va de soi que ces générations infructueuses se succèderont jusqu'à ce qu'un terme soit mis au processus.*

La grande souplesse et l'efficacité récurrente des algorithmes chromosomiaux n'est pas propre aux problèmes d'optimisation exposés ici. Ces algorithmes ont déjà été utilisés dans le cadre de la commande robuste, par exemple dans [283, 241, 243, 109].

À l'issue du processus évolutionnaire, il est possible de poursuivre l'optimisation par une technique plus classique, par exemple basée sur les gradients. Ainsi, l'algorithme chromosomal « dégrossit » avantagement le problème et évite les écueils (minima locaux) en se rapprochant d'un optimum supposé global. Quant à la technique d'optimisation plus classique, elle peaufine la convergence vers cet optimum.

4.2.2.3.3 Exemple final

Pour illustrer les propos des paragraphes précédents, nous présentons ici un petit exemple extrait de la thèse de Jérôme Bosche [55]. Le modèle est inspiré d'un passage de [135]. Il s'agit d'un modèle simplifié de satellite nominale décrit par le triplet de matrices

$$A_{bo} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10\Gamma & -10\Gamma & 10\Gamma & 10\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Gamma & \delta & -\Gamma & -\delta \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -2,5 \\ -5 & 3,3 \\ -7 & 8,5 \\ -2 & -3,3 \end{bmatrix}'. \quad (4.33)$$

L'on note que le modèle appartient à la classe \mathbb{S}_- . Le couple Γ est soumis à une incertitude additive Δ_Γ de sorte que $\Gamma = \Gamma_0 + \Delta_\Gamma$, où le terme nominal vaut $\Gamma_0 = 0,35$ et le terme incertain vérifie $|\Delta_\Gamma| \leq 0,03$. De même, le frottement visqueux est soumis à une incertitude Δ_δ telle que $\delta = \delta_0 + \Delta_\delta$ avec $\delta_0 = 0,028$ et $|\Delta_\delta| \leq 0,001$. La matrice dynamique incertaine en boucle ouverte s'écrit donc

$$\mathbb{A}_{bo} = A_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Delta_\Gamma + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Delta_\delta. \quad (4.34)$$

Elle décrit ainsi un polytope à quatre sommets, de même que la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{bo} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{bmatrix},$$

où $\mathbb{B} = B$, $\mathbb{C} = C$ et $\mathbb{D} = 0$. Lorsque l'on applique une loi de commande par retour statique de sortie associé à la matrice $F \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, elle même soumise à une incertitude additive d'implantation Δ_F , la matrice dynamique incertaine en boucle fermée s'écrit

$$A = \mathbb{A}_{bo} + \mathbb{B}(F + \Delta_F)\mathbb{C} = \mathbb{A}_0 + \mathbb{B}\Delta_F\mathbb{C}. \quad (4.35)$$

Cette structure d'incertitude est une instance de l'incertitude polytopique LFT (2.16) pour laquelle $\mathbb{J}(\theta) = \mathbb{B} = B$, $\mathbb{L}(\theta) = \mathbb{C} = C$, $\mathbb{Z}(\theta) = \mathbb{D} = 0$ et $\Delta = \Delta_F$. Bien entendu, lorsque θ décrit Θ , cela signifie que Δ_Γ et Δ_δ décrivent les intervalles auxquels ils appartiennent. Le problème ici abordé est de calculer F afin que le spectre de $A = A(\theta, \Delta)$ appartienne à la région $E^2MI \mathcal{D}_U = \mathcal{D}_{R_1} \cup \mathcal{D}_{R_2} \cup \mathcal{D}_{R_3}$, quels que soient $\theta \in \Theta$ et $\Delta \in \Delta(\rho)$. Les trois sous-régions \mathcal{D}_{R_i} sont des régions EMI, à savoir deux disques ouverts de rayon 2 respectivement centrés en $(-3 + 3i)$ et $(-3 - 3i)$ auxquels s'ajoutent le demi-plan défini par $\text{Re}(s) < -6$. Les zones de tolérance \mathcal{Z}_i associées aux valeurs propres nominales (celles de $A_0 = A_{bo} + BFC$) sont deux disques de centres $(-3 + 3i)$ et $(-3 - 3i)$ et de rayon 0,95 ainsi que deux segments de l'axe réel : $[-7, 05; -8, 95]$ (centré sur -8) et $[-9, 05; -10, 95]$ (centré sur -10). Elles sont bien sûr contenues dans \mathcal{D}_U . En outre, la matrice F doit être telle que le rayon ρ de la boule $\Delta(\rho)$ à laquelle appartient l'incertitude d'implantation $\Delta = \Delta_F$ est maximal afin que la loi de commande soit la plus *résiliente* possible, c'est-à-dire la moins fragile.

Pour résoudre ce problème d'optimisation, qui n'est autre que le problème (4.28), Jérôme Bosche applique un algorithme chromosomal utilisant une population d'une taille constante de 100 individus. Il n'y a pas de loi de commande nominale disponible. À la septième génération, une première matrice de retour de sortie admissible est détectée :

$$F_{init} = \begin{bmatrix} 40,1 & -7,5 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Elle conduit à la borne de \mathcal{D}_U -stabilité robuste (ici un indice de résilience robuste)

$$\rho_{init}^\diamond = 0,7004. \quad (4.37)$$

Toutefois, après 52 générations, le processus évolutionnaire fait apparaître une matrice de retour de sortie finale

$$F_{fin} = \begin{bmatrix} 74,2 & -20,9 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Elle conduit à la borne de \mathcal{D}_U -stabilité robuste

$$\rho_{fin}^\diamond = 3,9285, \quad (4.39)$$

ce qui représente une sérieuse roboration par rapport à la septième génération. Il est facile, numériquement, de vérifier que, si la matrice $A_{fin} = (\mathbb{A}_0 + \mathbb{B}(F_{fin} + \Delta_F)\mathbb{L})$ est évidemment \mathcal{D}_U -stable vis-à-vis du domaine $\Theta \times \Delta(\rho_{fin}^\diamond)$, la matrice $A_{init} = (\mathbb{A}_0 + \mathbb{B}(F_{init} + \Delta_F)\mathbb{L})$ ne l'est absolument pas [55].

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, le principe de la commande roborante et plus précisément du placement roborant de pôles a été exposé. Il s'agit de faire évoluer une loi de commande de type placement de pôles par retour statique d'état ou de sortie (cf. chapitre 3) afin d'améliorer la \mathcal{D} -stabilité de la matrice dynamique en boucle fermée, celle-ci étant soumise à une incertitude polytopique LFT. \mathcal{D} est une région E^2MI ou $ECMI$ (cf. chapitre 1). Les critères retenus sont les bornes de \mathcal{D} -stabilité robuste présentées au chapitre 2. Les problèmes d'optimisation mis en évidence étant fortement non convexes, une heuristique de résolution basée sur les algorithmes chromosomiaux a été retenue. L'expérience de deux thèses [13, 55] a montré que, sans garantie d'optimalité, l'heuristique s'avérait néanmoins tout à fait raisonnable, voire franchement efficace.

La perspective essentielle liée à ce chapitre nous paraît être celle soulevée par la remarque 4.1, à savoir la possibilité d'exploiter le concept de \mathcal{D} -stabilité robuste et éventuellement les régions non connexes dans la détermination d'une loi de commande *roborante*, constituée d'un observateur et d'un retour statique d'état reconstruit.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, une approche de la commande robuste a été abordée. Cette approche relève de la recherche de performances transitoires robustes. Les modèles qui ont été retenus sont des représentations d'état linéaires invariantes dans le temps, de sorte que les performances transitoires ont été envisagées en termes de \mathcal{D} -stabilité de la matrice d'évolution. Par ailleurs, la présence d'incertitude sur cette matrice a conduit aux notions de \mathcal{D} -stabilité robuste et de bornes de \mathcal{D} -stabilité robuste. Pour élargir la gamme des spécifications de performances robustes considérées, une incertitude assez générale a été retenue : l'incertitude polytopique LFT. De plus, l'ensemble des régions envisagées comprend un large panel de régions non connexes (intersections ou unions de sous-régions). Ces possibilités offertes rendent les outils d'analyse présentés relativement génériques. Les conditions de \mathcal{D} -stabilité nominale et robuste exposées dans ce rapport l'ont été en termes de LMI ce qui les rend, pour des dimensions raisonnables, numériquement exploitables.

Sur le plan de la commande, un effort particulier a été apporté au développement de lois de commande par retour statique nominale \mathcal{D} -stabilisantes, et, en particulier, au placement strict de pôles par une approche modale. L'idée était alors d'associer ces lois de commande avec les outils d'analyse robuste précédemment exposés. Il s'est ensuivi l'introduction du concept de commande roborante qui consiste à faire évoluer une commande nominale dans le but d'améliorer la robustesse du système bouclé, et ce, sans figer *a priori* le domaine d'incertitude (à l'opposé de la commande robuste qui détermine une loi de commande pour une famille prédéfinie de modèles). Dans ce rapport, les bornes de \mathcal{D} -stabilité robuste ont constitué le critère de robustesse, et le placement de pôles a servi de principe de détermination de la loi de commande, conduisant ainsi à la notion de placement roborant de pôles. À ce stade, l'approche proposée s'est révélée numériquement suffisamment compliquée pour justifier l'utilisation d'heuristiques tels que les algorithmes génétiques, ou, plus précisément, chromosomiaux.

Si parmi les travaux associés à ce mémoire, les contributions essentielles devaient être retenues, nous choisirions celles-ci :

- élargissement du panel de régions \mathcal{D} envisageables dans un cadre de \mathcal{D} -stabilité robuste, en particulier les régions non connexes ;
- utilisation du concept de $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice pour réduire le conservatisme des outils d'analyse associés à certaines régions ;
- souci constant d'établir un lien théorique avec le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov, la

- S-procédure et leurs différentes variantes et extensions ;
- développement d’une technique de placement de pôles via la notion de structure propre pour le cas où la condition de Kimura est vérifiée de façon non stricte.

Les perspectives directes à donner à ce travail ont été citées au cours des différents chapitres mais les principales sont néanmoins rappelées :

- réduction du conservatisme des conditions en prenant notamment en compte la réalité de l’incertitude (voir les articles [181, 295, 45]) ;
- développement d’une méthode efficace de placement de pôles \mathcal{D} -stabilisant non strict par retour statique de sortie, ce qui revient à résoudre le problème de la stabilisation par un retour du même type (vœu pieux ?) ;
- résoudre le problème de placement strict de pôles par retour statique de sortie lorsque la condition non stricte de Kimura n’est pas vérifiée (autre vœu pieux ?... peut-être mais voir néanmoins [22, 367]) ;
- proposer la première synthèse directe (non itérative) d’une loi de commande par retour statique d’état assurant un placement non strict dans une union de sous-régions ;
- prendre en compte rigoureusement des observateurs dans les lois de commande.

Toutefois, nous envisageons des perspectives moins directes où le concept de \mathcal{D} -stabilité (nominale dans un premier temps, robuste dans un second), s’appliquerait à deux classes de modèles :

- les modèles singuliers [100], parfois appelés *descriptor models* en anglais, ce qui conduirait au concept de \mathcal{D} -admissibilité ;
- les modèles multidimensionnels [305, 133, 60, 61, 291, 208, 1, 142] pour lesquels les performances transitoires restent à relier rigoureusement à la notion de zéros d’une matrice polynomiale à plusieurs variables dont il faudrait d’ailleurs définir et analyser la \mathcal{D} -stabilité (voir [173]). L’approche reposerait toujours sur les LMI comme dans les articles [119, 144, 145, 269, 146, 54, 53]. La recherche d’une condition LMI unique de stabilité des systèmes multidimensionnels hybrides (c.-à-d. comportant à la fois des dynamiques continues et discrètes) est un défi particulièrement tentant à relever.

Les annexes A et B exposent l’avancée de nos travaux, respectivement sur les modèles multidimensionnels et les modèles singuliers.

Indépendamment de ces perspectives, nous pensons aussi que l’avenir de l’Automatique, en tant que discipline de recherche, appartient peut-être, pour partie, aux numériciens et aux chercheurs en optimisation. Nous en voulons pour illustrations parmi tant d’autres le mémoire [9] ou l’article [322].

Pour conclure ce mémoire, nous souhaitons revenir à la fusée Ariane évoquée en introduction et qui, en sa qualité de pendule inverse, est à rapprocher de la baguette de pain. En effet, l’enfant sortant de la boulangerie, mandaté par un parent pour acheter une baguette, sera tenté d’avancer en gardant cette dernière en équilibre vertical dans la main. S’il ne souhaite pas voir la baguette tomber dans une flaque d’eau, nous ne saurions trop lui conseiller de penser fort

aux concepts de l'automatique (pas nécessairement à la \mathcal{D} -stabilité robuste) et de prévoir des tuyères orientables. Nous nous en tiendrons là pour ce qui relève des aspects expérimentaux de l'automatique.

ANNEXES : TRAVAUX CONNEXES

Ces annexes sont conçues de telle sorte qu'elles puissent être lues de façon indépendante du corps du mémoire. Elles correspondent à certaines de nos contributions qui nous paraissent suffisamment significatives pour être mises en évidence mais qui sortent néanmoins quelque peu du sujet retenu pour ce rapport.

ANNEXE A

SYSTÈMES MULTIDIMENSIONNELS : UNE VERSION n -D DU LEMME KYP

Cette annexe reprend l'essentiel de l'article [23]. Elle traite de l'analyse robuste des systèmes multidimensionnels décrits dans l'espace d'état par des modèles de Roesser et propose une version multidimensionnelle du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov. Bien que seules la stabilité robuste, la performance \mathcal{H}_∞ et la positivité réelle y soient considérées, l'approche même témoigne du lien direct avec la notion de \mathcal{D} -stabilité des modèles multidimensionnels, comme le souligne le rapport spécifique [20].

Sommaire

A.1	Introduction	151
A.2	Préliminaires	153
A.2.1	Modèles hybrides de Roesser	153
A.2.2	Cloisonnement d'un point	155
A.2.3	$\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice multivariable	157
A.3	Une extension du lemme KYP	158
A.4	Application à l'analyse des modèles de Roesser	162
A.4.1	$\partial\mathcal{D}$ -régularité vis-à-vis d'une incertitude LFT	163
A.4.2	Positivité réelle du modèle hybride de Roesser	168
A.4.3	Réalité bornée du modèle hybride de Roesser	169

A.5	Exemple numérique	170
A.6	Conclusion	171
A.6.1	Résumé	171
A.6.2	Discussion et perspectives	172

A.1 Introduction

Durant les trois dernières décennies, les systèmes *multidimensionnels* également dénommés *systèmes n -D* [60, 62, 142, 210] ont fait l'objet d'une grande attention. Ces systèmes sont caractérisés par des matrices de transfert impliquant plusieurs variables « de Laplace » indépendantes qui peuvent correspondre à diverses échelles de temps et d'espace. Ceci résulte de la propagation d'informations dans plus d'une seule direction, ce qui est la différence essentielle avec modèles classiques monodimensionnels (1-D), pour lesquels l'information ne se propage que dans une seule direction.

L'intérêt porté aux modèles n -D émane principalement d'une grande variété d'applications incluant le filtrage n -D [39, 245], le codage et le décodage n -D [328], le traitement d'image [66] (dans ce cas, on a généralement $n = 2$ ou $n = 3$), le traitement du signal multidimensionnel [124]. La théorie des systèmes multidimensionnels s'applique également avec succès à l'analyse des procédés possédant des dynamiques répétitives (voir par exemple l'ouvrage [306] et les références qui y sont contenues).

Essentiellement deux formes de modèles d'état ont vu le jour pour décrire de tels systèmes. La première est à mettre au crédit de Roesser [305] et est utilisée dans ce qui suit. Le vecteur d'état est partitionné en sous-vecteurs (en fait un sous-vecteur pour chacune des n directions de propagation de l'information). Une forme alternative communément utilisée pour décrire les phénomènes n -D fut proposée par Fornasini et Marchesini [133]. Il faut noter, toutefois, que ces deux types de modèles ne sont pas complètement indépendants et il est possible de passer de l'un à l'autre par des transformations appropriées.

La popularité indéniable des modèles d'état dans le cadre de la théorie n -D, à l'instar du cas 1-D, vient du fait que leurs caractéristiques sont bien comprises et que l'on peut les manipuler à l'aide d'outils numériques parfois très performants, ces derniers étant souvent déduits des propriétés de l'algèbre linéaire. Dans ce qui suit, le problème de la stabilité, qui est bien sûr tout aussi impérative que dans le cadre monodimensionnel, est abordé par une approche de type Lyapunov [144, 180, 210, 244], ce qui conforte l'idée d'utiliser des modèles d'état. Un avantage important d'une telle approche réside en la possibilité d'exprimer, comme dans le cas 1-D, les conditions de stabilité en termes d'existence d'une solution à un système LMI [65] c.-à-d. en formulant un problème d'optimisation de dimension finie sous contraintes LMI. Il est d'ores et déjà mentionné que la très grande majorité des conditions LMI de stabilité d'un modèle n -D existantes à ce jour ne sont que suffisantes. Récemment, des résultats préliminaires sur la formulation de CNS ont été proposés dans [126, 138]. Néanmoins, ces conditions ne concernent que les modèles 2-D et augurent assez mal d'extensions à la commande.

Les conditions de stabilité des modèles n -D les plus connues sont exprimées en termes de cloisonnement des racines d'un polynôme caractéristique [208]. Dans un tel contexte, il paraît normal de vouloir établir des résultats théoriques sur les matrices polynomiales [330, 331]. Une fois encore, les techniques d'optimisation convexes sous contraintes LMI se sont révélées être un outil utile pour aborder les analyses induites par les matrices polynomiales, particulièrement

l'analyse en \mathcal{D} -stabilité [173]. Cette annexe s'inscrit dans un tel cadre.

Le lien entre, d'une part, l'approche polynomiale ou, d'un point de vue plus restrictif, l'approche fréquentielle, et, d'autre part, les inégalités matricielles, est particulièrement bien étudié dans le cas 1-D. Le résultat le plus marquant est le célèbre lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) [298, 197] qui donne une équivalence cruciale entre des inégalités fréquentielles et des LMI.

À ce jour, il n'existe pas de communication relatant une extension claire et sans ambiguïté de ce lemme dans un cadre n -D et, par conséquent, il est naturel de se demander s'il est possible d'établir une version du lemme KYP qui puisse efficacement s'inscrire dans le contexte des systèmes multidimensionnels. Récemment, de nombreux efforts ont porté sur l'établissement d'un tel lemme mais seuls des cas particuliers ont été abordés [144, 363], sans qu'aucun résultat général ne puisse être fourni. Ce travail a pour objectif d'aider à corriger ce manque.

Cette annexe est ainsi organisée. Après l'introduction, la partie A.2 fournit les préliminaires nécessaires. Elle expose les modèles de Roesser et évoque quelques extensions de ces modèles. Les modèles de Roesser sont en effet très populaires pour décrire le comportement des systèmes multidimensionnels. De plus, cette partie exploite certaines formulations (rencontrées dans la littérature) de régions du plan complexe ainsi que la notion de $\partial\mathcal{D}$ -régularité étudiée au chapitre 1. Cette dernière notion est étendue au cas des fonctions matricielles de plusieurs variables. La partie A.3 expose le résultat principal qui est une extension du lemme KYP généralisé. Dans la partie A.4, ce lemme est utilisé pour analyser le comportement des modèles de Roesser introduits dans la partie A.2. Une illustration numérique est proposée en partie A.5 pour mettre en lumière la pertinence de l'approche. Enfin, la conclusion comporte un résumé des résultats mais aussi une discussion très complète sur les perspectives possibles.

Quelques notations spécifiques sont utilisées dans cette annexe. La notation \mathcal{H}_n indique l'ensemble des matrices hermitiennes de dimension n . $\mathcal{H}_n^+ \subset \mathcal{H}_n$ en est le sous-ensemble des matrices définies positives alors que $\mathcal{H}_n^- \subset \mathcal{H}_n$ en est celui des matrices définies négatives. Pour un sous-ensemble \mathcal{S} de l'ensemble \mathcal{X} , l'on définit \mathcal{S}^C comme le complémentaire de \mathcal{S} tel que $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^C = \mathcal{X}$ & $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^C = \emptyset$. Enfin, les ensembles d'indices répondent à la notation suivante :

$$\mathbb{I}(q) = \{1, \dots, q\}, \quad q \in \mathbf{N}.$$

Remarque A.1 n ne représente pas la dimensionnalité du système, c.-à-d. le nombre de dimensions considérées (qui sera noté k), mais à l'instar du corps du mémoire, l'ordre global du modèle. L'on parlera donc d'un système k -D dont le modèle complet de Roesser est d'ordre n .

A.2 Préliminaires

Cette partie expose quelques préliminaires, certains d'entre eux empruntés à la littérature. La première sous-partie est consacrée aux modèles de Roesser et aux conditions de stabilité associées. La deuxième fournit la description d'une classe de régions du « plan complexe multidimensionnel », qui sera utilisée dans la partie suivante. La troisième sous-partie introduit brièvement la notion de $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une fonction matricielle à plusieurs variables, inspirée du concept de $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice présenté au chapitre 1.

A.2.1 Modèles hybrides de Roesser

Un des modèles les plus utilisés pour décrire les systèmes n -D discrets est le modèle de Roesser. Il fut introduit pour la première fois dans [305]. Une version plus générale et surtout hybride de ce modèle de Roesser, plus tard proposée dans [53], est ici rappelée :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} x^1(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t_r} x^r(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) \\ \hline x^{r+1}(t_1, \dots, t_r, j_{r+1} + 1, \dots, j_k) \\ \vdots \\ x^k(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k + 1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) \\ \vdots \\ x^r(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) \\ \hline x^{r+1}(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) \\ \vdots \\ x^k(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) \tag{A.1} \\
 y(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) \\ \vdots \\ x^r(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) \\ \hline x^{r+1}(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) \\ \vdots \\ x^k(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) \end{bmatrix} \\
 &+ Du(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k)
 \end{aligned}$$

où $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

Les vecteurs $x^i(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, k$, $u(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement les sous-vecteurs d'état locaux, le vec-

teur d'entrée et le vecteur de sortie. Les matrices

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$C = [C_1 \mid C_2] \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

sont respectivement les matrices d'évolution, de commande, d'observation et de transmission directe. De façon évidente, les systèmes décrits par le modèle ci-avant possèdent des dynamiques continues le long de r dimensions et des dynamiques discrètes le long de $(k - r)$ dimensions. Si $r = 0$, le modèle est réduit au modèle classique de Roesser [305] alors que si $r = k$, la contrepartie continue est obtenue. Enfin, si $r = 1$ et $k = 2$, le modèle 2-D obtenu est particulièrement indiqué pour décrire les procédés différentiels répétitifs [147].

En appliquant la transformation de Laplace et la transformation en \mathcal{Z} , la caractérisation fréquentielle suivante du modèle (A.1) est obtenue

$$Y(\lambda) = G(\lambda)U(\lambda),$$

où

$$G(\lambda) = C(H(\lambda) - A)^{-1}B + D, \quad H(\lambda) = \bigoplus_{i=1}^k \lambda_i I_{n_i}. \quad (\text{A.2})$$

Soit maintenant la fonction $c(\lambda, A)$ définie par

$$c(\lambda, A) = \det(H(\lambda) - A). \quad (\text{A.3})$$

La condition de stabilité du modèle est maintenant exposée. Il s'agit d'une reformulation d'un résultat de [53].

Lemme A.1 *Soit un système multidimensionnel décrit par (A.1). Ce dernier est asymptotiquement stable si et seulement si*

$$c(\lambda, A) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{S}^C, \quad (\text{A.4})$$

où $c(\cdot, \cdot)$ est défini par (A.3) et où \mathcal{S}^C , l'ensemble complémentaire de la « région de stabilité asymptotique », est défini par

$$\mathcal{S}^C = \left\{ \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^k : \operatorname{Re}(\lambda_i) \geq 0, \forall i \in \mathbb{I}(r) \ \& \ |\lambda_i| \geq 1, \forall i \in \{r+1, \dots, k\} \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Le lemme ci-avant couvre les résultats existant tant pour le cas discret que pour le cas continu. Si $r = 0$, la condition de stabilité du modèle discret de Roesser proposée dans [1, 208] est recouverte. De plus, en considérant $r = k$ le résultat de [291] est retrouvé.

Dans le Lemme A.1, la condition de stabilité est exprimée en termes de cloisonnement des racines d'un polynôme, ce qui ne conduit généralement pas à des tests facilement exploitables

numériquement. Une façon d'établir des conditions de stabilité conduisant à une réduction significative de la complexité de calcul est de reformuler ces « résultats polynomiaux » en problèmes d'optimisation convexes sous contraintes LMI. Il s'agit en réalité de relaxations. Dans cette idée, la suite propose quelques préliminaires sur le cloisonnement d'un point dans le but de préparer l'établissement d'une condition LMI dans la partie suivante.

A.2.2 Cloisonnement d'un point

Contrairement au cas des systèmes 1-D, les racines du polynôme caractéristique d'un système n -D (c.-à-d. les pôles du système) ne sont pas isolées et ne forment généralement pas un ensemble fini de points. Par ailleurs, il faut noter que la localisation des pôles n'est pas, dans le cas n -D, clairement liée aux performances transitoires du système. C'est pourquoi les seules frontières de régions envisagées par la suite sont l'axe imaginaire et le cercle unitaire. Elles permettent de délimiter les régions de cloisonnement \mathcal{S}^C définies en (A.5).

Pour ce faire, l'on considère les matrices suivantes,

$$\begin{bmatrix} R_{i11} & R'_{i10} \\ R_{i10} & R_{i00} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}. \quad (\text{A.6})$$

Soient les ensembles $\partial\mathcal{D}_i$ décrits par

$$\partial\mathcal{D}_i = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{F}_{R_i}(s) = 0, \forall i \in \mathbb{I}(k)\} \quad (\text{A.7})$$

où les fonctions $\mathcal{F}_{R_i}(s)$ sont définies par

$$\mathcal{F}_{R_i}(s) = \begin{bmatrix} sI \\ I \end{bmatrix}' R_i \begin{bmatrix} sI \\ I \end{bmatrix} \quad \forall i \in \mathbb{I}(k). \quad (\text{A.8})$$

Maintenant, l'on définit la « k -région » $\partial\mathcal{D}$ par

$$\partial\mathcal{D} = \partial\mathcal{D}_1 \times \partial\mathcal{D}_2 \times \dots \times \partial\mathcal{D}_k. \quad (\text{A.9})$$

Dans la suite de cette annexe, l'étude est restreinte aux matrices

$$R_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \forall i \in \mathbb{I}(r) \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \forall i \in \mathbb{I}(k)/\mathbb{I}(r), \quad (\text{A.10})$$

signifiant ainsi que seuls l'axe imaginaire et le cercle unitaire sont considérés comme instances de $\partial\mathcal{D}_i$. En effet, comme il a déjà été mentionné, ils sont les seuls présentant un réel intérêt pratique dans l'étude des modèles n -D. Plus précisément, avec un tel choix, $\partial\mathcal{D}$ est la frontière de \mathcal{S}^C définie en (A.5). Il faut toutefois noter qu'un travail plus conceptuel a porté sur une classe bien plus large de k -régions dont l'intérêt en pratique reste *pour le moment* sujet à caution (voir néanmoins le rapport de recherche [20]).

Soit λ un vecteur complexe s'écrivant

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^k. \quad (\text{A.11})$$

Soient aussi les matrices

$$\Lambda = \bigoplus_{i=1}^k \lambda_i;$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \bigoplus_{i=1}^k R_{i11} & \bigoplus_{i=1}^k R'_{i10} \\ \bigoplus_{i=1}^k R_{i10} & \bigoplus_{i=1}^k R_{i00} \end{bmatrix}.$$

Elles permettent d'écrire l'équivalence

$$\lambda \in \partial\mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Lambda \\ I_k \end{bmatrix}' \mathbf{R} \begin{bmatrix} \Lambda \\ I_k \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Avant d'aller plus loin, il convient d'exposer un lemme utile aux prochains développements.

Lemme A.2 Soient la k -région $\partial\mathcal{D}$ définie comme en (A.9) avec (A.6)–(A.8), (A.10) et $\lambda \in \mathbb{C}^k$ décrit par (A.11). Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

i)

$$\lambda \in \partial\mathcal{D} \quad (\text{A.13})$$

ii)

$$\begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix}' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} = 0 \quad \forall \mathcal{P} \in \mathbb{H} \quad (\text{A.14})$$

où $\mathbb{H} = \{\mathcal{H}_{n_1} \times \cdots \times \mathcal{H}_{n_k}\}$, $H(\lambda)$ est défini en (A.2) et $\overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P})$ représente

$$\overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) = \left[\begin{array}{c|c} \bigoplus_{i=1}^k P_i R_{i11} & \bigoplus_{i=1}^k P_i R'_{i10} \\ \bigoplus_{i=1}^k P_i R_{i10} & \bigoplus_{i=1}^k P_i R_{i00} \end{array} \right], \quad (\text{A.15})$$

avec $P_{n_i} \in \mathcal{H}_{n_i}$,

Démonstration : i) \Rightarrow ii) : si $\lambda \in \partial\mathcal{D}$ alors l'égalité donnée en (A.12) est vraie, ou, de manière équivalente,

$$\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{F}_{R_i}(\lambda_i) = 0,$$

conduisant à

$$\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{F}_{R_i}(\lambda_i) P_i = 0. \quad (\text{A.16})$$

En considérant n'importe quel ensemble \mathcal{P} de k matrices $P_i \in \mathcal{H}_{n_i}$, $i \in \mathbf{I}(k)$, l'on déduit

$$\begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix}' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{A.17})$$

ii) \Rightarrow i) : l'on suppose que (A.14) est vérifiée. Soit le vecteur z ainsi composé :

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix} \quad \text{avec } z_i \in \mathbb{C}^{n_i}, \forall i \in \mathbf{I}(k). \quad (\text{A.18})$$

En pré et post-multipliant (A.14) respectivement par z' et z , il vient

$$\sum_{i=1}^k ((z'_i P_i z_i) \mathcal{F}_{R_i}(\lambda_i)) = 0. \quad (\text{A.19})$$

L'inégalité ci-avant est vraie pour *tout* ensemble \mathcal{P} ce qui signifie que $z'_i P_i z_i$ peut prendre n'importe quelle valeur. Ainsi, il est clair que $\mathcal{F}_{R_i}(\lambda_i) = 0 \forall i \in \mathbf{I}(k)$. ■

A.2.3 $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice multivariable

Pour conclure cette partie, la définition de la $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une fonction matricielle de plusieurs variables est proposée, accompagnée d'une brève discussion.

Définition A.1 Soient $\partial\mathcal{D}$ un sous-ensemble de \mathbb{C}^k et $\lambda \in \mathbb{C}^k$ répondant à (A.11). L'on considère aussi une matrice $\mathbf{A}(\lambda)$ dépendant de k variables complexes. La matrice $\mathbf{A}(\lambda)$ est dite

- $\partial\mathcal{D}$ -régulière si $\{\lambda \in \mathbb{C}^k : \det(\mathbf{A}(\lambda)) = 0\} \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset$;
- $\partial\mathcal{D}$ -singulière si $\{\lambda \in \mathbb{C}^k : \det(\mathbf{A}(\lambda)) = 0\} \cap \partial\mathcal{D} \neq \emptyset$.

Dans la partie A.4, une attention particulière sera portée aux matrices polynomiales k -D de la forme

$$\mathbf{A}(\lambda) = EH(\lambda) - A. \quad (\text{A.20})$$

Dans ce cas, et si $E = I$, l'on obtient $\det(\mathbf{A}(\lambda)) = c(\lambda, A)$, qui correspond au polynôme caractéristique du modèle de Roesser (A.1). Ainsi, d'après le lemme A.1, il peut être déduit que la stabilité asymptotique de (A.1) est une instance spéciale de la $\partial\mathcal{D}$ -régularité de $\mathbf{A}(\lambda)$ définie en (A.20). Plus précisément, pour que (A.1) soit asymptotiquement stable, il est *nécessaire* que $\mathbf{A}(\lambda)$ soit $\partial\mathcal{D}$ -régulière avec (A.6)–(A.10).

Dans un tel cas, la différence entre $\partial\mathcal{D}$ -régularité et stabilité asymptotique repose sur la répartition des racines de $c(\lambda, A)$ par rapport à $\partial\mathcal{D}$. Plus généralement, la \mathcal{D} -stabilité requiert la $\partial\mathcal{D}$ -régularité quand $\partial\mathcal{D}$ est la frontière de la région \mathcal{D} . Le lecteur est invité à se reporter au chapitre 1 où toutes ces nuances sont détaillées.

Pour le cas classique monodimensionnel ($r = k = 1$ ou $k = k - r = 1$), la matrice $\mathbf{A}(\lambda)$ peut être écrite $\mathbf{A}(\lambda) = (\lambda E - A)$ et, si $E = I$, la définition A.1 devient équivalente à la définition de la $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice constante A proposée dans [17] et au chapitre 1. Si $E \neq I$, alors la définition de [17] peut être directement étendue à la notion de $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'un faisceau de matrices (E, A) (voir annexe B).

A.3 Une extension du lemme KYP

Cette partie est consacrée à la détermination du résultat principal de cette annexe (donc de [23]) qui peut être assimilé à une sorte de version k -D du lemme KYP. Cette version ne fournit qu'une condition suffisante mais la nécessité est brièvement considérée sous l'angle de la S-procédure généralisée. Ce travail se réfère très largement à l'excellent article [197] où une version généralisée du lemme KYP dans sa version appliquée aux modèles linéaires monodimensionnels ainsi que la S-procédure généralisée sont présentées de façon très élégante.

Avant d'établir la proposition, les notations suivantes sont introduites (diverses notations sont en réalité empruntées à [197]).

Soient la matrice $F \in \mathbb{C}^{(n+m) \times (n+m)}$ et la matrice $\Theta \in \mathcal{H}_{n+m}$. Soit aussi l'ensemble \mathcal{P} constitué de k matrices $P_i \in \mathcal{H}_{n_i}$, $\forall i \in \mathbb{I}(k)$. À chaque paire d'ensembles $\{\mathcal{P}; \partial\mathcal{D}\}$ (où $\partial\mathcal{D}$ est défini par (A.9) avec (A.6)–(A.8) et (A.10)), est associée une matrice $\overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P})$, comme dans le lemme A.2, définie par (A.15). L'ensemble \mathbf{M} contient toutes les matrices complexes M associées à F et $\overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P})$ de la façon suivante :

$$\mathbf{M} = \{M \in \mathcal{H}_{n+m} : M = F' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) F\}. \quad (\text{A.21})$$

Le sous-ensemble $\tilde{\mathbf{M}}$ est défini par

$$\tilde{\mathbf{M}} = \{M \in \mathbf{M} : (M + \Theta) \in \mathcal{H}_{n+m}^-\}. \quad (\text{A.22})$$

Enfin, pour un vecteur complexe λ défini comme en (A.11), les matrices $\Gamma(\lambda)$ et $N(\lambda)$ sont respectivement définies par

$$\Gamma(\lambda) = \begin{bmatrix} I & -H(\lambda) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Im}(N(\lambda)) = \text{Ker}(\Gamma(\lambda)F).$$

Maintenant, le résultat principal de cette annexe est énoncé. Il peut être vu comme une extension du lemme KYP dans sa version « inégalité stricte » [298].

Théorème A.1 *Soient les notations et hypothèses détaillées ci-avant ainsi que les deux propositions suivantes :*

i)

$$N'(\lambda)\Theta N(\lambda) \in \mathcal{H}_m^- \quad \forall \lambda \in \partial\mathcal{D}; \quad (\text{A.23})$$

ii)

$$\tilde{M} \neq \emptyset. \quad (\text{A.24})$$

Alors ii) est une condition suffisante de i).

Avant de donner une démonstration du théorème précédent, quelques commentaires sur les deux conditions qui y apparaissent sont proposés. La première condition correspond à une propriété que l'on cherche à vérifier, telle que la stabilité robuste, un niveau de performance \mathcal{H}_∞ , etc. (voir le paragraphe A.4.1.1 pour comprendre comment un choix approprié de Θ peut lier $N(\lambda)$ et Θ à une propriété que la matrice de transfert doit satisfaire). La seconde proposition correspond à une condition numériquement exploitable qui signifie simplement qu'il existe un ensemble \mathcal{P} (généralement interprété comme un ensemble de matrices de Lyapunov), tel que

$$M + \Theta < 0. \quad (\text{A.25})$$

L'idée est donc de manipuler (A.25) plutôt que de directement s'attaquer à la propriété originale i) qui ne peut être aisément exploitée sur le plan numérique.

Démonstration : en premier lieu, l'on observe que (A.24), comme mentionné plus avant, signifie qu'il existe un ensemble \mathcal{P} tel que (A.25) est vraie. En s'appuyant sur la définition de $N(\lambda)$, il peut être déduit que

$$\Gamma(\lambda)FN(\lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in \partial\mathcal{D}. \quad (\text{A.26})$$

L'inégalité (A.25) implique que

$$N'(\lambda)(M + \Theta)N(\lambda) < 0, \quad \forall \lambda \in \partial\mathcal{D} \quad (\text{A.27})$$

et donc,

$$N'(\lambda)F'\overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P})FN(\lambda) + N'(\lambda)\Theta N(\lambda) < 0, \quad \forall \lambda \in \partial\mathcal{D}. \quad (\text{A.28})$$

De plus, l'on peut voir à partir de (A.26) que $\text{Im}(FN(\lambda))$ est complètement caractérisée par

$$\text{Im}(FN(\lambda)) = \text{Im} \left(\begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} X \right), \quad (\text{A.29})$$

où X est une matrice quelconque de rang plein. Ainsi, l'inégalité (A.28) peut être, de façon équivalente, écrite comme suit :

$$X' \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix}' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} X + X'N'(\lambda)\Theta N(\lambda)X < 0, \quad \forall \lambda \in \partial\mathcal{D}. \quad (\text{A.30})$$

Enfin, en prenant le lemme A.2 en compte, il est clair que le premier terme du membre de gauche de l'inégalité (A.30) est nul quand $\lambda \in \partial\mathcal{D}$. Ainsi, le second terme est défini négatif ce qui est équivalent à i). ■

Il convient de noter que la version 1-D du lemme KYP est connue pour fournir une condition

nécessaire et suffisante alors que le théorème A.1 ne propose qu'une condition suffisante (à savoir **ii**), condition suffisante de la propriété **i**). Plus que de démontrer le théorème A.1, il importe de mettre en évidence les raisons pour lesquelles **ii** n'est pas nécessaire. La version 1-D du lemme KYP [298] peut être démontrée grâce à la S-procédure [366] dans sa forme généralisée (voir [197] et les références que l'on peut y trouver). Dans la suite de cette partie, Le théorème A.1 est passé à la loupe de la S-procédure, qui est maintenant rappelée dans sa version « stricte » généralisée.

Lemme A.3 (S-procédure de [197]) *Soient Θ une matrice hermitienne et \mathbf{M} un sous-ensemble arbitraire de \mathcal{H}_q . De plus, soient $\tilde{\mathbf{M}} \subset \mathbf{M}$ défini par*

$$\tilde{\mathbf{M}} = \{M \in \mathbf{M} : (M + \Theta) \in \mathcal{H}_q^-\} \quad (\text{A.31})$$

et \mathbf{S} défini par

$$\mathbf{S} = \{S \in \mathcal{H}_q : S \neq 0, \text{rank}(S) = 1, S \geq 0, \text{tr}(MS) \geq 0 \forall M \in \mathbf{M}\}. \quad (\text{A.32})$$

Soient enfin les deux propositions suivantes :

a)

$$\text{tr}(\Theta S) < 0, \quad \forall S \in \mathbf{S}; \quad (\text{A.33})$$

b)

$$\tilde{\mathbf{M}} \neq \emptyset. \quad (\text{A.34})$$

Alors **b**) est une condition suffisante de **a**) et si l'ensemble \mathbf{M} est séparable de rang 1 (voir la définition de [197]) alors **b**) est aussi nécessaire et la S-procédure est dite sans-perte.

Une approche possible pour comprendre pourquoi le théorème A.1 fournit seulement une condition suffisante contrairement au lemme KYP classique consiste à tenter de savoir pourquoi la S-procédure, soit ne s'applique plus, soit n'est plus sans perte lorsqu'elle est appliquée au théorème A.1. Conformément aux notations utilisées, il s'agit de comparer les ensembles \mathbf{M} et $\tilde{\mathbf{M}}$ définis, d'une part, dans le théorème A.1 et, d'autre part, dans le lemme A.3 avec $q = n + m$, puis de répondre aux deux questions suivantes.

1. Est-il possible d'extraire un ensemble $\mathbf{S} = \mathbf{S}_a$ des hypothèses du théorème A.1 qui puisse coïncider avec l'ensemble $\mathbf{S} = \mathbf{S}_b$ du lemme A.3 (ceci permettrait d'appliquer la S-procédure au moins dans le sens **b**) \Rightarrow **a**) ?
2. Dans un tel cas, la S-procédure est-elle sans-perte (ceci permettrait d'appliquer la S-procédure également dans le sens **a**) \Rightarrow **b**) ?

Tout d'abord, l'on voit que la proposition **i**) du théorème A.1 est équivalente à

$$y'N'(\lambda)\Theta N(\lambda)y < 0, \quad \forall y \neq 0, \forall \lambda \in \partial\mathcal{D}. \quad (\text{A.35})$$

Puis, le changement de variable $\xi = N(\lambda)y$ appliqué à (A.35) permet d'obtenir

$$\text{tr}(\Theta S) < 0, \quad \forall S \in \mathbf{S}_a = \{S = \xi\xi' : \xi \neq 0, \Gamma(\lambda)F\xi = 0, \lambda \in \partial\mathcal{D}\}. \quad (\text{A.36})$$

Grâce au nouveau changement $\eta = F\xi$, il est facile de voir que η vérifie

$$\eta = \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} z, \quad z \neq 0, \quad (\text{A.37})$$

d'où l'ensemble \mathbf{S}_a peut être ainsi décrit :

$$\mathbf{S}_a = \left\{ \xi\xi' : \xi \neq 0, \eta = F\xi = \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} z, \lambda \in \partial\mathcal{D} \right\}. \quad (\text{A.38})$$

Ensuite, en vertu du lemme A.2, l'on déduit que

$$\mathbf{S}_a = \left\{ \xi\xi' : \xi \neq 0, \eta = F\xi = \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} z, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix}' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} = 0 \quad \forall \mathcal{P} \in \mathbb{H} \right\}. \quad (\text{A.39})$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{S}_a = \left\{ \xi\xi' : \xi \neq 0, \eta = F\xi = \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} z, \right. \\ \left. q' \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix}' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} q = 0 \quad \forall \{\mathcal{P}; q\} \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}^n \right\}. \quad (\text{A.40})$$

Donc, il est possible d'exprimer **i)** comme **a)** en choisissant $\Theta = \Theta$ et en identifiant \mathbf{S} et \mathbf{S}_a comme détaillé ci-avant.

Maintenant, l'on note que la condition **ii)** du théorème A.1 peut être exprimée comme la proposition **b)** du lemme A.3 avec $\Theta = \Theta$ et avec \mathbf{M} défini comme en (A.21). L'application du lemme A.3 conduit à

$$\text{tr}(\Theta S) < 0, \quad \forall S \in \mathbf{S}_b = \{S = \xi\xi' : \xi \neq 0, \text{tr}(M\xi\xi') \geq 0 \quad \forall M \in \mathbf{M}\},$$

où \mathbf{S}_b peut aussi s'écrire

$$\mathbf{S}_b = \{S = \xi\xi' : \xi \neq 0, \xi' F' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) F \xi \geq 0 \quad \forall \mathcal{P} \in \mathbb{H}\}. \quad (\text{A.41})$$

Puisque \mathcal{P} est un ensemble quelconque pris dans \mathbb{H} , l'inégalité figurant dans la description de \mathbf{S}_b donnée ci-avant est vérifiée pour tout choix $\mathcal{P}_+ = \{P_i\} \in \mathbb{H}$ de même que pour tout choix $\mathcal{P}_- = \{-P_i\} \in \mathbb{H}$. De plus, il faut noter que $\overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P})$ est linéaire par rapport aux matrices P_i . Par conséquent, la description de \mathbf{S}_b peut être ainsi modifiée :

$$\mathbf{S}_b = \{S = \xi\xi' : \xi \neq 0, \xi' F' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) F \xi = 0 \quad \forall \mathcal{P} \in \mathbb{H}\}. \quad (\text{A.42})$$

La question 1 mentionnée plus avant consiste à comparer \mathbf{S}_a dans (A.40) à \mathbf{S}_b dans (A.42). \mathbf{S}_a peut s'écrire

$$\Leftrightarrow \mathbf{S}_a = \left\{ \xi\xi' : \xi \neq 0 : \eta = F\xi = \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} z, \right. \\ \left. q' \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix}' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} q = 0 \quad \forall \{\mathcal{P}; q\} \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}^n \right\},$$

ce qui, avec $q = Xz$, se récrit (X étant de rang plein)

$$\Leftrightarrow \mathbf{S}_a = \left\{ \xi \xi' : \xi \neq 0 : \eta = F\xi = \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} z, \right. \\ \left. z' X' \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix}' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} Xz = 0 \forall \{\mathcal{P}; X : \det(X) \neq 0\} \in \mathbb{H} \times \mathcal{H}_n \right\}.$$

Si l'on suppose que $k = 1$, ce qui correspond au cas 1-D, alors, sans perte de généralité, la matrice P_1 peut-être remplacée par $X^{-1}P_1X^{-1}$ et une nouvelle description de \mathbf{S}_a est

$$\Leftrightarrow \mathbf{S}_a = \left\{ \xi \xi' : \xi \neq 0 : \eta = F\xi = \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} z, \right. \\ \left. z' \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix}' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} z = 0 \forall \mathcal{P} \in \mathbb{H} \right\},$$

ce qui se simplifie en

$$\Leftrightarrow \mathbf{S}_a = \left\{ \xi \xi' : \xi \neq 0 : \eta = F\xi = \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I \end{bmatrix} z, \eta' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) \eta = 0 \forall \mathcal{P} \in \mathbb{H} \right\},$$

ou, de façon équivalente, en \mathbf{S}_b . Mais cette égalité $\mathbf{S}_a = \mathbf{S}_b$ n'est vraie que lorsque $k = 1$. Cela signifie que la S-procédure s'applique de **ii**) à **i**) pour démontrer le théorème A.1 uniquement lorsque l'on se ramène au cas 1-D. Dans ce cas seulement, l'on peut se poser la question de la nécessité de la S-procédure, c.-à-d. la qualifier ou non de sans perte. Elle l'est si l'ensemble \mathbf{M} défini en (A.21) est séparable de rang 1. En fait, cet ensemble est celui étudié dans [197] donc la réponse est « oui », il est séparable de rang 1.

Pour résumer la discussion précédente, voici trois affirmations :

- Le théorème A.1 fournit une condition suffisante qui n'est généralement pas nécessaire.
- $\mathbf{S}_a \subset \mathbf{S}_b$, donc la condition **b**) est clairement plus contraignante que **a**) ; ainsi, **b**) \Rightarrow **a**). Mais ce n'est pas une application directe de la S-procédure. Toutefois, **ii**) \Leftrightarrow **b**) avec $\mathbf{S} = \mathbf{S}_b \Rightarrow$ **b**) avec $\mathbf{S} = \mathbf{S}_a \xrightarrow{\text{S-procédure}} \mathbf{a}$) avec $\mathbf{S} = \mathbf{S}_a \Leftrightarrow$ **i**). D'où il vient **ii**) \Rightarrow **i**).
- Enfin, si $k = 1$ (1-D case), alors $\mathbf{S} = \mathbf{S}_a = \mathbf{S}_b$ ce qui permet d'appliquer la S-procédure directement. De plus, il a été démontré que la S-procédure est sans perte dans ce cas donc **ii**) \Leftrightarrow **i**). L'on retrouve le lemme KYP [298].

A.4 Application à l'analyse des modèles de Roesser

Dans cette partie, l'accent est mis sur la pertinence du théorème A.1 pour l'étude du modèle d'état multidimensionnel hybride (A.1). L'idée consiste simplement en un choix judicieux de F et θ . La matrice F est ainsi choisie :

$$F = \begin{bmatrix} A & B \\ E & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (\text{A.43})$$

Les matrices A , B et E sont celles apparaissant dans le modèle hybride (A.1). La seule restriction dans cette partie est que E est bloc-diagonale, c.-à-d. $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$ avec $E_i \in \mathbb{R}^{n_i}$. Il faut noter que la matrice F est ici réelle ce qui correspond nécessairement à un cas particulier de A.1. La condition **i**) du théorème A.1 doit être considérée comme l'expression d'une performance ou d'une propriété que (A.1) doit atteindre ou satisfaire. Dans ce qui suit, trois propriétés sont envisagées selon le choix de Θ .

A.4.1 $\partial\mathcal{D}$ -régularité vis-à-vis d'une incertitude LFT

Ce paragraphe est consacré à la $\partial\mathcal{D}$ -régularité de la matrice polynomiale incertaine à k variables décrite par

$$\mathbb{A}(\lambda) = \mathbf{A}(\lambda) - \bar{A} = EH(\lambda) - A_c, \quad (\text{A.44})$$

où $\mathbf{A}(\lambda)$ est donnée par (A.20), où A , B , C , et E ont bien sûr les mêmes dimensions que dans (A.1), où $A_c = A + \bar{A}$ et où \bar{A} , donnée par

$$\bar{A} = B\bar{\Delta}C, \quad (\text{A.45})$$

est une matrice soumise à une incertitude LFT (voir chapitre 2) :

$$\bar{\Delta} = \Delta(I_p - D\Delta)^{-1}, \quad \det(I_p - D\Delta) \neq 0. \quad (\text{A.46})$$

L'hypothèse de non-singularité correspond au *bien-posé* de l'incertitude. La matrice Δ est la véritable incertitude. Elle appartient à $\Delta(\rho)$, la boule des matrices complexes Δ telles que $\|\Delta\|_2 \leq \rho$.

A.4.1.1 Rayon complexe de $\partial\mathcal{D}$ -régularité

Par hypothèse, la matrice nominale $\mathbf{A}(\lambda)$ est supposée $\partial\mathcal{D}$ -régulière où $\partial\mathcal{D}$ est définie comme en (A.9) avec (A.6)–(A.8) et (A.10). Le but est ici de calculer le rayon de $\partial\mathcal{D}$ -régularité $r_{\partial\mathcal{D}}^{[\mathbb{C}]}$ (voir chapitre 2), qui est la plus grande valeur du rayon ρ tel que la matrice polynomiale incertaine $\mathbb{A}(\lambda)$ définie par (A.44) reste $\partial\mathcal{D}$ -régulière sur tout le domaine $\Delta(\rho)$. Pour atteindre un tel but, Θ est ainsi choisie :

$$\Theta = \begin{bmatrix} C'C & C'D \\ D'C & D'D - \gamma I \end{bmatrix}, \quad \gamma = \rho^{-1/2}. \quad (\text{A.47})$$

Corollaire A.1 Soient une matrice k -D polynomiale incertaine $\mathbb{A}(\lambda)$ définie comme en (A.44) et un ensemble $\partial\mathcal{D}$ défini par (A.9) avec (A.6)–(A.8) et (A.10). $\mathbb{A}(\lambda)$ est $\partial\mathcal{D}$ -régulière de manière robuste vis-à-vis de $\Delta(\rho)$ s'il existe un ensemble $\mathcal{P} \in \mathbb{H}$ tel que (A.25) est vraie pour M définie comme en (A.21), $\bar{\mathbf{R}}(\mathcal{P})$ définie par (A.15), F donnée par (A.43) et Θ donnée par (A.47).

Démonstration : elle consiste à appliquer le théorème A.1. Avec le choix (A.47), la propriété i) du théorème A.1 se réexprime

$$\|G(\lambda)\|_2 < \sqrt{\gamma} \quad \forall \lambda \in \partial\mathcal{D}, \quad (\text{A.48})$$

(avec $G(\lambda)$ donnée par (A.2)), en notant que le choix de F proposé en (A.43) conduit à

$$\text{Im}(N(\lambda)) = \text{Im} \left(\begin{bmatrix} (EH(\lambda) - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \right), \quad (\text{A.49})$$

puisque E est bloc-diagonale. Ainsi, l'inégalité (A.48) peut être écrite

$$\left\{ \sup_{\lambda \in \partial\mathcal{D}} \bar{\sigma}(G(\lambda)) \right\}^{-1} > \rho. \quad (\text{A.50})$$

De simples arguments sur les valeurs singulières montrent que

$$\bar{\sigma}(G(\lambda)) = \mu_{\mathbb{C}}(G(\lambda)) \quad (\text{A.51})$$

où $\mu_{\mathbb{C}}(\cdot)$ désigne la désormais célèbre valeur singulière structurée introduite dans [117]. Il vient alors

$$\left\{ \sup_{\lambda \in \partial\mathcal{D}} \mu_{\mathbb{C}}(G(\lambda)) \right\}^{-1} > \rho. \quad (\text{A.52})$$

En prenant l'égalité

$$\mu_{\mathbb{C}}(G(\lambda)) = \left[\inf_{\Delta} \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - G(\lambda)\Delta) = 0 \} \right]^{-1} \quad (\text{A.53})$$

en compte, l'on obtient

$$\inf_{\lambda \in \partial\mathcal{D}} \left\{ \inf_{\Delta} \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - G(\lambda)\Delta) = 0 \} \right\} > \rho. \quad (\text{A.54})$$

En outre,

$$\begin{aligned} \det(I - G(\lambda)\Delta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det(I - C(EH(\lambda) - A)^{-1}B\Delta - D\Delta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det(I - C(EH(\lambda) - A)^{-1}B\Delta(I_p - D\Delta)^{-1}) \det(I_p - D\Delta) &= 0. \end{aligned}$$

De par l'hypothèse de bien-posé $\det(I_p - D\Delta) \neq 0$, l'égalité ci-avant est équivalente à

$$\begin{aligned} \det(I - C(EH(\lambda) - A)^{-1}B\bar{\Delta}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det(I - (EH(\lambda) - A)^{-1}B\bar{\Delta}C) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det((EH(\lambda) - A)^{-1}) \det(EH(\lambda) - A - B\bar{\Delta}C) &= 0. \end{aligned}$$

Puisque, pour $\Delta = 0$, $\mathbb{A}(\lambda) = \mathbf{A}(\lambda)$ est implicitement supposée $\partial\mathcal{D}$ -régulière (sinon pourquoi vouloir tester la $\partial\mathcal{D}$ -régularité ?), le facteur de gauche du membre de gauche est non nul donc il s'ensuit

$$\det(I - G(\lambda)\Delta) = 0 \Leftrightarrow \det(EH(\lambda) - A - \bar{A}) = 0. \quad (\text{A.55})$$

De (A.54) et (A.55), il peut être déduit que

$$\inf_{\lambda \in \partial \mathcal{D}} \left\{ \inf_{\Delta} \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \det(\mathbb{A}(\lambda)) = 0 \} \right\} > \rho, \quad (\text{A.56})$$

ce qui démontre que $\mathbb{A}(\lambda)$ reste $\partial \mathcal{D}$ -régulière vis-à-vis de $\Delta(\rho)$. ■

Il est clair que ρ^* , la valeur maximale de $\rho = \gamma^{-1/2}$ obtenue en calculant numériquement l'ensemble \mathcal{P} vérifiant (A.24), est une borne minorante de $r_{\partial \mathcal{D}}^{[\mathbb{C}]}$. Si $k = 1$, alors $\rho^* = r_{\partial \mathcal{D}}^{[\mathbb{C}]}$. Il faut toutefois remarquer que la matrice Δ est ici supposée complexe. En pratique, il serait intéressant de prendre sa réalité en compte (comme dans [181, 295]).

Dans la suite de l'article, il sera supposé que

$$E = I \Rightarrow F = \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.57})$$

de manière à appliquer ce corollaire assez général à une étude plus pratique du modèle (A.1).

A.4.1.2 Application à la stabilité asymptotique des modèles de Roesser

Dans ce paragraphe, le modèle (A.1) est supposé entaché d'une incertitude décrite par

$$u(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k) = \Delta y(t_1, \dots, t_r, j_{r+1}, \dots, j_k), \quad \Delta \in \Delta(\rho) \cap \mathbb{R}^{m \times p}, \quad (\text{A.58})$$

Cette équation correspond donc à une LFT (voir chapitre 2).

L'application de (A.58) à (A.1) conduit à la matrice d'état en boucle fermée suivante,

$$A_c = A + \bar{A}, \quad (\text{A.59})$$

où \bar{A} est donnée par (A.45)–(A.46).

Avant d'étudier diverses performances dans les prochains paragraphes, il convient d'étudier la propriété essentielle, à savoir la stabilité asymptotique. En appliquant le corollaire A.1 avec $E = I$, l'on peut tester, sans conservatisme, si la matrice $\mathbb{A}(\lambda) = H(\lambda) - A_c$ est $\partial \mathcal{D}$ -régulière de manière robuste vis-à-vis de $\Delta(\rho)$. Comme mentionné à la fin du paragraphe A.2.3, la stabilité asymptotique du modèle de Roesser (A.1) dépend de la répartition des racines du polynôme $c(\lambda, A)$. Donc, la stabilité robuste du modèle hybride incertain de Roesser décrit par (A.1) et (A.58) vis-à-vis de $\Delta(\rho)$ dépend de la répartition des racines de $c(\lambda, A_c) = \det(\mathbb{A}(\lambda))$. Plus précisément, pour que $c(\lambda, A_c)$ vérifie les conditions de stabilité induites par le lemme A.1, il est nécessaire que $\mathbb{A}(\lambda)$ soit au moins $\partial \mathcal{D}$ -régulière avec le choix (A.10). En suivant cette idée, l'on est amené à déduire le théorème suivant.

Théorème A.2 *L'on suppose que le système hybride multidimensionnel décrit par (A.1) est soumis à l'incertitude (A.58). Le système incertain résultant est asymptotiquement stable de manière robuste vis-à-vis de $\Delta(\rho)$ s'il existe un ensemble \mathcal{P} de k matrices $P_i \in \mathcal{H}_{n_i}^+$, $i = 1, \dots, k$, tel que*

$$F' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) F + \Theta < 0 \quad (\text{A.60})$$

où F est donnée par (A.57), $\overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P})$ est donnée par (A.15) avec (A.10), et Θ est donnée par (A.47).

Démonstration : D'après le corollaire A.1, la LMI (A.60) implique que $\mathbb{A}(\lambda)$ est $\partial\mathcal{D}$ -régulière de manière robuste vis-à-vis de $\Delta(\rho)$ avec $\partial\mathcal{D}$ caractérisée par (A.10). Mais il ne s'agit pas juste d'un autre corollaire. Puisque les matrices P_i sont supposées définies positives, le premier bloc dans (A.60), qui est donc

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} + C' C < 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}' \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} < 0,$$

démontre la stabilité asymptotique du modèle nominal (A.1). Pour s'en convaincre, l'on peut reprendre les arguments de [19] et noter que les colonnes de

$$\begin{bmatrix} A \\ I_n \end{bmatrix},$$

engendrent le noyau de

$$\begin{bmatrix} I_n & -A \end{bmatrix}, \quad (\text{A.61})$$

et, en appliquant le lemme d'élimination des matrices [65, 329] (voir aussi l'annexe C), il peut être déduit qu'il existe une matrice $G = G'$ telle que

$$\mathbf{N} = \overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P}) + \begin{bmatrix} I_n \\ -A' \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} I_n & -A \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{A.62})$$

De plus, soit un vecteur λ (comme introduit en (A.11)) vérifiant $c(\lambda, A) = 0$. Ce vecteur λ ne peut appartenir à \mathcal{S}^C définie comme en (A.5). En effet, si $c(\lambda, A) = 0$, alors il existe un vecteur non nul $v \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\mathbf{A}(\lambda)v = 0. \quad (\text{A.63})$$

Soit le vecteur q défini par

$$q = \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_n \end{bmatrix} v.$$

Puisque v peut s'écrire

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}, \quad \text{avec } v_i \in \mathbb{C}^{n_i} \forall i \in \mathbb{I}(k),$$

le vecteur q devient

$$q = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \vdots \\ \lambda_k v_k \\ v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}.$$

Grâce à (A.62), il vient

$$q' \mathbf{N} q < 0$$

qui peut se récrire

$$\sum_{i=1}^k (v_i' P_i v_i \mathcal{F}_{R_i}(\lambda_i)) + v' \mathbf{A}'(\lambda) G \mathbf{A}(\lambda) v < 0. \quad (\text{A.64})$$

De (A.63), l'on peut déduire que le second terme du membre de gauche de cette inégalité est nul. En outre., l'ensemble \mathcal{S}^C peut être défini (avec le choix (A.10)), par $\mathcal{F}_{R_i} \geq 0$. Ainsi, si λ appartient à \mathcal{S}^C , alors le premier terme dans (A.64) est positif ou nul, ce qui contredit (A.64). D'où λ ne peut appartenir à \mathcal{S}^C . De ce fait, $c(\lambda, A) = \det(\mathbf{A}(\lambda))$ vérifie la condition du lemme A.1, impliquant la stabilité nominale. Il est clair que $c(\lambda, A_c) = \det(\mathbb{A}(\lambda))$ vérifie aussi cette condition du lemme A.1 pour tout Δ sinon, par continuité de λ par rapport à Δ , $\mathbb{A}(\lambda)$ deviendrait $\partial\mathcal{D}$ -singulière. Par conséquent, (A.1) avec (A.58) est asymptotiquement stable de manière robuste vis-à-vis de $\Delta(\rho)$. ■

L'on peut de nouveau remarquer que la valeur maximale de ρ obtenue sous la contrainte LMI (A.60), désignée par ρ^* , est une borne minorante du rayon complexe de stabilité $r_{\mathcal{D}}^{[\mathbb{C}]}$.

La grande différence entre $\partial\mathcal{D}$ -régularité et stabilité asymptotique réside dans la répartition des racines de $c(\lambda, A_c)$ par rapport à $\partial\mathcal{D}$. De manière simple, le théorème A.2 permet d'attester de la $\partial\mathcal{D}$ -régularité robuste. Cependant, si la matrice polynomiale *nominale* à k variables est « stable », c.-à-d. si $c(\lambda, A)$ satisfait aux conditions du lemme A.1 ou, de manière équivalente, si le modèle (A.1) est asymptotiquement stable, alors cette propriété est évidemment préservée lorsque Δ décrit $\Delta(\rho)$ dès lors que $\mathbb{A}(\lambda)$ reste $\partial\mathcal{D}$ -régulière. Néanmoins, si, pour une instance de Δ , la matrice $\mathbb{A}(\lambda)$ devient $\partial\mathcal{D}$ -singulière, cela n'implique pas nécessairement l'instabilité. Ceci explique en partie le conservatisme du théorème A.2. Une autre source de conservatisme est liée au fait que le corollaire A.1 ne propose lui aussi qu'une condition suffisante. Une dernière source de conservatisme est inhérente à la réalité de Δ qui n'est pas prise en compte. Dans le cas 1-D, seule cette dernière source subsiste. En effet, dans ce cas, non seulement le théorème A.1 et donc le corollaire A.1 fournissent une condition nécessaire et suffisante, mais, de plus, la $\partial\mathcal{D}$ -singularité entraîne systématiquement l'instabilité.

A.4.2 Positivité réelle du modèle hybride de Roesser

Depuis le travail Popov sur l'hyperstabilité, la positivité réelle [4] des matrices de transfert a été très largement étudiée, particulièrement dans le contexte des systèmes 1-D, sachant que, pour de tels modèles, la positivité réelle signifie la passivité et permet ainsi à l'automaticien de prendre en compte, par exemple, des non-linéarités de type « secteur ». Pour les modèles linéaires multidimensionnels, il existe assez peu de contributions à notre connaissance. Toutefois, les modèles de Roesser 2D discrets sont considérés de ce point de vue dans [362]. D'où l'extension présentée maintenant.

Nous proposons d'abord la définition suivante, qui n'est qu'une adaptation assez naturelle à nos besoins d'une définition classique.

Définition A.2 Soit l'ensemble $\partial\mathcal{D}$ défini par (A.9) avec (A.6)–(A.8) et (A.10). Le modèle (A.1) est dit strictement positif réel sur $\partial\mathcal{D}$ si

$$G(\lambda) + G'(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda \in \partial\mathcal{D}. \quad (\text{A.65})$$

En suivant cette idée, nous proposons le corollaire suivant.

Corollaire A.2 Soient un modèle hybride de Roesser et un ensemble $\partial\mathcal{D}$ respectivement décrits par (A.1) et (A.9) avec (A.6)–(A.8) et (A.10), M définie (A.21), $\overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P})$ définie par (A.15), F donnée par (A.57) et

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & -C' \\ -C & -D - D' \end{bmatrix}. \quad (\text{A.66})$$

Le modèle (A.1) est strictement positif réel sur $\partial\mathcal{D}$ s'il existe un ensemble $\mathcal{P} \in \mathbb{H}$ tel que (A.25) est satisfaite.

Démonstration : il s'agit d'une application immédiate du théorème A.1 (avec (A.66)), l'expression (A.23) correspondant à (A.65). ■

Il est clair que la notion de positivité réelle stricte sur $\partial\mathcal{D}$ n'est peut-être pas appropriée pour estimer les performances d'un modèle n -D et l'on peut revenir à un cas particulier mais classique, à savoir la notion de positivité réelle stricte définie ci-après.

Définition A.3 Le modèle (A.1) est strictement positif réel si $G(\lambda)$ est analytique sur \mathcal{S}^C défini par (A.5) et si l'inégalité

$$G(\lambda) + G'(\lambda) > 0 \quad (\text{A.67})$$

est satisfaite sur \mathcal{S}^C .

Théorème A.3 Soit un système hybride multidimensionnel décrit par le modèle (A.1). Soient les matrices F donnée par (A.57), $\overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P})$ donnée par (A.15) avec (A.10) et Θ donnée par (A.66). Le système hybride n -D est strictement positif réel s'il existe un ensemble \mathcal{P} de k matrices $P_i \in \mathcal{H}_{n_i}^+$, $i = 1, \dots, k$, solution de la LMI (A.60).

Démonstration : elle se déduit directement du corollaire A.2. Cependant, les matrices P_i sont supposées définies positives dans le but de garantir la stabilité asymptotique, comme dans la démonstration du théorème A.2. ■

Il est primordial de remarquer que le théorème A.3 peut être vu comme une extension de la version LMI du désormais très classique *lemme positif réel* (voir [65] par exemple).

A.4.3 Réalité bornée du modèle hybride de Roesser

L'idée est assez semblable à celle du paragraphe précédent mais la performance considérée est un niveau de rejet de perturbation au sens \mathcal{H}_∞ . Comme une extension de la définition de la norme \mathcal{H}_∞ proposée dans [120] pour les modèles de Roesser discret 2D, la définition suivante introduit la norme \mathcal{L}_∞ du modèle (A.1) par rapport à un ensemble $\partial\mathcal{D}$.

Définition A.4 Soient le modèle hybride et l'ensemble $\partial\mathcal{D}$ respectivement décrits par (A.1) et (A.9) avec (A.6-A.8) et (A.10). La norme \mathcal{L}_∞ de (A.1) par rapport à $\partial\mathcal{D}$ se définit par

$$\|G\|_\infty = \sup_{\lambda \in \partial\mathcal{D}} \|G(\lambda)\|_2. \quad (\text{A.68})$$

De cette définition et du théorème A.1, le corollaire suivant est déduit.

Corollaire A.3 Soient le modèle hybride et l'ensemble $\partial\mathcal{D}$ respectivement décrits par (A.1) et (A.9) avec (A.6-A.8) et (A.10). La norme \mathcal{L}_∞ de (A.1) par rapport à $\partial\mathcal{D}$ est strictement inférieure à $\sqrt{\gamma}$ s'il existe un ensemble $\mathcal{P} \in \mathbb{H}$ tel que (A.25) est vérifiée avec M définie par (A.21), $\overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P})$ définie par (A.15), F donnée par (A.57) et Θ donnée (A.47).

Démonstration : elle est immédiate d'après la discussion du paragraphe A.4.1.1, en particulier l'inégalité (A.48). ■

En supposant que (A.1) est asymptotiquement stable c.-à-d. que $G(\lambda)$ est analytique sur \mathcal{S}^C , alors la norme \mathcal{L}_∞ devient la norme \mathcal{H}_∞ .

Définition A.5 Soit un modèle hybride de Roesser (A.1) vérifiant les conditions du lemme A.1. Sa norme \mathcal{H}_∞ est définie par (A.68) avec (A.9) et (A.6-A.8) ainsi que (A.10).

Cette norme \mathcal{H}_∞ est en fait égale au gain \mathcal{L}_2 même si cette correspondance n'est pas détaillée ici pour des raisons de concision.

Sur la base de cette définition, le théorème suivant est formulé.

Théorème A.4 Soit le modèle hybride de Roesser (A.1). Il est asymptotiquement stable et sa norme \mathcal{H}_∞ est strictement inférieure à $\sqrt{\gamma}$ s'il existe un ensemble \mathcal{P} de k matrices $P_i \in \mathcal{H}_{n_i}^+$, $i = 1, \dots, k$, solution de (A.60), où F est donnée par (A.57), $\overline{\mathbf{R}}(\mathcal{P})$ est donnée (A.15) avec (A.10) et Θ est donnée par (A.47).

Démonstration : elle se déduit directement du corollaire A.3 combiné à (A.10) sous la contrainte que les matrices P_i soient définies positives pour assurer la stabilité asymptotique. ■

Le théorème A.4 peut être vu comme une extension de la version LMI du très classique *lemme borné réel* [140] aux modèles hybrides de Roesser. Il est juste de mentionner que la commande \mathcal{H}_∞ est abordée dans [363] à travers une approche assez équivalente mais dont le recul est néanmoins nettement moindre.

Remarque A.2 Les corollaires A.1 et A.3 font en réalité apparaître les mêmes conditions. Il en est de même pour les théorèmes A.2 et A.4. Dans le corollaire A.1 (respectivement le théorème A.2), la $\partial\mathcal{D}$ -régularité robuste (respectivement la stabilité robuste) est considérée alors que dans le corollaire A.3 (respectivement le théorème A.4), la norme \mathcal{L}_∞ sur $\partial\mathcal{D}$ (respectivement la norme \mathcal{H}_∞) est étudiée. Cette relation plus qu'étroite entre la norme \mathcal{L}_∞ ou \mathcal{H}_∞ d'un système d'une part et la stabilité asymptotique vis-à-vis d'une incertitude LFT d'autre part est déjà bien connue dans le contexte 1-D. [216, 279].

A.5 Exemple numérique

Dans cette partie, les résultats exposés dans cette annexe sont illustrés par un exemple numérique.

L'on se focalise ici sur le calcul d'une borne majorante (la plus petite possible) de la norme \mathcal{H}_∞ d'un modèle décrivant un procédé de laminage. Pour ce faire, un premier modèle dit *modèle différentiel de procédé répétitif* est établi. Il est obtenu, par exemple, en suivant les indications

de l'ouvrage de référence [306], et implique les matrices suivantes :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -0,0050 & -5,8077 \\ 1 & -0,0050 \end{bmatrix}, \mathcal{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0494 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C} = [1 \ 0], \mathcal{D}_0 = 0,7692, \mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \mathcal{D}_1 = 0,6$$

(nous ne souhaitons pas détailler l'obtention de ces matrices et le lecteur intéressé par une telle modélisation exacte du procédé peut consulter [306]). Un tel procédé répétitif n'est pas stable. Il est toutefois possible d'appliquer une loi de commande statique (dont la détermination n'est pas détaillée ici, ce n'est pas le propos) qui conduit au procédé répétitif différentiel linéaire en boucle fermée dont la représentation d'état est instanciée par les matrices

$$\mathcal{A}^{cl} = \begin{bmatrix} -0,3650 & -10,3077 \\ 0,9200 & -1,0050 \end{bmatrix}, \mathcal{B}^{cl} = \begin{bmatrix} -0,2700 \\ -0,0106 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}^{cl} = [0,7600 \ -3,0000], \mathcal{D}^{cl} = 0,5892.$$

Ce qu'il importe de comprendre ici est que l'utilisation de transformations détaillées dans [306] permet de passer du modèle évoqué ci-avant au modèle hybride 2-D de Roesser obéissant à la formulation (A.1) avec $r = 2$ (ceci signifie que le modèle admet une dynamique continue le long de deux dimensions sur trois). Les matrices obtenues sont

$$A = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{cl} & \mathcal{B}^{cl} \\ \mathcal{C}^{cl} & \mathcal{D}^{cl} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{D}_1 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 0 \ 1], D = 0.$$

En vertu du théorème A.4, une borne majorante de la norme \mathcal{H}_∞ du système décrit par le modèle ainsi obtenu peut être déduite. Grâce à la boîte à outils LMI CONTROL TOOLBOX [141] de MATLAB, l'on peut vérifier que le modèle est asymptotiquement stable et admet un niveau de performance \mathcal{H}_∞ au moins inférieur à $\rho^* = \sqrt{\gamma^*} = 2,0790$. De plus, les matrices constituant la solution de la LMI (A.60) sont

$$P_1 = \begin{bmatrix} 6,6991 & -4,1148 \\ -4,1148 & 67,1344 \end{bmatrix}, P_2 = 2,0349.$$

En effet, dans ce cas, P_2 se réduit à un scalaire. Poursuivant la remarque A.2, ceci signifie également que ρ^* est une borne minorante du rayon complexe de stabilité $r_{\mathcal{D}}^{[c]}$.

A.6 Conclusion

A.6.1 Résumé

Dans cette annexe, un théorème de type « KYP » a été proposé dans un souci d'application au modèle général qu'est le modèle d'état hybride de Roesser. Comme cas particulier de ce

résultat, le lemme KYP monodimensionnel classique est recouvert (ce qui est pour nous tout à fait essentiel et valide partiellement l'approche). Néanmoins, contrairement au cas 1-D, dans le cas multidimensionnel, du conservatisme apparaît. Ceci est dû à la nature même des modèles de Roesser. Nous espérons avoir éclairé le lecteur quant à l'origine de ce conservatisme.

Des possibilités d'exploiter ce théorème en termes de stabilité robuste, de positivité réelle, d'analyse \mathcal{H}_∞ des modèles hybrides de Roesser ont été mises en évidence. Là aussi, nous espérons que ce point de vue sera perçu comme une tentative d'unification de nombreuses contributions traitant de l'étude des modèles n -D par une approche LMI. Un autre espoir serait de voir paraître d'autres contributions relatives au lemme de KYP multidimensionnel mais suivant d'autres approches. En ce sens, nous proposons dans la discussion suivante de possibles terrains d'investigation.

A.6.2 Discussion et perspectives

Le travail présenté dans cette annexe se veut clairement une contribution à l'analyse des modèles n -D. Aucune technique de commande n'est proposée. Toutefois, nous voudrions insister sur l'existence, dans la littérature, de techniques de synthèse, telle que [143, 144, 147, 362] par exemple, qui peuvent s'inscrire dans le formalisme assez général présenté ici. C'était un des buts recherchés. En réalité, les techniques de commande exposées dans ces articles s'appuient sur des conditions analytiques d'apparences parfois diverses mais qui peuvent s'interpréter comme des cas particuliers de notre lemme KYP n -D. C'est pourquoi nous pensons que le théorème A.1 est plus que propice à l'émergence de méthodes de synthèse (peut-être ou probablement au prix d'un peu de conservatisme supplémentaire), en particulier s'il s'agit de déterminer une loi de commande par retour statique d'état ou par retour dynamique de sortie de même ordre que le procédé. Pour la commande par retour statique de sortie ou dynamique de sortie d'ordre réduit, l'exploitation de la condition **ii**) du théorème A.1 est un défi autrement plus ardu à relever. Il convient de se souvenir que, même dans le cas 1-D, ce genre de problème est encore très largement ouvert. Ainsi, clairement, cette approche, quoique présentée sous un angle analytique, doit être envisagée comme un point de départ pour l'élaboration de techniques de commande.

Dans cette annexe, le théorème A.1 peut se démontrer à l'aide de la S-procédure, en utilisant par exemple le formalisme proposé dans [197], que nous prisons tout particulièrement. Exploiter la S-procédure pour déterminer des conditions du type « KYP » est en réalité maintenant devenu assez traditionnel. En effet, le lien entre la S-procédure et le lemme KYP est pour tout dire quasi historique comme en témoigne brillamment l'article [166]. Il est honnête de dire que nous avons été naturellement mené à suivre cette voie « traditionnelle » pour démontrer notre résultat. Elle a l'avantage de conduire à des conditions dans lesquelles les « matrices de Lyapunov » P_i (dans le sens très général déjà évoqué au chapitre 1) apparaissent, ce qui reste très cohérent avec l'état de l'art sur les modèles n -D. Toutefois, il existe d'autres approches pour la détermination de conditions de type « KYP », telles la dissipativité des systèmes [357, 358], les contraintes intégrales quadratiques (*Integral quadratic constraints* (IQC) en anglais) [268], le bien-posé des systèmes interconnectés [317], etc. En fait, le problème posé dans la présente annexe est de tester la condition **i**) du théorème A.1 (sous la contrainte $\lambda \in \partial\mathcal{D}$) ce qui revient

à tester la non-négativité d'une matrice polynomiale n -D sur $\partial\mathcal{D}$. Le théorème A.1 (ici désigné lemme KYP n -D) est une tentative de formuler la non-négativité de cette matrice polynomiale n -D comme un problème de résolution d'une inégalité matricielle (de préférence une LMI), c.-à-d. un problème envisageable numériquement. L'immense succès du lemme KYP réside dans le fait que cette relaxation, dans le cas 1-D, est non conservative. L'absence de perte (c.-à-d. le non-pessimisme) de la S-procédure exprime la pertinence de cette procédure pour obtenir une telle relaxation. Mais la S-procédure est loin d'être la seule à autoriser des relaxations efficaces. Par exemple, si l'on considère le problème de la vérification de la condition **i**) du théorème A.1 sous l'angle de la théorie de l'optimisation, des reformulations peuvent être obtenues par *relaxation lagrangienne*. Le lemme KYP est un cas particulier de cette théorie de la relaxation (voir [322] et les références qui y sont citées pour plus amples détails) et, dans ce cas précis du lemme KYP, il peut être démontré que le saut de dualité s'annule. Plus généralement (le cas n -D par exemple), le problème serait de déterminer des relaxations de la condition originale pour lesquelles le saut de dualité est faible ou, si possible, s'annule.

Parmi les relaxations possibles, l'on trouve des techniques basées sur la notion de *décomposition en sommes de carrés*, ou, en anglais, *Sum-Of-Squares (SOS)-descriptions*. Plus précisément, l'on sait que tester la non-négativité d'un polynôme *multivariable* est en général NP-difficile et une CS est l'existence d'une décomposition SOS. En outre, le problème d'existence d'une décomposition SOS du polynôme peut être transformé en un problème de programmation semi-définie, éventuellement de grande dimension [235, 281]. Ainsi, résoudre un tel problème de programmation est une manière possible d'affirmer la non-négativité initialement recherchée. La S-procédure sert le même objectif. En réalité, le lien fort entre la formulation SOS et la S-procédure a été mis lumière entre autres dans [107]. De façon analogue, le lemme KYP 1-D peut être vu comme l'équivalence entre la non-négativité d'une matrice polynomiale *monovariante* (sur un ensemble $\partial\mathcal{D}$) et une LMI correspondant à l'existence d'une décomposition SOS de cette matrice [157, 156]. L'expression de la condition **i**) du théorème A.1 fait apparaître une matrice polynomiale à n variables (le vecteur réunissant ces variables appartenant à un ensemble spécifié). Là encore, une CS pour qu'une telle matrice soit non négative est l'existence d'une décomposition SOS. Avec les extensions récentes [186, 187, 223], ce dernier test peut être « relâché » en un problème LMI, éventuellement de grande dimension, et ce sans conservatisme. Le prix à payer pour vaincre ce conservatisme peut se révéler être la taille du système LMI obtenu. De plus, l'article récent [174] a montré l'intérêt d'une interprétation *au sens des moments* d'une décomposition SOS non seulement pour réduire la taille de la relaxation LMI mais aussi pour extraire les solutions optimales. Par conséquent, en plus de formuler un problème LMI de moindre taille, l'obtention d'une solution optimale peut se révéler particulièrement utile, par exemple pour la synthèse d'une loi de commande. En effet, les auteurs de [174] ont illustré la pertinence de leur approche, dans le cas 1-D, pour résoudre des problèmes fondamentalement associés au crucial retour statique de sortie évoqué au chapitre 3. Leur travail peut être un point de départ pour déterminer des lois de commande pour des modèles n -D.

Enfin, un autre point étudié dans cet article est la stabilité robuste des modèles de Roesser. Le théorème A.2 fournit une CS pour que le modèle (A.1) (avec $E = I$) soit asymptotiquement stable de manière robuste vis-à-vis d'une incertitude LFT. Cette CS garantit que le polynôme caractéristique $c(\lambda, A_c)$ satisfait les conditions données par le lemme A.1. Il est important de

remarquer que ces conditions de stabilité, dans le cas purement continu, correspondent à ce qui est appelé la *stabilité au sens strict* d'un polynôme à n variables [217]. Dans cet article, Kharitonov et Torres-Muñoz expliquent que cette propriété peut ne pas être suffisante dans un contexte robuste puisqu'elle peut être remise en cause par une toute petite déviation d'un seul coefficient du polynôme. C'est pourquoi ils proposent une nouvelle forme de stabilité (voir [217, théorème 13]). Ceci signifie que, si la condition (A.60) est vérifiée pour $E = I$ et $r = k$, alors (A.1) est stable au sens strict de manière robuste vis-à-vis de (A.59) avec (A.45)–(A.46) mais tout autre incertitude sur une composante du modèle de Roesser, qui ne serait pas prise en compte dans la structure LFT considérée, pourrait entraîner une déviation *déstabilisante* dans les coefficients du polynôme caractéristique. Dans un contexte pratique, il peut être utile de s'intéresser de près à cette « fragilité ». En réalité, il est assez facile de constater qu'une partie des propriétés requises pour qu'un polynôme soit stable au sens de [217, théorème 13] est vérifiée et il serait intéressant de pousser plus loin des investigations pour (*peut-être ?*) démontrer qu'un polynôme caractéristique incertain, avec sa structure particulière telle qu'elle est définie dans cette annexe, est stable au sens de [217, théorème 13] lorsqu'il est stable au sens strict.

Nous confessons ne pas être familiers de tous les détails des techniques inhérentes aux perspectives présentées ci-avant mais nous espérons que cette discussion se révélera fructueuse pour l'étude des systèmes multidimensionnels.

ANNEXE B

\mathcal{D} -ADMISSIBILITÉ DES SYSTÈMES IMPLICITES

Cette annexe traite de la \mathcal{S} -régularité d'un faisceau matriciel linéaire $(A, E) = E\lambda - A$ et montre les applications possibles de cette étude à l'analyse des modèles implicites incertains de la forme $E\dot{x} = Ax$ (pour le cas continu) ou $Ex_{k+1} = Ax_k$ (pour le cas discret). Des conditions LMI de \mathcal{S} -régularité (concept plutôt appelé $\partial\mathcal{D}$ -régularité au chapitre 1) robuste vis-à-vis d'incertitudes LFT entachant A mais aussi E sont proposées. Ces conditions, quoique rigoureusement suffisantes, s'avèrent en réalité proches de la nécessité voire nécessaires dans de nombreux cas. De plus, la pertinence de ces conditions pour l'analyse de la \mathcal{D} -admissibilité des modèles implicites (\mathcal{D} -stabilité, régularité, absence de modes impulsifs en continu ou causalité en discret) est aussi discutée. Cette annexe reprend le rapport de recherche [319].

Sommaire

B.1	Introduction	177
B.2	Établissement du problème mathématique	179
B.2.1	Définitions préliminaires	179
B.2.2	Formulation du faisceau incertain	180
B.2.3	Formulation de \mathcal{S}	182
B.2.4	Problème à résoudre	183

B.3	\mathcal{S}-régularité robuste	184
B.3.1	Résultat principal	184
B.3.2	Multiplieurs, matrices de Lyapunov et leurs inerties	191
B.4	Analyse robuste des modèles implicites	194
B.5	Illustration numérique	199
B.5.1	Premier exemple	199
B.5.2	Second exemple	201
B.6	Conclusion	202

B.1 Introduction

Il est aujourd'hui bien reconnu que les modèles de la forme $E\dot{x} = Ax$ (ou $Ex_{k+1} = Ax_k$ pour le cas discret), qui sont appelés *systèmes singuliers* [100], « *descriptor systems* » [248], *systèmes généralisés* [351], *systèmes implicites* [261] ou *systèmes algébro-différentiels*, ou encore étrangement systèmes décrits par des *semi-équations d'état* [125], etc., sont d'un grand intérêt pour modéliser de nombreux procédés pratiques. Ces modèles se rencontrent par exemple dans l'étude des systèmes interconnectés [312], les réseaux électriques [125], la robotique et plus généralement les structures mécaniques [274], ou peuvent même servir à approcher des systèmes dits *singulièrement perturbés* [224]. Par souci de concision, plutôt que de citer de nombreuses références, nous conseillons au lecteur de porter son attention sur les contributions [351, 100, 237] ainsi que celles qui y sont mentionnées.

À l'instar des modèles conventionnels pour lesquels $E = I$ (ou simplement pour lesquels E est inversible), la \mathcal{D} -stabilité, c.-à-d. le cloisonnement du spectre *fini* de $(A, E) = E\lambda - A$ dans une région \mathcal{D} du plan complexe, peut se révéler importante pour comprendre le comportement transitoire du système, en particulier pour attester de la stabilité asymptotique. Mais cela reste insuffisant dans le cas implicite. Deux autres propriétés doivent être vérifiées. La première est la *régularité* (c.-à-d. l'existence d'une solution unique à l'équation d'état généralisée), dont l'importance a été mise en lumière par [311]. La seconde est *l'absence d'impulsions* (c.-à-d. que les valeurs propres infinies du faisceau n'induisent pas de modes impulsifs dans la réponse du modèle implicite associé, même quand les signaux d'entrée sont discontinus [100]). Il faut noter que dans le cas discret, il est question de *causalité* plutôt que d'absence d'impulsions. Quand ces deux propriétés s'ajoutent à la \mathcal{D} -stabilité, le modèle est dit *\mathcal{D} -admissible*.

Il importe de déterminer des outils simples qui permettent de tester si un modèle implicite précisément connu est \mathcal{D} -admissible. Pour établir ce genre de tests, de nombreux efforts ont porté sur les *équations de Lyapunov généralisées* [237, 339, 196] (attention, ce ne sont pas les mêmes que celles évoquées au chapitre 1 !). Quoiqu'intéressantes à bien des égards (voir [350]), ces approches requièrent bien souvent des systèmes qu'ils soient transformés en des formes équivalentes telle la forme de Kronecker-Weierstrass [311] (dont les détails peuvent être trouvés dans la théorie des faisceaux matriciels réguliers [149]), ce qui n'est pas souhaitable dans un contexte incertain. En effet, dans un contexte nominal, ce type de transformations [311, 351] s'est indéniablement révélé utile pour la compréhension des diverses propriétés des modèles implicites et peut même conduire à des techniques de commande, mais, en présence d'incertitudes, il devient très difficile d'exploiter de telles transformations qui ne conservent pas l'équivalence des modèles sur tout le domaine incertain. Pour cette raison, l'utilisation de LMI *strictes* est préférée à celle des équations de Lyapunov étendues. En ce sens, l'un des premiers pas est celui de [70]. L'avantage du contexte LMI est aussi que l'extension au cloisonnement dans diverses régions \mathcal{D} est facilitée.

En réalité, de nombreuses contributions traitent de l'analyse et de la commande robuste des modèles implicites [239], particulièrement par une approche LMI (malheureusement, ces LMI ne sont pas nécessairement strictes) : voir [361, 231, 364, 82] et le travail très fourni de Ma-

subuchi ([264, 262, 263] et les références qui y sont mentionnées). Mais très peu considèrent une incertitude sur E . Citons néanmoins [240] où A est cependant connue avec précision, ou encore [238] pour le cas des matrices intervalles. Les meilleurs pistes sont peut-être à trouver dans [199, 288].

Dans cette annexe, nous faisons une utilisation « intensive » de la \mathcal{S} -régularité (initialement plutôt désignée $\partial\mathcal{D}$ -régularité (voir [17, 21] et le chapitre 1)) et de plusieurs versions de la \mathcal{S} -procédure. La \mathcal{S} -procédure dans sa version sans perte est due à [366], prenant en compte une quantité importante de travaux effectués par le même auteur, comme remarquablement souligné dans [166]. Mais l'on peut consulter [65, 198, 321, 197] et les références qui y sont contenues pour des versions plus « modernes », des corollaires ou des extensions plus appropriés à nos besoins. La \mathcal{S} -régularité et la \mathcal{S} -procédure peuvent permettre d'établir des conditions (suffisantes) en termes de LMI strictes pour qu'un modèle implicite soumis à deux incertitudes LFT bornées en norme (l'une sur la matrice A et l'autre sur la matrice E) soit \mathcal{D} -admissible. Notre but est de proposer un outil analytique aussi simple que possible qui puisse être une base pour d'autres investigations à venir. Il doit être mentionné que la présente annexe est une version étendue de [320] contenant des résultats plus précis, des démonstrations plus abouties, des discussions plus complètes sur le conservatisme, et, nous l'espérons, des sources de réflexion plus généreuses.

L'annexe est ainsi organisée. La prochaine partie est consacrée à l'établissement du problème mathématique sous-jacent et inclut des définitions fondamentales, la description du faisceau matriciel linéaire incertain ainsi que de ses incertitudes LFT. Elle inclut aussi la formulation des régions de cloisonnement considérées et la propriété à vérifier (la \mathcal{S} -régularité), cette dernière devant être relaxée en termes de LMI. La partie B.3 présente la dite relaxation c.-à-d. la condition LMI suffisante qui est largement commentée. Il s'agit de la contribution principale de cette annexe. Dans la partie B.4, l'on trouve une discussion sur les autres propriétés cruciales des modèles implicites (régularité, absence d'impulsions/causalité). Notre condition est confrontée à ces propriétés. Son utilité est alors mise en évidence. La technique est numériquement illustrée sur un exemple dans la partie B.5 avant de conclure dans la partie B.6.

Notations spécifiques à cette annexe : \mathcal{H}_n est l'ensemble des matrices hermitiennes de dimension n et $\mathcal{H}_n^+ \subset \mathcal{H}_n$ le sous ensemble des matrices définies positives. Le produit matriciel suivant est défini (une sorte de produit de Redheffer) :

$$\Delta \star \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \\ E & F \end{bmatrix} = D + C(E - \Delta A)^{-1}(\Delta B - F),$$

avec des dimensions compatibles de A, B, C, D, E et F . L'expression $M \not\prec 0$ signifie que la matrice hermitienne M n'est pas définie négative.

B.2 Établissement du problème mathématique

B.2.1 Définitions préliminaires

Dans ce paragraphe, nous proposons plusieurs définitions et propriétés des faisceaux matriciels. Les raisonnements de cette annexe sont principalement tenus sur des faisceaux matriciels alors que les modèles implicites ne sont considérés que dans la partie 4.

Définition B.1 Soit $\mathbb{A}(\lambda) = (A, E) = E\lambda - A$ un faisceau matriciel linéaire pour lequel $\{A; E\} \in \{\mathbb{C}^{n \times n}\}^2$ (la notation (A, E) est usuelle mais pas universelle) et $\text{Rang}(E) = r \leq n$. Le spectre généralisé du faisceau $\mathbb{A}(\lambda)$, désigné par $\lambda(A, E)$, est défini par

$$\lambda(A, E) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\mathbb{A}(\lambda)) = 0\}, \quad (\text{B.1})$$

et les éléments de $\lambda(A, E)$ sont appelées valeurs propres généralisées de $\mathbb{A}(\lambda)$. De plus, r est appelé l'ordre généralisé de $\mathbb{A}(\lambda)$.

Il importe vraiment de comprendre que $\lambda(A, E)$ contient p éléments finis distincts, et donc que les éléments restants sont infinis. Bien entendu, $n = r$ lorsque E est de rang plein.

Définition B.2 Soit $\mathbb{A}(\lambda) = (A, E) = E\lambda - A$, où $\{A; E\} \in \{\mathbb{C}^{n \times n}\}^2$, un faisceau matriciel linéaire d'ordre généralisé r . L'on suppose que son spectre généralisé $\lambda(A, E)$ contient p valeurs propres finies λ_j de multiplicités algébriques respectives a_j , $j = 1, \dots, p$. Le degré de $\mathbb{A}(\lambda)$ est défini par

$$f = \deg(\det(\mathbb{A}(\lambda))) = \sum_{j=1}^p a_j \leq r. \quad (\text{B.2})$$

Définition B.3 (inspirée de la notion de $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice introduite dans [33, 17] et au chapitre 1) Soit $\mathbb{A}(\lambda) = (A, E) = E\lambda - A$, un faisceau matriciel linéaire tel que $\{A; E\} \in \{\mathbb{C}^{n \times n}\}^2$. Soit aussi \mathcal{S} un sous ensemble quelconque du plan complexe. Le faisceau $\mathbb{A}(\lambda)$ est dit

- \mathcal{S} -régulier si $\lambda(A, E) \cap \mathcal{S} = \emptyset$,
- \mathcal{S} -singulier sinon.

Définition B.4 Soit $\mathbb{A}(\lambda) = (A, E) = E\lambda - A$ un faisceau matriciel linéaire tel que $\{A; E\} \in \{\mathbb{C}^{n \times n}\}^2$. Le faisceau $\mathbb{A}(\lambda)$ est dit

- régulier s'il existe $\mathcal{S} \neq \emptyset$ tel que $\mathbb{A}(\lambda)$ est \mathcal{S} -régulier,
- singulier sinon.

La définition B.4 est complètement cohérente avec la définition habituelle de la régularité d'un faisceau mais la formulation proposée ci-avant permet de l'intégrer dans un formalisme plus général, à savoir celui de la \mathcal{S} -régularité. Ceci se révélera utile par la suite.

B.2.2 Formulation du faisceau incertain

Dans nos raisonnements, les matrices E et A impliquées dans l'expression du faisceau $\mathbb{A}(\lambda)$ sont considérées complexes et vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \Delta_A \star \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_A & B_A \\ C_A & D_A \\ E_A & F_A \end{bmatrix}, \\ E = \Delta_E \star \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} A_E & B_E \\ C_E & D_E \\ E_E & F_E \end{bmatrix} \end{array} \right. , \quad (\text{B.3})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_A \in \mathbf{\Delta}_A = \left\{ \Delta_A \in \mathbf{C}^{q_A \times r_A} : \begin{bmatrix} \Delta_A \\ I \end{bmatrix}' \Psi_A \begin{bmatrix} \Delta_A \\ I \end{bmatrix} \geq 0 \right\} \\ \Delta_E \in \mathbf{\Delta}_E = \left\{ \Delta_E \in \mathbf{C}^{q_E \times r_E} : \begin{bmatrix} \Delta_E \\ I \end{bmatrix}' \Psi_E \begin{bmatrix} \Delta_E \\ I \end{bmatrix} \geq 0 \right\}, \end{array} \right. \quad (\text{B.4})$$

où $\Psi_A \in \mathcal{H}_{q_A+r_A}$ et $\Psi_E \in \mathcal{H}_{q_E+r_E}$. La structure des matrices incertaines A et E peut être dénommée incertitude LFT généralisée basse (LFT pour *Linear Fractional Transform*, voir chapitre 2). Il s'agit d'une légère extension de la représentation généralisée proposée dans [171] qui est assez similaire à la représentation proposée dans [288], cette dernière pouvant plutôt correspondre à la LFT généralisée haute. Toutefois, contrairement à [288], les incertitudes sur A et E sont ici complètement indépendantes l'une de l'autre.

Enfin, l'incertitude globale Δ sur le faisceau est définie par

$$\Delta = \{\Delta_A; \Delta_E\} \in (\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Delta}_A \times \mathbf{\Delta}_E). \quad (\text{B.5})$$

La LFT conventionnelle (c.-à-d. non généralisée) basse devient un cas particulier pour lequel

$$E_A = I; \quad F_A = 0; \quad E_E = I; \quad F_E = 0. \quad (\text{B.6})$$

La formulation (B.3)-(B.4) est donc très générale. Néanmoins, nous réduisons cette généralité en introduisant une contrainte :

$$\exists \Delta^\bullet = \{\Delta_A^\bullet; \Delta_E^\bullet\} \in \Delta | \mathbb{A}(\lambda, \Delta^\bullet) = E(\Delta_E^\bullet)\lambda - A(\Delta_A^\bullet) = D_E\lambda - D_A = (D_A, D_E). \quad (\text{B.7})$$

Ceci peut paraître une contrainte drastique sur l'ensemble des faisceaux incertains mais il est évident que la LFT basse classique induite par le choix (B.6) vérifie toujours cette condition puisque, dans ce cas, l'on a $\Delta_A^\bullet = 0$ et $\Delta_E^\bullet = 0$. Ainsi, même sous la contrainte (B.7), la structure considérée reste plus générale qu'une LFT classique. Le faisceau (D_A, D_E) peut être vu comme un faisceau nominal.

Donc, la description LFT classique s'inscrit dans la structure plus générale donnée par (B.3)-(B.4) mais la seconde peut se révéler très utile pour réduire la taille de la LFT obtenue. À titre d'illustration, si l'on considère une expression aussi simple que

$$A(\delta) = 1 - \frac{3\delta - 2}{4\delta}, \quad (\text{B.8})$$

où $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 1$. Le bien-posé de cette expression est assuré puisque $\delta \neq 0$. L'approche LFT classique conduit, par exemple, à la LFT suivante,

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta} \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 3 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right], \quad (\text{B.9})$$

alors qu'une LFT généralisée basse est donnée par

$$A(\delta) = \delta \star \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

qui est clairement de moindre dimension et évite d'introduire une structure pour l'incertitude proprement dite. L'instance nominale correspond à $\delta^\bullet = \frac{2}{3}$.

Maintenant, si l'on suppose que $-1 \leq \delta \leq -3$, il est alors impossible d'exhiber une valeur δ^* de l'intervalle $[-3, -1]$ telle que $A(\delta^*) = 1$ (la seule qui vérifie cette égalité est δ^\bullet mais elle n'appartient pas à l'intervalle). Ainsi, si l'expression (B.8) est toujours retenue, l'hypothèse (B.7) ne peut être satisfaite. Toutefois, l'expression (B.8) peut être ainsi transformée :

$$A(\delta) = \frac{\delta + 2}{4\delta}. \quad (\text{B.11})$$

Une écriture sous forme de LFT généralisée basse peut être obtenue :

$$A(\delta) = \delta \star \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

avec $\delta^\bullet = -2$ comme instance nominale, permettant ainsi à la contrainte (B.7) d'être vérifiée. Dans l'article [171], les auteurs parviennent à réduire la taille d'une LFT correspondant à un système lié un cas pratique de 75 à 14, ceci en utilisant une LFT généralisée plutôt qu'une LFT classique.

Comme instance particulière très utile de (B.4), le cas où

$$\Psi_A = \begin{bmatrix} -\gamma_A I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Psi_E = \begin{bmatrix} -\gamma_E I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

$\gamma_A > 0$ et $\gamma_E > 0$ étant des scalaires, mérite d'être cité car il signifie que Δ_A et Δ_E sont des boules de matrices de rayons respectifs $\sqrt{\gamma_A^{-1}}$ et $\sqrt{\gamma_E^{-1}}$ c.-à-d. que les matrices incertaines A et E sont toutes deux bornées en norme ($\|\Delta_A\|_2 \leq \sqrt{\gamma_A^{-1}}$ et $\|\Delta_E\|_2 \leq \sqrt{\gamma_E^{-1}}$). (Voir le chapitre 2 pour l'évocation des incertitudes bornées en norme).

Hypothèses B.1 Le domaine d'incertitude Δ est supposé implicitement bien posé :

- (i) $\det(I - \Delta_A A_A) \neq 0$ et $\det(I - \Delta_E A_E) \neq 0$ sur Δ ;
- (ii) $\text{Rang}(E) = r \leq n \quad \forall \Delta_E \in \Delta_E$.

L'hypothèse (i) correspond au classique *bien posé* des formes LFT (voir chapitre 2) et le vocable *implicite* correspond à l'hypothèse (ii) qui est le seul concept original introduit dans cette nomenclature d'incertitude.

Remarque B.1 L'on peut noter que Δ_A et Δ_E peuvent aussi se définir ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_A = \left\{ \Delta_A \in \mathbb{C}^{q_A \times r_A} : \begin{bmatrix} \Delta_A \\ I \end{bmatrix}' \tau_A \Psi_A \begin{bmatrix} \Delta_A \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \forall \tau_A > 0 \right\} \\ \Delta_E = \left\{ \Delta_E \in \mathbb{C}^{q_E \times r_E} : \begin{bmatrix} \Delta_E \\ I \end{bmatrix}' \tau_E \Psi_E \begin{bmatrix} \Delta_E \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \forall \tau_E > 0 \right\} \end{array} \right\}, \quad (\text{B.14})$$

Cette définition est certes plus compliquée mais ce n'est pas arbitraire puisque les scalaires positifs τ_A et τ_E permettent de paramétrer l'ensemble des multipliers qui interviendront dans la partie suivante lors des applications de la S-procédure.

B.2.3 Formulation de \mathcal{S}

Dans cette annexe, l'ensemble \mathcal{S} est défini par

$$\mathcal{S} = \left\{ s \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}' R \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \&$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}' \Phi_h \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall h \in \{1, \dots, \bar{h}\} \right\}, \quad (\text{B.15})$$

où $R \in \mathcal{H}_2$ et $\Phi_h \in \mathcal{H}_2$, $h = 1, \dots, \bar{h}$. Ce type de description est emprunté à [21] reprenant quelques notions de [198, 197]. En réalité, \mathcal{S} est l'intersection d'une région définie par l'égalité (une droite, un cercle ou même le plan complexe ($R = 0$)) avec \bar{h} demi-plans fermés, disques ou extérieurs de disques fermés. Cette description n'est autre que celle de la frontière d'une région ECMI de pluralité 1 (voir la définition 1.13). Nous préférons toutefois faire ici ce rappel pour faciliter la lecture de cette annexe.

Des ensembles particuliers peuvent être mis en exergue :

- Axe imaginaire $\mathcal{I} : \bar{h} = 0; R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$
- Axe réel $\mathcal{R} : \bar{h} = 0; R = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix};$
- Cercle unitaire $\mathcal{C} : \bar{h} = 0; R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$
- Demi-plan droit fermé $\bar{\mathcal{C}}^+ : \bar{h} = 1; R = 0; \Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$
- Demi-plan gauche fermé $\bar{\mathcal{C}}^- : \bar{h} = 1; R = 0; \Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$
- Extérieur du disque unitaire $\bar{\mathcal{D}}^+ : \bar{h} = 1; R = 0; \Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$
- Disque unitaire fermé $\bar{\mathcal{D}}^- : \bar{h} = 1; R = 0; \Phi_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Il est possible d'étendre la classe des ensembles \mathcal{S} en considérant des matrices R et Φ_h appartenant à $\mathbb{C}^{2d \times 2d}$ avec $d \geq 1$. Pour plus de concision et de clarté, d est pris égal 1 et l'on reste dans le cadre ECMI. Néanmoins, nous rappelons qu'une telle formulation permet de décrire les frontières de régions E²MI (voir [59] et chapitre 1), ou même certaines de ces régions (fermées) elles-mêmes, voire leurs régions complémentaires.

L'on note que la \mathcal{S} -régularité peut être exploitée pour tester la \mathcal{D} -stabilité (appartenance des pôles à la région \mathcal{D}) en définissant $\mathcal{S} = \mathbb{C}/\mathcal{D}$. Par exemple, la stabilité au sens de Hurwitz, qui est le cloisonnement des racines dans le demi-plan complexe gauche ouvert \mathbb{C}^- n'est autre que la $\bar{\mathcal{C}}^+$ -régularité. De la même façon, la stabilité au sens de Schur, qui est le cloisonnement des racines dans le disque unitaire ouvert \mathcal{D}^- n'est autre que la $\bar{\mathcal{D}}^+$ -régularité.

Dans la suite de cette annexe, l'ensemble \mathcal{S} sera supposé *borné*.

B.2.4 Problème à résoudre

L'on considère le faisceau matriciel linéaire $\mathbb{A}(\lambda) = (A, E)$ soumis à l'incertitude définie au paragraphe B.2.2 et obéissant à l'hypothèse B.1. Soit aussi l'ensemble \mathcal{S} décrit au para-

graphe B.2.3 que l'on suppose *borné*. Ce travail a pour objectif d'établir une condition LMI *stricte* garantissant que $\mathbb{A}(\lambda)$ est \mathcal{S} -régulier de manière robuste vis-à-vis de Δ .

B.3 \mathcal{S} -régularité robuste

Dans cette partie, un raisonnement mathématique est suivi. Il vise à proposer une solution au problème établi ci-avant. Ce raisonnement est ensuite résumé en un théorème qui est la contribution essentielle de cette annexe. Une discussion fait suite au théorème.

B.3.1 Résultat principal

Selon la définition B.3, le faisceau matriciel incertain $\mathbb{A}(\lambda)$ est \mathcal{S} -régulier de manière robuste si et seulement si

$$\det(\mathbb{A}(\lambda)) \neq 0 \quad \forall \{\lambda; \Delta\} \in \mathcal{S} \times \Delta \quad (\text{B.16})$$

$$\Leftrightarrow \det(E\lambda - A) \neq 0 \quad \forall \{\lambda; \Delta\} \in \mathcal{S} \times \Delta \quad (\text{B.17})$$

$$\Leftrightarrow \det(G + \lambda C_E V_E) \neq 0 \quad \forall \{\lambda; \Delta\} \in \mathcal{S} \times \Delta \quad (\text{B.18})$$

avec

$$\begin{cases} G &= D_E \lambda - \Delta_A \star \mathcal{A}, \\ V_E &= (E_E - \Delta_E A_E)^{-1} (\Delta_E B_E - F_E). \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

La différence (B.18) est vérifiée si et seulement si

$$\begin{bmatrix} V_E \\ I \end{bmatrix}' \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda C_E & G \end{bmatrix}' (-I) \begin{bmatrix} \lambda C_E & G \end{bmatrix}}_{\Theta_E} \underbrace{\begin{bmatrix} V_E \\ I \end{bmatrix}}_{N_E} < 0 \quad \forall \{\lambda; \Delta\} \in \mathcal{S} \times \Delta. \quad (\text{B.20})$$

Si l'on définit les matrices suivantes,

$$\Gamma_E(\Delta_E) = \begin{bmatrix} I & -\Delta_E \end{bmatrix}, \quad X_E = \begin{bmatrix} E_E & F_E \\ A_E & B_E \end{bmatrix}, \quad (\text{B.21})$$

l'on peut noter que

$$N_E = (\Gamma_E(\Delta_E) X_E)_\perp \quad \forall \Delta_E \in \Delta_E. \quad (\text{B.22})$$

Ainsi, en vertu de la S-procédure de bloc plein (par exemple telle que formulée dans [321, théorème 8] ou dans l'annexe C), l'inégalité (B.20) est vérifiée si (et seulement si quand Δ_E est compact) il existe un scalaire positif $\tau_E = \tau_E(\lambda, \Delta_A)$ tel que

$$\underbrace{\tau_E X_E' \Psi_E X_E}_{\Upsilon_E} + \Theta_E < 0 \quad \forall \{\lambda; \Delta_A\} \in \mathcal{S} \times \Delta_A. \quad (\text{B.23})$$

(Il faut ici noter que τ_E est implicitement une fonction de Δ_A et λ ce qui signifie que l'équivalence avec τ_E constant ne tient a priori que pour un couple $\{\Delta_A; \lambda\}$).

En outre, l'on peut écrire la matrice $\begin{bmatrix} \lambda C_E & G \end{bmatrix}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda C_E & G \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda C_E & \lambda D_E - \Delta_A \star \mathcal{A} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda C_E & \lambda D_E - D_A \end{bmatrix}}_{\hat{D}} + \begin{bmatrix} 0 & -C_A(E_A - \Delta_A A_A)^{-1}(\Delta_A B_A - F_A) \end{bmatrix} \\ &= \hat{D} + \underbrace{(-C_A)}_{\hat{C}} \underbrace{(E_A - \Delta_A A_A)}_{\hat{E}}^{-1} \underbrace{(\Delta_A \begin{bmatrix} 0 & B_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & F_A \end{bmatrix})}_{\hat{B} - \hat{F}} \\ &= \hat{D} + \hat{C} \underbrace{(\hat{E} - \Delta_A \hat{A})^{-1}(\Delta_A \hat{B} - \hat{F})}_{\hat{V}} \\ &= \Delta_A \star \hat{\mathcal{A}} \quad \forall \{\lambda; \Delta_A\} \in \mathcal{S} \times \Delta_A, \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

où

$$\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}(\lambda) = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \\ \hat{E} & \hat{F} \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathcal{S}. \quad (\text{B.25})$$

Ainsi, l'inégalité (B.23) peut être écrite

$$\Upsilon_E + (\Delta_A \star \hat{\mathcal{A}})'(-I)(\Delta_A \star \hat{\mathcal{A}}) < 0 \quad \forall \{\lambda; \Delta_A\} \in \mathcal{S} \times \Delta_A \quad (\text{B.26})$$

$$\Leftrightarrow \Upsilon_E + (\hat{D} + \hat{C}\hat{V})'(-I)(\hat{D} + \hat{C}\hat{V}) < 0 \quad \forall \{\lambda; \Delta_A\} \in \mathcal{S} \times \Delta_A \quad (\text{B.27})$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \hat{V} \\ I \end{bmatrix}' \underbrace{\hat{\Theta}}_{\hat{N}} \begin{bmatrix} \hat{V} \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \{\lambda; \Delta_A\} \in \mathcal{S} \times \Delta_A. \quad (\text{B.28})$$

avec

$$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} \hat{C}' \\ \hat{D}' \end{bmatrix} (-I) \begin{bmatrix} \hat{C}' \\ \hat{D}' \end{bmatrix}' + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Upsilon_E \end{bmatrix}}_{\Omega_E}. \quad (\text{B.29})$$

De nouveau, les matrices suivantes peuvent être définies :

$$\Gamma_A(\Delta_A) = [I \quad -\Delta_A]; \quad \hat{X}_A = \begin{bmatrix} \hat{E} & \hat{F} \\ \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.30})$$

De ces définitions, il peut être facilement déduit que

$$\hat{N} = (\Gamma_A(\Delta_A)\hat{X}_A)_\perp \quad \forall \Delta_A \in \mathbf{\Delta}_A. \quad (\text{B.31})$$

Ainsi, une autre application de la S-procédure de bloc plein permet de voir que (B.26) est vérifiée si (et seulement si quand $\mathbf{\Delta}_A$ est compact) il existe un scalaire positif $\tau_A = \tau_A(\lambda, \tau_E(\lambda, \Delta_A))$ tel que

$$\hat{\Theta} + \underbrace{\tau_A \hat{X}'_A \Psi_A \hat{X}_A}_{\Omega_A} < 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{S}. \quad (\text{B.32})$$

(Une fois encore, il faut noter que la nécessité éventuelle de (B.32) ne concerne que le passage ci-avant puisque τ_A dépend en réalité implicitement de λ et de τ_E).

De plus, la matrice $\begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix}$ peut être écrite

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -C_A & \lambda C_E & \lambda D_E - D_A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\underbrace{\begin{bmatrix} C_A & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} + \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C_E \end{bmatrix}}_{\tilde{F}} & \lambda \underbrace{D_E}_{\tilde{E}} - \underbrace{D_A}_{\tilde{A}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\tilde{B} + \lambda \tilde{F} & \lambda \tilde{E} - \tilde{A} \end{bmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Par conséquent, l'inégalité (B.32) peut se récrire :

$$\underbrace{\Omega_A + \Omega_E}_{\tilde{\Theta}} + \begin{bmatrix} -\tilde{B} + \lambda \tilde{F} & \lambda \tilde{E} - \tilde{A} \end{bmatrix}' (-I) \begin{bmatrix} -\tilde{B} + \lambda \tilde{F} & \lambda \tilde{E} - \tilde{A} \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{S}. \quad (\text{B.34})$$

En notant que le faisceau $(\tilde{A}, \tilde{E}) = (D_A, D_E)$ est \mathcal{S} -régulier par hypothèse puisque (B.7) est satisfaite, l'on peut déduire que $(\lambda \tilde{E} - \tilde{A})$ est inversible sur \mathcal{S} . Cette non-singularité assure de l'existence de

$$\tilde{N}_\lambda = \begin{bmatrix} I \\ (\lambda \tilde{E} - \tilde{A})^{-1} (\tilde{B} - \lambda \tilde{F}) \end{bmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathcal{S}. \quad (\text{B.35})$$

Il est évident que

$$\tilde{N}_\lambda = \begin{bmatrix} -\tilde{B} + \lambda \tilde{F} & \lambda \tilde{E} - \tilde{A} \end{bmatrix}_\perp \quad \forall \lambda \in \mathcal{S}. \quad (\text{B.36})$$

\mathcal{S} étant borné, d'après le lemme de Finsler [131] (ou voir [329, théorème 2.3.10]), qui peut être interprété comme une autre version de la S-procédure, l'inégalité (B.34) est vraie si et seulement si

$$\tilde{N}'_\lambda \tilde{\Theta} \tilde{N}_\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{S}. \quad (\text{B.37})$$

Si l'on définit les matrices suivantes,

$$\Gamma_\lambda = \begin{bmatrix} I & -\lambda I \end{bmatrix}; \quad \tilde{X}_\lambda = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A} \\ \tilde{F} & \tilde{E} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.38})$$

alors, une fois encore, il devient clair que

$$\tilde{N}_\lambda = (\Gamma_\lambda \tilde{X}_\lambda)_\perp \quad \forall \lambda \in \mathcal{S}. \quad (\text{B.39})$$

Puisque \mathcal{S} est borné, le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) généralisé dans sa version implicite avec des inégalités strictes [197, théorème 3] (avec une légère adaptation comme dans [21] pour $\bar{h} > 1$), qui est lui aussi un cas particulier de la S-procédure généralisée (voir [198] ou [197, théorème 1]), peut-être appliqué. L'inégalité (B.37) est satisfaite si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathcal{H}_n$ et des matrices $Q_h \in \mathcal{H}_n^+$, $h = 1, \dots, \bar{h}$, telles que

$$\tilde{\Theta} + \tilde{X}'_\lambda \left(\underbrace{R \otimes P + \sum_{h=1}^{\bar{h}} (\Phi_h \otimes Q_h)}_{\Psi_\lambda} \right) \tilde{X}_\lambda < 0. \quad (\text{B.40})$$

(De nouveau, l'équivalence ne concerne que les deux dernières inégalités exploitées puisque P et Q_h dépendent implicitement de τ_E et τ_A).

Le raisonnement précédent est résumé par le théorème suivant.

Théorème B.1 *Soit un faisceau matriciel linéaire incertain $\mathbb{A}(\lambda) = (A, E) = E\lambda - A$ tel que $\{A; E\} \in \{\mathbb{C}^{n \times n}\}^2$ vérifie (B.3)-(B.4) et l'hypothèse B.1.i). Soit aussi un ensemble borné $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ décrit par (B.15). L'on suppose que (D_A, D_E) est \mathcal{S} -régulier. Alors le faisceau $\mathbb{A}(\lambda)$ est \mathcal{S} -régulier vis-à-vis de Δ si (et seulement si lorsque Δ_A et Δ_E sont compacts) il existe une matrice $P \in \mathcal{H}_n$, des matrices $Q_h \in \mathcal{H}_n^+$, $h = 1, \dots, \bar{h}$, ainsi que deux scalaires $\tau_A > 0$ et $\tau_E > 0$ tels que*

$$\Omega_A + \Omega_E + \Omega_\lambda < 0 \quad (\text{B.41})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_A = \tau_A \hat{X}'_A \Psi_A \hat{X}_A, \quad \hat{X}_A = \begin{bmatrix} E_A & 0 & F_A \\ A_A & 0 & B_A \end{bmatrix}, \\ \Omega_E = \tau_E \hat{X}'_E \Psi_E \hat{X}_E, \quad \hat{X}_E = \begin{bmatrix} 0 & E_E & F_E \\ 0 & A_E & B_E \end{bmatrix}, \\ \Omega_\lambda = \tilde{X}'_\lambda \left(R \otimes P + \sum_{h=1}^{\bar{h}} (\Phi_h \otimes Q_h) \right) \tilde{X}_\lambda, \quad \tilde{X}_\lambda = \begin{bmatrix} C_A & 0 & D_A \\ 0 & C_E & D_E \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (\text{B.42})$$

Démonstration : elle découle du raisonnement précédent. Il faut toutefois noter que les variables P , Q_h , τ_A et τ_E sont clairement supposées constantes (alors qu'elles sont des fonctions implicites de λ , Δ_A et Δ_E dans le raisonnement ci-avant, raisonnement qu'il faut plutôt voir comme un moyen de comprendre la façon dont la condition a été établie). Lorsque Δ_A et Δ_E sont compacts, nous remontons ce raisonnement pour démontrer la nécessité par l'absurde (dont l'anonymat sera préservé) en conservant les notations qui y sont utilisées (nous insistons sur l'importance de se référer au développement précédant le théorème pour suivre ce qui suit). L'on suppose que la \mathcal{S} -régularité robuste est vraie mais que la condition (B.41) est fausse. L'on peut donc écrire,

$$\forall \{\tau_A, \tau_E, P, Q_h\} \in \{\mathbb{R}^+\}^2 \times \mathcal{H}_n \times \{\mathcal{H}_n^+\}^{\bar{h}}, \quad \Omega_A + \Omega_E + \Omega_\lambda \not\prec 0 \quad (\text{B.43})$$

Ainsi, pour tout couple $\{\tau_A, \tau_E\} \in \{\mathbb{R}^+\}^2$, il existe $\lambda^\circ \in \mathcal{S}$ tel que

$$\tilde{N}'_{\lambda^\circ} \tilde{\Theta} \tilde{N}_{\lambda^\circ} \not\prec 0, \quad (\text{B.44})$$

(voir l'expression de \tilde{N}_λ plus avant) sinon le lemme KYP généralisé doit être remis en question. Le lemme de Finsler amène alors à déduire que pour tout couple $\{\tau_A, \tau_E\} \in \{\mathbb{R}^+\}^2$, et quel que soit $\tau > 0$, il existe $\lambda^\circ \in \mathcal{S}$ tel que

$$\underbrace{\Omega_A + \Omega_E}_{\tilde{\Theta}} + \tau \begin{bmatrix} -\tilde{B} + \lambda^\circ \tilde{F} & \lambda^\circ \tilde{E} - \tilde{A} \end{bmatrix}' (-I) \begin{bmatrix} -\tilde{B} + \lambda^\circ \tilde{F} & \lambda^\circ \tilde{E} - \tilde{A} \end{bmatrix} \not\prec 0 \quad (\text{B.45})$$

$$\Leftrightarrow \tau \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{C}' \\ \hat{D}'(\lambda^\circ) \end{bmatrix}}_{\tilde{\Theta}(\lambda^\circ, \tau)} (-I) \begin{bmatrix} \hat{C}' \\ \hat{D}'(\lambda^\circ) \end{bmatrix}' + \Omega_E + \tau_A \hat{X}'_A \Psi_A \hat{X}_A \not\prec 0. \quad (\text{B.46})$$

Par application de la S-procédure de bloc plein, l'on déduit que pour tout $\tau_E > 0$ et tout $\tau > 0$, il existe une matrice $\Delta_A^\circ \in \Delta_A$, et $\lambda^\circ \in \mathcal{S}$ tels que

$$\tau_E X'_E \Psi_E X_E + \tau \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda^\circ C_E & \lambda^\circ D_E - \Delta_A^\circ \star \mathcal{A} \end{bmatrix}}_{\Theta_E(\lambda^\circ, \tau, \Delta_A^\circ)} (-I) \begin{bmatrix} \lambda^\circ C_E & \lambda^\circ D_E - \Delta_A^\circ \star \mathcal{A} \end{bmatrix} \not\prec 0. \quad (\text{B.47})$$

Une fois de plus, la \mathcal{S} -procédure de bloc plein conduit à écrire que pour tout $\tau > 0$, il existe une matrice $\Delta_A^\circ \in \Delta_A$, une matrice $\Delta_E^\circ \in \Delta_E$ et $\lambda^\circ \in \mathcal{S}$ tels que

$$\tau \begin{bmatrix} V_E^\circ \\ I \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \lambda^\circ C_E & G^\circ \end{bmatrix}' (-I) \begin{bmatrix} \lambda^\circ C_E & G^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_E^\circ \\ I \end{bmatrix} \not\leq 0, \quad (\text{B.48})$$

avec

$$\begin{cases} V_E^\circ = (E_E - \Delta_E^\circ A_E)^{-1} (\Delta_E^\circ B_E - F_E), \\ G^\circ = D_E \lambda^\circ - \Delta_A^\circ. \end{cases} \quad (\text{B.49})$$

Ceci signifie donc que, pour tout $\tau > 0$, il existe une matrice $\Delta_A^\circ \in \Delta_A$, une matrice $\Delta_E^\circ \in \Delta_E$ et $\lambda^\circ \in \mathcal{S}$ tels que

$$-\tau (E(\Delta_E^\circ) \lambda^\circ - A(\Delta_A^\circ))' (E(\Delta_E^\circ) \lambda^\circ - A(\Delta_A^\circ)) \not\leq 0. \quad (\text{B.50})$$

Compte tenu de la structure du membre de gauche de l'inégalité, ceci impose

$$-\tau (E(\Delta_E^\circ) \lambda^\circ - A(\Delta_A^\circ))' (E(\Delta_E^\circ) \lambda^\circ - A(\Delta_A^\circ)) \leq 0, \quad (\text{B.51})$$

ce qui implique qu'il existe $\Delta^\circ \in \Delta$ et $\lambda^\circ \in \mathcal{S}$ tels que

$$\det(E(\Delta_E^\circ) \lambda^\circ - A(\Delta_A^\circ)) = 0, \quad (\text{B.52})$$

et contredit ainsi l'hypothèse de \mathcal{S} -régularité initiale. ■

Remarque B.2 En pratique, lors de la programmation d'une telle LMI, l'on peut s'affranchir soit de τ_A , soit de τ_E , en multipliant l'ensemble de la LMI par τ_A^{-1} ou τ_E^{-1} , cet inverse disparaissant par une mise à l'échelle appropriée des matrices P et Q_h . Ceci se révèle particulièrement utile lorsque l'on veut minimiser γ_A ou γ_E tout en conservant la nature LMI de la condition. Toutefois, sur le plan formel, nous conservons l'écriture (B.41) qui montre un certain équilibre entre les termes relatifs à Δ_A et Δ_E .

Comme indiqué par le théorème ci-avant, la compacité éventuelle de Δ_A et Δ_E n'est pas anodine puisqu'elle rend la LMI (B.41) non conservatrice. Le cas borné en norme (B.13), loin d'être rare en pratique, assure de cette compacité et conduit par conséquent à une condition nécessaire (B.41) pour que $\mathbb{A}(\lambda)$ soit \mathcal{S} -régulière de manière robuste vis-à-vis des boules de matrices complexes Δ_A et Δ_E . Un autre conservatisme qui peut apparaître en pratique est lié au fait que l'on doit restreindre l'étude à des faisceaux matriciels réels. Cette réalité du modèle n'est pas prise en compte par le théorème.

Dans [320], seule l'incertitude LFT *non généralisée* bornée en norme (c.-à-d. avec les structures (B.6) et B.13)) a été considérée. Une condition analogue à (B.41) a été obtenue (mais avec (B.6)). Notons toutefois que, dans [320], la nécessité possible de la condition n'est pas même évoquée (plutôt clairement mise en doute). Il s'agit là d'une motivation suffisante pour justifier la présente contribution. En outre, dans [320], une autre approche est également suivie, où le faisceau original est d'abord transformé en un faisceau augmenté (\bar{A}, \bar{E}) de dimension $2n$ où seule \bar{A} est entachée d'une incertitude LFT. Cette seconde approche est équivalente à la construction d'une seule LFT à deux blocs dont on sait qu'elle génère du conservatisme. Il est assez frappant de constater que ceci tend à montrer que l'approche « classique » qui consiste à résumer l'ensemble de l'incertitude sur un modèle en une seule « grosse » LFT puis à appliquer la S-procédure une seule fois n'est sans doute pas la meilleure stratégie en termes de conservatisme. Des applications successives de la S-procédure par rapport à diverses incertitudes prises séparément peuvent donner de meilleurs résultats.

Un autre point mérite l'attention du lecteur. Lorsque \mathcal{S} n'est pas supposé borné, il faut s'assurer que l'équation (B.36) ou (B.39) reste vraie pour $\lambda = \infty$. C'est le cas quand E est de rang plein mais pas quand E est singulière. C'est pourquoi \mathcal{S} est supposé borné dans le théorème B.1. Ce problème est exactement celui rencontré dans [197, paragraphe V.B], dans l'étude du lemme KYP généralisé dans sa version *implicite-inégalités strictes*. En pratique, c.-à-d. lorsque l'on travaille avec des systèmes implicites, un moyen de contourner le problème est de borner \mathcal{S} en considérant un choix de \mathcal{S} dans lequel

$$\Phi_h = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \bar{\omega}^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.53})$$

pour une instance de $h \in \{1, \dots, \bar{h}\}$ et pour une valeur de $\bar{\omega}$ éventuellement très grande mais pas infinie. Par un tel choix, \mathcal{S} devient un sous-ensemble du disque $\bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$ centré sur l'origine de \mathbb{C} et de rayon $\bar{\omega}$. Par conséquent, il est de toute évidence borné. Ainsi, les valeurs propres généralisées finies sont localisées à l'intérieur de $\bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$ et les valeurs propres infinies à l'extérieur de $\bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$. Cette exploitation de l'idée contenue dans le lemme KYP à fréquence finie [198] interdit la \mathcal{S} -singularité à l'infini. Ceci se révélera très utile dans la partie suivante. Tout à fait dans le même ordre d'idée, une notion utile est celle de $\partial\bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$ -régularité où $\partial\bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$ est la frontière de $\bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$. Elle peut être analysée au travers du corollaire suivant :

Corollaire B.1 *Soit un faisceau matriciel linéaire incertain $\mathbb{A}(\lambda) = (A, E) = E\lambda - A$ tel que $\{A; E\} \in \{\mathbb{C}^{n \times n}\}^2$ vérifie (B.3)-(B.4) et l'hypothèse B.1.i). Soit aussi le cercle $\partial\bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$ de centre l'origine et de rayon $\bar{\omega}$. L'on suppose que (D_A, D_E) est $\partial\bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$ -régulier. Alors le faisceau $\mathbb{A}(\lambda)$ est $\partial\bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$ -régulier de manière robuste vis-à-vis de Δ si (et seulement si lorsque Δ_A et Δ_E sont compacts) il existe une matrice $Y \in \mathcal{H}_n$, ainsi que deux scalaires $\mu_A > 0$ et $\mu_E > 0$ tels que*

$$\check{\Omega}_A + \check{\Omega}_E + \check{\Omega}_\lambda(\bar{\omega}) < 0 \quad (\text{B.54})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\Omega}_A = \mu_A \hat{X}'_A \Psi_A \hat{X}_A, \quad \hat{X}_A = \begin{bmatrix} E_A & 0 & F_A \\ A_A & 0 & B_A \end{bmatrix}, \\ \check{\Omega}_E = \mu_E \hat{X}'_E \Psi_E \hat{X}_E, \quad \hat{X}_E = \begin{bmatrix} 0 & E_E & F_E \\ 0 & A_E & B_E \end{bmatrix}, \\ \check{\Omega}_\lambda(\bar{\omega}) = \tilde{X}'_\lambda \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\bar{\omega}^2 \end{bmatrix} \otimes Y \right) \tilde{X}_\lambda, \quad \tilde{X}_\lambda = \begin{bmatrix} C_A & 0 & D_A \\ 0 & C_E & D_E \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (\text{B.55})$$

Démonstration : simple application du théorème B.1 avec $P = Y$, $\bar{h} = 0$, $\tau_A = \mu_A$, $\tau_E = \mu_E$ et

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\bar{\omega}^2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \quad (\text{B.56})$$

B.3.2 Multiplieurs, matrices de Lyapunov et leurs inerties

En appliquant la S-procédure ou le lemme KYP généralisé, les matrices $\tau_A \Psi_A$, $\tau_E \Psi_E$ ou Ψ_λ (la dernière étant définie en (B.40)) sont parfois appelées *multiplieurs*. La signification de $\tau_A \Psi_A$ et $\tau_E \Psi_E$ est assez évidente puisque ces matrices interviennent dans la définition du domaine d'incertitude (B.4). Ce paragraphe est plutôt consacré à la signification de Ψ_λ , plus précisément celle des matrices P et Q_h . Avant de proposer une interprétation, appliquons deux fois la S-procédure « à rebours » (par rapport au paragraphe précédent) à partir de (B.41). En effet, en remarquant que

$$\mathcal{N}_A = \begin{bmatrix} (E_A - \Delta_A A_A)^{-1} (\Delta_A B_A - F_A) & 0 \\ 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} = (\Gamma_A(\Delta_A) \hat{X}_A)_\perp \quad \forall \Delta_A \in \Delta_A, \quad (\text{B.57})$$

l'application de la S-procédure (dans le sens « *suffisant et facile* ») à partir de (B.41) conduit à l'existence de $P \in \mathcal{H}_n$ et $Q_h \in \mathcal{H}_n^+$, $h = 1, \dots, \bar{h}$, tel que

$$\mathcal{N}'_A (\Omega_\lambda + \Omega_E) \mathcal{N}_A < 0 \quad \forall \Delta_E \in \Delta_E. \quad (\text{B.58})$$

Une nouvelle fois, l'on peut remarquer que

$$\mathcal{N}_E = \begin{bmatrix} I \\ (E_E - \Delta_E A_E)^{-1} (\Delta_E B_E - F_E) \end{bmatrix} = (\Gamma_E(\Delta_E) \hat{X}_E \mathcal{N}_A)_\perp \quad \forall \Delta_E \in \Delta_E, \quad (\text{B.59})$$

ce qui, toujours en vertu de la S-procédure, implique que $P \in \mathcal{H}_n$ et $Q_h \in \mathcal{H}_n^+$, $h = 1, \dots, \bar{h}$, sont telles que

$$\mathcal{N}'_E \mathcal{N}'_A \Omega_\lambda \mathcal{N}_A \mathcal{N}_E < 0 \quad \forall \Delta \in \Delta. \quad (\text{B.60})$$

Cette dernière inégalité peut être écrite

$$\begin{bmatrix} \Delta_A \star \mathcal{A} \\ \Delta_E \star \mathcal{E} \end{bmatrix}' \left(R \otimes P + \sum_{h=1}^{\bar{h}} (\Phi_h \otimes Q_h) \right) \begin{bmatrix} \Delta_A \star \mathcal{A} \\ \Delta_E \star \mathcal{E} \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \Delta \in \Delta. \quad (\text{B.61})$$

Par conséquent, la condition ci-avant est une « inégalité de Lyapunov étendue » dans laquelle P peut être vue comme une matrice de Lyapunov valide pour toute instance de l'incertitude prise dans le domaine concerné. Cette condition est suffisante (et aussi nécessaire quand Δ_A et Δ_E sont compacts) pour vérifier (B.16). Bien sûr, le terme « Lyapunov » n'est pas rigoureux ici puisque l'on ne considère pas des systèmes mais simplement des faisceaux et puisqu'aucune fonction d'énergie n'est définie à partir de P . De plus, P peut ne pas être définie positive comme il sera vu plus tard. Toutefois, puisque les matrices P et Q_h restent constantes sur Δ , l'on peut définir cette propriété comme étant la *S-régularité quadratique* (voir le chapitre 2 pour des détails sur la stabilité quadratique) qui, sous l'hypothèse de compacité mentionnée plus tôt, semble proche de la *S-régularité robuste vis-à-vis des incertitudes LFT* dans le corps des matrices complexes.

Soit maintenant une instance quelconque de $\mathbb{A}(\lambda)$ (la dépendance en Δ est négligée car elle ne présente ici aucun intérêt). La discussion qui suit concerne l'inertie de la matrice P , matrice qui est juste supposée hermitienne. Seuls deux cas sont étudiés : $\mathcal{S} = \mathfrak{C}$ et $\mathcal{S} = \mathfrak{J} \cap \bar{\mathfrak{C}}(\bar{\omega})$. En effet, ces ensembles sont liés aux régions de stabilité asymptotique. Le premier cas conduira à une conclusion claire sur l'inertie de P alors que le second n'apportera qu'une discussion. Mais tout d'abord, le lecteur doit se remémorer la forme de Kronecker-Weierstrass d'un faisceau (A, E) . Il existe deux matrices non singulières U et V telles que

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = UAV, \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} = UEV, \quad (\text{B.62})$$

où le spectre de $A_1 \in \mathbb{C}^{f \times f}$ contient seulement les valeurs propres finies de (A, E) et où $N \in \mathbb{C}^{(n-f) \times (n-f)}$ est une matrice nilpotente qui vaut 0 quand $r = f$.

Maintenant, l'on considère le cas où $\mathcal{S} = \mathfrak{C}$. L'inégalité (B.61) conduit, dans le cas nominal, à

$$A'PA - E'PE < 0, \quad (\text{B.63})$$

qui est une sorte d'extension de l'inégalité de Stein pour les modèles implicites. En utilisant la transformation (B.62) et d'après le théorème de Sylvester's (c.-à-d. par congruence), l'on peut déduire

$$\tilde{A}'\tilde{P}\tilde{A} - \tilde{E}'\tilde{P}\tilde{E} < 0, \quad (\text{B.64})$$

où

$$\tilde{P} = (U^{-1})'PU^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2' & P_3 \end{bmatrix} = \tilde{P}'. \quad (\text{B.65})$$

L'inégalité (B.64) peut aussi s'écrire

$$\begin{bmatrix} A_1'P_1A_1 - P_1 & A_1'P_2 - P_2N \\ P_2'A_1 - N'P_2' & P_3 - N'P_3N \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{B.66})$$

Le bloc nord-ouest du membre de gauche de l'inégalité ci-avant montre qu'en vertu de [17, théorème 3], $\text{In}(P_1) = [n_{1+} \ n_{1-} \ 0]$, ce qui veut dire que A_1 a exactement n_{1+} valeurs propres à l'intérieur de \mathcal{C} , n_{1-} à l'extérieur et aucune sur \mathcal{C} (puisque A_1 est nécessairement \mathcal{C} -régulière). De plus, la partie sud-est de l'inégalité montre que P_3 est définie négative. En effet, puisque N est nilpotente, toutes ses valeurs propres sont nulles et d'après le théorème de Stein [332], P_3 est définie négative. Ceci signifie entre autres que les valeurs propres généralisées infinies de (A, E) sont à l'extérieur de \mathcal{C} . Par application du complément de Schur et une nouvelle fois du théorème de Sylvester, il est assez facile de prouver que $\text{In}(P) = \text{In}(\tilde{P}) = [n_{1+} \ (n_{1-} + n - f) \ 0]$ (voir [17] pour les détails techniques). Il est aussi facile de voir par un simple coup d'œil à [17] que ce raisonnement peut être adapté à n'importe quel cercle, pas simplement \mathcal{C} .

Maintenant, l'on considère le cas où $\mathcal{S} = \mathcal{J} \cap \bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$ avec $\bar{\omega}$ très grand (aussi grand que voulu mais pas infini). L'inégalité (B.61) devient, dans le cas nominal,

$$A'PE + E'PA - A'QA + \bar{\omega}^2 E'QE < 0, \quad (\text{B.67})$$

qui est une extension de l'inégalité de Lyapunov pour les modèles implicites. En suivant un raisonnement analogue à celui du cas précédent, grâce à la transformation (B.62), l'on obtient de manière équivalente

$$\tilde{A}'\tilde{P}\tilde{E} + \tilde{E}'\tilde{P}\tilde{A} - \tilde{A}'\tilde{Q}\tilde{A} + \bar{\omega}^2 \tilde{E}'\tilde{Q}\tilde{E} < 0, \quad (\text{B.68})$$

avec (B.65) et

$$\tilde{Q} = (U^{-1})'QU^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{bmatrix} = \tilde{Q}' > 0. \quad (\text{B.69})$$

L'inégalité (B.68) peut être écrite

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1'P_1 + P_1A_1 - A_1'Q_1A_1 + \bar{\omega}^2Q_1 & P_2 + A_1'P_2N - A_1'Q_2 + \bar{\omega}^2Q_2N \\ \hline P_2' + N'P_2'A_1 - Q_2'A_1 + \bar{\omega}^2N'Q_2' & N'P_3 + P_3N - Q_3 + \bar{\omega}^2N'Q_3N \end{array} \right] < 0. \quad (\text{B.70})$$

De cette inégalité, il est difficile de conclure sur $\text{In}(P)$. Cependant, une inertie peut raisonnablement être escomptée *mais sans certitude*. L'on note d'abord que pour un faisceau non impulsif, $N = 0$, donc clairement la définition positive de Q_3 contribue à la définition négative du bloc sud-est dans le membre de gauche. Mais rien ne peut être conclu sur $\text{In}(P_3)$. En outre, si A_1 n'a pas de valeur propre sur \mathfrak{J} ou en dehors de $\bar{C}(\bar{\omega})$ (à condition bien sûr que $\bar{\omega}$ soit suffisamment grand), alors il existe des instances possibles de $P_1 > 0$ et $Q_1 > 0$ tel que le bloc nord-ouest soit défini négatif (voir [16] pour s'en convaincre) mais, quoique probable, ce n'est pas inéluctable. Par conséquent, dans un tel cas, l'inertie de P la plus probable est $\text{In}(P) = \text{In}(\tilde{P}) = [n_+ \ n_- \ n_0]$ où $n_+ \geq f = r$.

Il convient de remarquer que ces propriétés (réelles ou probables) sur les inerties sont préservées sur Δ puisque P est constante. C'est assez logique puisque c'est une conséquence de la répartition des racines par rapport à \mathcal{S} et puisque, par continuité, cette répartition ne peut changer sans entraîner la \mathcal{S} -singularité (qui est interdite par la condition).

B.4 Analyse robuste des modèles implicites

L'on s'intéresse ici à l'analyse robuste des modèles implicites de la forme

$$E\dot{x} = Ax \tag{B.71}$$

(ou

$$Ex_{k+1} = Ax_k \tag{B.72}$$

pour le cas discret) où les matrices E et A vérifient (B.3), (B.4) et (B.7). Il est bien connu (de nouveau, voir [100] et les références qui y sont contenues) que les pôles d'un tel modèle sont les valeurs propres généralisées du faisceau associé $\mathbb{A}(\lambda)$, incluant aussi bien les valeurs infinies que les valeurs finies. Comme pour les modèles conventionnels ($E = I$), la réponse de ce type de modèle contient un terme lié aux pôles finis (ce terme correspond aux dynamiques décrites par une équation différentielle ou récurrente) mais aussi un autre terme « inhabituel » lié aux pôles infinies (correspondant à la partie du modèle impliquant des équations algébriques). Comme pour les modèles d'état classiques, le comportement transitoire du premier terme est fortement dépendant de la localisation des pôles finis dans le plan complexe. C'est pourquoi la \mathcal{D} -stabilité (cloisonnement des racines dans une région $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$) est intéressante. Mais contrairement aux systèmes usuels, deux autres aspects doivent être étudiés. Un modèle implicite doit être *régulier* [149, 311] (une seule solution à l'équation d'état : c'est une sorte de bien posé du modèle) et il doit être *libre d'impulsions* dans le cas continu [351, 100] (le « terme infini » de la réponse ne doit pas répercuter les impulsions éventuelles des signaux d'entrée vers les sorties) ou *causal* dans le cas discret.

Une définition classique est maintenant rappelée.

Définition B.5 *Le modèle (B.71) ou (B.72) est dit stable par rapport à la région $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ ou \mathcal{D} -stable si les valeurs propres généralisées finies du faisceau associé (A, E) appartiennent toutes à \mathcal{D} .*

Clairement, (B.71) est asymptotiquement stable s'il est \mathcal{D} -stable pour $\mathcal{D} = \mathbb{C}^-$ (le demi-plan gauche ouvert) et (B.72) est asymptotiquement stable s'il est \mathcal{D} -stable pour $\mathcal{D} = \mathbf{D}^-$ (le disque unitaire ouvert).

Maintenant, deux propriétés fondamentales sont rappelées. Leurs justifications peuvent être trouvées par exemple dans [100]. Pour une référence sérieuse en français, le lecteur est invité à consulter [260].

Théorème B.2 *Le modèle implicite (B.71) ou (B.72) est régulier si et seulement si le faisceau associé (A, E) est régulier.*

Cela signifie que le modèle est bien posé et présente une réponse unique lorsque le faisceau associé est régulier au sens de la définition B.4.

Théorème B.3 *Le modèle implicite (B.71) ou (B.72) est dit de plein degré (c.-à-d. libre d'impulsions en continu ou causal en discret) si et seulement s'il est régulier et si le degré du faisceau associé (A, E) est égal à son ordre généralisé.*

L'on peut étendre la définition de la \mathcal{S} -régularité des faisceaux aux systèmes implicites.

Définition B.6 *Soit \mathcal{S} un sous-ensemble de \mathbb{C} . Le modèle implicite (B.71) ou (B.72) est dit \mathcal{S} -régulier si et seulement si le faisceau associé (A, E) est \mathcal{S} -régulier.*

Cela signifie que le modèle implicite est non seulement régulier mais, de plus, aucun de ses pôles n'appartient à \mathcal{S} . Il s'agit donc d'une extension de la notion présentée dans le théorème B.2.

Définition B.7 *Le modèle (B.71) ou (B.72) est dit \mathcal{D} -admissible s'il est \mathcal{D} -stable, régulier et de plein degré.*

De nouveau, (B.71) est admissible s'il est \mathcal{D} -admissible pour $\mathcal{D} = \mathbb{C}^-$ et (B.72) est admissible s'il est \mathcal{D} -admissible pour $\mathcal{D} = \mathbf{D}^-$.

À partir de ces propriétés, il est possible d'établir une condition de \mathcal{D} -admissibilité robuste

du modèle implicite (B.71) ou (B.72) vis-à-vis de (B.3)-(B.4) et de l'hypothèse B.1 dès lors que le modèle nominal associé au faisceau (D_A, D_E) est \mathcal{D} -admissible et que la région de cloisonnement \mathcal{D} est un sous-ensemble de $\mathbb{C}(\bar{\omega}) \subset \mathbb{C}$, le grand disque évoqué dans la partie précédente. Plus rigoureusement, le théorème suivant peut être établi.

Théorème B.4 *Soit le modèle implicite incertain (B.71) ou (B.72) avec (B.3), (B.4) et (B.7). L'hypothèse B.1 est retenue. Soient aussi $\bar{\mathbb{C}}(\bar{\omega})$ un disque fermé centré sur l'origine et de rayon $\bar{\omega}$, et $\partial\bar{\mathbb{C}}(\bar{\omega})$ le cercle frontière. Enfin, soit \mathcal{D} un sous-ensemble ouvert de \mathbb{C} ayant pour frontière $\partial\mathcal{D}$ telle que l'ensemble $\mathcal{S} = (\partial\mathcal{D} \cap \bar{\mathbb{C}}(\bar{\omega}))$ vérifie (B.15). Le modèle implicite est \mathcal{S} -régulier et de plein degré de manière robuste vis-à-vis de Δ si (et seulement si lorsque Δ_A et Δ_E sont compacts) les conditions suivantes sont vérifiées :*

a.1) *le modèle associé à (D_A, D_E) , l'instance nominale du faisceau (A, E) , est \mathcal{S} -régulier et de plein degré ;*

a.2) *il existe une matrice $P \in \mathcal{H}_n$, des matrices $Q_h \in \mathcal{H}_n^+$, $h = 1, \dots, \bar{h}$, $\tau_A > 0$ et $\tau_E > 0$ tels que (B.41) est vérifiée pour (B.53) ;*

a.3) *il existe une matrice $Y \in \mathcal{H}_n$, $\mu_A > 0$, $\mu_E > 0$ et $\bar{\omega} < \infty$ aussi grand que possible tels que (B.55) est vérifiée.*

De plus, il est \mathcal{D} -admissible de manière robuste vis-à-vis de Δ si (et seulement si lorsque Δ_A et Δ_E sont compacts) il existe $\bar{\omega} < \infty$, suffisamment grand, tel que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

b.1) *le modèle associé à (D_A, D_E) est \mathcal{D} -admissible ;*

b.2) *les conditions **a.2)** et **a.3)** sont vérifiées.*

Démonstration : l'on considère d'abord la première partie de la proposition. La condition **a.1)** assure que le faisceau (D_A, D_E) est \mathcal{S} -régulier. Puisque $\mathcal{S} \subset \bar{\mathbb{C}}(\bar{\omega})$, c'est un ensemble borné. Les conditions du théorème B.1 sont vérifiées et, grâce à **a.2)**, l'on déduit que le faisceau (et donc, par la définition B.6, le modèle implicite associé) est \mathcal{S} -régulier de manière robuste vis-à-vis de Δ . Il est donc aussi simplement régulier et l'on doit se poser la question du plein degré. Puisque le faisceau nominal (D_A, D_E) est de plein degré, en vertu du théorème B.3, son degré f est égal à son ordre généralisé r . La condition **a.3)**, en vertu du corollaire B.1, assure de la $\partial\bar{\mathbb{C}}(\bar{\omega})$ -régularité robuste du système pour un rayon $\bar{\omega}$ aussi large que possible. Ceci signifie que lorsque Δ décrit Δ aucun pôle fini ne peut traverser $\partial\bar{\mathbb{C}}(\bar{\omega})$ et le degré f reste constant sur Δ . Grâce à l'hypothèse B.1.ii), l'ordre généralisé r reste aussi constant. Par conséquent, la propriété de plein degré est préservée.

L'on considère maintenant la seconde partie de la proposition. La condition **b.1)** implique que (D_A, D_E) est \mathcal{S} -régulier puisque \mathcal{S} est inclus dans la frontière de la région ouverte \mathcal{D} . Grâce à la condition **b.2)**, (A, E) est \mathcal{S} -régulier et de plein degré de manière robuste vis-à-vis de Δ . En outre, la condition **b.1)** signifie aussi que l'ensemble du spectre fini de (D_A, D_E) appartient à \mathcal{D} . Cette propriété est-elle préservée sur Δ ? Il est toujours possible de trouver une valeur suffisamment grande de $\bar{\omega}$ telle que, pour tout $\Delta \in \Delta$, le plus grand module de valeur propre généralisée de $\mathbb{A}(\lambda)$ est inférieur à $\bar{\omega}$. En outre, aucun pôle fini du modèle implicite ne peut migrer en dehors de $\bar{\mathbb{C}}(\bar{\omega})$ (il ne peut atteindre la « lointaine frontière » $\partial\bar{\mathbb{C}}(\bar{\omega})$) et le modèle ne peut devenir \mathcal{S} -singulier. ■

Remarque B.3 Dans le cas où $\partial\mathcal{D} \subset \bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$, la condition **b.2)** peut être simplifiée en omettant la condition **a.3)**. En effet, le fait que les pôles finis ne puissent traverser $\partial\mathcal{D}$ les empêche a fortiori de traverser $\partial\bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$.

Plusieurs commentaires peuvent accompagner ce théorème. Premièrement, il doit être précisé que l'hypothèse **B.1.ii)**, qui se révèle cruciale pour le plein degré, n'est pas trop restrictive en pratique. L'ordre généralisé r est une valeur qui est souvent inhérente à la structure même du système implicite et il est plus qu'improbable que l'incertitude altère cette structure. Par exemple, dans le cas des modèles mécaniques, E fait souvent apparaître une inertie mécanique justifiant l'incertitude. Néanmoins, quelle que soit cette incertitude, il n'y a pas de raison de changer le rang de E .

Deuxièmement, puisque l'on s'intéresse plus aux modèles pratiques qu'aux faisceaux de matrices, il est naturel de se demander si la structure (B.3) est pertinente. Les lecteurs familiarisés avec les structures LFT savent qu'elles peuvent se révéler très utiles dans des situations très pratiques (voir par exemple [259]). Considérons simplement le problème de fragilité suivant pouvant survenir dans l'étude des systèmes implicites. Seul le cas continu est envisagé par souci de brièveté mais le même problème peut exister dans le cas discret. Soit le modèle implicite non autonome

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad (\text{B.73})$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est bien sûr le vecteur d'état et $u \in \mathbb{R}^s$ celui de commande. Une loi de commande que l'on rencontre parfois dans la littérature consiste en un *retour d'état proportionnel dérivé*. Ce retour est décrit par

$$u = K_A x + K_E \dot{x}. \quad (\text{B.74})$$

L'on suppose que les deux matrices de retour K_A et K_E sont soumises à des incertitudes respectives Δ_A et Δ_E , en raison de l'impossibilité (très réaliste) d'implanter le correcteur avec une précision numérique suffisante. Le modèle bouclé incertain est alors donné par

$$\left(\Delta_E \star \begin{bmatrix} 0 & I \\ -B & E - BK_E \\ I & 0 \end{bmatrix} \right) \dot{x} = \left(\Delta_A \star \begin{bmatrix} 0 & I \\ B & A + BK_A \\ I & 0 \end{bmatrix} \right) x. \quad (\text{B.75})$$

Une analyse robuste devient possible si Δ_A et Δ_E peuvent être définies comme en (B.4), ou plus précisément comme en (B.13).

Troisièmement, le conservatisme induit par le théorème B.4 pourrait sembler seulement dû à la possible non-compacité de Δ_A ou Δ_E . En réalité, en pratique, les matrices Δ_A et Δ_E ne sont pas complexes mais réelles. Cette réalité n'est pas prise en compte ce qui peut générer un conservatisme.

Enfin, puisque le souci principal est souvent la simple admissibilité plutôt que la \mathcal{D} -admissibilité, le corollaire suivant peut être présenté.

Corollaire B.2 *Soit le modèle implicite (B.71) avec (B.3), (B.4) et (B.7). L'hypothèse B.1 est retenue. Le modèle implicite incertain est admissible de manière robuste vis-à-vis de Δ si (et seulement si lorsque Δ_A et Δ_E sont compacts) les quatre conditions suivantes sont satisfaites :*

- c.1)** *le modèle associé à (D_A, D_E) est admissible ;*
c.2) *il existe une matrice $P \in \mathcal{H}_n$, une matrice $Q = Q_1 \in \mathcal{H}_n^+$, $\tau_A > 0$ et $\tau_E > 0$ tels que (B.41) est vérifiée pour*

$$\bar{h} = 1; \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Phi = \Phi_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \bar{\omega}^2 \end{bmatrix}; \quad (\text{B.76})$$

- c.3)** *il existe une matrice $Y \in \mathcal{H}_n$, $\mu_A > 0$ et $\mu_E > 0$ tels que (B.55) est vérifiée.*
c.4) *$\bar{\omega}$ est suffisamment grand.*

Démonstration : clairement, le choix (B.76) correspond au cas où \mathcal{S} est un segment ouvert de l'axe imaginaire allant de $-i\bar{\omega}$ à $i\bar{\omega}$. En d'autres mots, c'est l'axe imaginaire borné par $\partial\bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$. Les conditions du théorème B.4 sont réunies. Si $\bar{\omega}$ est assez grand, alors, de toute évidence, les valeurs propres généralisées finies de $\mathbb{A}(\lambda)$ ne peuvent pas sortir de \mathcal{D} sauf en traversant le segment cité plus avant ou $\partial\bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$, ce qui est impossible puisque la \mathcal{S} -singularité et la $\partial\bar{\mathcal{C}}(\bar{\omega})$ -singularité sont respectivement interdites par les conditions (B.41) et (B.55). ■

Dans le cas où la condition est satisfaite, il est probable que $\text{In}(P) = [n_+ \ n_- \ n_0]$ avec $n_+ \geq r$, où r est l'ordre généralisé du faisceau (A, E) . Ceci est suggéré par le raisonnement du paragraphe B.3.2, en gardant à l'esprit que l'admissibilité entraîne le plein degré donc le degré f est égal à l'ordre généralisé r . Par conséquent, il y a r valeurs propres finies (en comptant les multiplicités algébriques), c.-à-d. que $N = 0 \Leftrightarrow f = r$. Toutes ces valeurs propres sont dans \mathbb{C}^- , d'où $n_+ \geq r$. Dans l'article [70], il est montré par simple manipulation matricielle que seul un bloc de dimension $r \times r$ de la matrice de Lyapunov doit être imposé défini positif. La présente remarque donne un début d'interprétation de ce fait.

La contrepartie discrète est maintenant proposée.

Corollaire B.3 *Soit le modèle implicite (B.72) avec (B.3), (B.4) et (B.7). L'hypothèse B.1 est retenue. Le modèle implicite est admissible de manière robuste vis-à-vis de Δ si si (et seulement si lorsque Δ_A et Δ_E sont compacts) les deux conditions suivantes sont admissibles :*

- d.1)** *le modèle associé à (D_A, D_E) est admissible ;*
d.2) *il existe une matrice $P \in \mathcal{H}_n$, $\tau_A > 0$ et $\tau_E > 0$ tels que (B.41) est vérifiée pour*

$$\bar{h} = 0; \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.77})$$

Dans ce cas de figure, $\text{In}(P) = \text{In}(\tilde{P}) = [r \ (n - r) \ 0]$ où r est l'ordre généralisé du faisceau (A, E) .

Démonstration le choix (B.77) implique que \mathcal{S} est identique à \mathcal{C} . Les valeurs propres finies et infinies sont clairement séparées par \mathcal{S} . Il suffit d'appliquer le théorème B.4 ($\bar{C}(\bar{\omega})$ n'a ici aucune utilité c'est-à-dire que l'on peut omettre la condition **a.3**) du théorème B.4 (voir remarque B.3)) pour prouver la première partie du corollaire.

La seconde partie de la proposition résulte du raisonnement du paragraphe B.3.2, en gardant à l'esprit que l'admissibilité implique que toutes les valeurs propres finies appartiennent à \mathbf{D}^- et qu'il en existe exactement r (en comptant les multiplicités algébriques), c.-à-d. $N = 0 \Leftrightarrow f = r$. D'où l'inertie de P . ■

B.5 Illustration numérique

Dans cette partie, l'approche présentée est illustrée par deux exemples numériques. Puisque la longue partie précédente était consacrée au potentiel d'application du théorème B.1 à l'analyse robuste des systèmes implicites, les illustrations ne concernent que l'admissibilité c.-à-d. les corollaires B.2 et B.3.

B.5.1 Premier exemple

Le modèle incertain est le suivant :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_A & B_A \\ \hline C_A & D_A \\ \hline E_A & F_A \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0,2140 & 0,3200 & 0,7266 & \\ 0,6435 & 0,9601 & 0,4120 & \\ \hline 0,2259 & 0,2091 & 0,5678 & \\ 0,5798 & 0,3798 & 0,7942 & \\ 0,7604 & 0,7833 & 0,0592 & \\ 0,5298 & 0,6808 & 0,6029 & \\ 0,6405 & 0,4611 & 0,0503 & \\ \hline 1,0000 & 0 & 0 & \\ 0 & 1,0000 & 0 & \\ 0 & 0 & 1,0000 & \end{array} \right] \dots$$

$$\begin{array}{ccccc}
 0,4154 & 0,8744 & 0,7680 & 0,9901 & 0,4387 \\
 0,3050 & 0,0150 & 0,9708 & 0,7889 & 0,4983 \\
 \hline
 5,8413 & 13,4301 & 30,1742 & 27,2534 & 17,8494 \\
 5,0562 & -0,2859 & 15,8285 & 12,2772 & 7,0206 \\
 -6,5957 & -6,863 & -24,2345 & -15,9162 & -9,7204 \\
 10,3767 & 11,4091 & 30,2249 & 20,4394 & 15,8384 \\
 -16,0828 & -18,9503 & -47,4443 & -40,9319 & -30,7603 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \quad (B.78)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_E & B_E \\ \hline C_E & D_E \\ \hline E_E & F_E \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc}
 0,3295 & 0,6649 & 0,3830 & 0,6992 \\
 0,3090 & 0,6973 & 0,9834 & 0,3874 \\
 0,7329 & 0,5721 & 0,7906 & 0,0419 \\
 0,3944 & 0,5467 & 0,3867 & 0,2193 \\
 \hline
 0,3878 & 0,4480 & 0,4513 & 0,2346 \\
 0,7009 & 0,4883 & 0,92354.7 & 0,2231 \\
 0,0214 & 0,1904 & 0,7002 & 0,5491 \\
 0,7556 & 0,0708 & 0,1335 & 0,9363 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1,0000
 \end{array} \right] \dots$$

$$\left[\begin{array}{ccccc}
 0,7847 & 0,1604 & 0,8695 & 0,3693 & 0 \\
 0,0862 & 0,7363 & 0,9474 & 0,5299 & 0 \\
 0,3433 & 0,0798 & 0,1366 & 0,2513 & 0 \\
 0,2559 & 0,4901 & 0,0385 & 0,2309 & 0 \\
 \hline
 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \quad (B.79)$$

Ce modèle est tel que $n = 5$ et $r = 4$. L'on suppose que l'incertitude satisfait la contrainte (B.13) avec $\sqrt{\gamma_E^{-1}} = \rho_E = 0,001$. Il s'agit d'une LFT bornée en norme classique. Le modèle nominal (D_A, D_E) est asymptotiquement stable au sens des modèles continus, régulier et de plein degré. En d'autres termes, il est Hurwitz-admissible. En effet, ses pôles finis (les valeurs propres généralisées finies de (D_A, D_E)) sont

$$\{-7,0657; -5,0683; -4,7079; -1,1385\} \quad (B.80)$$

et le dernier pôle nominal est à l'infini. Puisque le nombre de pôles finis est égal à r , cela signifie que le degré du faisceau (D_A, D_E) est égal à son ordre généralisé et le modèle nominal est donc de plein degré. L'idée est d'appliquer le théorème B.2 avec $\bar{\omega} = 10^5$ pour analyser la Hurwitz-admissibilité robuste vis-à-vis de Δ_A et Δ_E qui sont ici des boules de matrices. Il faut noter que le rayon $\sqrt{\gamma_A^{-1}}$ n'a pas été spécifié. En effet, il est possible de résoudre la LMI (B.41) tout en minimisant γ_A (il est aussi possible de minimiser γ_E en fixant γ_A ou de minimiser un critère linéaire pondéré). Compte tenu de la remarque B.2, τ_A a été éliminé de la condition (B.41) afin de préserver sa nature LMI. L'on se place donc ici dans le cadre d'une analyse robuste quantitative au sens du chapitre 2. En réalisant cette minimisation, l'on obtient

$$\|\Delta_A\|_2 \leq \sqrt{\gamma_A^{-1}} = \rho_A = 0,3246. \quad (\text{B.81})$$

La valeur obtenue peut être vue comme une borne de Hurwitz-admissibilité robuste. Puisque dans ce cas, Δ_A et Δ_E sont des ensembles compacts, ρ_A est égal au *rayon complexe de Hurwitz-admissibilité par rapport à un domaine Δ_E donné* (voir le paragraphe 2.3.1.2 du chapitre 2 pour en déduire le sens). En traçant les spectres finis de nombreux modèles incertains (complexes) aléatoires respectant les bornes ρ_A et ρ_E (voir figure B.1), l'on obtient une sorte de lieu des racines associé à une incertitude, ce que certains auteurs appellent *pseudo-spectres* pour les modèles conventionnels [347, 348, 346]. L'on peut alors apprécier le conservatisme inexistant du corollaire B.2. De plus, si ce lieu des racines incertain était restreint aux matrices réelles Δ_A and Δ_E , l'on pourrait voir que, pour cet exemple, le *rayon complexe de Hurwitz-admissibilité par rapport à un domaine Δ_E donné* est très proche (sinon égal) au *rayon réel*.

L'on note aussi que la matrice P n'est pas définie positive. Mais son inertie est $[(r = 4) (n - r = 1) 0]$, ce qui est en accord avec la discussion du paragraphe B.3.2.

B.5.2 Second exemple

Il s'agit en fait du même exemple que dans le paragraphe précédent mais D_A est remplacée par $D_A/8$ de sorte que le faisceau (D_A, D_E) devient stable au sens de Schur. L'incertitude reste la même. De nouveau, l'idée est de calculer le *rayon complexe de Schur-admissibilité par rapport à un domaine Δ_E donné* en utilisant le corollaire B.3. La valeur suivante est calculée par minimisation sous contrainte LMI, à l'instar de ce qui a été calculé dans l'exemple précédent :

$$\|\Delta_A\|_2 \leq \sqrt{\gamma_A^{-1}} = \rho_A = 0,0116. \quad (\text{B.82})$$

Grâce à cette valeur, il est possible d'obtenir la figure B.2 où les spectres finis de nombreux modèles (complexes) incertains sont tracés, respectant les bornes ρ_A et ρ_E . Cette figure permet d'apprécier le non-conservatisme de l'analyse effectuée dans le corps des matrices complexes. *Pour cet exemple*, la condition est très faiblement (peut-être pas) conservative dans le corps des matrices réelles. Bien sûr, en général, la réalité n'est pas prise en compte et le *rayon réel de Schur-admissibilité par rapport à un domaine Δ_E donné* ne peut pas toujours être atteint ou

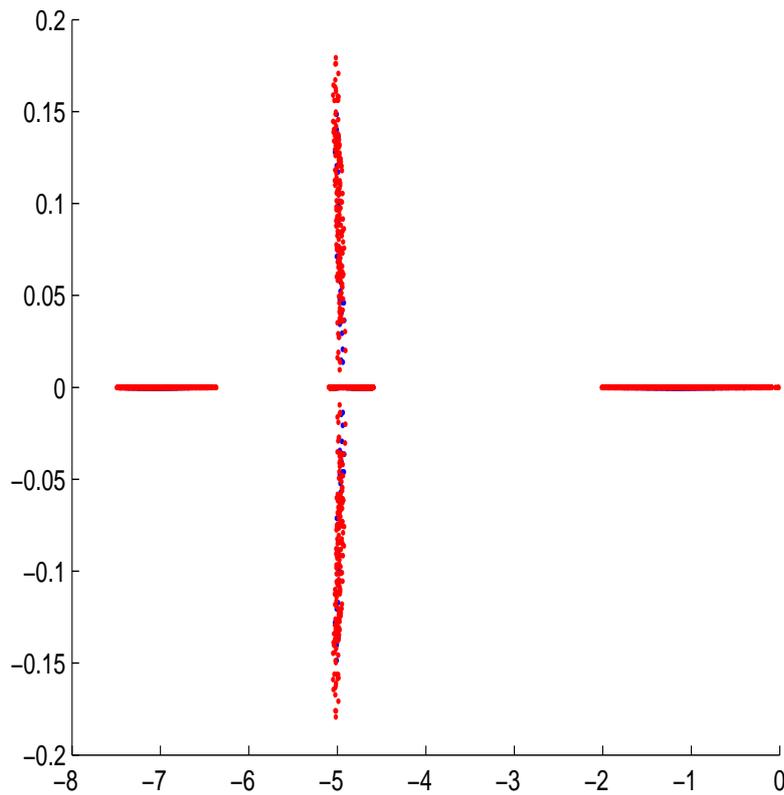


FIG. B.1 – Migration des pôles pour $\|\Delta_A\|_2 \leq 0.3246$ et $\|\Delta_E\|_2 \leq 0.001$

approché de très près, en tout cas par ce moyen là.

L'on note que la matrice P obtenue n'est pas définie positive. Son inertie est $[(r = 4) (n - r = 1) 0]$ comme on pouvait le prévoir à l'aide du corollaire B.3.

B.6 Conclusion

Dans cette annexe, une condition LMI stricte simple de \mathcal{S} -régularité robuste d'un faisceau (A, E) où les matrices A et E sont soumises chacune à une incertitude LFT généralisée basse a été proposée. La classe des ensembles \mathcal{S} qu'il est possible de prendre en compte est très large. Il a été mis en évidence que la condition peut être utilisée pour étudier la \mathcal{D} -admissibilité robuste d'un modèle implicite continu ou discret. Il s'agit d'une extension du travail exposé dans [320]. De plus, la condition obtenue est complètement cohérente avec de nombreux résultats de type « KYP » utilisés pour les modèles conventionnels. À titre de perspectives, les problèmes de

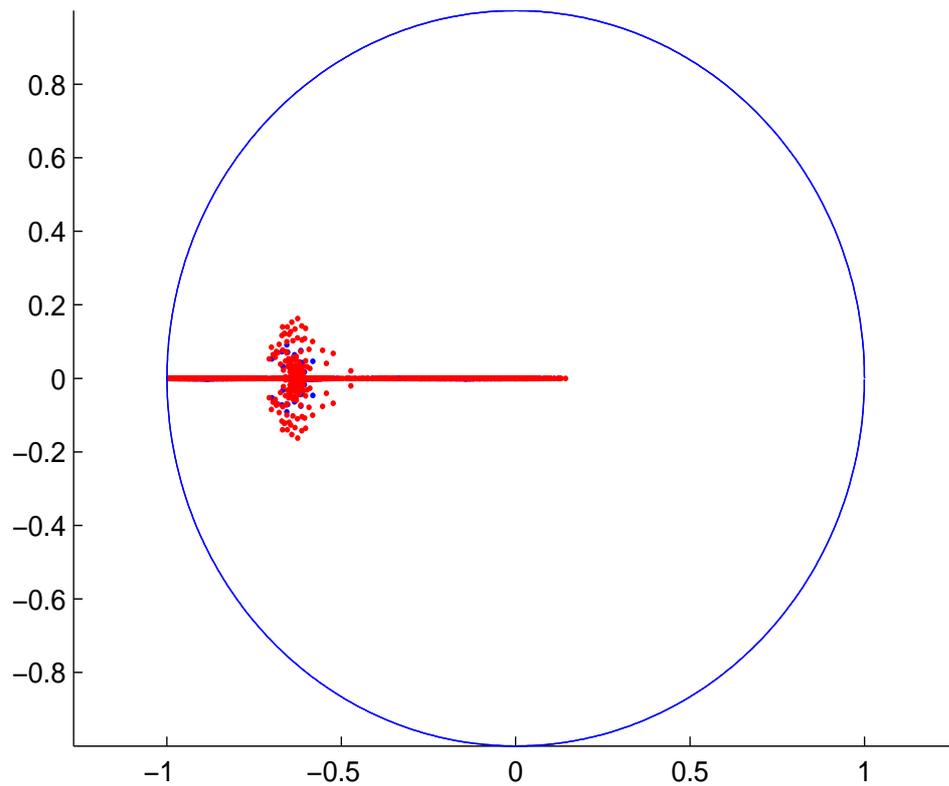


FIG. B.2 – Migration des pôles pour $\|\Delta_A\|_2 \leq 0.0116$ et $\|\Delta_E\|_2 \leq 0.001$

commande sont bien sûr en point de mire. En effet, la condition analytique proposée n'est pas directement exploitable pour la synthèse. Une raison fondamentale d'une telle limite est que la \mathcal{D} -admissibilité est requise. Par conséquent, ce travail doit être analysé au regard de conditions LMI strictes de synthèse telles que, par exemple, celle proposée dans [70].

ANNEXE C

UN THÉORÈME UTILE

Cette annexe présente un outil mathématique qui se veut assez général et qui englobe plusieurs résultats connus de littérature dans un formalisme unique. Il est entre autres utile pour démontrer certains résultats présentés dans le corps du mémoire.

Sommaire

C.1	Brève introduction	207
C.2	Théorème de projection de bloc plein	207
C.3	Lien avec la littérature	211
C.4	Perspectives	215

C.1 Brève introduction

Cette annexe présente un théorème assez général, que l'on peut baptiser *théorème de projection de bloc plein*. Il permet de regrouper en un seul formalisme la *S-procedure* de bloc plein [321] et le *lemme d'élimination des matrices* [329] (également connu sous l'appellation *lemme de projection* [65]). Une relation est aussi établie avec le lemme de Finsler [131]. Par conséquent, ce résultat peut être vu comme une mise en évidence du lien mathématique existant entre plusieurs résultats fondamentaux de la littérature d'Automatique. Il permet aussi de démontrer un grand nombre de propositions exposées dans le corps du mémoire, en particulier au chapitre 2 mais aussi au chapitre 4.

Le théorème est d'abord exposé et démontré. Ensuite, le lien avec les résultats existants est détaillé. L'annexe se termine sur les perspectives possibles de ce travail.

C.2 Théorème de projection de bloc plein

Théorème C.1 *Soient les entités ainsi définies :*

- \mathcal{E} , un sous-espace de \mathbb{C}^n ;
- $\Theta \in \mathcal{H}_n$;
- Δ , un ensemble compact de matrices Δ ;
- $V_L \in \mathbb{C}^{l \times n}$ et $V_R \in \mathbb{C}^{r \times n}$;
- $\bar{V} = \begin{bmatrix} V_L \\ V_R \end{bmatrix}$;
- \bar{N} telle que $\bar{N}_\perp = \bar{V}$;
- $\mathcal{S}_L(\Delta) \subset \mathbb{C}^l$, une famille de sous-espaces de \mathbb{C}^l dépendant continûment de Δ sur Δ ;
- $\mathcal{S}_R(\Delta) \subset \mathbb{C}^r$, une famille de sous-espaces de \mathbb{C}^r dépendant continûment de Δ sur Δ ;
- $\bar{\mathcal{S}}(\Delta) = \left\{ \xi = \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix} : z \in \mathcal{S}_L(\Delta) \ \& \ t \in \mathcal{S}_R(\Delta) \right\}, \Delta \in \Delta$;
- $\mathcal{B}_L(\Delta) = \{x \in \mathcal{E} : V_L x \in \mathcal{S}_L(\Delta)\}, \Delta \in \Delta$;
- $\mathcal{B}_R(\Delta) = \{x \in \mathcal{E} : V_R x \in \mathcal{S}_R(\Delta)\}, \Delta \in \Delta$;
- $\mathcal{B}(\Delta) = \mathcal{B}_L(\Delta)^* \cup \mathcal{B}_R(\Delta)^*, \Delta \in \Delta$;
- $\bar{\mathcal{X}}(\Delta) = \left\{ \xi = \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix} \in \bar{\mathcal{S}}(\Delta) : (\exists x \in \mathcal{E} : \bar{V}x = \xi) \right\} \subset \bar{\mathcal{S}}(\Delta), \Delta \in \Delta$.

Les trois propositions sont équivalentes :

i)

$$x' \Theta x < 0 \quad \forall x \in \mathcal{B}(\Delta), \quad \forall \Delta \in \Delta. \quad (\text{C.1})$$

ii)

$$\exists F : \begin{cases} x'(\bar{V}'F\bar{V} + \Theta)x < 0 & \forall x \in \mathcal{E}^*, \\ \xi'F\xi \geq 0 & \forall \xi \in \bar{\mathcal{S}}(\Delta) \quad \forall \Delta \in \Delta, \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

iii)

$$\exists H \in \mathbb{C}^{l \times r} : \begin{cases} x'((V_L' H V_R)^H + \Theta)x < 0 & \forall x \in \mathcal{E}^*, \\ \xi' \begin{bmatrix} 0 & H \\ H' & 0 \end{bmatrix} \xi \geq 0 & \forall \xi \in \bar{\mathcal{X}}(\Delta) \quad \forall \Delta \in \Delta, \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Remarque C.1 *L'on peut noter que tous les choix de Θ ne sont pas permis par (C.1). En effet, soit M une matrice quelconque telle que $x'\Theta x \geq 0$ pour $Mx = 0$. La condition (C.1) implique alors que $\text{Ker}(M) \cap \mathcal{B}_L(\Delta) = 0$ et $\text{Ker}(M) \cap \mathcal{B}_R(\Delta) = 0$. Sinon, il existerait $x^\bullet \in \mathcal{B}(\Delta)$ tel que $Mx^\bullet = 0$ et donc $x^{\bullet'}\Theta x^\bullet \geq 0$, ce qui contredirait (C.1).*

Démonstration :

ii) \Rightarrow i)

L'on suppose que la première inégalité en (C.2) est vraie. Si elle est vérifiée sur \mathcal{E}^* , elle l'est a fortiori sur $\mathcal{B}(\Delta)$ c.-à-d.

$$x'(\bar{V}'F\bar{V} + \Theta)x < 0 \quad \forall x \in \mathcal{B}(\Delta), \forall \Delta \in \Delta. \quad (\text{C.4})$$

En outre, si $x \in \mathcal{B}(\Delta)$, alors $\xi = \bar{V}x = \begin{bmatrix} z = V_L x \\ t = V_R x \end{bmatrix} \in \bar{\mathcal{X}}(\Delta) \subset \bar{\mathcal{S}}(\Delta)$. De la deuxième inégalité en (C.2), il vient

$$x'(\bar{V}'F\bar{V})x = \xi'F\xi \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{B}(\Delta), \forall \Delta \in \Delta. \quad (\text{C.5})$$

Ainsi, (C.4) réunie avec (C.5) conduit à (C.1).

i) \Rightarrow iii)

L'on suppose que (C.1) est vraie. Puisque Δ est compact, par continuité de $\mathcal{S}_L(\Delta)$ et $\mathcal{S}_R(\Delta)$ par rapport à Δ , il existe un scalaire $\alpha > 0$ suffisamment petit tel que

$$f(x) = x'Tx < 0 \quad \forall x \in \mathcal{B}(\Delta), \quad \forall \Delta \in \Delta, \quad (\text{C.6})$$

où $T = \frac{1}{2}(\Theta + \alpha I)$. En effet, si ce n'est pas le cas, alors

$$\forall k \in \mathbf{N}, \exists \Delta_k \in \Delta \ \& \ x_k \in \mathcal{B}(\Delta_k) : \frac{1}{2}x_k'(T + k^{-1}I)x_k \geq 0 \quad (\text{C.7})$$

(sinon $\alpha = k^{-1}$). Par compacité, il existe une sous-suite (k_h) telle que

$$\Delta_{k_h} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \Delta^\bullet \in \Delta \ \& \ x_{k_h} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} x^\bullet \in \mathcal{E} \quad (\text{C.8})$$

(\mathcal{E} pouvant être considéré comme fermé). Puisque $\mathcal{B}(\Delta)$ dépend continûment de Δ , et puisque Δ^\bullet appartient à Δ , alors la compacité de Δ est transmise à $\mathcal{B}(\Delta)$ et l'on déduit que $x^\bullet \in \mathcal{B}(\Delta^\bullet)$. Donc, il vient

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} x'_{k_h} (T + k_h^{-1} I) x_{k_h} \right) = \frac{1}{2} x^{\bullet \prime} T x^{\bullet} \geq 0. \quad (\text{C.9})$$

Il existe alors $x^{\bullet} \in \mathcal{B}(\Delta^{\bullet})$ tel que $x^{\bullet \prime} T x^{\bullet} \geq 0$ ce qui contredit (C.6). Donc α existe.

Soient la matrice B_{L_1} (respectivement B_{R_1}) telle que $B_{L_1} = V_{L_{\perp}}$ (resp. $B_{R_1} = V_{R_{\perp}}$) et la matrice B_{L_2} (resp. B_{R_2}) telles que les colonnes de $B_L = [B_{L_1} \ B_{L_2}]$ (resp. $B_R = [B_{R_1} \ B_{R_2}]$) engendrent \mathcal{E} . L'on peut alors écrire

$$\forall x \in \mathcal{E}, \exists \left\{ \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}; \pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} \right\} : x = B_L \mu = B_{L_1} \mu_1 + B_{L_2} \mu_2 = B_R \pi = B_{R_1} \pi_1 + B_{R_2} \pi_2. \quad (\text{C.10})$$

L'on peut noter que

$$f(x) = \mu_1' B_{L_1}' T B_{R_1} \pi_1 + \mu_1' B_{L_1}' T B_{R_2} \pi_2 + \mu_2' B_{L_2}' T B_{R_1} \pi_1 + \mu_2' B_{L_2}' T B_{R_2} \pi_2, \quad (\text{C.11})$$

d'où l'on tire,

$$df_{\mu_1}(x) = (B_{L_1}' T B_{R_1} \pi_1 + B_{L_1}' T B_{R_2} \pi_2)' d\mu_1. \quad (\text{C.12})$$

donc les seuls *extrema* de f par rapport à μ_1 doivent vérifier

$$B_{L_1}' T B_{R_1} \pi_1 = -B_{L_1}' T B_{R_2} \pi_2. \quad (\text{C.13})$$

De (C.12) et (C.10), l'on peut aussi déduire que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mu_1^2}(x) = B_{L_1}' T B_{L_1}, \quad (\text{C.14})$$

qui, compte tenu de (C.6), est une matrice définie négative puisque $\text{Ker}(V_L) \subset \mathcal{B}_L(\Delta)$ (il faut remarquer que l'on peut (heureusement) parvenir à la même dérivée seconde en considérant directement la décomposition de x sur B_L). Par conséquent, (C.13) peut conduire à un maximum global qui est donné par

$$\max_{\mu_1} f(x) = \mu_2' B_{L_2}' T x. \quad (\text{C.15})$$

De la même manière, l'on obtient

$$\max_{\pi_1} f(x) = x' T B_{R_2}' \pi_2. \quad (\text{C.16})$$

L'on considère maintenant la matrice

$$H = -(V_L B_{L_2})'^+ B_{L_2}' T B_{R_2} (V_R B_{R_2})^+. \quad (\text{C.17})$$

Il est facile de vérifier, en rappelant que $V_L B_{L_1} = 0$ et $V_R B_{R_1} = 0$, que

$$x'(V_L' H V_R)^H x = -(\mu_2' B_{L_2}' T B_{R_2} \pi_2)^H, \quad \forall x \in \mathcal{E}, \quad (\text{C.18})$$

ce qui, à partir de (C.15), conduit à

$$x'(V_L' H V_R)^H x \leq -(x' T B_{R_2}' \pi_2)^H, \quad \forall x \in \mathcal{E}^*. \quad (\text{C.19})$$

Cette inégalité, de nouveau, à partir de (C.16), conduit à

$$x'(V_L' H V_R)^H x \leq -(x' T x)^H, \quad \forall x \in \mathcal{E}^*, \quad (\text{C.20})$$

$$\Leftrightarrow x'((V_L' H V_R)^H + \Theta)x \leq -\alpha I < 0, \quad \forall x \in \mathcal{E}^*. \quad (\text{C.21})$$

Ceci mène à la première inégalité en (C.3).

L'on considère maintenant un couple de vecteurs $\{z; t\}$ tel que $\xi = [z' \ t']' \in \overline{\mathcal{X}}(\Delta)$. Les deux sous-vecteurs peuvent respectivement s'écrire $z = V_L \hat{x}$ et $t = V_R \hat{x}$, avec $\hat{x} = B_L \hat{\mu} = B_R \hat{\pi}$, en gardant à l'esprit que, puisque $z \in \mathcal{S}_L(\Delta)$ et $t \in \mathcal{S}_R(\Delta)$, alors $\hat{x} \in \mathcal{B}(\Delta) \cup \{0\}$. De nouveau, puisque $V_L B_{L_1} = 0$ et $V_R B_{R_1} = 0$, l'on obtient $\hat{x} = B_{L_2} \hat{\mu}_2 = B_{R_2} \hat{\pi}_2$. Par conséquent, d'après (C.18) et (C.6),

$$(z' H t)^H = -(\hat{\mu}_2' B_{L_2}' T B_{R_2} \hat{\pi}_2)^H = -(\hat{x}' T \hat{x})^H = -f^H(\hat{x}) > 0, \quad (\text{C.22})$$

puisque $\hat{x} \in \mathcal{B}(\Delta)$. Ceci démontre la deuxième inégalité de (C.3).

iii) \Rightarrow ii)

L'on peut remarquer que la seconde inégalité de (C.3), c.-à-d., de manière équivalente, l'inégalité (C.22), peut aussi s'écrire

$$\xi' \bar{\Theta} \xi > 0, \quad \forall \xi \in \bar{\mathcal{B}}(\Delta), \quad \Delta \in \mathbf{\Delta}, \quad (\text{C.23})$$

avec

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & H \\ H' & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.24})$$

et avec l'ensemble $\bar{\mathcal{B}}(\Delta)$ défini par

$$\bar{\mathcal{B}}(\Delta) = \{\xi \in \bar{\mathcal{S}}(\Delta) : \bar{N} \xi = 0\}, \quad \Delta \in \mathbf{\Delta} \quad (\text{C.25})$$

(puisque $\bar{N}_\perp = \bar{V}$). Ainsi l'on retrouve le même type d'inégalité que (C.1) et, en utilisant le même type de raisonnement que celui qui permet de démontrer qu'il existe une matrice H , l'on peut affirmer qu'il existe une matrice $G = G'$ telle que

$$\xi'(\bar{\Theta} + \bar{N}' G \bar{N}) \xi > 0 \quad \forall \xi \in \bar{\mathcal{S}}(\Delta)^*, \quad \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}. \quad (\text{C.26})$$

En définissant $F = \bar{N}' G \bar{N} + \bar{\Theta}$, l'inégalité ci-avant peut être écrite

$$\xi' F \xi > 0 \quad \forall \xi \in \bar{\mathcal{S}}(\Delta)^*, \quad \forall \Delta \in \Delta, \quad (\text{C.27})$$

qui conduit clairement à la deuxième inégalité en (C.2). Enfin, puisque $\bar{N}\bar{V} = 0$, il est clair que la première inégalité en (C.2) peut se déduire de la première inégalité en (C.3) (ou de manière équivalente de (C.21)) ainsi que de l'expression de F . ■

Remarque C.2 *L'hypothèse de compacité permet d'effectuer la démonstration dans le « sens difficile » c.-à-d. **i**) ⇒ **ii**) ou **i**) ⇒ **iii**) mais, même sans cette hypothèse, les implications **ii**) ⇒ **i**) ou **iii**) ⇒ **i**) sont vraies.*

Remarque C.3 *Les matrices F ou H sont appelées multiplieurs.*

C.3 Lien avec la littérature

L'on se concentre ici sur quelques instances particulières du théorème C.1.

• L'on suppose d'abord que $\mathcal{E} = \mathbb{C}^n$, $\mathcal{S}_L(\Delta) = 0$ et $\mathcal{S}_R(\Delta) = 0$. Clairement, l'ensemble Δ n'a pas de sens ici. Dans ce cas, on obtient $\mathcal{B}_L = \text{Ker}(V_L)$ et $\mathcal{B}_R = \text{Ker}(V_R)$. Donc, la condition **i**) s'écrit

$$\begin{cases} V_{L\perp}' \Theta V_{L\perp} < 0 & (\text{ou } V_L V_L' > 0), \\ V_{R\perp}' \Theta V_{R\perp} < 0 & (\text{ou } V_R V_R' > 0). \end{cases} \quad (\text{C.28})$$

De plus, l'ensemble $\bar{\mathcal{S}}(\Delta)$ (et par conséquent le sous-ensemble $\bar{\mathcal{B}}(\Delta)$) se réduit à 0. La deuxième inégalité en (C.3) n'a aucun intérêt alors que la première peut s'écrire

$$(V_L' H V_R)^H + \Theta < 0. \quad (\text{C.29})$$

L'équivalence entre (C.28) et (C.29) est connue sous le nom de *lemme d'élimination des matrices* [329, Theorem 2.3.12], également appelé *lemme de projection* [65, 140].

• Si l'on particularise encore plus au cas où $V = V_L = V_R$ (le produit VV' est supposé défini positif sinon il n'y a aucun intérêt), alors (C.28) devient

$$V_{\perp}' \Theta V_{\perp} < 0. \quad (\text{C.30})$$

L'inégalité en (C.29) devient quant à elle

$$V' X V + \Theta < 0, \quad (\text{C.31})$$

où $X = X' = H + H'$. L'équivalence entre (C.30) et (C.31) est proposée dans [329, corollaire 2.3.5], qui peut être aussi interprété comme un corollaire du lemme de Finsler [131].

• L'on suppose maintenant que $\mathcal{E} = \mathbb{C}^n$, $l = r$, $V_L = V_R = V$, $B = B_L = B_R = [B_1 \ B_2]$ et $\mathcal{S}(\Delta) = \mathcal{S}_L(\Delta) = \mathcal{S}_R(\Delta)$. L'ensemble $\mathcal{B}(\Delta)$ est alors bien sûr défini par

$$\mathcal{B}(\Delta) = \{x \in \mathcal{E} : Vx \in \mathcal{S}(\Delta)\}, \Delta \in \mathbf{\Delta} \quad (\text{C.32})$$

et (C.1) (dont la forme est préservée) est équivalente à l'existence de $X = X' = F_{11} + F_{12} + F'_{12} + F_{22}$, également appelée *multiplieur* (où les matrices $F_{ij} \in \mathbb{C}^{l \times l}$ sont les blocs de F) telle que

$$V'XV + \Theta < 0, \quad (\text{C.33})$$

(particularisant ainsi la première inégalité en (C.2)) et

$$z'Xz \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{S}(\Delta) \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}, \quad (\text{C.34})$$

(particularisant ainsi la deuxième inégalité en (C.2)).

L'équivalence entre (C.1) et (C.33)-(C.34) est la dite *S-procédure abstraite de bloc plein* [321]. Bien entendu, si $\mathcal{S}(\Delta)$ se réduit à zéro, l'on retrouve de nouveau [329, corollaire 2.3.5].

L'on peut remarquer qu'en pratique, $\mathbf{\Delta}$ est directement défini par la relation (C.34). En effet, quand il s'agit d'analyse robuste, le choix suivant est souvent retenu :

$$\mathcal{S}(\Delta) = \text{Ker} \left(\begin{bmatrix} I & -\Delta \end{bmatrix} \right). \quad (\text{C.35})$$

L'inégalité (C.34) devient

$$\begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix}' X \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}, \quad (\text{C.36})$$

et même, dans de nombreux cas, l'inégalité ci-avant est la définition de $\mathbf{\Delta}$ elle-même. En outre, V est souvent choisie ainsi,

$$V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix}, \quad (\text{C.37})$$

de telle sorte que cette instance particulière de la S-procédure abstraite de bloc plein est appelée *S-procédure concrète de bloc plein*. Elle est particulièrement utile pour analyser la robustesse de certaines propriétés des systèmes linéaires via-à-vis d'une incertitude LFT Δ (voir chapitre 2).

• Une autre instance particulière mérite l'attention. Il s'agit du cas où « l'incertitude » est

en réalité liée à une pulsation ω (c.-à-d. $\Delta = i\omega I$), telle que $\underline{\omega} \leq \omega \leq \bar{\omega}$. La pulsation ω appartient alors à l'intervalle considéré si et seulement si (voir [198] par exemple)

$$\begin{bmatrix} i\omega I \\ I \end{bmatrix}' X \begin{bmatrix} i\omega I \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall P = P', \forall Q = Q' > 0, \quad (\text{C.38})$$

où

$$X = \begin{bmatrix} -Q & P + i \left(\frac{\underline{\omega} + \bar{\omega}}{2} \right) Q \\ P - i \left(\frac{\underline{\omega} + \bar{\omega}}{2} \right) Q & -\underline{\omega}\bar{\omega}Q \end{bmatrix}. \quad (\text{C.39})$$

Cette inégalité correspond à (C.34) avec le choix $\mathcal{S}(\Delta) = \mathcal{S}(\omega) = \text{Ker}([I \ i\omega I])$. Il est possible de voir qu'elle fournit l'ensemble de tous les multiplieurs possibles. En effet, en supposant qu'il existe un autre multiplieur X , qui satisfasse (C.38) et ne présente *a priori* pas la même structure que celle donnée par (C.39), mais plutôt, par exemple, la structure générale

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X'_{12} & X_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.40})$$

alors la question est de savoir si X admet tout de même la structure (C.39). L'on fixe d'abord $Q = -X_{11}$ et $P = X_{12} - i \underbrace{\left(\frac{\underline{\omega} + \bar{\omega}}{2} \right)}_{\gamma} X_{11} = X_{12} - i\gamma Q$. (C.38) conduit alors à

$$(-\omega^2 I + 2\omega\gamma I)Q + X_{22} + i\omega(P - P') \geq 0. \quad (\text{C.41})$$

La symétrie de l'expression ne peut être assurée que si $P = P'$ ce qui amène

$$\underbrace{(-\omega^2 I + 2\omega\gamma I)}_{h(\omega)} Q + X_{22} \geq 0. \quad (\text{C.42})$$

L'on peut écrire, sans perte de généralité, que $X_{22} = -\underline{\omega}\bar{\omega}(Q + M)$ avec $M = M'$ quelconque. L'inégalité (C.42) devient

$$(h(\omega) - \underline{\omega}\bar{\omega})Q - \underline{\omega}\bar{\omega}M \geq 0. \quad (\text{C.43})$$

Puisque l'inégalité ci-avant doit définir le disque de centre $i\gamma$ et de rayon $r = \left(\frac{\bar{\omega} - \underline{\omega}}{2} \right)$ (l'inégalité sur le multiplieur et la définition de l'ensemble Δ ne font qu'un dans ce cas), et que le premier terme suffit à définir ce disque dès lors que $Q > 0$, alors le second terme ne peut que modifier le disque décrit sauf s'il est nul. Il suffit donc de constater qu'avec $M = 0$, il vient $X_{22} = -\underline{\omega}\bar{\omega}Q$ et la structure de multiplieur donnée (C.39) est recouverte. La structure (C.39) est donc assez générale. De ce fait, en choisissant

$$V = \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.44})$$

l'on peut voir que (C.1) devient

$$\begin{bmatrix} (i\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}' \Theta \begin{bmatrix} (i\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \underline{\omega} \leq \omega \leq \bar{\omega}. \quad (\text{C.45})$$

D'après la S-procédure de bloc plein, il existe un multiplieur X , dont la structure est donnée par (C.39), tel que (C.33) est satisfaite, c.-à-d.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -Q & P + i \left(\frac{\omega + \bar{\omega}}{2} \right) Q \\ P - i \left(\frac{\omega + \bar{\omega}}{2} \right) Q & -\underline{\omega}\bar{\omega}Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Theta < 0. \quad (\text{C.46})$$

L'équivalence entre (C.45) et (C.46) est connue sous le nom de lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) à fréquence finie [198]. Un raisonnement similaire peut être suivi pour retrouver le lemme KYP généralisé [197]. L'on remarque également que dans l'article [197], le lemme KYP généralisé est démontré par la S-procédure généralisée qui est effectivement sans perte (non conservative) lorsque l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{V'XV : P = P'; Q = Q' > 0\} \quad (\text{C.47})$$

est *séparable de rang 1*. Nous pensons, sans assertion rigoureuse néanmoins, que la preuve de généralité du multiplieur X donné par (C.39) est à rapprocher de la propriété de séparabilité de rang 1.

Remarque C.4 *Le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov classique dans sa version discrète [298] est aussi un cas particulier du théorème présenté. C'est également le cas du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov dans sa version continue [298], en notant que l'axe imaginaire achevé $\mathcal{J} \cup \{i\infty\}$, c.-à-d. compactifié au sens d'Alexandroff [300, 63, 64], présente une topologie commune avec le cercle unitaire \mathcal{C} et peut donc être considéré comme un compact.*

• Pour faire encore plus simple, rappelons qu'une matrice A est $\mathcal{J} \cup \{i\infty\}$ -régulière si et seulement si

$$\det(\lambda I - A) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{J} \cup \{i\infty\} \quad (\text{C.48})$$

$$\Leftrightarrow (\lambda' I - A')(-I)(\lambda I - A) < 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{J} \cup \{i\infty\}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda' I & I \\ -A' & \end{bmatrix}}_{\Theta} \begin{bmatrix} I & -A \\ I & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{J} \cup \{i\infty\}. \quad (\text{C.49})$$

Notons aussi que l'axe imaginaire achevé $\mathcal{J} \cup \{i\infty\}$ est complètement défini par

$$\mathfrak{J} \cup \{\mathbf{i}\infty\} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} \lambda I & I \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}}_X \begin{bmatrix} \lambda I \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \forall P = P' \right\}. \quad (\text{C.50})$$

En appliquant le théorème C.1 pour le choix $V = I$, A est $\mathfrak{J} \cup \{\mathbf{i}\infty\}$ -régulière si et seulement s'il existe $P = P'$ telle que

$$X + \Theta < 0. \quad (\text{C.51})$$

Si l'on réapplique ensuite le lemme d'élimination des matrices (autre cas particulier du théorème C.1 comme il a été vu au début de cette partie), en notant que

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -A \end{bmatrix}_\perp,$$

alors (C.51) est équivalente à

$$A'P + PA < 0. \quad (\text{C.52})$$

Cette inégalité n'est autre que la condition proposée par le théorème 1.11 au chapitre 1 et dans [17] et pour le cas de l'axe imaginaire (l'on retrouve ce résultat dans [179] par exemple), toute considération d'inertie de P mise à part. Si plutôt que $\mathfrak{J} \cup \{\mathbf{i}\infty\}$, l'on considère l'ensemble $\overline{\mathbb{C}^+}$ compactifié (ou achevé), alors le raisonnement est le même si ce n'est que dans la définition du multiplieur X donnée en (C.50), il est nécessaire d'imposer $P > 0$. Il vient alors que la matrice A est stable au sens de Hurwitz si et seulement s'il existe $P = P' > 0$ telle (C.52) est vérifiée, ce qui n'est autre que l'inégalité de Lyapunov [252]. Un raisonnement tout à fait similaire peut conduire à l'inégalité de Stein [332].

C.4 Perspectives

Cette étude est encore à un stade préliminaire et l'ensemble des relations avec les résultats de la littérature n'est sans doute ni complet, ni assez précis. Il serait particulièrement intéressant de voir dans quelle mesure le théorème C.1 peut être rapproché du récent et très intéressant résultat de [164].

Références bibliographiques

- [1] P. Athoklis. Lower bounds for the stability margins of discrete two dimensional Lyapunov equation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I : Fundamental Theory and Applications*, 35 :745–749, 1988.
- [2] M. Ait Rami, S. El Faiz, A. Benzaouia, et F. Tadeo. Robust exact pole placement via an LMI-based algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(2) :394–398, Février 2009.
- [3] B. D. O. Anderson. A system theory for positive real matrices. *SIAM Journal of Control*, 5 :171–182, 1967.
- [4] B. D. O. Anderson. A simplified viewpoint on hyperstability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13(3) :292–294, 1968.
- [5] A. N. Andry, E. Y. Shapiro, et J. C. Chung. Eigenstructure assignment for linear systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 19(5) :711–729, 1983.
- [6] P. Apkarian. *Robustesse de la commande des systèmes multivariables, application au pilotage d'un hélicoptère*. Thèse de doctorat, ENSAE-CERT, Toulouse-France, 1988.
- [7] P. Apkarian, C. Champetier, et J.-F. Magni. Design of a helicopter output feedback control law using modal and structured robustness techniques. *International Journal of Control*, 50(4) :1195–1215, 1989.
- [8] D. Arzelier. *Robustesse en performance et en stabilité des systèmes linéaires incertains : une approche quadratique*. Thèse de doctorat, INSA & LAAS-CNRS, Toulouse-France, 1992.
- [9] D. Arzelier. *Théorie de Lyapunov, commande robuste et optimisation*. Mémoire d'habilitation à diriger les recherches, LAAS-CNRS, Toulouse, France, juin 2004.
- [10] D. Arzelier, J. Bernussou, et G. Garcia. Pole assignment of linear uncertain systems in a sector via a Lyapunov-type approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(7) :1128–1132, juillet 1993.
- [11] D. Arzelier, D. Peaucelle, et S. Sahli. Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems. Dans *IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND)*, Milan, Italie, 2003.
- [12] C. R. Ashokkumar et R. K. Yedavalli. Eigenstructure perturbation analysis in disjointed domains for linear uncertain systems. *International Journal of Control*, 67(6) :887–899, 1997.
- [13] O. Bachelier. *Commande des systèmes linéaires incertains : placement de pôles robuste en D-stabilité*. Thèse de doctorat, INSA & LAAS-CNRS, Toulouse-France, 1998.

- [14] O. Bachelier, J. Bernussou, M. C. de Oliveira, et J. C. Geromel. Parameter dependant Lyapunov design : numerical evaluation. Dans *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 293–297, Phoenix, Arizona, USA, décembre 1999.
- [15] O. Bachelier, J. Bosche, et D. Mehdi. About pole placement via eigenstructure assignment approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(9) :1554–1558, septembre 2006.
- [16] O. Bachelier, J. Bosche, et D. Mehdi. On matrix root-clustering in a combination of first order regions. Dans *IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND)*, Toulouse, France, juillet 2006.
- [17] O. Bachelier, D. Henrion, B. Pradin, et D. Mehdi. Robust matrix root-clustering in intersections or unions of subregions. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 43(3) :1078–1093, 2004.
- [18] O. Bachelier et D. Mehdi. Robust D_U -stability analysis. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(6) :533–558, mai 2003.
- [19] O. Bachelier et D. Mehdi. *LMI approach to stability of some class of nD -polynomial matrices : Application to the stability of nD -systems*. Rapport de recherche no. 20060117OB, LAII-ESIP, Université de Poitiers, France, novembre 2006.
- [20] O. Bachelier et D. Mehdi. *On the KYP lemma, the hybrid Roesser models and the matrix ∂D -regularity*. Rapport de recherche no. 20060916OB, LAII-ESIP, Université de Poitiers, France, septembre 2006.
- [21] O. Bachelier et D. Mehdi. Robust matrix root-clustering through extended KYP lemma. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 45(1) :368–381, 2006.
- [22] O. Bachelier et D. Mehdi. Non-iterative pole placement technique : A step further. *Journal of the Franklin Institute*, 345(3) :267–281, Mai 2008.
- [23] O. Bachelier, W. Paszke, et D. Mehdi. On the KYP lemma and the multidimensional models. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 19(3-4) :425–447, Décembre 2008.
- [24] O. Bachelier, D. Peaucelle, et D. Arzelier. Computing a robust D -stability bound using a parameter-dependent Lyapunov approach. *IEE Proceeding - Control Theory and applications*, 149(6) :505–510, novembre 2002.
- [25] O. Bachelier, D. Peaucelle, D. Arzelier, et J. Bernussou. A precise robust matrix root-clustering analysis with respect to polytopic uncertainty. Dans *American Control Conference (ACC)*, Chicago - USA, juillet 2000.
- [26] O. Bachelier et B. Pradin. Robust pole assignment in a second order region via Lyapunov approach. Dans *IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND)*, pages 417–422, Budapest, Hongrie, juin 1997.
- [27] O. Bachelier et B. Pradin. Robust pole placement in a specified convex region of the complex plane. Dans *IFAC Conference on Systems, Structure and Control (SSC)*, Nantes, France, juillet 1998.
- [28] O. Bachelier et B. Pradin. Robust regional eigenvalue assignment. Dans *IMACS-IEEE Multi-conference on Computational Engineering in Systems Application (CESA)*, Nabeul-Hammamet, Tunisie, avril 1998.
- [29] O. Bachelier et B. Pradin. Robust root-clustering analysis in a union of subregions. Dans *American Control Conference (ACC)*, volume 3, pages 1874–1878, Philadelphie, USA, juin 1998.

- [30] O. Bachelier et B. Pradin. Bounds for uncertain matrix root-clustering in a union of subregions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9(6) :333–359, mai 1999.
- [31] O. Bachelier et B. Pradin. À propos des bornes pour le placement robuste dans un secteur. *APII-JESA : Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 34(1) :107–134, 2000.
- [32] O. Bachelier et B. Pradin. Robust matrix root-clustering in a union of Ω -subregions. *International Journal of Systems Science*, 32(4) :467–478, 2001.
- [33] O. Bachelier et B. Pradin. ∂D -regularity for robust matrix root-clustering. Dans *IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND)*, Milan, Italie, 2003.
- [34] O. Bachelier, B. Pradin, et I. Chouaib. Bounds for robust eigenvalue assignment in a sector. Dans *European Control Conference (ECC)*, volume 3, Bruxelles, Belgique, juillet 1997.
- [35] W. Bakker, J. S. Luo, et A. Johnson. Performance robustness bounds for linear systems to guarantee root-clustering in second order subregions of the complex plane. Dans *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 3467–3472, San Antonio, Texas, USA, décembre 1993.
- [36] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46(4) :399–408, août 1985.
- [37] B. R. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Comp. New York, 1994.
- [38] S. Barnett. A note on matrix equations and root location. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20 :158–159, 1975.
- [39] S. Basu. Multidimensional causal, stable, perfect reconstruction filter banks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 49(6) :832–842, 2002.
- [40] G. Becker. *Quadratic stability and performance of linear, parameter-dependent systems*. PhD Thesis, Mechanical Engineering, University of California, Berkeley, USA, 1993.
- [41] R. Bellman. *Introduction to matrix analysis*. McGraw Hill, New York, USA, 1960.
- [42] R. Bellman. Kronecker product and the second method of Lyapunov. *Mathematische Nachrichten*, 20(1-2) :17–19 (Réédition d'un rapport technique de 1957), 2006.
- [43] S. Bennett. *A history of control engineering (1800-1930)*. Peter Peregrinus Ltd, Londres, Royaume Uni, 1979.
- [44] S. Bennett. *A history of control engineering (1930-1959)*. Peter Peregrinus Ltd, Londres, Royaume Uni, 1993.
- [45] B. Bernhardsson, A. Rantzer, et L. Qiu. Real perturbation values and real quadratic forms in complex vector space. *Linear Algebra and Its Applications*, 270 :131–154, 1998.
- [46] J. Bernussou. *Commande robuste - Développements et applications*. Éditions Hermes, France, 1996.
- [47] J. Bernussou, J. C. Geromel, et P. L. D. Peres. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 13 :65–72, juillet 1989.
- [48] H. S. Black. Stabilized feedback amplifiers. *Bell System Technical Journal*, 13 :1–18, 1934.

- [49] Y. Blanco, W. Perruquetti, et P. Borne. Stability and stabilizability of T-S fuzzy models. *Mathematical Problems in Engineering*, 7 :221–240, 2001.
- [50] V. D. Blondel et A. Megretski (Coordinateurs). *Open Problems on Mathematical Theory of Systems*. Livre électronique disponible en téléchargement sur Internet : <http://www.inma.ucl.ac.be/blondel/op/opmtns.pdf>, 2002.
- [51] V. D. Blondel et A. Megretski (Éditeurs). *Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory*. Princeton University Press, 2004.
- [52] V. D. Blondel, E. Sontag, M. Vidyasagar, et J. C. Willems (Éditeurs). *Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory*. Springer-Verlag, Londres, Royaume Uni, 1999.
- [53] J. Bochniak et K. Gałkowski. LMI-based analysis for continuous-discrete linear shift invariant nD-systems. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 14(2) :1–26, 2005.
- [54] J. Bochniak, K. Gałkowski, O. Bachelier, D. Mehdi, et A. Kummert. State feedback stabilization of discrete-time, linear, doubly switched systems. Dans *Internationales Wissenschaftliches Kolloquium*, Ilmenau, Allemagne, 2004.
- [55] J. Bosche. *Analyse robuste en D_U -stabilité et commande par placement de pôles*. Thèse de doctorat, LAII-ESIP, Université de Poitiers, France, 2003.
- [56] J. Bosche et O. Bachelier. Bi-polytopic Lyapunov functions for robust stability and fragility analysis of discrete-time systems. Dans *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Las Vegas, Nevada-USA, 2002.
- [57] J. Bosche, O. Bachelier, et D. Mehdi. Placement de pôles roboratif par retour statique d'état. *APII-JESA : Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 36(10) :1413–1437, 2002.
- [58] J. Bosche, O. Bachelier, et D. Mehdi. Robustness bound for matrix D_U -stability. Dans *European control Conference (ECC)*, Cambridge, Royaume Uni, septembre 2003.
- [59] J. Bosche, O. Bachelier, et D. Mehdi. An approach for robust matrix root-clustering analysis in a union of regions. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 22 :227–239, 2005.
- [60] N. K. Bose. *Applied Multidimensional System Theory*. Van Nostrand Reinhold Company, New-York, USA, 1982.
- [61] N. K. Bose. *Multidimensional System Theory*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Pays Bas, 1984.
- [62] N. K. Bose. *Multidimensional Systems Theory. Progress, Directions and Open Problems in Multidimensional Systems*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Pays Bas, 1985.
- [63] N. Bourbaki. *Topologie générale, chapitre 1 à 4*. Diffusion C.C.L.S., 1974.
- [64] N. Bourbaki. *Topologie générale, chapitre 5 à 10*. Diffusion C.C.L.S., 1974.
- [65] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron, et V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Volume 15 de la série "SIAM Studies in Applied Mathematics", USA, 1994.
- [66] R. N. Bracewell. *Two-dimensional Imaging*. Prentice Hall Signal Processing Series. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, USA, 1995.
- [67] R. Brockett et C. Byrnes. Multivariable Nyquist criteria root loci, pole placement : a geometric approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26 :271–284, 1981.

- [68] P. Brucker. *Scheduling algorithms*. Springer, 4ème édition, avril 2004.
- [69] L. Carotenuto et G. Franzè. A general formula for eigenvalue assignment by static output feedback with applications to robust design. *Systems & Control Letters*, 49 :175–190, 2003.
- [70] M. Chaabane, O. Bachelier, M. Souissi, et D. Mehdi. Stability and stabilization of continuous descriptor systems : an LMI approach. *Mathematical Problems in Engineering*, pages 1–15, 2006.
- [71] M. Chadli. *Stabilité et Commande de systèmes décrits par des multimodèles*. Thèse de doctorat, INPL, Vandœuvre-Lès-Nancy, France, décembre 2002.
- [72] M. Chadli, D. Maquin, et J. Ragot. Stability analysis and design for continuous-time Takagi-Sugeno control systems. *International Journal of Fuzzy Systems*, 7(3), 2005.
- [73] C. Champetier et J.-F. Magni. Analyse et synthèse de lois de commande modale. *La Recherche Aérospatiale*, 6 :17–35, 1989.
- [74] C. Champetier et J.-F. Magni. On eigenstructure assignment by gain output feedback. *SIAM Journal of Control and Optimisation*, 29(4) :848–865, 1991.
- [75] S. S. L. Chang et T. K. C. Peng. Adaptive guaranteed cost control systems with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17 :474–483, 1972.
- [76] G. Chesi. On the non-conservatism of a novel LMI relaxation for robust analysis of polytopic systems. *Automatica*, 44 :2973–2976, 2008.
- [77] G. Chesi, A. Garulli, et A. Tesi. Solving quadratic distance problems : An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(2) :200–212, Février 2003.
- [78] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, et A. Vicino. Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems : An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3) :365–370, Mars 2005.
- [79] M. Chilali. *Méthode LMI pour la synthèse multi-critère*. Thèse de doctorat, Université Paris IX-Dauphine, U.F.R. Mathématiques de la Décision, Paris, France, 1996.
- [80] M. Chilali et P. Gahinet. H_∞ design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :358–367, mars 1996.
- [81] M. Chilali, P. Gahinet, et P. Apkarian. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(12) :2257–2269, décembre 1999.
- [82] J.-H. Chou et W.-H. Liao. Regional eigenvalue-clustering robustness analysis for singular systems with structured parameter perturbations. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 212(6) :467–471, 1998.
- [83] I. Chouaib. *Placement et robustesse de structure propre*. Rapport de DEA, INSA & LAAS-CNRS, Toulouse, France, 1991.
- [84] I. Chouaib. *Placement et robustesse de structure propre*. Thèse de doctorat, INSA, Toulouse, France, 1994.
- [85] I. Chouaib et B. Pradin. *Placement de structure propre*. Rapport de recherche 92135, LAAS-CNRS, Toulouse, France, 1992.
- [86] I. Chouaib et B. Pradin. Bornes pour la robustesse du placement de pôles dans une région. Dans *Automatique, Génie Informatique, Image (AGI)*, pages 87–90, Poitiers, France, juin 1994.

- [87] I. Chouaib et B. Pradin. Eigenstructure assignment with robust root clustering in an ellipse. Dans *IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND)*, Rio de Janeiro, Brésil, septembre 1994.
- [88] I. Chouaib et B. Pradin. Logarithmic and vector norms for robust root clustering. Dans *IEEE Workshop on Robust Control via Variable Structure & Lyapunov Techniques (VSLT)*, Benevento, Italie, septembre 1994.
- [89] I. Chouaib et B. Pradin. On mode decoupling with minimum sensitivity by eigenstructure assignment. Dans *IEEE Melecon'94*, volume 2, pages 663–666, Antalya, Turquie, avril 1994.
- [90] I. Chouaib et B. Pradin. Performance robustness with eigenspace assignment. Dans *IEE-Control'94*, volume 2, pages 1164–1169, Coventry, Royaume Uni, mars 1994.
- [91] I. Chouaib et B. Pradin. Eigenstructure assignment with robust root clustering using logarithmic norms. Dans *European Control Conference (ECC)*, volume 4, pages 3400–3405, Rome, Italie, septembre 1995.
- [92] I. Chouaib et B. Pradin. Parameters bounds for root clustering of uncertain matrices. *International Journal of Systems Science*, 26(9) :1601–1615, septembre 1995.
- [93] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Éditions Masson, France, 1982.
- [94] A. Cohn. Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. *Mathematische Zeitschrift*, 14(1) :110–148, 1922.
- [95] C. Courties. *Sur la commande robuste et LPV de systèmes à paramètres lentement variables*. Thèse de doctorat, INSA & LAAS-CNRS, Toulouse-France, 1999.
- [96] C. Courties, J. Bernussou, et G. Garcia. H_∞ robust control for polytopic uncertain systems. Dans *IMACS-IEEE Multi-conference on Computational Engineering in Systems Application (CESA)*, Nabeul-Hammamet, Tunisie, avril 1998.
- [97] J. Daafouz. *Robustesse en performance des systèmes linéaires incertains : placement de pôles et coût garanti*. Thèse de doctorat, INSA & LAAS-CNRS, Toulouse-France, 1997.
- [98] J. Daafouz et J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5) :355–359, août 2001.
- [99] J. Daafouz, J. Bernussou, et J. C. Geromel. On inexact LPV control design of continuous-time polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(7) :1674–1678, 2008.
- [100] L. Dai. *Singular Control Systems*. Springer-Verlag, 1989.
- [101] C. R. Darwin. *On the origin of species by means of natural selection in the struggle for life*. John Murray. Première édition, 1859.
- [102] C. R. Darwin. *The origin of species by means of natural selection - Réédition*. Adamant Media Corporation, 2005.
- [103] E. J. Davison. On pole assignment in linear systems with incomplete state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15 :348–351, juin 1970.
- [104] E. J. Davison. A note on pole assignment in linear systems with incomplete state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16 :98–99, 1971.
- [105] E. J. Davison et N. Ramesh. A note on the eigenvalues of a real matrix. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16 :252–253, avril 1970.

- [106] E. J. Davison et S. Wang. On pole assignment in linear multivariable systems using output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20 :516–518, 1975.
- [107] M. C. de Oliveira. Decomposition of a polynomial as a Sum-Of-Squares of polynomials and the S-procedure. Dans *Joint European Control Conference (ECC) - IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1654–1659, Séville, Espagne, décembre 2005.
- [108] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, et J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4), juillet 1999.
- [109] E. C. de Paiva, R. Santos-Mendes, et P. A. V. Ferreira. A constrained optimization approach for robust pole placement. Dans *European Control Conference (ECC)*, volume 6, Bruxelles, Belgique, juillet 1997.
- [110] R. Descartes. *La Géométrie*. Imprimerie Maire, Leyde, Pays Bays (disponible à la Bibliothèque de France), 1637.
- [111] C. A. Desoer, R. W. Liu, J. Murray, et R. Saeks. Feedback system design : The fractional representation approach to analysis and control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25 :399–412, 1980.
- [112] E. Deutsch. On matrix norms and logarithmic norms. *Numerical Mathematics*, 24 :49–51, 1975.
- [113] M. Dinh. *Synthèse dépendant de paramètres par optimisation LMI de dimension finie : application à la synthèse de correcteurs reréglables*. Thèse de doctorat, LAP - Greyc Auto, Université de Caen/Basse-Normandie, Caen, France, décembre 2005.
- [114] M. Dinh, G. Scorletti, V. Fromion, et E. Magarotto. Parameter dependent hinf nity control by fi nite dimensional lmi optimization : application to trade-off dependent control. *International Journal of Robsut and Nonlinear Control*, 15 :383–406, 2005.
- [115] C. Doll. *La robustesse de lois de commande pour des structures flexibles en a éronautique et espace*. Thèse de doctorat-ingénieur, ENSAE (SupAéro), Toulouse-France, 2001.
- [116] R. C. Dorf et R. H. Bishop. *Modern Control Systems (11th edition)*. Prentice Hall, 2007.
- [117] J. C. Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEE Proceedings Pt D*, 129(6) :242–250, novembre 1982.
- [118] J. C. Doyle. *Workshop on advances in multivariable control*. ONR/Honewell, Lectures notes, 1984.
- [119] C. Du et L. Xie. LMI approach to output feedback stabilization of 2-D discrete-systems. *International Journal of Control*, 72(2) :97–106, 1999.
- [120] C. Du et L. Xie. *H_∞ control and fi ltering of two dimensional systems*. Springer Verlag, Berlin, 2002.
- [121] G. R. Duan. Simple algorithm for robust pole assignment in linear output feedback. *IEE Proceedings Pt D*, 139(5) :465–469, septembre 1992.
- [122] G.-R. Duan. Robust eigenstructure assignement via dynamical compensators. *Automatica*, 29 :469–474, 1993.
- [123] G. Duc et S. Font. *Commande H_∞ et μ -analyse : des outils pour la robustesse*. Éditions Hermes, 2000.
- [124] D. E. Dudgeon et R. M. Merserau. *Multidimensional Digital Signal Processing*. Prentice-Hall Signal Processing Series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, USA, 1984.

- [125] B. Dziurla et R. Newcomb. The Drazin inverse and semi-state equations. Dans *International Symposium on Mathematical Theory of Networks and systems (MTNS)*, pages 283–289, Delft, Pays Bas, juillet 1979.
- [126] Y. Ebihara, Y. Ito, et T. Hagiwara. Exact stability analysis of 2-D systems using LMIs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(9) :1509–1513, 2006.
- [127] M. M. Fahmy et J. O'Reilly. On eigenstructure assignment in linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(3) :690–693, 1982.
- [128] M. M. Fahmy et H. S. Tantawy. Eigenstructure assignment via linear state-feedback control. *International Journal of Control*, 40(1) :161–178, 1984.
- [129] M. K. H. Fan, A. L. Tits, et J. C. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(1) :25–38, janvier 1991.
- [130] E. Féron, P. Apkarian, et P. Gahinet. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter dependant Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41 :436–442, 1996.
- [131] P. Finsler. Über das Vorkommen definitiver und semidefinitiver Formen in Scharen quadratischer Formen : Comment. *Commentarii Mathematici Helvetica*, 9 :188–192, 1937.
- [132] L. R. Fletcher, J. Kautsky, G. K. G. Kolka, et N. K. Nichols. Some necessary and sufficient conditions for eigenstructure assignment. *International Journal of Control*, 42(6) :1457–1468, 1985.
- [133] E. Fornasini et G. Marchesini. Doubly indexed dynamical systems : state-space models and structural properties. *Mathematical Systems Theory*, 12 :59–72, 1978.
- [134] A. L. Fradkov. Duality theorems for certain nonconvex extremal problems. *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 14(2) :357–383, mars-avril 1973.
- [135] G. J. Franklin, J. D. Powell, et A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley, Massachusetts, USA, 1986.
- [136] B. Friedland. *Control System Design : An Introduction to State-Space Methods*. Dover Publications, 2005.
- [137] M. Fu. Pole placement via static output feedback is NP-hard. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(5) :855–857, mai 2004.
- [138] P. Fu, J. Chen, et S.-I. Niculescu. Generalized eigenvalue-based stability tests for 2-D linear systems : Necessary and sufficient conditions. *Automatica*, 42 :1569–1576, 2006.
- [139] K. Furuta et S. B. Kim. Pole assignment in a specified disk. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(5) :423–427, mai 1987.
- [140] P. Gahinet et P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4 :421–448, 1994.
- [141] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, et M. Chilali. *LMI Control Toolbox*. The MathWorks, Inc., 1995.
- [142] K. Gałkowski et J. Wood (Éditeurs). *Multidimensional Signals, Circuits and Systems*. Série : Systems and Control Book. Taylor and Francis, Londres, Royaume Uni, 2001.
- [143] K. Gałkowski, J. Lam, E. Rogers, S. Xu, B. Sulikowski, W. Paszke, et D. H. Owens. LMI based stability analysis and robust controller design for discrete linear repetitive processes. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(13) :1195–1211, 2003.

- [144] K. Gałkowski, J. Lam, S. Xu, et Z. Lin. LMI approach to state feedback stabilization of multidimensional systems. *International Journal of Control*, 76(14) :1428–1436, 2003.
- [145] K. Gałkowski, Z. Lin, S. Xu, et J. Lam. LMI approach to stability analysis of three-dimensional systems. *Bulletin of The Polish Academy of Sciences - Technical Sciences*, 51(4) :361–379, 2003.
- [146] K. Gałkowski, D. Mehdi, E. Rogers, et O. Bachelier. State feedback stabilization of discrete-time repetitive processes with switched dynamics. Dans *Mathematical Theory of Networks and Systems MTNS'04*, Louvain, Belgique, 2004.
- [147] K. Gałkowski, W. Paszke, E. Rogers, S. Xu, J. Lam, et D. H. Owens. Stability and control of differential repetitive processes using an LMI setting. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - II : Analog and Digital Signal Processing*, 50 :662–666, 2003.
- [148] F. P. Gantmacher et V. A. Yakubovich. Absolute stability margin of nonlinear control systems. Dans *2nd All-Union Session on Theoretical and Applied Mechanics*, Moscou, Russie (URSS), 1966.
- [149] F. R. Gantmacher. *Theory of matrices (2 volumes)*. Chelsea Publishing, New York, 1959.
- [150] G. Garcia et J. Bernussou. Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1) :184–190, janvier 1995.
- [151] G. Garcia, J. Bernussou, et D. Arzelier. Robust stabilization of discrete-time linear systems with norm bounded time-varying uncertainty. *Systems & Control Letters*, 22 :327–339, 1994.
- [152] G. Garcia, J. Bernussou, J. Daafouz, et D. Arzelier. Robust quadratic stabilization. Chapitre 5 dans *Robust Flight Control : A design challenge, LNCIS 224, Springer-Verlag*, 1997.
- [153] G. Garcia, J. Daafouz, et J. Bernussou. Output feedback disk pole assignment for systems with positive real uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(9) :1385–1391, septembre 1996.
- [154] G. Garcia, B. Pradin, et F. Zeng. Stabilization of discrete time linear systems by static output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12) :1954–1958, décembre 2001.
- [155] J. D. Gardiner. Computation of stability bounds for state-space models with structured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(2) :253–256, février 1997.
- [156] Y. Genin, Y. Hachez, Y. Nesterov, et P. Van Dooren. Optimization problems over positive pseudopolynomial matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 25(1) :57–79, 2003.
- [157] Y. Genin, Y. Hachez, Y. Nesterov, R. Stefan, P. Van Dooren, et S. Xu. Positivity and linear matrix inequalities. *European Journal of Control (ECC)*, 8(3) :275–298, 2002.
- [158] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, et L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and its Applications*, 285 :69–80, 1998.
- [159] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, et J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 29(2) :381–402, mars 1991.
- [160] L. El Ghaoui, F. Oustry, et M. AitRami. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8) :1171–1176, août 1997.
- [161] B. Gille. *Les Mécaniciens Grecs*. Éditions du Seuil, 1980.

- [162] D. E. Goldberg. *Algorithmes génétiques : exploration, optimisation et apprentissage automatique*. Addison Wesley, France, 1980.
- [163] Y. Le Gorrec. *Commande modale robuste et synthèse de gains autoséquentés. Approche multimodèle*. Thèse de doctorat, ENSAE (SupAéro), Toulouse, France, 1998.
- [164] M. R. Graham, M. C. de Oliveira, et R. A. de Callafon. Frequency domain inequalities via linear matrix inequalities. Dans *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, La Nouvelle Orléans, Louisiane, USA, Décembre 2007.
- [165] T.-M. Guerra et L. Vermeiren. Conditions for non quadratic stability of discrete fuzzy models. Dans *IFAC advances on fuzzy and neural control*, pages 15–20, Valence, Espagne, 2001.
- [166] S. V. Gusev et A. L. Likhtarnikov. Kalman-Popov-Yakubovich lemma and the S-procedure : A historical essay. *Automation and Remote Control*, 67(11) :1768–1810, 2006.
- [167] S. Gutman. Root-clustering of a complex matrix in an algebraic region. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(4) :647–650, 1979.
- [168] S. Gutman. Root-clustering of a real matrix in an algebraic region. *International Journal of Control*, 29(5) :871–880, 1979.
- [169] S. Gutman et E. I. Jury. A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4) :853–863, août 1981.
- [170] W. Hahn. Eine Bemerkung zur zweiten Method von Lyapunov. *Mathematische Nachrichten*, 14 :349–354, 1956.
- [171] S. Hecker et A. Varga. Generalized LFT-based representation of parametric models. *European Journal of Control*, 10(4) :326–337, 2004.
- [172] B. Hency et A. G. Alleyne. A KYP lemma for LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(10) :1926–1930, octobre 2007.
- [173] D. Henrion, O. Bachelier, et M. Šebek. D-stability of polynomial matrices. *International Journal of Control*, 74(8) :845–856, 2001.
- [174] D. Henrion et J.-B. Lasserre. Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(2) :192–202, 2006.
- [175] D. Henrion, J. Löfberg, M. Kocvara, et M. Stingl. Solving polynomial static output feedback problems with PENBMI. Dans *Joint European Control Conference (ECC) - IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Séville, Espagne, décembre 2005.
- [176] D. Henrion et G. Meinsma. Rank-one LMIs and Lyapunov’s inequality. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8) :1285–1288, 2001.
- [177] R. Hermann et C. Martin. Applications of algebraic geometry to systems theory : Part 1. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22 :19–25, 1977.
- [178] C. Hermite. Sur le nombre de racines d’une équation algébrique comprise entre des limites données. *Journal für die reine und angewandte Mathematik. Journal de Crelle*, 52 :39–51, 1856.
- [179] R. D. Hill. Eigenvalue location using certain matrix functions and geometric curves. *Linear algebra and its applications*, 16 :83–91, 1977.
- [180] T. Hinamoto. 2-D Lyapunov equation and filter design based on the Fornasini-Marchesini second model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I : Fundamental Theory and Applications*, 40(2) :102–110, 1993.

- [181] D. Hinrichsen et B. Kelb. Stability radii and spectral value sets for real matrix perturbations. *Systems and Networks : Mathematical Theory and applications, Vol II, Invited and contributed papers, Akademie-Verlag, Berlin*, pages 217–220, 1994.
- [182] D. Hinrichsen et A. J. Pritchard. Stability radii of linear systems. *Systems & Control Letters*, 7(1) :1–10, février 1986.
- [183] D. Hinrichsen et A. J. Pritchard. Stability radius for structured perturbations and the algebraic riccati equation. *Systems & Control Letters*, 8(2) :105–113, décembre 1986.
- [184] P. Hippe et J. O'Reilly. Parametric compensator design. *International Journal of Control*, 45(4) :1455–1468, 1987.
- [185] L. (Édition) Hogben. *Handbook of linear algebra*. Discrete Mathematics and its applications. Chapman & Hall / CRC, 2006.
- [186] C. W. J. Hol et C. W. Scherer. Sum of squares relaxations for polynomial semidefinite programming. Dans *Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MNTS)*, Louvain, Belgique, juillet 2004.
- [187] C. W. J. Hol et C. W. Scherer. A sum of squares approach to fixed-order H_∞ synthesis, (Chapitre contributif). Dans *Positive polynomials in control*, Signal Processing, Optimization and Control. (Éditeurs : D. Henrion et A. Garulli), LNCIS Springer Verlag, Berlin, 2005.
- [188] J. H. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor, USA, 1975.
- [189] R. A. Horn et C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- [190] R. A. Horn et C. R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- [191] I. R. Horng, H. Y. Horng, et J. H. Chou. Eigenvalue clustering in subregions of the complex plane for interval dynamic systems. *International Journal of Systems Science*, 24(5) :901–914, 1993.
- [192] M. Hou et A. C. Pugh. An explicit solution to eigenstructure assignment. Dans *European Control Conference (ECC)*, Bruxelles, Belgique, juillet 1997.
- [193] J. L. Howland. Matrix equations and the separation of matrix eigenvalues. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 33 :683–691, 1971.
- [194] A. Hurwitz. Über die Bedingungen, unter welchem eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen realen Teilen besitzt. *Mathematische Annalen.*, 46 :273–284, 1895.
- [195] A. Hurwitz. *On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts*. Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory. Dover, Édité par R. Bellman et R. Kalaba, New-York, USA, 1964.
- [196] J. Y. Ishihara et M. H. Terra. On the Lyapunov theorem for singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11) :1926–1930, 2002.
- [197] T. Iwasaki et S. Hara. Generalized KYP lemma : unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1) :41–59, 2005.
- [198] T. Iwasaki, G. Meinsma, et M. Fu. Generalized S–procedure and finite frequency KYP lemma. *Mathematical Problems in Engineering*, 6 :305–320, 2000.
- [199] T. Iwasaki et G. Shibata. LPV system analysis via quadratic separator for uncertain implicit systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8) :1195–1208, Août 2001.

- [200] T. A. Johansen. Computation of Lyapunov function for smooth nonlinear systems using convex optimization. *Automatica*, 36 :1617–1626, 2000.
- [201] J. Jones. On the Lyapunov stability criteria. *Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM)*, 13(4) :941–945, Décembre 1965.
- [202] Y-T Juang. Eigenvalue assignment robustness : the analysis for autonomous system matrices. *International Journal of Control*, 49(5) :1787–1797, 1989.
- [203] Y. T. Juang. Robust stability and robust pole assignment of linear systems with structured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(5) :635–637, mai 1991.
- [204] Y. T. Juang, Z. C. Hong, et Y. T. Wang. Lyapunov approach to robust pole assignment analysis. *International Journal of Control*, 49 :921–927, 1989.
- [205] Y. T. Juang, Z. C. Hong, et Y. T. Wang. Robustness of pole-assignment in a specified region. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(7) :758–760, juillet 1989.
- [206] E. I. Jury. Inners, approach to some problems of system theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16 :233–240, juin 1971.
- [207] E. I. Jury. *Inners and stability of dynamic systems*. Wiley, New York, USA, 1974.
- [208] E. I. Jury. Stability of multidimensional scalar and matrix polynomial. *Proceedings of the IEEE*, 66 :1018–1047, 1978.
- [209] E. I. Jury et S. M. Ahn. Remarks on the root-clustering of polynomial in a certain region in the complex plane. *Quarterly of Applied Mathematics*, pages 203–205, juillet 1974.
- [210] T. Kaczorek. *Two Dimensional Linear Systems - Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [211] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1980.
- [212] R. E. Kalman. Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control. *Proceedings of National Academic Science, USA*, 49 :201–205, 1963.
- [213] R. E. Kalman. Algebraic characterization of polynomial whose zeros lie in a certain algebraic domain. *Proceedings of National Academic Science, USA*, 64 :818–823, mai 1969.
- [214] R. E. Kalman et R. Bucy. New results in linear filtering and prediction. *Journal of Basic Engineering (ASME)*, 83D :98–101, 1961.
- [215] J. Kautsky, N. K. Nichols, et P. Van Dooren. Robust pole assignment in linear state feedback. *International Journal of Control*, 41(5) :1129–1155, 1985.
- [216] P. Khargonekar, I. R. Petersen, et K. Zhou. Robust stabilization of uncertain linear systems : Quadratic stabilizability and H_∞ control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35 :356–361, 1990.
- [217] V. L. Kharitonov et J. A. Torres Muñoz. Robust stability of multivariate polynomials. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 10 :7–20, 1999.
- [218] H. Kiendl, J. Adamy, et P. Stelzner. Vector norms as Lyapunov functions for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6) :839–842, juin 1992.
- [219] H. Kimura. Pole assignment by gain output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 509–516, 1975.
- [220] H. Kimura. On pole assignment by output feedback. *International Journal of Control*, 28(1) :11–22, 1978.
- [221] K. H. Kiritsis. A necessary condition for pole assignment by constant output feedback. *Systems & Control Letters*, 45 :317–320, 2002.

- [222] G. Klein et B. C. Moore. Eigenvalue generalized eigenvector assignment with state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22, 1977.
- [223] M. Kojima. *Sum of squares relaxations of semidefinite programs*. Rapport de recherche B-397, Dept. Math. Comp. Sc., Tōkyō Inst. Tech., Japon, novembre 2003.
- [224] P. V. Kokotovic, R. E. O'Malley Jr., et P. Sannuti. Singular perturbations and order reduction in control theory - An overview. *Automatica*, 12 :123–132, Mars 1976.
- [225] S. R. Kolla, R. K. Yedavalli, et J. B. Farison. Robust stability bounds on time-varying perturbations for state-space models of linear discrete-time systems. *International Journal of Control*, 50(1) :151–159, 1989.
- [226] A. Kruzewski. *Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : mise sous forme LMI*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, Valenciennes, France, décembre 2006.
- [227] A. Kruzewski et T.-M. Guerra. Conditions of output stabilization for uncertain fuzzy models. Dans *IFAC World Congress*, Prague, République tchèque, Juillet 2005.
- [228] A. Kruzewski et T.-M. Guerra. New approaches for the stabilization of discrete Takagi-Sugeno fuzzy models. Dans *Joint European Control Conference (ECC) - IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Séville, Espagne, décembre 2005.
- [229] A. Kruzewski, R. Wang, et T.-M. Guerra. Non-quadratic stabilization conditions for a class of uncertain nonlinear discrete-time T-S fuzzy models : A new approach. Dans *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU)*, Paris, France, juillet 2006.
- [230] V. Kučera. *Discrete linear control : The polynomial equation approach*. Wiley, New-York, USA, 1974.
- [231] C.-H. Kuo et C.-H. Fang. An LMI approach to admissibilization of uncertain descriptor systems via static output feedback. Dans *American Control Conference (ACC)*, volume 4, Denver, Colorado, USA, Juin 2003.
- [232] B. H. Kwon et M. J. Youn. Eigenvalue generalized eigenvector assignment by output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(5), 1987.
- [233] J. Lam et H. K. Tam. Regional pole placement with eigenstructure robustness. *International Journal of Systems Science*, 28(5) :507–515, 1997.
- [234] P. Lancaster. *Theory of matrices*. New York : Academic, 1969.
- [235] J.-B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM Journal on Optimization*, 11(3) :796–817, 2001.
- [236] V. S. J. Leite et P. L. D. Peres. An improved LMI condition for D-stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3) :500–504, mars 2003.
- [237] F. L. Lewis. A survey of linear singular systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 5(1) :3–36, 1986.
- [238] C. Lin, J. Lam, J. L. Wang, et G.-H. Yang. Analysis on robust stability for interval descriptor systems. *Systems & Control Letters*, 42 :267–278, 2001.
- [239] C. Lin, J. Wang, D. Wang, et C. B. Soh. Robustness of uncertain descriptor systems. *Systems & Control Letters*, 31 :129–138, 1997.
- [240] C. Lin, J. L. Wang, G.-H. Yang, et J. Lam. Robust stabilization via state feedback for descriptor systems with uncertainties in the derivative matrix. *International Journal of Control*, 73(5) :407–415, 2000.

- [241] G. P. Liu et R. J. Patton. Robust control design using eigenstructure assignment and multi-objective optimization. *International Journal of Systems Science*, 27(9) :871–879, 1996.
- [242] G. P. Liu et R. J. Patton. *Eigenstructure assignment for control system design*. John Wiley Sons, 1998.
- [243] G. P. Liu et R. J. Patton. Robust control design based on parametric eigenvalue assignment. *International Journal of Systems Science*, 29(1) :65–74, 1998.
- [244] W. S. Lu. On a Lyapunov approach to stability analysis of 2-D digital filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I : Fundamental Theory and Applications*, 41(10) :665–669, octobre 1994.
- [245] W.-S. Lu et A. Antoniou. *Two-dimensional Digital Filters*, volume 80 de *Electrical Engineering and Electronics*. Marcel Dekker, Inc., New York, USA, 1992.
- [246] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8 :74–80, 1964.
- [247] D. G. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11 :190–197, avril 1966.
- [248] D. G. Luenberger. Dynamic equations in descriptor forms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22 :312–321, Mars 1977.
- [249] J. S. Luo, P. P. J. Van den Bosch, et S. Weiland. New sufficient condition for robust root clustering of linear state space models with structured uncertainty. *IEE Proceedings on Control Theory Applications*, 143(3) :244–246, mai 1996.
- [250] J. S. Luo, A. Johnson, et P. P. J. Van Den Bosch. Lyapunov stability robust analysis and robustness design for linear continuous-time systems. *International Journal of Control*, 61(6) :1233–1251, 1995.
- [251] J. S. Luo, A. Johnson, et P. P. J. Van Den Bosh. New Lyapunov robustness bounds for pole assignment in a specified region. Dans *IFAC World Congress*, volume 2, pages 495–498, Sydney, Australie, juillet 1993.
- [252] A. Lyapunov. *Problème général de la stabilité du mouvement*. Annales de la Faculté de Sciences de Toulouse, 1907, traduit en Français du texte original en Russe, Kharkov, 1892.
- [253] N. Maamri, O. Bachelier, et D. Mehdi. Pole placement in a union of regions with prescribed subregion allocation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 72(1) :38–46, 2006.
- [254] J. M. Maciejowski. *Multivariable feedback design*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [255] J.-F. Magni. *Analyse et commande des systèmes à plusieurs échelles de temps*. Thèse de doctorat-ingénieur, ENSAE (SupAéro), Toulouse-France, 1981.
- [256] J.-F. Magni. *Commande modale des systèmes multivariables*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier Toulouse III, France, 1987.
- [257] J.-F. Magni, Y. Le Gorrec, et C. Chiappa. *Multi modal control*. Rapport de recherche, ONERA-CERT, DERA, Toulouse, France, 1997.
- [258] C. Manceaux-Cumer. *Techniques de commande robuste*. Thèse de doctorat, ENSAE (SupAéro), Toulouse, France, 1998.
- [259] C. Manceaux-Cumer et J.-P. Chrétien. Minimal LFT form of a spacecraft built up from two bodies. Dans *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Montréal, Québec, Canada, août 2001.

- [260] B. Marx. *Contribution à la commande et au diagnostic des systèmes algébro-différentiels linéaires*. Thèse de doctorat, INPG, Grenoble, France, décembre 2003.
- [261] I. Masubuchi. Stability and stabilization of implicit systems. Dans *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, volume 4, pages 3636–3641, Sydney, Australie, 2000.
- [262] I. Masubuchi. Dissipativity inequalities for continuous-time descriptor systems with applications to synthesis of control gains. *Systems & Control Letters*, 55 :158–164, 2005.
- [263] I. Masubuchi. Output feedback controller synthesis for descriptor systems satisfying closed-loop dissipativity. *Automatica*, 43 :339–345, 2007.
- [264] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, et N. Suda. H_∞ control for descriptor systems : A matrix inequalities approach. *Automatica*, 33(4) :669–673, 1997.
- [265] O. Mayr. *The origins of feedback control*. The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, USA et Londres, Royaume Uni, 1970.
- [266] A. G. Mazko. The Lyapunov matrix equation for a certain class of regions bounded by algebraic curves. *Soviet Automatic Control*, 13 :37–42, 1980.
- [267] A. Megretski. Integral quadratic constraints derived from the set-theoretic analysis of difference inclusion. Dans *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Kobe, Japon, 1996.
- [268] A. Megretski et A. Rantzer. Systems analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6) :819–830, 1997.
- [269] D. Mehdi, O. Bachelier, et K. Gałkowski. State feedback stabilization of a class of discrete-time linear time variant systems. Dans *Mathematical Theory of Networks and Systems MTNS'04*, Louvain, Belgique, 2004.
- [270] D. Mehdi, E. Boukhas, et O. Bachelier. Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 21(1) :1–13, janvier 2004.
- [271] Z. Michalewicz, T. D. Logan, et S. Swaminathan. Evolutionary operators for continuous convex parameter spaces. Dans *Annual Conference on Evolutionary Programming*, San Diego, Californie, USA, février 1994.
- [272] B. C. Moore. On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21 :689–692, 1976.
- [273] Y. Morère, T.-M. Guerra, et L. Vermeiren. Stabilisation non quadratique de modèles flus discrets. Dans *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*, pages 69–73, Lille, France, 2000.
- [274] P. C. Müller. Modified Lyapunov equations for LTI descriptor systems. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 28(4), octobre–décembre 2006.
- [275] C. N. Nett, C. A. Jacobson, et M. J. Balas. A connection between state-space and doubly coprime-fractional representations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29 :831–832, 1984.
- [276] N. K. Nichols. Robustness in partial pole assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-32(8) :727–732, août 1987.
- [277] K. Ogata. *Modern control engineering - Second edition*. Prentice Hall International Editions, 1990.

- [278] A. Ostrowski et H. Schneider. Some theorems on the inertia of general matrices. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 4 :72–84, 1962.
- [279] A. Packard et J. Doyle. Quadratic stability with real and complex perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(2) :198–201, février 1990.
- [280] P. C. Parks. A new proof of Hermite’s stability criterion and a generalization of Orlando’s formula. *International Journal of Control*, 26(2) :197–206, 1977.
- [281] P. A. Parrilo. Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems. *Mathematical Programming*, 96(2) :293–320, 2003.
- [282] R. V. Patel et M. Toda. Quantitative measures of robustness for multivariable systems. Dans *Joint Automatic Control Conference*, TP-8A, San Francisco, Californie, USA, 1980.
- [283] R. J. Patton et G. P. Liu. Robust control design via eigenstructure assignment, genetic algorithms and gradient-based optimisation. *IEE Proceedings on Control Theory Applications*, 141(3) :202–208, mai 1994.
- [284] D. Peaucelle. *Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par des fonctions de Lyapunov dépendant de paramètres*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier Toulouse III, Toulouse, France, juillet 2000.
- [285] D. Peaucelle et D. Arzelier. An efficient numerical solution for H_2 static output feedback synthesis. Dans *European Control Conference (ECC)*, Porto, Portugal, septembre 2001.
- [286] D. Peaucelle et D. Arzelier. Ellipsoidal sets for resilient and robust static output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(6) :899–904, juin 2005.
- [287] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, et J. Bernussou. A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1) :21–30, mai 2000.
- [288] D. Peaucelle, D. Arzelier, D. Henrion, et F. Gouaisbault. Quadratic separation for feedback connection of an uncertain matrix and an implicit linear transformation. *Automatica*, 43 :796–804, 2007.
- [289] P. L. D. Peres. *Sur la robustesse des systèmes linéaires, approche par programmation linéaire*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier Toulouse III & LAAS-CNRS, France, 1989.
- [290] I. R. Petersen. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Systems & Control Letters*, 8 :351–357, 1987.
- [291] M. Piekarski. Algebraic characterization of matrices whose multivariable characteristic polynomial is Hermitian. Dans *International Symposium on Operator Theory of Networks and Systems*, pages 121–126, Lubbock, Texas, USA, 1977.
- [292] V. M. Popov. Nouveaux critères de stabilité pour les systèmes automatiques non linéaires. *Revue d’électronique et d’énergétique*, 5(1) :1–16, 1960.
- [293] V. M. Popov. *L’hyperstabilité des systèmes automatiques*. Dunod, Paris, 1973.
- [294] B. Pradin et A. Fossard. *Systèmes multivariables*. Notes de cours, INSA, Toulouse, France, 1997.
- [295] L. Qiu, B. Bernhardsson, A. Rantzer, E. J. Davison, P. M. Young, et J. C. Doyle. A formula for computation of the real stability radius. *Automatica*, 31(6) :879–890, 1995.
- [296] J. R. Ragazzini et G. F. Franklin. *Sampled-data control systems*. McGraw-Hill, New-York, USA, 1958.

- [297] D. C. W. Ramos et P. L. D. Peres. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time systems. *Systems & Control Letters*, 43 :371–378, 2001.
- [298] A. Rantzer. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Systems & Control Letters*, 28 :7–10, 1996.
- [299] R. M. Redheffer. On a certain linear fractional transformation. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 39 :269–286, 1960.
- [300] F. Reinhardt et H. Soeder. *Atlas des Mathématiques*. Encyclopédies d’aujourd’hui. Le livre de poche (La Pochothèque), traduit du texte original *dtv-Atlas zur Mathematik*, 1997.
- [301] P. Remaud. *Une histoire de la génèse de l’automatique en France*. Thèse de doctorat, CNAM, Paris, France, 2004.
- [302] J.-M. Renders. *Algorithmes génétiques et réseaux de neurones : application à la commande de processus*. Hermes Sciences, France, 1995.
- [303] A. Rey. *Dictionnaire historique de la langue française*. Dictionnaires Le Robert, 1998.
- [304] R. Riadi. *D_U -stabilité robuste et formalisme LFT*. Rapport de DEA, LAII-ESIP, Université de Poitiers, France, 2004.
- [305] R. P. Roesser. A discrete state-space model for linear image processing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20 :1–10, 1975.
- [306] E. Rogers, K. Gałkowski, et D. H. Owens. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes*, volume 349 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, Allemagne, 2007.
- [307] G. Roppenecker. Minimum norm output feedback design under specified eigenvalue areas. *Systems & Control Letters*, 3 :101–103, juillet 1983.
- [308] G. Roppenecker. On parametric state feedback design. *International Journal of Control*, 43(3) :793–804, 1986.
- [309] G. Roppenecker et J. O’Reilly. Parametric output feedback controller design. Dans *IFAC World Congress*, pages 275–280, Munich-Germany, 1987.
- [310] G. Roppenecker et J. O’Reilly. Parametric output feedback controller design. *Automatica*, 25(2) :259–265, 1989.
- [311] H. H. Rosenbrock. Structural properties of linear dynamical systems. *International Journal of Control*, 20(2) :191–202, 1974.
- [312] H. H. Rosenbrock et A. C. Pugh. Contributions to a hierarchical theory of systems. *International Journal of Control*, 19(5) :845–867, 1974.
- [313] J. Rosenthal, J. M. Schumacher, et J. C. Willems. Generic eigenvalue assignment by memoryless real output feedback. *Systems & Control Letters*, 26 :253–260, 1995.
- [314] J. Rosenthal et F. Sottile. Some remarks on real and complex output feedback. *Systems & Control Letters*, 33 :73–80, 1998.
- [315] M. A. Rotea, M. Corless, D. Da, et I. R. Petersen. Systems with structured uncertainty : Relations between quadratic and robust stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(5) :799–803, mai 1993.
- [316] E. J. Routh. *A treatise on the stability of a given state of motion*. Macmillan and co., Londres, Royaume Uni, 1877.
- [317] M. G. Safonov. *Stability and robustness of multivariable feedback systems*. Signal Processing, Optimization and Control. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 1980.

- [318] M. G. Safonov. Stability margins for diagonally perturbed multivariable feedback systems. *IEEE Proceedings Pt D*, 129 :251–256, novembre 1982.
- [319] B. Sari, O. Bachelier, et D. Mehdi. *Robust S-regularity of matrix pencils applied to the analysis of descriptor models*. Rapport de recherche, LAII-ESIP, Université de Poitiers, submitted to *Linear Algebra and its Applications*, France, 2007.
- [320] B. Sari, O. Bachelier, et D. Mehdi. A $\partial\mathcal{D}$ -regularity approach to the robust analysis of descriptor models. Dans *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Cancun, Mexique, Décembre 2008.
- [321] C. W. Scherer. LPV control and full block multipliers. *Automatica*, 37 :361–375, 2001.
- [322] C. W. Scherer. LMI relaxations in robust control. To appear in *European Journal of Control*, 2006.
- [323] G. Schreier, J. Ragot, P. M. Franck, et G. L. Gissinger. Bounds of parameter uncertainties for robust stability of linear uncertain systems. *International Journal of Systems Science*, 29(1) :85–90, 1998.
- [324] I. Schur. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (I). *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 147 :205–232, 1917.
- [325] I. Schur. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (II). *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 148 :122–145, 1918.
- [326] I. Schur. Über algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen. *Z. angew. Math. Mech.*, 1 :307–311, 1921.
- [327] M. E. Sezer et D. D. Šiljak. A note on robust stability bounds. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(11) :1212–1215, novembre 1989.
- [328] Y. Q. Shi et X. M. Zhang. A new two-dimensional interleaving technique using successive packing. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 49(6) :779–789, 2002.
- [329] R. E. Skelton, T. Iwasaki, et K. Grigoriadis. *A unified approach to linear control design*. Taylor and Francis series in Systems and Control, 1997.
- [330] M. Šebek. On 2-D pole placement. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(8) :819–822, 1985.
- [331] M. Šebek. n -D matrix polynomial equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(5) :499–502, 1988.
- [332] P. Stein. Some general theorems on iterants. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 48 :82–83, 1952.
- [333] C. Stéphanos. Sur une extension du calcul des substitutions linéaires. *Journal des Mathématiques Pures Appliquées*, 6 :73–128, 1900.
- [334] T. Ström. On logarithmic norms. *SIAM Journal on Numerical Analysis.*, 12(5) :741–753, octobre 1975.
- [335] M. Sugeno et G. T. Kang. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, 28 :15–33, 1988.
- [336] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato, et K. Grigoriadis. Static output feedback - a survey. *Automatica*, 33(2) :125–137, 1997.
- [337] V. L. Syrmos et F. L. Lewis. Output feedback eigenstructure assignment using two sylvester equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(3) :495–499, mars 1993.

- [338] V. L. Syrmos et F. L. Lewis. A bilinear formulation for the output feedback problem in linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(2) :410–414, février 1994.
- [339] K. Takaba, N. Morihira, et T. A. Katayama. A generalized Lyapunov theorem for descriptor system. *Systems and Control Letters*, 24(1) :49–51, 1995.
- [340] M. Takagi et M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. *IEEE Transactions on Man and Cybernetics - Part C*, 15(1) :116–132, 1985.
- [341] K. Tanaka, T. Hori, et H. O. Wang. A fuzzy Lyapunov approach to fuzzy control and design. Dans *American Control Conference (ACC)*, pages 4790–4795, Arlington, USA, 2001.
- [342] K. Tanaka, T. Ikeda, et H. O. Wang. Robust stabilization of uncertain nonlinear systems via fuzzy control : Quadratic stability, H_∞ control theory and LMIs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1) :1–12, 1996.
- [343] K. Tanaka, T. Ikeda, et H. O. Wang. Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and LMI-based design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2) :1–16, 1998.
- [344] K. Tanaka, M. Nishimura, et H. O. Wang. Multi-objective fuzzy control of high rise/high speed elevators using LMIs. Dans *American Control Conference (ACC)*, pages 3450–3454, Philadelphie, Pennsylvanie, USA, 1998.
- [345] A. Tesi et A. Vicino. Robust stability of state-space models with structured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(2) :191–195, février 1990.
- [346] F. Tisseur et N. J. Higham. Structured pseudospectra for polynomial eigenvalue problems, with applications. *SIAM Journal of Matrix Analysis and Application*, 23(1) :187–208, 2001.
- [347] L. N. Trefethen. Pseudospectra of matrices (éditeurs : D. F. Griffiths et G. A. Watson). *Numerical analysis*, 29 :234–266, 1992.
- [348] L. N. Trefethen. Pseudospectra of linear operators. *SIAM Review*, 39(3) :383–406, 1997.
- [349] N. F. Trubitsyn. Synthesis of the characteristic polynomial of a linear system. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, traduction anglaise officielle de Izvestiya Akademika Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya, 36(1) :21–24, 1997.
- [350] A. Varga. On stabilization methods of descriptor systems. *Systems & Control Letters*, 24(2) :133–138, 1995.
- [351] G. C. Verghese, B. C. Lévy, et T. Kailath. A generalized state-space for singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4) :361–375, Août 1981.
- [352] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1978.
- [353] S.-G. Wang. Comments on 'Perturbation bounds for root-clustering of linear systems in a specified second order subregion'. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41 :766–767, 1996.
- [354] X. Wang. Grassmannian, central projection, and output feedback pole assignment of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(6) :786–794, juin 1996.
- [355] J. Willems et W. Hesselink. Generic properties of the pole placement problem. Dans *IFAC World Congress*, pages 1725–1739, Helsinki, Finlande, 1978.
- [356] J. C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6) :621–634, 1971.

- [357] J. C. Willems. Dissipative dynamical, part I : General theory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 45 :321–351, 1972.
- [358] J. C. Willems. Dissipative dynamical, part II : Linear systems with quadratic supply rates. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 45 :352–393, 1972.
- [359] W. M. Wonham. On pole assignment in multi-input controllable linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(6) :660–665, juin 1967.
- [360] W. M. Wonham. *Linear multivariable control : a geometric approach*. Springer, New York, USA, 1979.
- [361] S. Xu et J. Lam. Robust stability and stabilization of discrete singular systems : an equivalent characterization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(4) :568–574, 2004.
- [362] S. Xu, J. Lam, Z. Lin, K. Gałkowski, W. Paszke, B. Sulikowski, E. Rogers, et D. H. Owens. Positive real control of two-dimensional systems : Roesser models and linear repetitive processes. *International Journal of Control*, 76(11) :1047–1058, 2003.
- [363] S. Xu, J. Lam, Y. Zou, Z. Lin, et W. Paszke. Robust H_∞ filtering for uncertain 2D-continuous systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53 :1731–1758, 2005.
- [364] S. Xu et C. Yang. Stabilization of discrete-time singular systems : a matrix inequality approach. *Automatica*, 35 :1613–1617, 1999.
- [365] V. A. Yakubovich. The solution to certain matrix inequalities in automatic control theory. *Dokl. Akad. Nauk. (URSS)*, 143 :1304–1307, 1962.
- [366] V. A. Yakubovich. S-procedure in nonlinear control theory. *Vestnik Leningrad Univ.*, 1 :62–77, 1971.
- [367] K. Yang et R. Orsi. Static output feedback pole placement via a trust region approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(11) :2146–2150, novembre 2007.
- [368] R. K. Yedavalli. Improved measures of stability robustness for linear state space models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(6) :577–579, juin 1985.
- [369] R. K. Yedavalli. Flight control application of new stability robustness bounds for linear uncertain systems. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 16(6) :1032–1037, novembre-décembre 1993.
- [370] R. K. Yedavalli. Robust root clustering for linear uncertain systems using generalized Lyapunov theory. *Automatica*, 29(1) :237–240, janvier 1993.
- [371] R. K. Yedavalli. Necessary and sufficient vertex solutions for robust stability analysis of families of linear state space systems. *Journal of Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B : Algorithms and Applications*, 11 :489–508, 2004.
- [372] R. K. Yedavalli et Z. Liang. Reduced conservatism in stability robustness bounds by state transformation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(9) :863–866, septembre 1986.
- [373] D. C. Youla, H. A. Jabr, et J. J. Bongiorno. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers, part II : The multivariable case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21 :319–338, 1976.
- [374] L. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and design processes. *IEEE Transactions on Man and Cybernetics - Part C*, 3(1) :28–44, 1973.
- [375] Z. Zahreddine. Explicit relationships between Routh-Hurwitz and Schur-Cohn types of stability. *Irish Mathematical Society Bulletin*, 29 :49–54, 1992.

- [376] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2) :301–320, avril 1981.
- [377] K. Zhou et P. P. Khargonekar. Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(7) :621–623, juillet 1987.

CURRICULUM VITÆ DÉTAILLÉ

Ce *curriculum vitæ* se propose de présenter nos diverses activités professionnelles en enseignement et en recherche, durant notre thèse, mais surtout, depuis notre intégration au sein du département Génie Électrique et Informatique Industrielle (GEII) de l'IUT de Poitiers et du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle (LAI) de L'École Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers (ESIP).

Olivier BACHELIER

<http://laid.univ-poitiers.fr/bachelier>



Adresse professionnelle :

L.A.I.I.-E.S.I.P.
Bâtiment de Mécanique
40, avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS CEDEX
Tel : 05-49-45-36-79
Fax : 05-49-45-40-34

Adresse personnelle :

Résidence « Le Clos Chantenay »
Appartement 147
8, rue du Père Jean Fleury
86000 POITIERS

ou

I.U.T. de Poitiers
Département G.E.I.I.
6, allée Jean Monnet
B.P. 389
86010 POITIERS CEDEX
Tel : 05-49-45-34-82

Renseignements administratifs :

Né le 26 avril 1971 à Châteauroux (36)
Marié, un enfant
Nationalité Française

Courriel : Olivier.Bachelier@univ-poitiers.fr

SITUATION ACTUELLE

- Maître de conférences au département Génie Électrique et Informatique Industrielle (GEII) de l'Institut Universitaire de Technologie (IUT) de Poitiers depuis septembre 1999.
- Recherche effectuée au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle (LAI) de l'École Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers (ESIP), EA1219.

L'IUT de Poitiers et l'ESIP sont des composantes de l'Université de Poitiers.

FORMATION

1989 : Baccalauréat C mention Très Bien (Lycée Pierre & Marie Curie - Châteauroux).

1994 : Diplôme d'Ingénieur en **Automatique-Électronique-Informatique** de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSAT).

1994 : D.E.A. **Automatique et Informatique Industrielle** (spécialité **Automatique**) de l'INSAT - Mention Bien.

1995-1998 : Doctorat de l'INSAT (**Spécialité Automatique-Informatique Industrielle**) : *Commande des systèmes linéaires incertains : placement de pôles robuste en \mathcal{D} -stabilité.* - Mention Très Honorable.

Jury :

Président :	J. Bernussou, Directeur de Recherche, LAAS-CNRS
Rapporteurs :	Ph. de Larminat, Professeur, École Centrale de Nantes A. Oustaloup, Professeur, ENSEIRB
Examineurs :	G. Garcia, Maîtres de Conférences, INSAT D. Mehdi, Professeur, IUT de Poitiers A. Richard, Professeur, Université de Nancy
Directeur de thèse :	B. Pradin, Professeur, INSAT

STAGES ET EXPERIENCES PROFESSIONNELLES DIVERSES

- août 89 : Préparation en magasin à l'usine OCÉ France de Châteauroux.
- juillet 90 : Manutention au SERNAM Châteauroux.
- étés 91 et 92 : Travail d'agent administratif au service Planning de l'usine OCÉ France de Châteauroux : conversations téléphoniques quotidiennes en anglais avec des interlocuteurs de l'usine mère de Venlo (Pays Bas).
- été 93 : Stage dans la société IMMÉDIA (Ingénierie Multi-Média) au Mans : création de supports de cours pour des stages de formation en Bureautique et Informatique organisés par le CESI-Centre (Orléans) et installation de divers logiciels et cartes sur PC.
- mars 94-sept. 94 : Stage d'ingéniorat et de DEA au LAAS-CNRS.
- oct. 94-juil. 95 : Service National à la Base Aérienne 101 de Francazal (31) : mise au point de macro-commandes permettant d'imprimer systématiquement les cartes de travail des personnels assurant la maintenance des avions et hélicoptères militaires ; tâches bureautiques diverses.
- oct. 95-sept. 98 : Thèse de doctorat en Automatique en tant qu'allocataire de recherche ; inscription à l'INSAT et activité de recherche au LAAS-CNRS.
Monitorat d'enseignement supérieur : enseignements effectués au département Génie Électrique et Informatique (DGEI) de L'INSAT.
- sept. 98-août 99 : Enseignement et recherche en temps qu'ATER : recherche effectuée au LAAS-CNRS, enseignements dispensés au DGEI de l'INSAT.

LANGUES

Anglais : bon niveau, à savoir lecture régulière d'articles scientifiques en langue anglaise, présentation orale de travaux lors de conférences internationales, quelques enseignements effectués dans cette langue à l'occasion d'une collaboration du LAII avec l'Université Technologique de Monterrey (Mexique), lecture de biographies et ouvrages historiques.

Allemand : notions.

Japonais : quelques rudiments appris pour le plaisir.

CENTRES D'INTÉRÊT

- Pratique du *jūdō* pendant dix ans
- Pratique occasionnelle du football
- Pratique de l'*aikibudō*
- Dessin
- Histoire du Japon médiéval



a



b



c



d

a. Le *jūdōka* japonais Koga Toshihiko effectuant une « projection d'épaule ».

b. Dans la rubrique « Le saviez-vous ? » : le but inscrit par Michel Platini sur coup-franc face aux Pays Bas en 1981 qualifi a la France à la coupe du Monde de 1982. La trajectoire du ballon dite « en feuille morte » fi t aussi l'objet d'une simulation sur ordinateur par un spécialiste des simulations biomécaniques... ou quand la science et le sport se rejoignent.

c. Après le placement des pôles, le déplacement d'épaule.

d. Dessin de *samurai* extrait de la bande dessinée *Kogaratsu* par Boss (scénariste) et Michetz (dessinateur).

ACTIVITÉS D'ENSEIGNEMENT

Les enseignements cités ci-après ont été ou sont actuellement pratiqués, *depuis 1995*, dans le cadre :

- du MONITORAT D'INITIATION A L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR (1995-1998), au premier cycle et au Département de Génie Électrique et Informatique (DGEI) de l'INSA de Toulouse ;
- d'un contrat d'ATER (1998-1999), au Département de Génie Électrique et Informatique (DGEI) de l'INSA de Toulouse ;
- du service de MAÎTRE DE CONFÉRENCES (depuis 1999), au département de Génie Électrique et Informatique Industrielle (GEII) de l'IUT de Poitiers, de la spécialité Génie Électrique et Automatique (GEA) de l'ESIP et de diverses moutures de DEA et Master (aujourd'hui Master Réseau-Communication-Automatique (RCA)) de l'Université de Poitiers.

Les différents volumes horaires ne sont pas précisés (le cumul n'a pas été tenu à jour), pas plus que les périodes durant lesquelles ces enseignements ont été (ou sont) dispensés.

INFORMATIQUE

▷ **Travaux pratiques d'algorithmique et programmation ADA**
avec des élèves de 1^{ère} année du premier cycle de l'INSA de Toulouse.

Encadrement des étudiants qui réalisent, sur PC, de petits programmes en ADA illustrant les concepts vus en cours et en TD :

- *Analyse descendante ;*
- *Structures de contrôle ;*
- *Structures de données : variables, types, sous-types, manipulation de tableaux ;*
- *Sensibilisation aux problèmes de lisibilité, indentation, lexicographie, commentaires ;*
- *Style de programmation ;*
- *Détection d'erreurs.*

▷ **Travaux pratiques d'algorithmique et programmation ADA**
avec des élèves de 2^{ème} année du premier cycle de l'INSA de Toulouse.

Encadrement des étudiants qui réalisent, sur PC, de petits programmes en ADA illustrant les concepts vus en cours et en TD, ainsi qu'un projet correspondant à 12 heures de TP :

- *Sous-procédures* ;
- *Fonctions* ;
- *Passage de paramètres, variables globales, variables locales* ;
- *le type « Article » (c.-à-d. la structure d'agrégat)* ;
- *Manipulation des fichiers*.

▷ **Travaux dirigés et pratiques d'algorithmique et programmation en C**
avec des élèves de 1^{ère} année du département GEII de l'IUT de Poitiers.

Encadrement des étudiants qui réalisent, en salle, de petits algorithmes, et sur PC, de petits programmes en C illustrant les concepts vus en cours :

- *Structures de base* ;
- *Alternatives* ;
- *Itérations* ;
- *Tableaux* ;
- *Procédures, fonctions, passage de paramètres simples* ;
- *Passage de paramètres de types tableaux* ;
- *Chaînes de caractères*.

▷ **Travaux pratiques de programmation d'un micro-contrôleur**
avec des élèves de 1^{ère} année du département GEII de l'IUT de Poitiers.

Encadrement des étudiants qui réalisent, sur PC, de petits programmes en *Assembleur* puis en *C* implantés et testés sur un μC 68HC11 :

- *Différents modes d'adressage en Assembleur* ;
- *Branchements directs et conditionnels* ;
- *Interruptions* ;
- *Gestions des convertisseurs* ;
- *Gestion de timer* ;
- *Gestion d'un afficheur, etc.*

▷ **Cours, travaux dirigés et travaux pratiques de programmation d'un micro-contrôleur**
avec des élèves la filière *Apprentissage* de 1^{ère} année du département GEII de l'IUT de Poitiers.

Travaux pratiques réalisés sur μC 68HC11 (seul le langage *Assembleur* 68000 était concerné pour cette partie d'enseignement) :

- *Structure et fonctionnement d'un μC* ;
- *Différents modes d'adressage en Assembleur* ;
- *Branchements directs et conditionnels* ;
- *Interruptions* ;
- *Gestions de timer* ;
- *Gestion d'un afficheur, etc.*

ÉLECTRONIQUE

▷ **Travaux dirigés et travaux pratiques d'électronique analogique**
avec des élèves de 1^{ère} année de l'IUT du département GEII de Poitiers.

Illustration des notions vues en cours :

- *Amplificateur opérationnel ;*
- *Fonctions de base réalisées à l'aide des amplificateurs opérationnels ;*
- *Filtres actifs de base réalisés à l'aide des amplificateurs opérationnels ;*
- *Défauts des amplificateurs opérationnels ;*
- *Montages non linéaires, comparateurs ;*
- *Montages à base de diodes ;*
- *Transistors à effet de champ ;*
- *Transistors bipolaires ;*
- *Transmission infrarouge (analogique et numérique) ;*
- *Amplificateur de puissance (push-pull), etc.*

▷ **Projet tuteuré d'électronique analogique**
avec des élèves de 2^{ème} année de l'IUT du département GEII de Poitiers.

Réalisation d'un robot filoguidé utilisant un capteur magnétique.

PHYSIQUE

▷ **Travaux pratiques sur les capteurs**
avec des élèves de 1^{ère} année du département GEII de l'IUT de Poitiers.

Les enseignements de physique au département GEII de l'IUT sont très axés sur la notion de capteurs aussi ces rares séances de TP étaient-elles consacrées à la réalisation, sous LABVIEW et avec l'aide d'une carte d'acquisition / restitution, du pilote d'un codeur incrémental mesurant la position d'un chariot mobile sur un rail.

MATHÉMATIQUES

▷ Travaux dirigés et travaux pratiques

avec des élèves de 1^{ère} année du département GEII de l'IUT de Poitiers.

Illustration, en TP, de l'ensemble des notions vues en cours à l'aide du logiciel MUPAD et, en TP, des notions suivantes :

- *Équations différentielles de premier et deuxième ordre ;*
- *Matrices ;*
- *Transformation de Laplace.*

AUTOMATIQUE

▷ Travaux dirigés d'automatique des systèmes linéaires à temps discret

avec les élèves de 4^{ème} année spécialité *Génie Informatique et Industriel* du DGEI de l'INSA de Toulouse.

Illustration des concepts vus en cours par des exercices sur papier, ponctués de vérifications des résultats et de simulations réalisées à l'aide du logiciel MATLAB.

- *Modèles des systèmes à temps discret : rappel des modèles continus, méthodes de passage aux modèles échantillonnés (fonction de transfert en z , représentation d'état, équation récurrente) ;*
- *Régulation de niveau et de température dans une cuve à eau : modélisation du procédé en temps continu, linéarisation, discrétisation, et simulation des réponses indicelles discrètes ;*
- *Stabilité des systèmes discrets ;*
- *Calcul de correcteurs numériques par discrétisation de correcteurs analogiques ;*
- *Commandabilité, observabilité, commande par retour d'état, calcul d'observateurs ;*
- *Synthèse de correcteurs RST.*

▷ Travaux dirigés d'automatique des systèmes linéaires à temps discret

avec les élèves de 4^{ème} année spécialité *Automatique-Électronique-Informatique* du DGEI de l'INSA de Toulouse.

Illustration des concepts vus en cours par des exercices sur papier, ponctués de vérifications des résultats et de simulations réalisées à l'aide des logiciels MATLAB et SIMULINK.

Le programme inclut celui mentionné à la rubrique précédente. Toutefois, les notions sont plus approfondies et d'autres points sont abordés :

- *Rappels sur l'Automatique des systèmes linéaires à temps continu (modélisation, analyse et commande) ;*

- *Initiation à l'utilisation du logiciel SIMULINK ;*
- *Réglage d'un régulateur PID et système anti-saturation ;*
- *Commande de la cuve par retour d'état ; introduction au phénomène de couplage entrées/sorties rencontré en multivariable ;*
- *Sensibilisation au problème d'incertitude de modélisation et de robustesse de la loi de commande.*

▷ **Bureau d'études de systèmes multivariables**

avec les élèves de 5^{ème} année spécialité *Automatique-Électronique-Informatique* (orientation *Automatique*) du DGEI de l'INSA de Toulouse.

Illustration à l'aide de MATLAB de quelques méthodes de commande des systèmes linéaires continus multi-entrées/multi-sorties sur un modèle simplifié d'avion de ligne :

- *Placement de structure propre par retour d'état ;*
- *Placement partiel de pôles par retour statique de sortie ;*
- *Placement total de pôles par retour statique de sortie ;*
- *Commande non-interactive ;*
- *Sensibilisation aux problèmes de robustesse et de conditionnement des valeurs propres.*

▷ **Cours d'automatique des systèmes linéaires à temps continu**

avec les élèves de 3^{ème} année spécialité *Génie Informatique et Industriel* du DGEI de l'INSA de Toulouse.

- *Introduction à l'Automatique ;*
- *Modélisation des systèmes linéaires continus : équation différentielle, fonction de transfert, représentation d'état ;*
- *Réponses harmoniques et temporelles des systèmes ;*
- *Stabilité des systèmes linéaires ;*
- *Réglage des systèmes continus.*

▷ **Travaux dirigés, travaux pratiques et projet d'automatique des systèmes à temps continu**

avec les élèves de 2^{ème} année du département GEII de l'IUT de Poitiers.

En TD :

- *Systèmes de premier ordre ;*
- *Systèmes de deuxième ordre ;*
- *Associations de fonctions de transfert ;*
- *Réponses fréquentielles et temporelles ;*
- *Modélisation d'un système bouclé (antenne parabolique)*
- *Stabilité qualitative des systèmes (boucle ouverte, boucle fermée) ;*
- *Marges de stabilité ;*
- *Précision des systèmes bouclés ;*
- *Influence d'une perturbation ;*
- *synthèse de PID (Ziegler-Nichols, méthode fréquentielle, compensation de pôle) ;*

En TP ou projet :

- *Systèmes de premier ordre (identification, bouclage) ;*
- *Systèmes de deuxième ordre (identification, bouclage) ;*
- *Identification et asservissement de la vitesse d'un moteur à courant continu ;*
- *Identification et asservissement de la vitesse d'un moteur brushless ;*
- *Utilisation des logiciels MATLAB et SIMULINK ;*
- *Asservissements de température et de débit sur un système de type « sèche-cheveux » ;*
- *Asservissement de la position d'un chariot mobile sur un rail ;*
- *Asservissement d'un pendule sur un chariot mobile ;*
- *Asservissement d'altitude d'une boule en suspension magnétique, etc.*

▷ **Travaux dirigés et travaux pratiques d'automatique des systèmes à temps discret** avec les élèves de 2^{ème} année du département GEII de l'IUT de Poitiers.

En TD :

- *Utilisation de la transformée en z ;*
- *Équations récurrentes ;*
- *Échantillonnage des modèles continus ;*
- *Réponses des systèmes discrets ;*
- *Discrétisation d'un correcteur analogique (Euler avant, Euler arrière, Tustin).*

En TP :

- *Réalisation d'un correcteur discret sous LABVIEW à l'aide d'une carte d'acquisition / restitution ;*
- *Observation de l'influence de la période d'échantillonnage ;*
- *Commande discrète de type PID ;*
- *Perspectives d'élaboration de correcteurs plus sophistiqués.*

▷ **Cours, travaux dirigés et travaux pratiques d'automatique des systèmes à temps continu** avec les élèves de la licence professionnelle « Technologies Avancées Appliquées aux Véhicules », gérée par le département GEII de l'IUT de Poitiers.

Le cours reprend les notions suivantes mais évite, autant que faire ce peut, les développements mathématiques, les réduisant à leur partie congrue :

- *Introduction à l'Automatique ;*
- *Modélisation des systèmes linéaires continus : équation différentielle, fonction de transfert ;*
- *Réponses harmoniques et temporelles des systèmes ;*
- *Stabilité des systèmes linéaires ;*
- *Réglage des systèmes continus.*

En TD/TP, une utilisation des logiciels MATLAB et SIMULINK permet d'illustrer rapidement, en le peu de temps imparti, diverses notions vues en cours.

▷ **Cours et travaux dirigés de représentation d'état des systèmes linéaires monovariables à temps continu**

avec les élèves de 2^{ème} année de la spécialité *Génie Électrique et Automatique (GEA)* de l'ESIP.

- *Rappel sur les fonctions de transfert ;*
- *Modélisation par équation d'état ;*
- *Réponses harmoniques et temporelles des modèles d'état ;*
- *Stabilité des modèles d'état ;*
- *Commandabilité/observabilité ;*
- *Commande par retour d'état : placement de pôles ;*
- *Commande par retour de sortie : les observateurs ;*
- *Introduction à la représentation d'état discrète ;*
- *Modélisation d'une maquette pédagogique d'hélicoptère ADAPTECH ;*
- *Régulation de température et de niveau dans une cuve à eau ;*
- *Calcul d'une loi de commande pour des angles de la maquette d'hélicoptère.*

▷ **Cours d'automatique : systèmes multivariables**

avec les élèves de Master *Réseau-Communication-Automatique* de l'Université de Poitiers.

Il s'agit du deuxième volet d'un cours réalisé en partenariat avec deux collègues :

- *Différentes structures de rétro-action ;*
- *Sensibilisation au problème du couplage entrées/sorties ;*
- *Placement de structure propre ;*
- *Réduction de modèle.*

▷ **Cours d'automatique : notions de base pour une initiation à la synthèse de correcteurs par approche LMI**

avec les élèves de Master *Réseau-Communication-Automatique* (RCA) de l'Université de Poitiers.

Il s'agit de nouveau du deuxième volet d'un cours sur la commande robuste, réalisé en partenariat avec deux collègues :

- *Rappels mathématiques et préliminaires ... pour en arriver aux normes \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ et aux LMI ;*
- *Introduction aux synthèses \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ , mixte ;*
- *Introduction aux incertitudes dans l'espace d'état et à la commande robuste par approche LMI.*

ENSEIGNEMENTS EN ANGLAIS

Le LAII entretient depuis de nombreuses années des relations privilégiées avec l'Université Technologique de Monterrey au Mexique (*Tecnológico de Monterrey*). Dans ce cadre, nous avons dispensé, à des élèves-ingénieurs mexicains, les enseignements suivants :

À Poitiers :

- Introduction à la représentation d'état ;
- Systèmes échantillonnés, systèmes discrets ;

À Monterrey :

- Le cours de Master sur les systèmes multivariables (voir plus avant) ;
- Le cours de Master sur l'initiation à la synthèse LMI (voir plus avant).

★

Bien entendu, parmi tous ces enseignements, de nombreux ont fait l'objet de préparation d'examens, de participation à des jurys et de rédaction de divers documents dont certains peuvent être téléchargés à l'adresse

[http ://laidi.univ-poitiers.fr/bachelier](http://laidi.univ-poitiers.fr/bachelier).

AUTRES ACTIVITÉS LIÉES À L'ENSEIGNEMENT
--

▷ Participation aux stages proposés par le **Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur** (CIES) dont certains ont trait directement à des situations d'enseignement et à la pédagogie (*ex : fondamentaux de la communication ; statuts, fonctions et rôle de l'enseignant du supérieur ; lecture rapide ; animation de groupe et pédagogie ; de la peur au plaisir de prendre la parole en public ; aspects émotionnels de la vie d'un enseignant-chercheur ; prise de notes et processus de mémorisation ; réflexion sur le monitorat et sur l'enseignement supérieur, etc.*)

▷ Encadrement et participation aux jurys d'évaluation de deux étudiants du Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM), cycle B, dans le cadre de leurs mémoires d'oral probatoire portant respectivement sur

- *le placement de structure propre par retour statique* (Toulouse, 1997) ;
- *la commande quadratique* (Poitiers, 2006).

▷ Participation à un jury de thèse d'Ingénieur CNAM pour un étudiant (Poitiers, 2007).

▷ Co-administrateur avec **Benoît Boivin** du site Internet du département GEII de l'IUT de Poitiers ([http ://webiut.campus.univ-poitiers.fr/geii](http://webiut.campus.univ-poitiers.fr/geii)).

▷ Co-responsable avec **Erik Etien** de la communication du département GEII de l'IUT de Poitiers.

ACTIVITÉS DE RECHERCHE

<u>Statut</u> :	Maître de conférences
<u>Laboratoire</u> :	Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle (LAI, EA 1219) de L'École Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers (ESIP), Université de Poitiers.
<u>Directeur</u> :	Professeur Gérard Champenois
<u>Groupe</u> :	« Commande »,
<u>Responsable</u> :	Laurent Rambault , HDR

DÉTAIL DES ACTIVITÉS

Après quatre années passées au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS) de Toulouse, dans l'ancien groupe CSC dirigé par **Jacques Bernussou**, Directeur de Recherche, à savoir :

- trois années de thèse (sous la direction de **Bernard Pradin**, Professeur à l'INSA de Toulouse),
 - une année supplémentaire d'ATER,
- nos activités de recherche ont continué sans changement de thématique, au LAII. Voici un résumé de l'ensemble des thèmes abordés.

Nos activités de recherche s'articulent essentiellement autour de deux axes.

Nous avons choisi de ne pas détailler ici les travaux de thèse (au profit des activités postdoctorales) qui s'inscrivent néanmoins dans le second axe et qui restent un point de départ crucial pour l'ensemble de notre recherche. Il convient de préciser d'ores et déjà que la très grande majorité des recherches menées durant notre séjour à Toulouse l'a été sous la direction du professeur **Bernard Pradin**. Depuis notre intégration à Poitiers, notre travail est réalisé en étroite collaboration avec le professeur **Driss Mehdi**.

Voici les deux axes :

Outils de la robustesse

Il s'agit d'apporter une contribution à l'élaboration d'outils méthodologiques pour l'analyse et la commande des systèmes *linéaires multivariables de modélisation incertaine*. La plupart des outils développés reposent sur une approche dite « de Lyapunov » car nécessitant la détermination d'une fonction de Lyapunov, potentiellement dépendante des paramètres incertains, qui permette d'assurer les propriétés requises pour le système. Les conditions sont généralement formulées en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMI en anglais).

- Cette contribution à l'analyse et la commande robustes a deux objectifs :
 1. Maintenir une activité théorique constante au sein du LAII sur un sujet d'actualité. À ce titre, de nombreux travaux ont fait l'objet en 2000-2001 de collaborations (avec **Didier Henrion** (LAAS-CNRS) et **Mickael Šebek** (UTIA-Prague) sur l'approche polynomiale, avec **Jamal Daafouz** (CRAN) et **Jacques Bernussou** (LAAS-CNRS) sur les systèmes discrets incertains variant dans le temps. Même si ces travaux sont *a priori* terminés et publiés, les collaborations sont susceptibles d'être ravivées à tout moment.
 2. Mettre au service du LAII les outils développés pour les applications locales (exemple : analyse en stabilité robuste d'un modèle de machine asynchrone : collaboration en 1999-2000 avec **Sébastien Cauët** et **Laurent Rambault**).

La culture sur la robustesse se développant ainsi au laboratoire, l'on voit par exemple des personnels du LAII travaillant sur la *synchronisation des oscillateurs* ou encore des chercheurs s'efforçant de *compenser les oscillations de couple de moteurs thermiques*, intégrer à leurs développements des méthodes de l'Automatique moderne (robustesse, LMI, LPV, etc.), bénéficiant des conseils prodigués par le groupe « Commande ». C'est un transfert auquel nous tenons particulièrement.

- Toujours avec la volonté de développer des outils d'analyse et commande robustes, avec **Driss Mehdi**, nous avons entamé des recherches sur la commande des *procédés répétitifs* qui forment une classe des *systèmes multidimensionnels* ou *systèmes n -D*. Ces procédés répétitifs peuvent être un moyen original de modéliser certains systèmes (ex : système de laminage). Cette recherche s'effectue en collaboration avec le professeur **Krzysztof Gałkowski**, de l'Université de Zielona Góra (Pologne) mais également l'un de ses étudiants aujourd'hui docteur, **Wojciech Paszke**. Notre démarche nous a conduit entre autres à l'étude de systèmes commutants. Des premiers résultats ont généré une recherche commune avec le professeur **Eric Rogers** de l'Université de Southampton et ont fait l'objet de plusieurs communications (2006). Ces travaux sur les modèles multidimensionnels se poursuivent actuellement. Une application possible des outils développés concerne l'analyse et la commande (pour l'instant nominale) de certains modèles fractionnaires, dans le cadre d'un travail avec **Krzysztof Gałkowski** et **Anton Kummert** de l'Université de Wuppertal. De plus, avec **Wojciech Paszke** et **Driss Mehdi**, nous avons mené un travail de fond sur les systèmes n -D qui a récemment conduit à une des toutes premières (si ce n'est la première) versions du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov adapté à ces modèles (elle fait l'objet de l'annexe A).

Placement de pôles robuste en \mathcal{D} -stabilité

Ce second axe fait l'objet du corps du mémoire.

- Il s'agit d'élaborer des méthodes permettant de réaliser sur des *modèles d'état linéaires*, des *placements de pôles robustes*, c'est-à-dire conservant leurs performances en présence d'incertitudes sur les modèles. Le travail effectué est essentiellement analytique. Il consiste à élaborer des critères de performances transitoires robustes. Plus précisément, ce sont des bornes de *\mathcal{D} -stabilité robuste*, c'est-à-dire des bornes sur le domaine d'incertitude pour lequel la \mathcal{D} -stabilité (l'appartenance des valeurs propres de la matrice d'état incertaine à une région \mathcal{D} du plan complexe) est garantie. Nous utilisons une approche basée sur la résolution de *LMI* et sur les *fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres* pour :
 1. réduire le conservatisme des bornes existantes ;
 2. envisager une large gamme de régions non connexes (\mathcal{D}_U -stabilité) ;
 3. utiliser les bornes de \mathcal{D} -stabilité robuste comme critère de performances à maximiser lors de la détermination d'une loi de commande de type « placement de pôles ». Nos résultats permettent, dans certains cas, de réaliser des placements de pôles robustes, dans des régions sophistiquées et ce, même quand la célèbre condition de Kimura n'est pas vérifiée.

Les points mentionnés ci-dessus font suite à notre thèse et sont aussi l'objet de la thèse de **Jérôme Bosche**, soutenue en décembre 2003 ainsi que celle de **Bilal SARI**, commencée en septembre 2006. Ils ont également donné lieu en 2000-2001 à une collaboration avec **Denis Arzelier** et **Dimitri Peaucelle** du LAAS-CNRS.

- En marge de cette thèse, toujours concernant la \mathcal{D} -stabilité, nous nous efforçons de développer le concept encore récent de $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice. Ce concept permet doré et déjà d'améliorer certains résultats existants sur la détermination des bornes de \mathcal{D} -stabilité robuste lorsque \mathcal{D} est une union de région. Cette recherche, au préalable menée en collaboration avec **Bernard Pradin** du LAAS-CNRS en 2003, a impliqué ensuite également **Driss Mehdi** du LAII et **Didier Henrion** du LAAS-CNRS et de l'UTIA de Prague (2004). Nous continuons à étudier ce concept avec **Driss Mehdi** pour le faire évoluer sans doute vers celui de \mathcal{S} -régularité. Les perspectives concernant cette activité nous conduisent à considérer une extension du lemme de Kalman-Yakubovic-Popov (KYP) où l'axe imaginaire serait remplacé par une frontière plus sophistiquée (2004). Nous avons également mis en évidence l'intérêt du lemme KYP généralisé pour la recherche de bornes de \mathcal{D} -stabilité robuste moins conservatives (2006).
- Par ailleurs, pour sortir du cadre essentiellement analytique de nos travaux sur la \mathcal{D}_U -stabilité, nous avons établi avec **Nehza Maamri** et **Driss Mehdi** une *véritable méthode de synthèse par retour d'état* pour placer les pôles d'un système dans une *union de sous-régions*. (2006). Les efforts d'extension se portent actuellement sur le cas du retour de sortie et sur la prise en compte d'incertitudes structurées ou non dans la procédure de synthèse. Toujours pour rester sur la commande nominale, puisque de placer les pôles il est question,

nous nous sommes intéressés, depuis le début de notre activité de recherche, au *placement strict de pôles*, en particulier par *retour statique de sortie*. Les approches proposées sont celles de la *commande modale*, c.-à-d. du *placement de structure propre*. Dans ce cadre, avec **Jérôme Bosche** et **Driss Mehdi**, nous avons montré que la « condition de Kimura » n'était pas nécessaire pour placer les pôles par voie modale. Quelques cas échappant à cette condition ont été traités. En particulier, le cas où la somme du nombre d'entrées et de sorties est égale à l'ordre du système peut génériquement être traité par notre approche (2006-2008). Ces aspects sont détaillés dans le corps du mémoire.

- Plus récemment, entre autres dans le cadre de la thèse de **Ouiem Rejichi** que nous supervisons avec **Driss Mehdi** et **Mohammed Chaabane** de l'Université de Sfax, nous nous sommes intéressés aux *systèmes singuliers* ou *implicites* ou *algébro-différentiels*. De nombreux travaux traitent de l'analyse et la commande de tels systèmes. La particularité de nos contributions reste la \mathcal{D} -stabilité qui conserve un sens dans le contexte implicite. Cette propriété ajoutée à la régularité (système bien posé, donc solution unique) et la non-impulsivité, conduit au concept de \mathcal{D} -admissibilité. Nous avons proposé des conditions LMI d'analyse et synthèse nominale de \mathcal{D} -admissibilité. Nous avons aussi envisagé le cas robuste avec une incertitude LFT bornée en norme sur la matrice d'état A , des incertitudes polytopiques sur A et sur la matrice singulière E , voire la matrice de commande B . Le retour d'état est pour l'instant privilégié dans les techniques de commande. Même le cas des unions de sous-régions a été considéré, induisant le concept de \mathcal{D}_U -admissibilité. En outre, la notion de \mathcal{S} -régularité évoquée plus avant, nous a permis, avec **Bilal Sari** et **Driss Mehdi**, d'envisager l'analyse en \mathcal{D} -admissibilité robuste d'un système implicite comportant une incertitude LFT implicite (ou généralisée) sur A d'une part et sur E d'autre part ; ces deux incertitudes sont indépendantes. Ce dernier point fait l'objet de l'annexe B. La technique de placement de structure propre évoquée précédemment a également été adaptée aux cas des systèmes implicites.

ACTIVITÉS D'ENCADREMENT

▷ Encadrement de trois thèses :

Etudiant :	Jérôme BOSCHE
Début :	octobre 2000
Soutenance :	18 décembre 2003
Titre :	<i>Analyse en \mathcal{D}_U-stabilité et commande par placement de pôles</i>
Contrat / financement :	Allocation ministérielle
Directeur de thèse :	Prof. Driss MEHDI
Taux d'encadrement :	90%
Situation actuelle :	Maître de conférences à l'Université d'Amiens
Publications en rapport avec la thèse : (voir liste des publications)	CF-4, CI-13, CI-14, CI-15, CI-16, CI-17, CI-19, CI-24, CI-26, RF-2, RI-12, RI-17.

Etudiante :	Ouiem REJICHI
Début :	septembre 2005
Soutenance :	décembre 2008
Titre :	<i>\mathcal{D}-stabilité des systèmes singuliers</i>
Contrat / financement :	Co-tutelle Universités de Poitiers et de Sfax (Tunisie) Bourse du gouvernement tunisien Plus de 60% du temps passé en France
Directeurs de thèse :	Prof. Driss MEHDI et Mohammed CHAABANE (HDR)
Taux d'encadrement :	50%
Situation actuelle :	en fin de thèse
Publications en rapport avec la thèse : (voir liste des publications)	RT9, CF-5, CI-30, CI-32, CI-34, CI-36, RI-21.

Etudiant :	Bilal SARI
Début :	septembre 2006
Soutenance :	prévue pour fin 2009
Titre :	<i>S-procédure et \mathcal{D}_U-stabilité robuste</i>
Contrat / financement :	Allocation ministérielle
Directeur de thèse :	Prof. Driss MEHDI
Taux d'encadrement :	90%
Situation actuelle :	deuxième année de thèse
Publications en rapport avec la thèse : (voir liste des publications)	RT-10, RT-11, CF-6, CF-7 CI-35, CI-37

▷ Encadrement de cinq stages de DEA ou Master :

Etudiant :	Bernard GUILLAUMON
Période :	avril-septembre 1999
Taux d'encadrement :	100%
Situation actuelle :	enseignant dans le secondaire
Publications en rapport avec le stage :	néant.

Etudiant :	Riad RIADI
Période :	mars-juin 2004
Taux d'encadrement :	100%
Situation actuelle :	doctorant à l'Université d'Angers
Publications en rapport avec le stage :	CI-24.

Etudiant :	Houari BOURRI
Période :	mars-juin 2005
Taux d'encadrement :	100%
Situation actuelle :	employé dans l'industrie
Publications en rapport avec le stage :	néant.

Etudiant :	Bilal SARI
Période :	mars-juin 2006
Taux d'encadrement :	100%
Situation actuelle :	doctorant au LAII-ESIP
Publications en rapport avec le stage :	néant.

Etudiant :	Mohamed NJEH
Période :	mars-juin 2007
Taux d'encadrement :	100%
Situation actuelle :	doctorant au LAII-ESIP
Publications en rapport avec le stage :	CI-33.

COLLABORATIONS

Voici une liste *non exhaustive* de nos collaborateurs occasionnels ou réguliers, ou co-signataires d'articles, et collègues divers.

- Driss MEHDI (LAI), un « chef » amical,
- Bernard PRADIN (INSA et LAAS-CNRS), un directeur de thèse envers lequel nous sommes très reconnaissants,
- Didier HENRION (LAAS-CNRS), un brillant chercheur et un ami,
- Jérôme BOSCHE (CREA) que nous remercions d'avoir travaillé avec nous,
- Krzysztof GAŁKOWSKI (Université de Zielona Góra, Pologne),
- Wojciech PASZKE (Université de Zielona Góra, Pologne),
- Mohammed CHAABANE (Université de Sfax, Tunisie),
- Jamal DAAFOUZ (CRAN-ENSEM), un autre ami,
- Jacques BERNUSSOU (LAAS-CNRS), un chef de groupe sympathique,
- Denis ARZELIER (LAAS-CNRS),
- Dimitri PEAUCELLE (LAAS-CNRS),
- Slim TNANI (LAI),
- Patrick COIRAULT (LAI), tout aussi praticien que théoricien,
- Eric ROGERS (Université de Southampton, Royaume Uni),
- Anton KUMMERT (Université de Wuppertal, Allemagne),
- bien d'autres qui, nous l'espérons, nous pardonneront de ne les avoir inclus dans la liste,
- et bien sûr tous les personnels du LAI.

ACTIVITÉS CONNEXES À LA RECHERCHE

- ▷ Représentant des doctorants pendant deux ans au Conseil Scientifique de l'INSA de Toulouse (1996-1998).
- ▷ Participation active à des initiatives du *Collectif des doctorants de l'INSA de Toulouse* (1996-1999) (exemple : présentation vulgarisée à l'intention des élèves ingénieurs de l'INSA, par voie de posters, de la recherche effectuée à l'INSA, élaboration d'un annuaire des doctorants de l'INSA de Toulouse, participation à la première charte des thèses de cet institut).
- ▷ Responsable de l'organisation des séminaires internes du LAI.
- ▷ Membre suppléant, section 61, de la CSE de l'Université de Poitiers (2005-2008).

▷ Membre extérieur suppléant, section 61, de la CSE de l'Université de Tours (2005-2008).

▷ « *Reviewer* » pour tous les grands congrès d'Automatique (ECC, ACC, CDC, IFAC *World Congress*) et bien d'autres ainsi que pour la plupart des revues d'Automatique de premier plan (IEEE Transactions on Automatic Control, Automatica, International Journal of Robust and Nonlinear Control, International Journal of Control, IET Control Theory and Applications, Multidimensional Systems and Signal Processing, IEEE Transactions on Circuits and Systems (Part II), etc.) mais aussi bien d'autres ; le rythme d'évaluation pour des revues est d'environ deux articles par mois. Sélectionné parmi les quelques 800 *reviewers* d'Automatica en 2001 comme faisant partie des trente meilleurs.

PUBLICATIONS

Rapports techniques non publiés

RT-1. *Placement de structure propre par retour de sortie*

O. Bachelier

Rapport de DEA INSA-LAAS-CNRS, 1994

RT-2. *LMI-bounds for uncertain matrix root-clustering in a union of convex subregions of the complex plane*

O. Bachelier, B. Pradin

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 97081, 1997

RT-3. *Commande des systèmes linéaires incertains : placement de pôles robuste en \mathcal{D} -stabilité*

O. Bachelier

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 98433

Rapport de thèse INSA-LAAS-CNRS, 1998

RT-4. *Robust matrix root-clustering analysis against unstructured, parametric structured or norm-bounded uncertainty*

O. Bachelier, B. Pradin

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 99309, 1999

RT-5. *LMI approach to some class of nD -Polynomial matrices : Application to the stability of nD -systems*

O. Bachelier, D. Mehdi

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20060117OB, 2006

RT-6. *On the KYP lemma, the hybrid Roesser models and the matrix $\partial\mathcal{D}$ -regularity*

O. Bachelier, D. Mehdi

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20060916OB, 2006

RT-7. *Admissibility and State Feedback Admissibilization of Discrete Singular Systems : An LMI Approach*

M. Chaabane, O. Bachelier, D. Mehdi

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20070208DM, 2007

RT-8. *Placement de pôles et \mathcal{D} -stabilité robuste : approche temporelle*

O. Bachelier

Rapport de recherche LAII-ESIP, correspondant essentiellement au présent rapport (2006-2008)

RT-9. *Robust \mathcal{D}_R -admissibility of uncertain descriptor systems via LMI approach*

W. Rejichi, M. Chaabane, O. Bachelier, D. Mehdi

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20070402WR, 2007

RT-10. *Robust S -regularity of matrix pencils applied to the analysis of descriptor models*

B. Sari, O. Bachelier, D. Mehdi

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20070901BS, 2007

soumis à *Linear Algebra and its Applications*

RT-11. *On robust state feedback Hurwitz-stabilization of polytopic descriptor models*

B. Sari, O. Bachelier, D. Mehdi

Rapport de recherche LAII-ESIP, 2008

soumis à *International Journal of Systems Science*

Conférences strictement francophones

CF-1. *Placement robuste de structure propre par retour de sortie*

O. Bachelier, B. Pradin

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 96094

Automatique, Génie Informatique, Image (AGI'96), Tours (France), pp.133-136, 6-7 juin 1996

CF-2. *\mathcal{D} -stabilité d'une matrice incertaine par approche LMI*

O. Bachelier, B. Pradin

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 97154

Colloque de Recherche Doctorale. Automatique-Génie Informatique-Image-Signal (AGIS), Angers (France), pp.67-72, 9-11 décembre 1997

CF-3. *Une condition nécessaire et suffisante d'appartenance des valeurs propres d'une matrice à une union de sous-régions du plan de Laplace*

O. Bachelier, B. Pradin

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 99131

Journées Doctorales d'Automatique (JDA'99), Nancy (France), pp.5-8, 21-23 septembre 1999

CF-4. *Placement de pôles robuste par retour statique de sortie*

J. Bosche, O. Bachelier, D. Mehdi

Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA), Tunisie, 2004

CF-5. *Placement robuste en \mathcal{D}_R -admissibilité des systèmes singuliers*

W. Rejichi, O. Bachelier, M. Chaabane, D. Mehdi

Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA), Bucarest, Roumanie, septembre 2008

CF-6. *S-procédure et \mathcal{D}_U -stabilité robuste*

B. Sari, O. Bachelier, D. Mehdi

Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA), Bucarest, Roumanie, septembre 2008

CF-7. *S-procédure, S-régularité et analyse robuste des systèmes implicites*

B. Sari, O. Bachelier, D. Mehdi

Journées doctorales MACS 2009 (JDMACS), Angers, France, mars 2009

Conférences internationales

CI-1. *Robust pole assignment in a second order region via Lyapunov approach*

O. Bachelier, B. Pradin

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 96386

2nd IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND'97), Budapest (Hongrie), pp.417-422, 25-27 juin 1997

CI-2. *Bounds for robust eigenvalue assignment in a sector*

O. Bachelier, B. Pradin, I. Chouaib

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 96341

4th European Control Conference (ECC'97), Bruxelles (Belgique), 1-4 juillet 1997

CI-3. *Robust regional eigenvalue assignment*

O. Bachelier, B. Pradin

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 97340

2nd IMACS Multiconference CESA'98 Computational Engineering in Systems Applications. Symposium on Modeling, Analysis and Control, Nabeul-Hammamet (Tunisie), vol.1, pp.632-637, 1-4 avril 1998

CI-4. *Robust root-clustering analysis in a union of subregions*

O. Bachelier, B. Pradin

Rapport de recherche LAAS-CNRS 97364

1998 American Control Conference (ACC'98), Philadelphie, PA (USA), vol.3, pp.1874-1878,

24-26 juin 1998

CI-5. *Robust pole placement in a specified convex region of the complex plane*

O. Bachelier, B. Pradin

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 97407

IFAC Conference on System Structure and Control, Nantes (France), vol.1, pp.203-208, 8-10 juin 1998

CI-6. *Parameter dependent Lyapunov control design : numerical evaluation*

O. Bachelier, J. Bernussou, M. C. de Oliveira, J. C. Geromel

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 99185

38th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'99), Phoenix (USA), pp.293-297, 7-10 décembre 1999

CI-7. *A precise robust matrix root-clustering analysis with respect to polytopic uncertainty*

O. Bachelier, D. Peaucelle, D. Arzelier, J. Bernussou

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 99320

American Control Conference (ACC'2000), Chicago, USA, juin 2000

CI-8. *D-stability of polynomial matrices*

D. Henrion, O. Bachelier, M. Šebek

Control 2000 Conference, UKACC, Cambridge, Royaume Uni, septembre 2000

CI-9. *Parameter-dependent Lyapunov stability analysis : application to an induction motor*

S. Cauët, L. Rambault, O. Bachelier

2001 American Control Conference (ACC'2001), Arlington, USA

CI-10. *Parameter-dependent Lyapunov robust D-stability bound*

O. Bachelier, D. Arzelier, D. Peaucelle

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 00501

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20001110OB

6th European Control Conference (ECC'01), Porto, Portugal, septembre 2001

CI-11. *Robust control and stability analysis of linearized system with parameter variation : application to an induction motor*

S. Cauët, L. Rambault, O. Bachelier

2001 Conference on Decision and Control (CDC'2001), Orlando, Floride, USA

CI-12. *Robust Control Design for Discrete-Time Systems with Time-Varying Uncertainties : A Poly-Quadratic Stability Based Approach*

J. Daafouz, O. Bachelier, J. Bernussou

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 01212

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20011114OB

IFAC World Congress, Barcelone, Espagne, juillet 2002

- CI-13. *Sliding mode control and robust analysis of parallel hybrid filters*
S. Tnani, J. Bosche, O. Bachelier
EPE-PEMC, Dubrovnik 2002
- CI-14. *Robust \mathcal{D}_R -stability analysis against JL-structure uncertainties*
J. Bosche, O. Bachelier
Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20020301OB
MMAR'2002, Szczecin, Pologne, septembre 2002
- CI-15. *Robust eigenvalue clustering against J-structured uncertainty*
J. Bosche, O. Bachelier, D. Mehdi
SMC'2002, Hammamet, Tunisie, octobre 2002
- CI-16. *Robust \mathcal{D}_R -stability against both polytopic and JL-structured uncertainty*
J. Bosche, O. Bachelier
Conference on Decision and Control (CDC'02), Las Vegas, USA, décembre 2002
- CI-17. «*Bi-polytopic*» *Lyapunov functions for robust stability and fragility analysis of discrete-time systems*
J. Bosche, O. Bachelier
Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20011015OB
Conference on Decision and Control (CDC'2002), Las Vegas, USA, décembre 2002
- CI-18. *$\partial\mathcal{D}$ -regularity for robust matrix root-clustering*
O. Bachelier, B. Pradin
Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20021103OB
Symposium on Robust control Design (ROCOND'2003), Milan, Italie, juin 2003
- CI-19. *Robustness bounds for matrix \mathcal{D}_U -stability*
J. Bosche, O. Bachelier, D. Mehdi
European control conference (ECC'2003), Cambridge, septembre 2003
- CI-20. *State feedback stabilization of discrete-time, linear, doubly switched systems*
J. Bochniak, K. Gałkowski, O. Bachelier, D. Mehdi, A. Kummert
Internationales Wissenschaftliches Kolloquium, Ilmenau, Allemagne, 2004
- CI-21. *State feedback stabilization of discrete-time repetitive processes with switched dynamics*
K. Gałkowski, D. Mehdi, E. Rogers, O. Bachelier
Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS'2004), Louvain, Belgique, 2004
- CI-22. *State feedback stabilization of a class of discrete-time, linear, time variant systems*
D. Mehdi, O. Bachelier, K. Gałkowski
Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS'2004), Louvain, Belgique, 2004

- CI-23. *Robust Root-Clustering in unions or intersections of regions : addendum*
 O. Bachelier, D. Henrion, B. Pradin, D. Mehdi
 Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20050401OB
Joint European Control Conference-Conference on Decision and Control (ECC-CDC),
 Séville, Espagne, 2005
- CI-24. *Robust Pole Placement by Output Feedback Using a Genetic Algorithm*
 J. Bosche, R. Riadi, O. Bachelier, D. Mehdi, L. Rambault
Conference on Control Applications (CCA'05), Toronto, Canada, 2005.
- CI-25. *Stabilization of a class of descriptor systems. An application to a DC motor*
 S. Moreau, O. Bachelier, M. Chaabane, D. Mehdi
Computer Method and Systems, Cracovie, Pologne, 2005
- CI-26. *On matrix root-clustering in a combination of first order regions*
 O. Bachelier, J. Bosche, D. Mehdi
 Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20050901OB
Symposium on Robust control Design (ROCOND), Toulouse, France, juin 2006
- CI-27. *An LMI Technique for Stability and Stabilization of Discrete-time Second-order Control Systems*
 K. Gałkowski, B. Sulikowski, A. Kummert, B. N. Datta, O. Bachelier
Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS'2006), Kyōto, Japon, 2006
- CI-28. *A State feedback stabilization of a class of discrete semi-linear repetitive processes*
 K. Gałkowski, E. Rogers, D. Mehdi, O. Bachelier, L. Hladowski, B. Cichy
Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS'2006), Kyōto, Japon, 2006
- CI-29. *Fractional Polynomials and nD systems*
 K. Gałkowski, O. Bachelier, A. Kummert
Conference on Decision and Control (CDC'06), San Diego, USA, 2006
- CI-30. *Robustness bounds for uncertain descriptor system in \mathcal{D}_R -admissibility*
 W. Rejichi, O. Bachelier, M. Chaabane, D. Mehdi
 7^{ème} **conférence internationale « Sciences et Techniques de l'Automatique » (STA'2006)**,
 Tunisie, 2006
- CI-31. *\mathcal{H}_∞ -feedback control of synchronous generator output voltage : solution by Riccati equations*
 E. Mouni, O. Bachelier, S. Tnani, P. Coirault
IEEE International Conference on Computer as a Tool, Varsovie, Pologne, 2007
- CI-32. *\mathcal{H}_∞ control of continuous-time descriptor systems*
 W. Rejichi, O. Bachelier, M. Chaabane, D. Mehdi
 8^{ème} **conférence internationale « Sciences et Techniques de l'Automatique » (STA'2006)**,

Sousse, Tunisie, 2007

CI-33. *Placement de pôles des systèmes singuliers par une approche « structure propre »*
M. Njeh, O. Bachelier, M. Chaabane, D. Mehdi
8^{ème} conférence internationale « Sciences et Techniques de l'Automatique » (STA'2006),
Sousse, Tunisie, 2007

CI-34. *D-Dissipativity Analysis for descriptor systems*
W. Rejichi, O. Bachelier, M. Chaabane, D. Mehdi
American Control Conference (ACC'2008), Seattle, USA, juin 2008

CI-35. *Improved Robust D_U -stability measures via S-procedure*
B. Sari, O. Bachelier, D. Mehdi
American Control Conference (ACC'2008), Seattle, USA, juin 2008

CI-36. *Admissibility and State Feedback Admissibilization of Discrete Singular Systems : An LMI Approach*
W. Rejichi, O. Bachelier, M. Chaabane, D. Mehdi
Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'08), Ajaccio, France, juin 2008

CI-37. *A S-regularity approach to the analysis of descriptor models*
B. Sari, O. Bachelier, D. Mehdi
Conference on Decision and Control (CDC'2008), Cancun, Mexique, décembre 2008

Revue en ligne (en français)

RE-1. *Placement de pôles robuste par retour statique de sortie* J. Bosche, O. Bachelier, D. Mehdi, R. Ouvrard
e-STA (Sciences et Technologies de l'Automatique), e-revue de la Société d'Électricité, d'Électronique et des Technologies de l'Information et de la Communication, 4^{ème} trimestre, 2004

Revue en français

RF-1. *À propos des bornes pour le placement robuste dans un secteur*
O. Bachelier, B. Pradin
Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 99310
APII-JESA Journal Européen des Systèmes Automatisés, vol.34, N°1, pp.107-134, février 2000

RF-2. *Placement de pôles robotatif par retour statique d'état*
J. Bosche, O. Bachelier, D. Mehdi
APII-JESA Journal Européen des Systèmes Automatisés, vol.36, N°10, pp.1413-1437, 2002

Revues en anglais

RI-1. *Bounds for uncertain matrix root-clustering in a union of subregions*

O. Bachelier, B. Pradin

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 98039

International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol.9, N°6, pp.333-359, mai 1999

RI-2. *A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty*

D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, J. Bernussou

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 99183

Systems and Control Letters, vol.40, N°1, pp.21-30, mai 2000

RI-3. *Low-order robust controller synthesis for interval plants*

D. Henrion, O. Bachelier

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 98469

International Journal of Control, vol.74, N°1, pp 1-9, janvier 2001.

RI-4. *Rank-one LMI approach to stability of 2-D polynomial matrices*

D. Henrion, M. Šebek, O. Bachelier

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 99217

Multidimensional Systems and Signal Processing, vol.12, N°1, pp 33-48, janvier 2001

RI-5. *Robust matrix root-clustering analysis in a union of Ω -subregions*

O. Bachelier, B. Pradin

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 99308

International Journal of Systems Science, Vol 32, N°4, pp 467-478 Avril 2001

RI-6. *\mathcal{D} -stability of polynomial matrices*

D. Henrion, O. Bachelier, M. Šebek

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 99180

International Journal of Control, Vol 74, N°8, pp 845-856, 2001

RI-7. *Parameter-dependent Lyapunov functions applied to analysis of induction motor stability*

S. Cauët, L. Rambault, O. Bachelier, D. Mehdi

IFAC Control Engineering Practice, Mars 2002

RI-8. *Computing a robust \mathcal{D} -stability bound using a parameter-dependent Lyapunov approach*

O. Bachelier, D. Peaucelle, D. Arzelier

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 02389

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20001115OB

IEE Proceedings Control Theory and Applications, Vol 149, N°6, p505-510, novembre 2002

RI-9. *Robust matrix \mathcal{D}_U -stability analysis*

O. Bachelier, D. Mehdi

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20000908OB

International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol 13, N°6, p 533-558, mai 2003

RI-10. *Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems*

D. Mehdi, E.-K. Boukas, O. Bachelier

IMA Journal of Mathematical Control and Information, vol 21(1), p1-13, janvier 2004

RI-11. *Robust root-clustering in unions or intersections of regions*

O. Bachelier, D. Henrion, B. Pradin, D. Mehdi

Rapport de recherche LAAS-CNRS N° 03356

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20030901OB

SIAM Journal on Control and Optimization, vol 43(3), p.1078-1093, 2004

RI-12. *An approach for robust matrix root-clustering analysis in a union of regions*

J. Bosche, O. Bachelier, D. Mehdi

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20020514OB

IMA Journal of Mathematical Control and Information, vol. 22, p. 227-239, 2005

RI-13. *Robust Root-Clustering analysis through extended KYP lemma*

O. Bachelier, D. Mehdi

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20040105OB

SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 45(1), p. 368-391, 2006

RI-14. *Pole placement in a union of regions with prespecified subregion allocation*

N. Maamri, O. Bachelier, D. Mehdi

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20050312OB

Mathematics and Computers in Simulation, vol 72(1), p.38-46, 2006.

RI-15. *Stability and stabilization of continuous descriptor systems : an LMI approach*

M. Chaabane, O. Bachelier, M. Souissi, D. Mehdi

Mathematical Problems in Engineering, vol. 2006, pp. ID-39367, 2006

RI-16. *Stabilization of discrete linear repetitive processes with switched dynamics*

J. Bochniak, K. Gałkowski, E. Rogers, D. Mehdi, O. Bachelier, A. Kummert

Multidimensional systems and Signal Processing, vol. 17(2-3), p.271-295, 2006

RI-17. *On Pole Placement via Eigenstructure Assignment Approach*

O. Bachelier, J. Bosche, D. Mehdi

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20041208OB

IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 51(9), p. 1554-1558, 2006

RI-18. *Active flywheel for hybrid vehicle : Modelling and control*

S. Tnani, P. Coirault, O. Bachelier

International Journal of Electrical Engineering in Transportation, vol. 2(1), p. 37-57, 2006

RI-19. *Non-iterative pole placement technique : A step further*

O. Bachelier, D. Mehdi

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20060531OB

Journal of The Franklin Institute, vol 345(3), p. 267-281, 2008,

doi :10.1016/j.jfranklin.2007.10.001

RI-20. *On the KYP lemma and the multidimensional models*

O. Bachelier, W. Paszke, D. Mehdi

Rapport de recherche LAII-ESIP N° 20070410OB

Multidimensional Systems and Signal Processing, vol 19(3-4), p. 425-447, 2008,

[http ://dx.doi.org/10.1007/s11045-008-0055-2](http://dx.doi.org/10.1007/s11045-008-0055-2)

RI-21. *Robust root clustering analysis in a union of subregions for descriptor systems*

W. Rejichi, O. Bachelier, M. Chaabane, D. Mehdi

IET Control Theory & Applications, vol. 2(7), p. 615-624, 2008.

Table des matières

Avant-propos	i
Sommaire	iv
Notations	v
Sigles utilisés	vii
Introduction générale	1
I ANALYSE DE LA LOCALISATION D'UN SPECTRE	7
1 Analyse nominale	9
1.1 Présentation du problème	11
1.2 Description mathématiques des régions	12
1.2.1 Formulation générale directe : régions PMI	13
1.2.1.1 Régions simples et régions composées	15
1.2.1.2 Régions de stabilité asymptotique	16
1.2.1.3 Formulation Ω	17
1.2.1.4 Formulation LMI	18
1.2.1.5 Formulation EMI	19
1.2.1.6 Formulation $U\Omega$	21

1.2.1.7	Formulation GLMI	21
1.2.1.8	Formulation E ² MI	22
1.2.2	Formulation indirecte par les frontières	23
1.2.2.1	$\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice	23
1.2.2.2	Régions unitaires	24
1.2.2.3	Formulation CMI	25
1.2.2.4	Formulation ECMI	26
1.3	Conditions de cloisonnement	27
1.3.1	Régions PMI	28
1.3.1.1	Cas particulier de la stabilité asymptotique	28
1.3.1.1.1	Cas continu : stabilité au sens de Hurwitz	28
1.3.1.1.2	Cas discret : stabilité au sens de Schur	29
1.3.1.2	Régions Ω	30
1.3.1.3	Régions LMI	31
1.3.1.4	Régions EMI	32
1.3.1.5	Régions $U\Omega$	32
1.3.1.6	Régions GLMI	33
1.3.1.7	Régions E ² MI	33
1.3.2	Régions non PMI	34
1.3.2.1	Régions unitaires	34
1.3.2.2	Régions CMI	35
1.3.2.3	Régions ECMI	36
1.4	Conclusion	40
2	Analyse robuste	41
2.1	Présentation du problème	43

2.1.1	\mathcal{D} -stabilité robuste et $\partial\mathcal{D}$ -régularité-robuste	43
2.1.2	\mathcal{D} -stabilité quadratique et $\partial\mathcal{D}$ -régularité quadratique	44
2.1.3	\mathcal{D} -stabilité poly-quadratique et $\partial\mathcal{D}$ -régularité poly-quadratique	46
2.2	Incertitudes	48
2.2.1	Structure considérée : incertitude polytopique LFT	48
2.2.1.1	Transformée fractionnaire linéaire (LFT)	48
2.2.1.2	Incertitude polytopique LFT	49
2.2.2	Divers cas particuliers	50
2.2.2.1	Incertitude LFT simple	50
2.2.2.2	Incertitude bornée en norme	51
2.2.2.3	Incertitude non structurée	51
2.2.2.4	Incertitude polytopique	51
2.2.2.5	Incertitude affine structurée	52
2.3	Conditions d'analyse robuste	52
2.3.1	Analyses qualitative et quantitative : notion de borne de robustesse	53
2.3.1.1	Analyse qualitative	53
2.3.1.2	Analyse quantitative : borne et rayon de robustesse	53
2.3.2	Stabilité robuste	55
2.3.2.1	Bornes de stabilité robuste	55
2.3.2.2	Incertitude LFT et rayon complexe de stabilité	55
2.3.2.3	Le cas polytopique	56
2.3.2.4	Le cas étonnant des systèmes variant dans le temps	58
2.3.2.5	À propos de l'approche « multimodèles »	59
2.3.3	Régions simples	60
2.3.3.1	Régions Ω	60
2.3.3.2	Régions LMI	60

2.3.3.3	Régions EMI	61
2.3.4	Régions composées	62
2.3.4.1	Régions $U\Omega$	62
2.3.4.2	Régions GLMI	62
2.3.4.3	Régions E^2MI	62
2.3.4.4	Régions CMI	64
2.3.4.5	Régions ECMI	65
2.4	Conclusion	72
II	PLACEMENT D'UN SPECTRE	75
3	Placement nominal	77
3.1	À propos du placement de pôles	79
3.1.1	Les différents types de placement	79
3.1.2	Les différents types de loi de commande	79
3.2	Placement non strict	80
3.2.1	Retour statique d'état	80
3.2.1.1	Idée de départ	80
3.2.1.2	\mathcal{D} -stabilisation dans une région LMI	81
3.2.1.3	\mathcal{D} -stabilisation dans une région EMI	82
3.2.1.4	Régions composées	82
3.2.2	Retour statique de sortie	85
3.2.2.1	Difficulté : problème BMI	85
3.2.2.2	Utilisation d'une contrainte de structure	86
3.2.2.3	Du retour d'état au retour de sortie	88
3.3	Placement strict	89

3.3.1	Un problème mathématique toujours d'actualité	89
3.3.2	Notion de structure propre	90
3.3.2.1	Structure propre d'une matrice	90
3.3.2.2	Structure propre d'un système bouclé	91
3.3.3	Placement de structure propre par retour d'état	92
3.3.3.1	Condition de placement de pôles	93
3.3.3.2	Bilan des ddl	93
3.3.3.3	Sous-espaces caractéristiques	94
3.3.3.4	Calcul de K	96
3.3.4	Placement de structure propre par retour statique de sortie	98
3.3.4.1	Préliminaires et conditions de placement	98
3.3.4.2	Sous-espaces caractéristiques et retour de sortie	100
3.3.4.3	Équation du placement de structure propre	102
3.3.4.4	Procédures de placement	103
3.3.4.4.1	$m + p > n \Leftrightarrow p > r$ (condition de Kimura)	103
3.3.4.4.2	$q < r$ (placement partiel)	105
3.3.4.4.3	$m + p = n$ (condition non stricte de Kimura)	108
3.3.4.4.4	Petite illustration	108
3.3.4.5	Comment faire un placement complet quand $m + p < n$?	109
3.4	Placement pseudo-strict	110
3.4.1	Pourquoi un placement pseudo-strict?	110
3.4.2	Régions de tolérances	111
3.4.3	Procédure	112
3.5	Conclusion	113
4	Placement robuste	115

4.1	À propos du placement robuste	117
4.1.1	Quel placement robuste ?	117
4.1.1.1	Strict ?... où sont les ddl ?	118
4.1.1.2	Non strict ?... multilinéarité apparente	118
4.1.1.3	Pseudo-strict ?	121
4.1.2	Présentation du problème formel	121
4.1.2.1	Critère à optimiser	122
4.1.2.2	Localisation des ddl	122
4.1.2.3	Problème d'optimisation	122
4.1.3	Un point de vocabulaire	123
4.1.3.1	Synthèse ou commande ?	123
4.1.3.2	Commande robuste ou analyse robuste ?	124
4.2	Commande roborante	125
4.2.1	Difficultés inhérentes au problème	126
4.2.1.1	Non-linéarité possible de la matrice incertaine	126
4.2.1.2	Limites sur les dimensions	127
4.2.1.2.1	Cas \mathbb{S}_+	127
4.2.1.2.2	Cas \mathbb{S}_-	127
4.2.2	Tentative de résolution du problème	132
4.2.2.1	Non-linéarité du problème	132
4.2.2.2	Détail d'une partie d'une itération	133
4.2.2.3	Heuristique de résolution	133
4.2.2.3.1	Algorithmes génétiques	134
4.2.2.3.2	Algorithmes chromosomiaux	137
4.2.2.3.3	Exemple final	138
4.3	Conclusion	140

Conclusion générale	141
Annexes : travaux connexes	147
A Systèmes multidimensionnels : une version n-D du lemme KYP	149
A.1 Introduction	151
A.2 Préliminaires	153
A.2.1 Modèles hybrides de Roesser	153
A.2.2 Cloisonnement d'un point	155
A.2.3 $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice multivariable	157
A.3 Une extension du lemme KYP	158
A.4 Application à l'analyse des modèles de Roesser	162
A.4.1 $\partial\mathcal{D}$ -régularité vis-à-vis d'une incertitude LFT	163
A.4.1.1 Rayon complexe de $\partial\mathcal{D}$ -régularité	163
A.4.1.2 Application à la stabilité asymptotique des modèles de Roesser	165
A.4.2 Positivité réelle du modèle hybride de Roesser	168
A.4.3 Réalité bornée du modèle hybride de Roesser	169
A.5 Exemple numérique	170
A.6 Conclusion	171
A.6.1 Résumé	171
A.6.2 Discussion et perspectives	172
B \mathcal{D}-admissibilité des systèmes implicites	175
B.1 Introduction	177
B.2 Établissement du problème mathématique	179
B.2.1 Définitions préliminaires	179
B.2.2 Formulation du faisceau incertain	180

B.2.3	Formulation de \mathcal{S}	182
B.2.4	Problème à résoudre	183
B.3	\mathcal{S} -régularité robuste	184
B.3.1	Résultat principal	184
B.3.2	Multiplieurs, matrices de Lyapunov et leurs inerties	191
B.4	Analyse robuste des modèles implicites	194
B.5	Illustration numérique	199
B.5.1	Premier exemple	199
B.5.2	Second exemple	201
B.6	Conclusion	202
C	Un théorème utile	205
C.1	Brève introduction	207
C.2	Théorème de projection de bloc plein	207
C.3	Lien avec la littérature	211
C.4	Perspectives	215
	Références bibliographiques	217
	Curriculum vitae détaillé	241
	CV classique	243
	Activités d'enseignement	248
	Activités de recherche	256
	Liste des publications de l'auteur	263
	Table des matières	280

RÉSUMÉ

Le travail présenté dans ce mémoire d'habilitation à diriger les recherches traite du placement de pôles robuste au sens de la \mathcal{D} -stabilité de la matrice dynamique (*matrix root-clustering* en anglais), c'est-à-dire de l'établissement de lois de commande qui placent les pôles d'un système linéaire incertain invariant dans le temps dans une région \mathcal{D} du plan complexe. Une approche temporelle est retenue, donc seuls les représentations d'état sont considérées.

Les régions d'encloisonnement des pôles peuvent être non connexes, non symétriques par rapport à l'axe réel. Une telle souplesse dans le choix de \mathcal{D} représente une contribution essentielle de ce travail de recherche. De façon plus spécifique, les régions EEMI (*extended ellipsoidal matrix inequality*) et ECMI (*extended combined matrix inequality*) sont privilégiées conduisant respectivement aux concepts de \mathcal{D}_U -stabilité et de $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice. Dans les deux cas, les conditions proposées le sont sous forme de LMI (*linear matrix inequality*) et se veulent des extensions de l'inégalité de Lyapunov appliquée aux systèmes linéaires. L'incertitude sur la matrice étudiée est dite polytopique LFT (*Linear Fractional transform*), permettant ainsi la prise en compte tant d'imprécisions paramétriques que d'approximations dans la linéarisation du modèle et de négligence de dynamiques non dominantes. Les conditions LMI nominales sont alors étendues au cas incertain et conduisent au concept de *bornes de \mathcal{D} -stabilité robuste*. Bien que le plus souvent pessimistes, ces bornes restent proches des valeurs idéales car les conditions LMI proposées le sont toujours selon une structure qui se rapproche du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov.

Seules les lois statiques de commande sont considérées, c'est-à-dire le retour statique d'état et le retour statique de sortie. Des techniques de placement *non strict* de pôles dans \mathcal{D} ainsi que des techniques de placement *strict* d'un spectre utilisant la notion de structure propre d'une matrice sont exposées. Un accent est mis sur le retour statique de sortie lorsque la somme du nombre des commandes et de celui des sorties est égale à l'ordre du modèle (condition de Kimura non stricte). Ces lois de commande sont alors rendues *roborantes*, c'est-à-dire qu'elles sont modifiées de sorte qu'elles confèrent aux systèmes incertains bouclés plus de robustesse en \mathcal{D} -stabilité. Cette évolution des lois de commande se fait par une augmentation de la borne de \mathcal{D} -stabilité robuste, plus précisément par une quasi-résolution d'un problème d'optimisation fortement non convexe à l'aide d'*algorithmes chromosomiaux*.

Des annexes proposent des résultats connexes obtenus sur des problèmes qui ne sont pas à proprement parler ceux traités dans le corps du mémoire, à savoir la stabilité des *modèles multidimensionnels* ou la \mathcal{D} -stabilité des *modèles implicites*. Toutefois elles révèlent le potentiel d'extension que recèlent les approches présentées.

RÉSUMÉ

Le travail présenté dans ce mémoire d'habilitation à diriger les recherches traite du placement robuste de pôles au sens de la \mathcal{D} -stabilité de la matrice dynamique (*matrix root-clustering* en anglais), c'est-à-dire de l'établissement de lois de commande qui placent les pôles d'un système linéaire incertain invariant dans le temps dans une région \mathcal{D} du plan complexe. Une approche temporelle est retenue, donc seuls les représentations d'état sont considérées.

Les régions d'encloisonnement des pôles peuvent être non connexes, non symétriques par rapport à l'axe réel. Une telle souplesse dans le choix de \mathcal{D} représente une contribution essentielle de ce travail de recherche. De façon plus spécifique, les régions EEMI (*extended ellipsoidal matrix inequality*) et ECMI (*extended combined matrix inequality*) sont privilégiées conduisant respectivement aux concepts de \mathcal{D}_U -stabilité et de $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice. Dans les deux cas, les conditions proposées le sont sous forme de LMI (*linear matrix inequality*) et se veulent des extensions de l'inégalité de Lyapunov appliquée aux systèmes linéaires. L'incertitude sur la matrice étudiée est dite polytopique LFT (*Linear Fractional transform*), permettant ainsi la prise en compte tant d'imprécisions paramétriques que d'approximations dans la linéarisation du modèle et de négligence de dynamiques non dominantes. Les conditions LMI nominales sont alors étendues au cas incertain et conduisent au concept de *bornes de \mathcal{D} -stabilité robuste*. Bien que le plus souvent pessimistes, ces bornes restent proches des valeurs idéales car les conditions LMI proposées le sont toujours selon une structure qui se rapproche du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov.

Seules les lois statiques de commande sont considérées, c'est-à-dire le retour statique d'état et le retour statique de sortie. Des techniques de placement *non strict* de pôles dans \mathcal{D} ainsi que des techniques de placement *strict* d'un spectre utilisant la notion de structure propre d'une matrice sont exposées. Un accent est mis sur le retour statique de sortie lorsque la somme du nombre des commandes et de celui des sorties est égale à l'ordre du modèle (condition de Kimura non stricte). Ces lois de commande sont alors rendues *robustantes*, c'est-à-dire qu'elles sont modifiées de sorte qu'elles confèrent aux systèmes incertains bouclés plus de robustesse en \mathcal{D} -stabilité. Cette évolution des lois de commande se fait par une augmentation de la borne de \mathcal{D} -stabilité robuste, plus précisément par une quasi-résolution d'un problème d'optimisation fortement non convexe à l'aide d'*algorithmes chromatiques*.

Des annexes proposent des résultats connexes obtenus sur des problèmes qui ne sont pas à proprement parler ceux traités dans le corps du mémoire, à savoir la stabilité des *modèles multidimensionnels* ou la \mathcal{D} -stabilité des *modèles implicites*. Toutefois elles révèlent le potentiel d'extension que recèlent les approches présentées.