Systèmes Multivariables - Partie II

Olivier BACHELIER

E-mail : Olivier.Bachelier@univ-poitiers.fr Tel: 05-49-45-36-79 ; Fax: 05-49-45-40-34

Dernière version : 5 novembre 2019

Résumé

Ces notes de cours s'adressent aux étudiants de dernière année de Master RCA (Réseau Communication Automatique) de l'Université de Poitiers. Elles correspondent à un enseignement de huit heures s'inscrivant dans le cadre du module « Systèmes Multivariables ». En référence au programme de cette formation, les points abordés sont :

- Concepts de découplage : statique et dynamique ;
- Synthèse : placement de pôles, cas du retour d'état, du retour statique de sortie, du retour dynamique de sortie;
- Réduction de modèle.

Toutefois, si tous ces points sont étudiés, le lecteur est invité à consulter la table des matières pour connaître précisément le plan de cette partie de cours.

Table des matières

	Notations Préambule	iii iv
1	Différent 1.1 Retor 1.2 Retor 1.3 Retor 1.4 Notes Bibliograp	es structures de rétrocation 1 ur statique d'état 1 ur statique de sortie 2 ur dynamique de sortie 4 s 6 hie 6
~	P	
2	2.1 Intro 2.1.1 2.2 Déco 2.2.1 2.2 Déco 2.2.1 2.2.2 2.3 Déco 2.4 Notes Bibliograp	ge entrees/sorties 7 duction à la notion de couplage et de découplage 7 Exemples de systèmes présentant un couplage 7 2.1.1.1 Réacteur chimique 7 2.1.1.2 Exemple académique 8 Les différents problèmes de découplage 11 uplage par approche fréquentielle 12 Découplage dynamique 13 uplage par approche temporelle 14 s 16
•	Dibilograp	
3	3.1 Rapp 3.1.1 3.1.2	el structure propre 17 el sur la structure propre d'une matrice 17 Structure propre d'une matrice 17 3.1.1.1 Définition 17 3.1.1.2 Propriétés des valeurs propres 18 3.1.1.3 Propriétés des vecteurs propres 18 Structure propre d'un système bouclé 18 3.1.2.1 Définition 19 3.1.2.2 Influence des valeurs propres 19 3.1.2.3 Influence des vecteurs propres en termes de couplage 20 3.1.2.4 Vecteurs propres et sensibilité locale 22
	3.2 Place 3.2.1 3.2.2 3.2.3 3.2.4	ment de structure propre par retour d'état 22 Condition de placement de pôles 23 Bilan des ddl 23 Sous-espaces caractéristiques 23 Chain des mentants propres e depisibles 23
	3.2.5 3.3 Place	Calcul de K 25 ment de structure propre par retour de sortie 26

		3.3.4	Placement total						
		3.3.5	Placement par retour de sortie et transmission directe						
	3.4	Placer	nent de structure propre par retour dynamique de sortie						
	3.5	Placer	ement de structure propre et précommande						
	3.6	Petite	illustration						
	3.7	Notes							
	Bibl	iograph	ie						
4	Réd	luctior	a de modèle 35						
	4.1	À pro	pos des modèles linéaires réduits 35						
		4.1.1	Le but de la réduction						
		4.1.2	La qualité d'un modèle réduit						
		4.1.3	Les différentes méthodes de réduction						
	4.2	Réduc	tion par technique modale						
		4.2.1	Troncature de l'état						
		4.2.2	Négligence de la dynamique des modes rapides						
	4.3	Réduc	tion par technique d'agrégation						
		4.3.1	Calcul de la matrice d'agrégation						
			4.3.1.1 Utilisation de la matrice de commandabilité						
			4.3.1.2 Utilisation de la décomposition spectrale						
		4.3.2	Calcul de la matrice d'observation						
		4.3.3	Propriétés du modèle agrégé 40						
	4.4	Réduc	tion par décomposition de Schur						
		4.4.1	Agrégation						
		4.4.2	Négligence de la dynamique rapide						
		4.4.3	Remarques sur la méthode						
	4.5	Réduc	tion par transformation équilibrante $\dots \dots \dots$						
		4.5.1	Les grammiens						
			4.5.1.1 Définition des grammiens						
			4.5.1.2 Interprétation des grammiens						
			4.5.1.3 Propriété des grammiens						
		4.5.2	La transformation équilibrante						
			4.5.2.1 Réalisation équilibrée						
			4.5.2.2 Transformation équilibrante						
		4.5.3	Réduction du modèle						
	4.6	Comp	araison succincte des méthodes $\dots \dots \dots$						
4.7 Notes									
	Bibl	iograph	ie						

Notation

- \mathbb{R} Corps des nombres réels
- \mathbb{R}^+ Ensemble des réels positifs.
- \mathbb{C} Corps des nombres complexes
- i Inité imaginaire (i = $\sqrt{-1}$)
- \mathbb{R}^n Espace des vecteurs réels de dimension n
- \mathbb{C}^n Espace des vecteurs complexes de dimension n
- $\mathbb{R}^{m \times n}$ Espace des matrices réelles comportant *m* lignes et *n* colonnes
- $\mathbb{C}^{m \times n}$ Espace des matrices complexes comportant m lignes et n colonnes
- M^T Transposée de la matrice M
- M' Transposée conjuguée de la matrice M ($M' = M^T$ lorsque M est réelle)
- \tilde{v} Conjugué du vecteur v (sauf notation ponctuelle indiquée)
- II $_n$ Matrice Identité de dimension n
- Matrice nulle de dimension appropriée
- ||.||• norme de l'argument '.' (vecteur, fonction vectorielle, matrice, ou matrice de transfert)
- ${\rm Im}(M)$ Sous-espace engendré par les colonnes de la matrice M
- $\operatorname{Ker}(M)$ Sous-espace correspondant au noyau de l'application linéaire associée à la matrice M

Préambule

Ce cours de Master constitue la deuxième partie du module "Systèmes Multivariables". Il ne s'adresse qu'aux étudiants de Master ayant choisi un parcours compatible avec ce module. Il fait suite à un premier volet présentant un certain nombre de généralités, notions de base, principes concernant les modèles linéaires invariants dans le temps, comportant plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties. Les techniques présentées se limitent au cas des systèmes à temps continu.

Ces notes sont ainsi organisées : dans un premier temps, trois structures de commande sont présentées, et ce indépendamment des performances recherchées. Il s'agit du retour statique d'état, du retour statique de sortie puis du retour dynamique de sortie. Ces structures sont susceptibles d'être utilisées ou évoquées dans la suite du document. La seconde partie traite du délicat problème du découplage entrées/sorties. Les découplages statique et dynamique y sont plus ou moins étudiés, dans un cadre fréquentiel ou temporel, et selon plusieurs structures de commande. Ce problème étant vaste, l'étude du découplage dynamique par approche temporelle conduit à lui seul à la troisième partie. Cette dernière traite du placement de structure propre; elle inclut donc les aspects de placement de pôles. La quatrième partie s'éloigne du problème de couplage pour traiter de la réduction de modèle.

Chapitre 1

Différentes structures de rétrocation

Dans ce chapitre, il s'agit de présenter différentes structures de loi de commande. La différence entre ces lois de commande réside dans l'origine et la nature de la contre-réaction qui est appliquée. En effet, cette rétroaction peut se faire

- à partir du **vecteur d'état** du modèle (s'il peut être mesuré ou observé) : cette première hypothèse nécessite une synthèse dans l'espace d'état ;
- à partir **du vecteur de sortie** du système : la synthèse peut alors se faire dans le domaine fréquentiel ou dans le domaine temporel.

En outre, une deuxième distinction peut être faite sur la nature du retour lui-même. Ce dernier peut être

- statique : on exploite de simples combinaisons linéaires des sorties ou des composantes du vecteur d'état ;
- dynamique : la rétroaction est elle-même un système linéaire multivariable.

Comme l'exploitation de l'intégralité du vecteur d'état autorise souvent à se contenter d'un retour statique, les trois lois que nous présentons ci-après correspondent aux contre-réactions suivantes :

- retour statique d'état;
- retour statique de sortie;
- retour dynamique de sortie.

Pour plus de clarté, toutes les lois de commande citées ci-avant sont ici exprimées, tout au long de ce chapitre, dans l'espace d'état c'est-à-dire destinées à être appliquées au modèle :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu\\ y = Cx + Du \end{cases}$$
(1.1)

où les dimensions sont définies par $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$.

1.1 Retour statique d'état

Cette structure de loi de commande a déjà été étudiée dans le cadre des systèmes monovariables. Elle se généralise de manière immédiate au cas des systèmes multivariables. Elle correspond au schéma de la figure 1.1.

Une telle structure se traduit mathématiquement par :

$$u(t) = Hy_c(t) + Kx(t).$$
 (1.2)

où $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice qu'il est convenu d'appeler "matrice de retour d'état", $H \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est une matrice dite de précommande et $y_c \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur de consigne, c'est-à-dire le vecteur d'entrée du système



FIGURE 1.1 – Loi de commande par retour statique d'état

en boucle fermée qui est pris de même dimension que le vecteur de sortie.

L'application d'une telle loi de commande à la réalisation (1.1) conduit au modèle en boucle fermée :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x + BHy_c\\ y = (C + DK)x + DHy_c. \end{cases}$$
(1.3)

Une telle loi de commande peut être calculée à des fins diverses. Ainsi la matrice de retour d'état K peut être choisie pour stabiliser le système, lui conférer certaines performances transitoires par un choix approprié du spectre de A + BK (l'on y reviendra par la suite) ou encore pour minimiser un critère de performances (commande LQ). La matrice de précommande H est généralement choisie pour atteindre des performances statiques.

1.2 Retour statique de sortie

Puisqu'il est parfois difficile ou coûteux d'exploiter la mesure de tout le vecteur d'état x, un choix peut consister à se contenter de l'information présente au niveau du vecteur de sortie y. Ce sont alors ces seules sorties qui sont utilisées pour la contre-réaction comme le montre la figure 1.2.



FIGURE 1.2 – Loi de commande par retour statique de sortie

Une telle structure se traduit mathématiquement par :

$$u(t) = Hy_c(t) + Fy(t).$$
 (1.4)

La matrice $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$ est dite "matrice de retour de sortie".

L'application d'une telle loi de commande à la réalisation (1.1), si l'on suppose qu'il n'y a pas de transmission directe $(D = \mathbf{0})$, conduit au modèle en boucle fermée :

 $u = Hy_c + FCx + FDu$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BFC)x + BHy_c \\ y = Cx \end{cases}$$
(1.5)

En présence d'une transmission directe $(D \neq \mathbf{0})$, d'après l'équation (1.4), il vient

$$\Leftrightarrow (\mathbf{II}_m - FD)u = Hy_c + FCx$$
$$\Leftrightarrow u = (\mathbf{II}_m - FD)^{-1}Hy_c + (\mathbf{II}_m - FD)^{-1}FCx$$
(1.6)

$$\Rightarrow u = \hat{H}y_c + \hat{F}Cx, \tag{1.7}$$

avec $\hat{H} = (\mathbb{II}_m - FD)^{-1}H$ et $\hat{F} = (\mathbb{II}_m - FD)^{-1}F$. En injectant (1.7) dans (1.1), l'on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B\hat{F}C)x + B\hat{H}y_c\\ y = (C + D\hat{F}C)x + D\hat{H}y_c. \end{cases}$$
(1.8)

Toujours dans le cas où $D \neq 0$, si la mesure du vecteur de commande est exploitable, l'on peut aussi envisager une loi de commande de type retour statique de sortie modifiée :

$$u = Hy_c + F(y - Du) = Hy_c + F\hat{y},$$
(1.9)

où la mesure réellement retournée est $\hat{y} = y - Du = Cx \in \mathbb{R}^p$. Une telle commande est schématisée par la figure 1.3



FIGURE 1.3 – Loi de commande par retour statique de sortie modifiée

Le système en boucle fermée admet alors pour réalisation :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BFC)x + BHy_c\\ y = (C + DFC)x + DHy_c \end{cases}$$
(1.10)

Quoi qu'il en soit, les matrices F et H sont calculées dans le même but que lors d'une synthèse par retour d'état. Cependant, le nombre de degrés de liberté offerts par un retour statique de sortie est moindre (F comporte seulement $m \times p$ composantes alors que K en comporte $m \times n$). Pour cette raison et pour bien d'autres, il est plus difficile de calculer F que K (ce qui se vérifiera dans la partie consacrée au placement de pôles).

1.3 Retour dynamique de sortie

Dans cette partie, le retour de sortie est toujours considéré. Cependant, plutôt que reboucler de simple combinaisons linéaires des sorties sur les commandes, la boucle de retour contient elle-même un système linéaire multivariable d'ordre l dont les entrées sont les sorties du procédé et les dont les sorties servent à la commande du procédé. Cette structure est illustrée par la figure 1.4.



FIGURE 1.4 – Loi de commande par retour dynamique de sortie

La loi de commande est donnée mathématiquement par :

$$\begin{cases} \dot{z} = F_1 z + F_2 y \\ u = F_3 z + F_4 y + H y_c, \end{cases}$$
(1.11)

où $z \in \mathbb{R}^l$ est le vecteur d'état du système de retour. Ce système de retour admet pour matrice de transfert (entre y et u, en ignorant y_c)

$$G_F(s) = F_3(s \mathbb{I}_l - F_1)^{-1} F_2 + F_4.$$
(1.12)

La seconde équation dans (1.11) peut être récrite :

$$(\mathbf{II}_m - F_4 D)u = F_3 z + F_4 C x + H y_c$$

$$\Leftrightarrow u = \hat{F}_4 C x + \hat{F}_3 z + \hat{H} y_c,$$

avec $\hat{F}_4 = (\mathbf{II}_m - F_4 D)^{-1} F_4, \, \hat{F}_3 = (\mathbf{II}_m - F_4 D)^{-1} F_3 \text{ et } \hat{H} = (\mathbf{II}_m - F_4 D)^{-1} H.$

L'on peut concaténer les deux vecteurs d'état, du procédé et du système de retour, en un seul vecteur ξ défini par $\xi' = [x' \ z']'$. Il vient alors le modèle bouclé global suivant :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \begin{bmatrix} A + B\hat{F}_4C & B\hat{F}_3 \\ F_2C + F_2D\hat{F}_4C & F_1 + F_2D\hat{F}_3 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B\hat{H} \\ F_2D\hat{H} \end{bmatrix} y_c \\ y = \begin{bmatrix} C + D\hat{F}_4C & D\hat{F}_3 \end{bmatrix} \xi + D\hat{H}y_c. \end{cases}$$
(1.13)

Un tel retour dynamique peut en réalité être interprêté comme un **retour statique de sortie sur un système** augmenté. En effet, soit le modèle augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \tilde{A}\xi + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} = \tilde{C}\xi + \tilde{D}\tilde{u}, \end{cases}$$
(1.14)

où $\xi \in \mathbb{R}^{n+l}$, et où

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_l \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_l \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_l \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_l \end{bmatrix}. \tag{1.15}$$

Soient aussi les matrices de retour de sortie et de précommande :

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F_4 & F_3 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{H} = \begin{bmatrix} H \\ \mathbf{0}_{l,m} \end{bmatrix},$$
(1.16)

de telle sorte que

$$\tilde{u} = \tilde{F}\tilde{y} + \tilde{H}y_c. \tag{1.17}$$

Il s'agit là d'une loi de commande de retour statique de sortie appliquée au modèle augmenté. L'équation (1.17) se récrit :

$$\tilde{u} = \tilde{F}\tilde{C}\xi + \tilde{F}\tilde{D}\tilde{u} + \tilde{H}y_c$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{I}_{m+l} - \tilde{F}\tilde{D})\tilde{u} = \tilde{F}\tilde{C}\xi + \tilde{H}y_c$$

$$\Leftrightarrow \tilde{u} = (\mathbf{I}_{m+l} - \tilde{F}\tilde{D})^1\tilde{F}\tilde{C}\xi + (\mathbf{I}_{m+l} - \tilde{F}\tilde{D})^{-1}\tilde{H}y_c.$$
(1.18)

La matrice $(II_{m+l} - \tilde{F}\tilde{D})$ se décompose ainsi :

$$(\mathbf{I}_{m+l} - \tilde{F}\tilde{D}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m - F_4 D & \mathbf{0} \\ -F_2 D & \mathbf{I}_l \end{bmatrix}.$$
(1.19)

Il est facile de vérifier que son inverse est :

$$(\mathbf{I}_{m+l} - \tilde{F}\tilde{D})^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_m - F_4 D)^{-1} & \mathbf{0} \\ F_2 D(\mathbf{I}_m - F_4 D)^{-1} & \mathbf{I}_l \end{bmatrix}.$$
 (1.20)

Ainsi, en injectant la loi de commande par retour statique de sortie exprimée telle qu'en (1.18) dans l'équation (1.14), on retrouve, après quelques manipulations matricielles, la réalisation (1.13).

Pour déterminer un **retour dynamique de sortie**, encore appelé **compensateur dynamique**, il suffit donc de calculer un retour **statique** de sortie sur un **système augmenté**. Les performances recherchées sont les mêmes que pour n'importe quelle autre loi de commande mais un compensateur dynamique permet d'apporter des degrés de liberté supplémentaires pour atteindre ces performances (l'on y reviendra lors du placement de pôles).

Dans le cas où $D = \emptyset$, la réalisation (1.13) devient :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \begin{bmatrix} A + BF_4C & BF_3 \\ F_2C & F_1 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} BH \\ 0 \end{bmatrix} y_c \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \xi. \end{cases}$$
(1.21)

Le raisonnement ci-dessus reste alors totalement valide en considérant tout simplement que, dans (1.15), $\tilde{D} = \mathbf{0}$.

Remarque 1.1 Il est à noter qu'un compensateur dynamique peut résulter de l'application d'une commande (statique ou dynamique) à partir de tout ou partie du vecteur d'état observé. L'observateur constitue alors un sous-système de ce compensateur dynamique.

Remarque 1.2 Le compensateur dynamique donné par la matrice \tilde{F} (équation (1.16)) peut être calculé dans une autre base de l'espace d'état de sorte que la matrice

$$\breve{F} = \begin{bmatrix} F_4 & F_3 T^{-1} \\ TF_2 & TF_1 T^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T \end{bmatrix} \widetilde{F} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T^{-1} \end{bmatrix},$$
(1.22)

où T est une matrice quelconque de rang plein, est une autre solution au problème initial.

1.4 Notes

Toues les notions abordées dans ce chapitre sont classiques et ne suggèrent pas de références bibliographiques véritablement à privilégier. Les différentes structures de rétro-action se rencontrent dans nombre de cours et d'ouvrages d'automatique des systèmes linéaires, monovariables ou multivariables. Le passage d'un compensateur dynamique à un compensateur statique sur un système augmenté est expliqué dans [1].

Bibliographie

P. Hippe et J. O'Reilly. Parametric compensator design. International Journal of Control, Vol 45(4), p. 1455-1468, 1987.

Chapitre 2

Découplage entrées/sorties

Dans ce chapitre, il est question d'un problème spécifique aux systèmes multivariables. En effet, ces derniers comportant plusieurs sorties, il est souvent souhaité de les commander indépendamment les unes des autres. Ainsi, si un système comporte deux sorties y_1 et y_2 , il serait intéressant de pouvoir imposer une consigne y_{c_1} pour y_1 sans influer sur y_2 et, réciproquement, d'imposer une consigne y_{c_2} pour y_2 sans influer sur y_1 .

La première partie de ce chapitre explique la difficulté de considérer les canaux entrées/sorties comme étant indépendants et met en évidence le couplage entre ces canaux, définissant ainsi les problèmes de découplage associés. La deuxième partie aborde ces problèmes de découplage par une approche fréquentielle. La troisième partie fait de même mais par une approche temporelle. Il est à noter que certains problèmes fortement connectés à cette dernière partie sont renvoyés au chapitre suivant.

2.1 Introduction à la notion de couplage et de découplage

Cette partie a pour but d'expliquer pourquoi un système mutivariable peut présenter un couplage. L'explication se veut à la fois physique, dans un premier temps, puis plus formelle, dans un second temps. À partir de ces constatations, les problèmes de découplage qui en résultent sont présentés.

2.1.1 Exemples de systèmes présentant un couplage

Tout d'abord, un exemple de système présentant des couplages est présenté, sans équation, afin que le lecteur perçoive intuitivement la notion de couplage. Un second exemple, purement numérique, explique comment se manifeste un couplage dans un modèle et quelles peuvent en être les conséquences.

2.1.1.1 Réacteur chimique

Le fonctionnement d'un réacteur chimique est illustré de manière simpliste par la figure 2.1.

Une réaction chimique a lieu dans un réservoir agité. Le contenu du réservoir est appelé réacteur chimique. Le réservoir est ceint d'une veste dans laquelle circule un fluide capable de refroidir ou d'échauffer le réacteur. La réaction est liée à la rencontre des réactants, c'est-à-dire des produits qui sont injectés dans le réacteur. Le résultat de cette réaction est constitué des produits, c'est-à-dire des éléments qui sont extraits du réacteur après un certain temps passé au sein du milieu réactif.

La qualité de la réaction est souvent étroitement liée à la température à laquelle elle a lieu. Ainsi, pour un tel système, il importe de commander, bien entendu, la concentration des produits, mais aussi la température du réacteur. Pour ce faire, l'on peut jouer sur la concentration des réactants et sur la quantité de chaleur apportée par le fluide de la veste. Il s'agit donc d'un système à deux entrées,



FIGURE 2.1 – Réacteur chimique agité.

- la concentration des réactants,
- la température du fluide dans la veste,

et à deux sorties,

- la concentration des produits,
- la température du réacteur.

Toutefois, ces deux aspects ne sont pas indépendants. En effet, comme l'on vient de le mentionner, toute modification de température du fluide extérieur, dans le but de commander la température du réacteur, est de nature à changer le taux de réaction à l'intérieur du réacteur ce qui influe sur la concentration des produits. De même, toute modification de concentration des réactants modifie le taux de réaction, ce qui entraîne une variation de température du réacteur selon que la réaction est endothermique ou exothermique. Il est donc utopique de vouloir commander une des deux sorties de manière indépendante de l'autre.

2.1.1.2 Exemple académique

L'exemple proposé ci-après a pour but d'expliquer comment un couplage se traduit mathématiquement.

Soit le système dont le comportment est décrit par la réalisation (1.1) avec les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0, 5 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}.$$
(2.1)

Les composantes matérialisées en gras correspondent aux éléments responsables d'un couplage. En effet, il s'agit là d'un système carré (m = p) comportant deux entrées et deux sorties. Ce dernier est instable puisque le spectre de A est $\lambda(A) = \{-1, 0.5\}$. Si toutes les composantes en gras étaient toutes nulles, alors, le modèle (1.1) avec (2.1) se ramènerait à deux équations différentielles de premier ordre totalement indépendantes. Ainsi l'on pourrait appliquer sur chacune des entrées u_1 et u_2 une loi de commande très classique obtenue par une synthèse réalisée dans un cadre monovariable. Toutefois, la matrice B fait apparaître deux termes de couplage qui ont, comme on le verra, une influence sur le comportement du système.

Une autre façon de constater ce couplage est de calculer la matrice de transfert. Cette dernière est égale à :

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0, 5s - 0.5} \begin{bmatrix} s - 0, 5 & \mathbf{s} - \mathbf{0}, \mathbf{5} \\ \mathbf{s} + \mathbf{1} & s + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \mathbf{G_{12}(s)} \\ \mathbf{G_{21}(s)} & G_{22}(s) \end{bmatrix}.$$
 (2.2)

Une fois encore, les composantes matérialisées en gras sont responsables du couplage. L'on voit très bien l'influence des composantes hors diagonale de B en analysant G(s) puisque chaque sortie est influencée de manière identique par les deux entrées.

Si l'on pousse le raisonnement jusqu'à constater ce qui se passe en ignorant le couplage, l'on peut par exemple considérer que seules les composantes diagonales, responsables du couplage entre u_1 et y_1 d'une part et entre u_2 et y_2 d'autre part, sont utilisées pour la synthèse. Autrement dit, on cherche à agir uniquement sur u_1 pour commander y_1 et pour cela, on ne regarde que le transfert entre u_1 et y_1 . De même, on cherche à agir uniquement sur u_2 pour commander y_2 et pour cela, on ne regarde que le transfert entre u_1 et y_2 .

Soit le transfert spécifique au canal entreé/sortie $u_1 \rightarrow y_1$:

$$G_{11}(s) = \frac{s - 0.5}{s^2 + 0.5s - 0.5} = \frac{1}{s + 1}$$
(2.3)

L'on applique sur ce système du premier ordre une simple régulation proportionnelle accompagnée d'une précompensation conformément à la figure 2.2 et à l'équation suivante :

$$u_1 = F_1(H_1 y_{c_1} - y_1). (2.4)$$



FIGURE 2.2 – Régulateur proportionnel accompagné d'une précommande.

En choisissant $H_1 = -1$ et $F_1 = -0, 5$, le système de premier ordre bouclé a un pôle à -0, 5 et un gain statique unitaire.

De façon analogue, le transfert spécifique entre u_2 et y_2 est donné par

$$G_{22}(s) = \frac{s+1}{s^2+0, 5s-0, 5} = \frac{1}{s-0, 5}.$$
(2.5)

Une commande telle que celle illustrée par la figure 2.2 et donnée par

$$u_2 = F_2(H_2 y_{c_2} - y_2). (2.6)$$

avec $H_2 = 0,5$ et $F_2 = 1$ conduit à un second système bouclé de premier ordre ayant un pôle à -0.5 et un gain statique unitaire.

Si l'on applique ces deux lois de commande calculées indépendamment simultanément sur le système, comme indiqué sur la figure 2.3, le résultat naïvement escompté des deux essais indiciels (échelons appliqués soit sur y_{c_1} , soit sur y_{c_2}) est donné par la figure 2.4. En revanche, les réponses réellement obtenues sont données par la figure 2.5.

La différence cruciale entre le comportement espéré et celui constaté s'explique évidemment par la négligence des effets du couplage. Non seulement, un échelon sur une entrée induit une modification des deux sorties mais de plus, ni les constantes de temps, ni les gains statiques attendus sont vérifiés. On constate même une oscillation des réponses. En effet, le modèle bouclé réel est de la forme :



FIGURE 2.3 – Application de deux commandes calculées indépendamment



FIGURE 2.4 – Réponses indicielles attendues en l'absence de couplage

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BFC)x + BFHu\\ y = Cx \end{cases}$$
(2.7)

avec :

$$F = \begin{bmatrix} -0, 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0, 5 \end{bmatrix}.$$
(2.8)

La matrice d'état en boucle fermée A - BFC admet pour spectre $\lambda(A - BFC) = \{-0, 5 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\}$ ce qui explique les oscillations. La loi de commande ne correspond, dans ce cas, qu'à un très mauvais placement de pôles par retour d'état.

Par conséquent, il faut tirer plusieurs conclusions de cet exemple et de bien d'autres qui auraient pu être présentés :

- Le couplage ne permet pas de déterminer p lois de commandes monovariables indépendantes.
- Toutes les commandes sont susceptibles d'agir sur toutes les sorties.
- L'application de p lois de commandes monovariables indépendantes engendre des effets indésirés : — sur le régime statique de la réponse



FIGURE 2.5 – Réponses indicielles réellement obtenues

— sur le régime transitoire (cet effet indésirable peut entrainer une instabilité).

2.1.2 Les différents problèmes de découplage

À la vue de tous les effets indésirables imputables au couplage, un défi majeur consiste à éliminer, si possible, ce couplage ou pour le moins à le réduire, de manière à se rapprocher, autant que faire se peut, de p canaux entrée/sortie indépendants. Le problème de découplage consiste donc à établir une loi de commande qui tend à satisfaire cette réduction du couplage naturel du procédé.

Selon que cette indépendance est souhaitée uniquement en régime permanent ou bien quelle que soit la fréquence, et selon que le modèle servant à établir la loi de commande découplante est une représentation d'état ou une matrice de transfert, l'on distingue les découplages selon deux aspects :

- le découplage statique pour lequel seule l'indépendance des canaux entrée/sortie en régime permanent est recherchée par opposition au découplage dynamique pour lequel on veut que cette indépendance soit effective aussi sur le régime transitoire;
- le découplage par approche fréquentielle pour lequel la loi de commande est obtenue à partir d'une matrice de transfert G(s) par opposition au découplage par approche temporelle pour lequel la loi de commande est déduite d'un modèle d'état tel que (1.1).

2.2 Découplage par approche fréquentielle

Quelques concepts sont ici abordés dans le but de réaliser un découplage par approche fréquentielle c'est-à-dire sur la base d'un modèle de type **matrice de transfert**. La première partie se contente d'aborder le problème du découplage statique alors que la seconde s'intéresse à celui, plus ardu, du découplage dynamique. Dans les deux cas, la structure de commande est une structure de précompensation.

2.2.1 Découplage statique

Il s'agit là du problème de découplage le plus simple. L'indépendance des sorties n'est souhaitée qu'en régime permanent. Pour ce cas de figure, l'on peut se contenter d'appliquer une loi de commande de type **précompensation**. Une telle structure de commande est illustrée par la figure 2.6.



FIGURE 2.6 – Principe du découplage statique par précompensation.

De toute évidence, si l'on ignore les conditions initiales qui n'ont pas d'influence sur le régime permanent, la transformée de Laplace du vecteur de sorties s'exprime

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)H(s)Y_{c}(s)$$
(2.9)

où U(s) et $Y_c(s)$ sont les transformées de Laplace respectives des vecteurs de commande et de consigne. Le régime permanent est mathématiquement défini par

$$y_{\infty} = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} (sY(s)) = \lim_{s \to 0} (sG(s)H(s)Y_c(s)).$$
(2.10)

Si l'on suppose que le vecteur de consigne est constitué d'un ensemble d'échelons d'amplitudes α_i , i = 1, ..., p, alors, l'on doit satisfaire :

$$y_{\infty} = \lim_{s \to 0} \left(sG(s)H(s)\frac{1}{s} \begin{bmatrix} \alpha_{1} \\ \vdots \\ \alpha_{p} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha_{1} \\ \vdots \\ \alpha_{p} \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow G(0)H(0) \begin{bmatrix} \alpha_{1} \\ \vdots \\ \alpha_{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1} \\ \vdots \\ \alpha_{p} \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow G(0)H(0) = \mathbf{I}_{p}. \tag{2.11}$$

Il suffit donc de calculer, non pas une matrice de transfert H(s), mais une simple précompensation statique H = H(0) telle que l'égalité (2.11) est vérifiée.

Si le procédé original de modèle G(s) est un système carré, c'est-à-dire comportant autant d'entrées que de sorties (m = p), alors il est facile de calculer $H = G(0)^{-1}$, sous réserve de non-singularité de G(0). Si le système comporte plus d'entrées que de sorties (m > p), alors le système linéaire (2.11) est surdéterminé et une infinité de matrices H le vérifient, telle que toute pseudo-inverse de G(0) (ex : la pseudo-inverse de Moore-Penrose). Si, en revanche, le procédé comporte plus de sorties que d'entrées (m < p), alors, il est difficile, sinon impossible de vouloir atteindre ainsi un découplage statique, ce qui peut se comprendre aisément : comment contrôler toutes les sorties si l'on ne dispose pas d'assez de moyens d'actions sur le procédé.

En résumé, cette technique de découplage statique peut être efficace mais elle admet néanmoins les limites suivantes :

- il faut satisfaire $m \ge p$;
- la matrice G(0) doit être de rang plein pour pouvoir calculer H;
- le procédé doit être soit stable, soit stabilisé au préalable car une précommande ne peut stabiliser un procédé instable.

Exemple :

Soit la matrice de transfert suivante :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{20(s+1)}{(s^2+3s+12)(s+2)} & \frac{-130(s-0,3)}{s^2+2s+80} & \frac{-10(s-3)}{(s^2+3s+12)(s+8)} \\ \frac{15(s-1)}{(s^2+4s+12)(s+2)} & \frac{43(s+1)}{(s^2+2s+32)(s+2)} & \frac{30(s+1)}{s^2+2s+122} \\ \frac{-9(s-4)}{s^2+2s+52} & \frac{30(0,5s+4)}{s^2+2s+412} & \frac{3,2}{s+2} \end{bmatrix}.$$

Une tel modèle est carré et il est facile de calculer la matrice de précommande :

$$G(0) = \begin{bmatrix} 0,833 & 0,487 & 0,312\\ -0,625 & 0,672 & 0,246\\ 0,692 & 0,291 & 1,600 \end{bmatrix} \Rightarrow H = G(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,833 & -0,572 & -0,075\\ 0,972 & 0,927 & -0,332\\ -0,537 & 0,079 & 0,718 \end{bmatrix}.$$

2.2.2 Découplage dynamique

Dans ce paragraphe, l'on aborde de manière assez superficielle le principe du découplage dynamique. Les canaux entrée/sortie doivent être indépendants même pendant la phase transitoire. Ce problème est nettement plus compliqué à résoudre que celui du découplage statique aussi aborde-t-on ici le principe général plus que les techniques associées.

Très grossièrement, l'on peut dire que le régime permanent est associée à la valeur s = 0. L'on assure le découplage statique si la matrice de transfert globale est diagonale pour s = 0. Pour le régime dynamique, il faut assurer cette structure diagonale pour toute valeur de s. Ainsi, l'on peut définir le problème du découplage dynamique idéal par :

Calculer une matrice de précommande H(s) telle que la matrice de transfert Q(s) = G(s)H(s) vérifie :

$$\begin{cases} q_{ii}(s) \neq 0 & \forall i \in \{1, ..., p\} \\ q_{ij}(s) = 0 & \forall \{i, j \neq i\} \in \{1, ..., p\}^2 \end{cases}$$
(2.12)

Hélas, il n'existe pas de technique pour résoudre ce problème. Seuls quelques cas très simples et souvent très particuliers autorisent un découplage parfait. Pour cette raison, l'on se contente de définir le problème de découplage dynamique approximatif par :

Calculer une matrice de précommande H(s) telle que la matrice de transfert Q(s) = G(s)H(s) vérifie :

$$|q_{ij}(\mathbf{i}\omega)| \ll 1 \quad \forall \{i, j \neq i\} \in \{1, ..., p\}^2$$
(2.13)

Il existe plusieurs méthodes fréquentielles dans la littérature scientifique pour tenter de réduire ces transferts $q_{ij}(s)$, méthodes qui ne sont pas détaillées ici et dont l'efficacité n'est pas toujours avérée.

Il faut faire en sorte que les éléments diagonaux de Q(s), c'est-à-dire les transferts $q_{ii}(s)$ caractéristiques des couplages pertinents, soient

— sans zéro instable;

[—] strictement propres;

— d'ordre le moins élévé possible.

Il faut toutefois garder présent à l'esprit que même si un tel découplage approximatif est parfois possible, il ne consitute pas en lui-même une loi de commande satisfaisante pour le système qui doit par ailleurs vérifier plusieurs propriétés telles que la stabilité, la précision, les performances transitoires ou un éventuel rejet de perturbations. C'est pourquoi il faut recourir, une fois le découplage considéré comme acceptable, à une seconde loi de commande. Le principe est illustré, dans le cas d'un modèle carré 2×2 , par la figure 2.7.



FIGURE 2.7 – Principe du découplage dynamique pour un système 2×2 .

Parmi les techniques de découplage par approche fréquentielle parfois exploitées dans la littérature, citons les techniques s'appuyant sur la décomposition en valeurs singulières du système ou sur la notion de "matrice de gain relatif". Les approches temporelles sont cependant préférées dans ces notes de cours.

2.3 Découplage par approche temporelle

Dans cette partie, le défi est toujours d'atteindre un découplage entrées/sorties. Toutefois, la conception de la loi de commande découplante se fait à partir de la représentation (1.1). La technique proposée ici envisage le découplage dans sa globalité (statique et dynamique). L'on suppose ici qu'il n'y a pas de transmission directe entre commandes et sorties ($D = \emptyset$).

La loi de commande est du type retour d'état c'est-à-dire qu'elle répond à la formulation (1.2).

L'on suppose que l'on cherche à découpler un procédé vérifiant m = p = n (un tel procédé ne se rencontre généralement qu'à l'ordre 2 ou 3). L'on suppose aussi que les sorties doivent correspondre à celles d'un modèle carré $p \times p$ désiré dont le vecteur d'état est le vecteur de sortie lui-même. Plus précisément, cette sortie doit satisfaire :

$$\dot{y} = Q(y - y_c) \tag{2.14}$$

où $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$ est une matrice diagonale. L'équation (2.14) n'est autre qu'une représentation d'état qui peut se récrire :

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{c_1} \\ y_{c_2} \\ \vdots \\ y_{c_p} \end{bmatrix}.$$
(2.15)

Il s'agit en réalité de p équations différentielles de premier ordre indépendantes dont chacune peut être ainsi traduite dans le domaine de Laplace :

$$sY_i(s) = q_{ii}Y_i - q_{ii}Y_{c_i}(s) \quad \forall i \in \{1, ..., p\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y_i(s)}{Y_{c_i}(s)} = \frac{-q_{ii}}{s - q_{ii}} \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}.$$

$$(2.16)$$

L'équation (2.16) montre bien qu'un choix pertinent de Q revient à fixer la dynamique souhaitée. Le pôle de chaque système de premier ordre est q_{ii} . Chacune de ces valeurs doit donc être prise négative pour assurer au moins la stabilité asymptotique du modèle désiré. Chaque sous-système spécifié présente clairement un gain statique unitaire.

L'équation (1.1) associée à la loi de commande (1.2) conduit à :

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(Hy_c + Kx) = (A + BK)x + BHy_c$$

$$\Rightarrow C\dot{x} = C(A + BK)x + CBHy_c$$

$$\Leftrightarrow \dot{y} = (CA + CBK)x + CBHy_c.$$
(2.17)

Or, de l'équation (2.14), on déduit

$$\dot{y} = QCx - Qy_c. \tag{2.18}$$

La comparaison entre la sortie réelle donnée par (2.17) et la sortie désirée donnée par (2.18) mène au système suivant :

$$\begin{cases} CA + CBK = QC \Leftrightarrow CBK = QC - CA \\ CBH = -Q. \end{cases}$$
(2.19)

Soit la matrice $W = (CB)^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ (sous réserve de non-singularité de (CB)). À partir de cette matrice W, l'on construit les matrices de retour d'état et de précommande

$$\begin{cases} K = W(QC - CA) \\ H = -WQ. \end{cases}$$
(2.20)

Il va de soi que de telles matrices vérifient le système (2.19).

Cette méthode de découplage est assez simple et peut se révéler très utile. Il faut toutefois en révéler trois limites fondamentales :

- elle n'est génériquement utilisable que lorsque m = p = n;
- elle ne s'étend pas au cas du retour de sortie;
- la présence d'une transmission directe D ne permet pas de suivre le raisonnement.

L'on pourrait penser a priori qu'une telle procédure peut s'appliquer de manière plus générale, lorsque $p \neq n$ et que l'hypothèse p = n n'est en fait jamais utilisée. Il faut se garder d'une telle méprise. Lorsque p < n, l'on ne spécifie au travers de Q que p pôles alors que la matrice d'état en boucle fermée, A + BK est de dimension n. Par conséquent, il existe n - p pôles non commandables et non observables qui sont placés de manière hasardeuses. Bien que de tels pôles n'aient, de façon strictement théorique, aucune influence sur le comportement entrées/sorties, il n'en est rien en pratique si ces derniers sont instables. La moindre incertitude de modèle ou la moindre imprécision dans l'implantation de la loi de commande conduit à révéler ces dynamiques cachées et le système bouclé devient instable.

En raison de ces limitations drastiques, la technique proposée peut être considérée comme assez pauvre. L'on peut alors se poser la question de l'intérêt de l'approche temporelle en termes de découplage. Il existe en réalité d'autres techniques temporelles parmi lesquelles le placement de structure propre et la commande non interactive. Si la commande non interactive n'est pas présentée dans ces notes de cours, le prochain chapitre est consacré au placement de structure propre.

2.4 Notes

L'exemple du réacteur chimique est emprunté à [1]. Le principe du découplage statique par approche fréquentielle est classique et découle naturellement des résultats obtenus sur les systèmes monovariables. L'exemple du paragraphe 2.2.1, le principe du paragraphe 2.2.2, tous deux relatifs au découplage par approche fréquentielle, de même que la technique de la partie 2.3 concernant le découplage par approche temporelle sont inspirées de [2].

Une technique parfois rencontrée dans la littérature, dite "du gain relatif", aurait pu figurer dans ce cours. Faute de temps, elle a été occultée mais le lecteur peut consulter [3] où elle fut initialement proposée. Le lecteur pourra trouver des informations connexes dans le livre [4],

Bibliographie

- [1] P. T. Tham *Polycopié de cours An introduction to Decoupling control.* Department of Chemical and Process Engineering, University of Newcastle upon Tyne, England
- [2] Cours de Commande, Chapitre 6 : Analysis and Design of Multivariable Control Systems. Electrical Engineering Department, State University of Binghamton, New-York, USA
- [3] E. H. Bristol On a new measure of interaction in multivariable process control. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 11, p. 133-134
- [4] J. P. Corriou. Commande des procédés. Editions, Lavoisier, Collection TEC&DOC, 1996

Chapitre 3

Placement de structure propre

Dans ce chapitre, plusieurs techniques de placement de structure propre sont présentées et ce, pour les différentes lois de commande mentionnées au chapitre 1. Elles ont pour objectif de conférer à un système bouclé des performances transitoires aussi proches que possible de celles désirées, ce qui comprend entre autres certains aspects de découplage.

Dans un premier temps, il est nécessaire de rappeler la définition de la structure propre d'une matrice mais surtout de montrer l'influence de la structure propre d'une matrice d'état sur le comportement transitoire du système associé. Après ces considérations, les techniques de placement de pôles ou de structure propre sont présentées dans le cas d'une commande par retour d'état, puis par retour de sortie.

Remarque 3.1 Les techniques de placement de pôles reposant sur la notion de structure propre sont souvent regroupées sous l'appellation de "Commande modale".

3.1 Rappel sur la structure propre

Dans cette partie, il est d'abord question de structure propre d'une matrice avant d'étendre un peu ce concept à celui de structure propre d'un système bouclé.

3.1.1 Structure propre d'une matrice

3.1.1.1 Définition

 $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si et seulement si :

$$P(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{I}_n - A) = 0. \tag{3.1}$$

Une matrice de dimension n a nécessairement n valeurs propres λ_i , i = 1, ..., n. Pour simplifier, l'on supposera que celles-ci sont distinctes. Lorsque A est réelle, les valeurs propres constituent un ensemble auto-conjugué. Autrement dit, si λ est valeur propre de A, sa quantité conjuguée l'est aussi. Tous ces scalaires constituent un ensemble de cardinal n appelé **spectre** de A et parfois noté $\lambda(A)$.

Il existe n vecteurs non nuls $v_i \in \mathbb{C}^n$, i = 1, ..., n, appelés vecteurs propres à droite, tels que :

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

$$(3.2)$$

Ces vecteurs propres sont tous définis à un facteur près. Si l'on définit V, **matrice modale**, par :

$$V = [v_1, \cdots, v_n] \tag{3.3}$$

alors, il vient la relation :

$$\Lambda = V^{-1}AV \tag{3.4}$$

où Λ est une matrice diagonale définie par :

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}. \tag{3.5}$$

La détermination de Λ passe par celle de V. On parle de diagonalisation de matrice. Cette diagonalisation n'est pas toujours possible lorsque les valeurs propres ne sont pas distinctes. Des formes canoniques de Jordan peuvent néanmoins être calculées mais ceci n'est pas explicité ici.

On peut aussi définir les vecteurs propres à gauche u_i (également définis à un facteur multiplicatif près) par la relation

$$u_i'A = \lambda_i u_i' \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

$$(3.6)$$

En définissant la matrice U par la concaténation

$$U = [u_1, \cdots, u_n], \tag{3.7}$$

il apparaît, entre les matrices U et V, pour des choix de u_i et v_i convenablement mis à l'échelle, la condition d'orthogonalité :

$$U'V = \mathbf{I}_n. \tag{3.8}$$

L'ensemble constitué des valeurs propres et des vecteurs propres à gauche et à droite est appelé **structure propre**.

3.1.1.2 Propriétés des valeurs propres

Il est à noter que les valeurs propres d'une matrice carrée A vérifient les propriétés suivantes :

- $\lambda(A) = \lambda(A^T);$
- $\lambda_i \in \lambda(A) \Rightarrow -\lambda_i \in \lambda(-A);$
- $\lambda_i \in \lambda(A) \Rightarrow \tilde{\lambda}_i \in \lambda(A')$
- $\lambda_i \in \lambda(A) \Rightarrow \lambda_i^k \in \lambda(A^k);$
- $\lambda_i \in \lambda(A) \Rightarrow s + \lambda_i \in \lambda(sI + A), \ \forall s \in \mathbb{C}$;
- les éléments diagonaux d'une matrice triangulaire sont ses valeurs propres.
- Les valeurs propres d'une matrice symétrique ou Hermitienne sont réelles.

3.1.1.3 Propriétés des vecteurs propres

Il est à noter que les vecteurs propres d'une matrice carrée A vérifient les propriétés suivantes :

- ils doivent être linéairement indépendants et constituent donc une base de \mathbb{C}^n ;
- ils sont orthogonaux pour une matrice Hermitienne diagonalisable (*i.e.* $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \forall \{i; j \neq i\}$) et constituent donc une base orthogonale (et même orthonormale puisqu'ils peuvent être normalisés). On peut alors écrire

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i'.$$

Ces propriétés sont aussi vraies pour les vecteurs propres à gauche.

3.1.2 Structure propre d'un système bouclé

Il s'agit là d'une petite extension de la définition de la structure propre d'une matrice à celle de structure propre d'un système bouclé. Cette extension est relativement simple.

3.1.2.1 Définition

Soit le modèle (1.1). L'on suppose qu'il n'y a pas de transmission directe $(D = \mathbf{0})$. Le type de bouclage considéré est le retour statique de sortie. En effet, le retour d'état en est un cas particulier pour $C = \mathbf{I}_n$ et l'on a vu au chapitre 1 que le retour dynamique de sortie se ramène à un retour statique de sortie sur un système augmenté.

Ainsi, la matrice d'état en boucle fermée est

$$A_c = A + BFC. \tag{3.9}$$

La structure propre du système bouclé n'est autre que la structure propre de la matrice A_c .

De ce fait, il vient, si l'on respecte la condition d'orthogonalité (3.8),

$$\begin{cases}
A_c v_i = (A + BFC)v_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \\
u'_i A = u'_i (A + BFC) = \lambda_i u'_i \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \\
U'V = II_n \quad \text{où} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \\
A_c = A + BFC = V\Lambda U' \quad \text{où} \quad \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.
\end{cases}$$
(3.10)

Remarque 3.2 En pratique, les matrices A, B, F et C sont toutes réelles ce qui conduit à considérer des spectres auto-conjugués. Les vecteurs propres v_i (respectivement u_i) et v_j (respectivement u_j) sont conjugués lorsque les valeurs propres λ_i et λ_j le sont.

L'on complète parfois, pour les besoins de la commande, cette définition de la structure propre d'un système bouclé par l'introduction des directions d'entrée w_i données par

$$w_i = FCV_i \quad \forall i \in \{1, \dots n\} \tag{3.11}$$

et des directions de sortie l_i données par

$$l'_{i} = u'_{i}BF \quad \forall i \in \{1, ...n\}.$$
(3.12)

La structure propre d'un système bouclé a énormément d'influence sur le comportement de ce dernier, en particulier en termes de réponse transitoire et de couplage. Cette influence est maintenant détaillée.

3.1.2.2 Influence des valeurs propres

Pour étudier l'influence des valeurs propres de la matrice d'état, nous examinons la réponse d'un système en régime libre lorsque ce dernier est soumis à une perturbation instantanée représentée par une condition initiale $x_0 = x(t_0)$. Cette réponse constitue la solution d'un système d'équations différentielles de premier ordre et est donnée par

$$x(t) = e^{A_c t} x_0. (3.13)$$

Si l'on introduit la structure propre de A dans cette expression, l'on obtient

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i e^{\lambda_i t} u'_i x_0.$$
(3.14)

Or, la décomposition de x_0 dans la base constituée par les vecteurs propres à droite de A peut s'exprimer par la combinaison linéaire suivante,

$$x_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, \tag{3.15}$$

d'où l'on obtient

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i e^{\lambda_i t} u'_i (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j).$$
(3.16)

Compte tenu de la condition (3.8) qui amène $u'_i v_j = 0$, $\forall \{i, j \neq i\} \in \{1, ..., n\}^2$ et $u'_i v_i = 1$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, on a

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} v_i.$$
(3.17)

On appelle mode réel la quantité $e^{\lambda_i t}v_i$ lorsque λ_i est réel et mode complexe la quantité $(e^{\lambda_i t}v_i + e^{\lambda_j t}v_j) \in \mathbb{R}$ lorsque $\lambda_i = \tilde{\lambda}_j \in \{\mathbb{C} \mid \mathbb{R}\}$. Cette expression est essentielle car l'on constate que tous les termes de la réponse convergent vers zéro (donc le système est asymptotiquement stable) si et seulement si toutes les valeurs propres de A_c (parfois également appelées modes) sont à partie réelle strictement négative. Plus précisément, l'on voit bien que le système retrouve d'autant plus vite sa position d'équilibre $(x \to \mathbf{0})$ que les parties réelles des valeurs propres de A sont très négatives (on parle de modes lents et de modes rapides). La rapidité de la réponse dépend de toute évidence des modes les plus lents qui sont aussi qualifiés de modes dominants. Bien entendu, la valeur initiale x_0 conditionne aussi la forme de la réponse par le biais de $\{\alpha_i, i \in \{1, ..., n\}\}$.

De plus, on remarque que l'existence de valeurs propres complexes conjuguées induit un comportement oscillatoire dans la réponse du système. Le caractère oscillatoire d'un mode complexe est d'autant plus marqué que le rapport (en valeur absolue) entre la partie imaginaire et la partie réelle des valeurs propres correspondantes est élevé. Pour les systèmes monovariables canoniques de deuxième ordre (n = 2, m = p = 1, modèle stableet numérateur de la fonction de transfert constant), ces considérations sont prises en compte pour définir un coefficient d'amortissement des oscillations ainsi qu'une pulsation particulière dite "pulsation propre non amortie"). Selon les valeurs de ces indicateurs, la nature de la réponse peut varier d'une absence d'oscillation à une très forte oscillation en passant par un léger dépassement. On se réfère souvent à ces indicateurs pour caractériser la dynamique dominante d'un système d'ordre plus élevé (n > 2) et donc ses performances en termes de temps de réponse, dépassement maximal, etc.

Ce qu'il convient de retenir est que la localisation des valeurs propres de A dans le plan complexe (en particulier les modes dominants) est extrêmement utile pour caractériser le comportement d'un système ou pour spécifier les performances souhaitées d'un procédé à commander.

Quoi qu'il en soit, les valeurs propres de A revêtent une importance capitale dans le comportement du système. Les vecteurs propres associés ont également une influence comme il est rappelé dans le paragraphe suivant.

3.1.2.3 Influence des vecteurs propres en termes de couplage

Soit le modèle

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \bar{B}d\\ y = Cx \end{cases}$$
(3.18)

où d est un vecteur de perturbations. Si l'on applique sur ce modèle la commande donnée par la loi (1.4), le système en boucle fermée est décrit par

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BFC)x + BHy_c + \bar{B}d\\ y = Cx. \end{cases}$$
(3.19)

L'on applique à l'espace d'état l'automorphisme

$$x = V\xi, \tag{3.20}$$

où V est la matrice modale de $A_c = A + BFC$, ce qui conduit, dans la nouvelle base, à

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Lambda \xi + UBHy_c + U\bar{B}d \\ y = CV\xi. \end{cases}$$
(3.21)

Dans cette base dite canonique diagonale, chaque composante $\xi_{[i]}$ du vecteur d'état ξ est directement le reflet de l'influence de la valeur propre λ_i .

À partir de ces relations, il est possible de caractériser certains couplages en termes de structure propre. En effet, si l'on décompose la matrice identité d'ordre n ainsi :

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

où \mathbb{I}_n résulte donc de la concaténation en ligne de n vecteurs colonnes formant une base orthonormale de l'espace d'état, l'on peut déduire les conclusions suivantes :

• La relation (3.21) montre que la consigne $y_{c_{ii}}$ n'excitera pas la valeur propre λ_j si et seulement si

$$u_i'BHe_i = 0. ag{3.23}$$

De ceci l'on déduit que les vecteurs propres à gauche répartissent l'influence des consignes sur les modes.

• Par la relation (3.20), l'on constate que la valeur propre λ_i n'agira pas sur l'état $x_{[j]}$ si et seulement si

$$e'_i v_i = 0.$$
 (3.24)

Autrement dit, les vecteurs propres à droite répartissent l'effet des valeurs propres sur les composantes du vecteur d'état.

• Le même raisonnement sur les sorties conduit à dire que la valeur propre λ_i n'agira pas sur la sortie $y_{[j]}$ si et seulement si

$$e'_i C v_i = 0.$$
 (3.25)

Autrement dit, les vecteurs Cv_i répartissent l'effet des valeurs propres sur les sorties.

• La relation (3.21) montre que la perturbation $d_{[i]}$ n'excitera pas la valeur propre λ_j si et seulement si

$$u_i' \bar{B} e_i = 0. \tag{3.26}$$

De ceci l'on déduit que les vecteurs propres à gauche peuvent répartir l'influence de certaines perturbations sur les modes.

• De la loi de commande (1.4), l'on déduit que

$$u = Hy_c + FCV\xi = Hy_c + \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix} \xi$$
(3.27)

d'où l'on voit que la valeur propre λ_i n'agira pas par bouclage sur la commande $u_{[j]}$ si et seulement si

$$e'_{i}w_{i} = 0.$$
 (3.28)

Ainsi, les directions d'entrée répartissent l'effet des valeurs propres sur les commandes.

Ces diverses constatations avaient amené Ibrahim Chouaib, dans sa thèse, à résumer ainsi l'influence des vecteurs propres en termes de couplage :

Il apparaît donc que l'effet du monde extérieur sur la dynamique interne du système est décrit par la structure propre à gauche alors que la répartition de cette dynamique sur les sorties est essentiellement décrite par la structure propre à droite.

3.1.2.4 Vecteurs propres et sensibilité locale

Ce paragraphe sort quelque peu du cadre du présent développement mais il serait dommage de parler des vecteurs propres sans évoquer l'influence de ces derniers sur ce qui est communément appelé la sensibilité locale.

Les raisonnements précédents ont toujours considéré le modèle linéaire comme parfait, toujours valide et décrivant avec exactitude le comportement du système. Cette supposition est irréaliste. Il est mainteant supposé que A_c n'est pas une matrice connue avec précision mais que celle-ci est soumise à une légère incertitude additive, une petite variation E de telle sorte que $A_c + E$ est la véritable matrice d'évolution du système bouclé. Ainsi, les performances en régime transitoire de ce dernier sont entre autres caractérisées par les valeurs propres de $A_c + E$, c'est-à-dire $\lambda_i + \Delta \lambda_i$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$. L'on s'intéresse aux variations $\Delta \lambda_i$ des valeurs propres λ_i de A_c en présence de E. Ce problème est connu sous le nom de "problème de conditionnement des valeurs propres".

L'équation de la structure propre à droite devient :

$$(A_c + E)(v_i + \Delta v_i) = (\lambda_i + \Delta \lambda_i)(v_i + \Delta v_i) \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

$$(3.29)$$

En négligeant les variations de deuxième ordre (ce qui suppose que l'on reste dans une gamme de variations assez faibles et qui explique l'expression "sensibilité locale") et en prémultipliant chaque membre de l'égalité par u'_i , il vient :

$$\Delta\lambda_i = u'_i E v_i \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

$$(3.30)$$

$$\Rightarrow |\Delta\lambda_i| \le ||E||_2 \cdot ||u_i||_2 \cdot ||v_i||_2 = \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$
(3.31)

La variation de valeur propre est donc majorée par une expression dépendant bien sûr de la variation E mais aussi de la structure propre de A_c . La quantité $c_i = ||u_i||_2 ||v_i||_2$, qui est un indicateur de variation de λ_i proportionnellement à $||E||_2$, est appelée coefficient de sensibilité de λ_i . Il peut être démontré que :

$$c_i \ge 1 \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$
 (3.32)

D'un point de vue géométrique, le coefficient de sensibilité c_i est l'inverse du cosinus de l'angle entre v_i et u_i . Le cas idéal où $c_i = 1$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$ correspond au cas où A_c est une matrice normale. Les vecteurs propres (à droite ou à gauche) peuvent alors être choisis de manière à constituer une base orthonormale de \mathbb{C}^n . Cependant, ces critères sont spécifiques à chaque mode et si l'on veut un critère unique pour quantifier approximativement la sensibilité du spectre dans son intégralité, on peut utiliser la majoration suivante :

$$\max_{i \in \{1, ..., n\}} c_i \le \operatorname{cond}(V) = ||V||_2 ||V^{-1}||_2$$
(3.33)

Lorsque A_c est normale, V est idéalement conditionnée et l'on a cond(V) = 1.

Il existe une méthode de calcul de retour d'état plaçant un spectre donné et minimisant la sensibilité locale en jouant sur les vecteurs propres. Très efficace malgré quelques limites, elle a été implantée dans la boîte à outils CONTROL TOOLBOX de MATLAB (fonction place).

Il faut également noter que dans le cadre de la commande des systèmes multivariables par placement de pôles, les vecteurs propres fournissent des degrés de liberté pour n'importe quel problème d'optimisation formulé.

3.2 Placement de structure propre par retour d'état

Soit le système (1.1). Il est rappelé que le problème du placement de pôles par retour d'état consiste à déterminer la matrice K dans l'expression (1.2) de sorte que le spectre de $A_c = A + BK$ coïncide avec un ensemble de valeurs spécifiées au préalable.

Remarque 3.3 Le problème du calcul de la précommande H est reporté à un paragraphe ultérieur.

Un tel problème a été largement abordé dans le cadre de l'étude des systèmes monovariables. Pour ces derniers, le vecteur de retour d'état K comporte n composantes et comme il s'agit de placer n pôles, il n'existe aucun degré de liberté supplémentaire. La solution est donc unique.

Dans le cas des systèmes multivariables, la matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ comporte mn composantes ce qui suppose a priori l'existence de degrés de liberté. C'est en effet le cas mais il n'est pas forcément aisé de les exploiter. Lors d'un placement de pôles, l'on peut profiter de ces degrés de liberté pour

- optimiser un critère de performances (ou de robustesse);
- placer tout ou partie de la structure propre.

C'est évidemment le deuxième défi qui fait l'objet de cette partie et des suivantes.

3.2.1 Condition de placement de pôles

Une première condition pour qu'il soit possible de placer un spectre désiré pour A_c (indépendamment des vecteurs propres) est analogue à la condition donnée en monovariable :

La paire (A,B) doit être commandable

Le lecteur est invité à se référer à la première partie du cours sur les systèmes multivariables pour retrouver les critères de commandabilité.

3.2.2 Bilan des ddl

L'on dispose donc de mn degrés de liberté (ddl). n ddl doivent être utilisés pour placer les pôles. Il en reste n(m-1) pour tenter de placer les vecteurs propres. Il s'agit d'exploiter convenablement ces ddl et pour cela de les identifier.

Par ailleurs, un vecteur propre comporte n composantes. Il peut être défini à un facteur près donc une composante peut être arbitrairement fixée. Ceci signifie qu'un vecteur propre, de façon générale, est caractérisé par (n-1) composantes.

Compte tenu de la condition d'orthogonalité (3.8), Tout choix de V implique un choix implicite de U. Il suffit donc de spécifier V. Cependant le choix de tous les vecteurs propres à droite v_i correspond à la spécification de n(n-1) valeurs alors que seuls n(m-1) ddl sont disponibles. Les vecteurs propres ne peuvent donc pas être arbitrairement fixés. En effet, ceux-ci doivent appartenir à des sous-espaces caractéristiques.

3.2.3 Sous-espaces caractéristiques

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une valeur propre de A_c et $v \in \mathbb{C}^n$, un vecteur propre associé à λ . Les deux entités sont unies par la relation

$$A_{c}v = \lambda v$$

$$\Leftrightarrow (A + BK)v = \lambda v$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda \mathbf{I}_{n})v + BKv = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda \mathbf{I}_{n})v + Bw = \mathbf{0}$$
(3.34)

où $w = Kv \in \mathbb{C}^m$ est la direction d'entrée associée à v (ici, la matrice C est considérée comme égale à \mathbb{I}_n). De l'équation (3.34), l'on comprend que v doit appartenir à l'ensemble

$$S(\lambda) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \exists w \in \mathbb{C}^m \mid (A - \lambda \mathbb{I}_n) z + Bw = \mathbf{0} \}$$

$$(3.35)$$

 $S(\lambda)$ est appelé sous-espace caractéristique (ou *AB*-caractéristique) associé à λ . Lorsque la paire (A, B) est commandable, $S(\lambda)$ est de dimension m. En d'autres termes, un choix implicite ou explicite des m composantes

de w conditionne le choix de v. Il convient donc d'exploiter ces ddl, pour toute valeur propre λ , en se souvenant que v étant défini à un facteur près, w l'est aussi. Ainsi, seuls (m-1) ddl peuvent être exploités pour choisir v ce qui correspond, pour n vecteurs propres, aux n(m-1) ddl offerts par K.

En pratique, il est assez facile d'obtenir un vecteur propre et sa direction d'entrée associée. A chaque valeur complexe λ , l'on peut associer la matrice

$$T_{\lambda} = \begin{bmatrix} A - \lambda \mathbb{I}_n & B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times (n+m)}.$$
(3.36)

On calcule ensuite une matrice R_{λ} ainsi décomposée

$$R_{\lambda} = \begin{bmatrix} N_{\lambda} \\ M_{\lambda} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad N_{\lambda} \in \mathbb{C}^{n \times m} \quad \text{et} \quad M_{\lambda} \in \mathbb{C}^{m \times m}$$
(3.37)

dont les colonnes constituent une base du noyau de T_{λ} .

Il est clair que tout choix d'un vecteur $z \in \mathbb{C}^m$ non nul implique que le vecteur π défini par :

$$\pi = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\lambda}z \\ M_{\lambda}z \end{bmatrix}$$
(3.38)

appartient à $\operatorname{Im}(R_{\lambda}) = \operatorname{Ker}(T_{\lambda})$ et qu'ainsi l'égalité (3.34) est satisfaite ce qui signifie que $v \in S(\lambda)$.

Le calcul de la base d'un noyau ne pose pas de problème majeur. Une méthode est cependant très appropriée au calcul de R_{λ} . La matrice T_{λ} est décomposable en valeurs singulières :

$$T_{\lambda} = \mathcal{U} \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathcal{V}' \tag{3.39}$$

où Σ est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières de T_{λ} et où \mathcal{U} et \mathcal{V} sont des matrices orthonormales *i.e.* vérifiant $\mathcal{U}'\mathcal{U} = \mathbb{I}_n$ et $\mathcal{V}'\mathcal{V} = \mathbb{I}_{n+m}$. De (3.39), l'on déduit que

$$\begin{bmatrix} A - \lambda \mathbf{I}_n & B \end{bmatrix} \mathcal{V} = \mathcal{U} \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A - \lambda \mathbf{I}_n & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 & \mathcal{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U} \Sigma & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

d'où il est facile de voir que

$$\begin{bmatrix} A - \lambda \mathbf{I}_n & B \end{bmatrix} \mathcal{V}_2 = \mathbf{0}. \tag{3.40}$$

L'équation (3.40) fait apparaître qu'un choix possible de R_{λ} est

$$R_{\lambda} = \mathcal{V}_2. \tag{3.41}$$

Il suffit ensuite de décomposer \mathcal{V}_2 en N_{λ} et M_{λ} .

Une autre technique plus directe consiste à fixer arbitrairement $M_{\lambda} = II_m$ et il vient alors

$$N_{\lambda} = (\lambda \mathbb{I}_n - A)^{-1} B \tag{3.42}$$

Toutefois, ce choix arbitraire de M_{λ} implique que l'inversion soit possible ce qui n'est le cas que si λ n'est pas valeur propre de A. Une telle technique de calcul de R_{λ} nécessite donc le choix d'un spectre désiré pour le système bouclé totalement distinct du spectre en boucle ouverte.

Le choix d'un vecteur propre v se fait donc au travers du choix d'un vecteur de ddl z. Comment choisir z pour obtenir le vecteur v désiré à des fins de découplage? Le paragraphe suivant répond à la question.

3.2.4 Choix des vecteurs propres admissibles

Pour obtenir *n* vecteurs propres v_i associés à *n* valeurs propres λ_i , il faut donc choisir (ou calculer) *n* vecteurs de ddl z_i , i = 1, ..., n. Comme il a déjà été mentionné plus haut, ces ddl peuvent être utilisés pour optimiser toutes sortes de critères de performances mais puisqu'il est question dans ce chapitre de placement de structure propre, l'on peut s'intéresser au cas où l'on espère obtenir des vecteurs propres admissibles bien spécifiques, à des fins de découplage par exemple.

Soit donc un vecteur admissible v associé à λ . Par admissible, l'on entend que $v \in S(\lambda)$. Soit aussi le vecteur désiré v_d qui correspond quant à lui au vecteur propre assurant le couplage souhaité de λ et des différentes composantes du vecteur d'état x. Le choix de v doit être tel que v est aussi proche que possible de v_d . Une solution consiste à assurer cette proximité au sens des moindres carrés c'est-à-dire à résoudre

$$\min ||v_d - v||_2. \tag{3.43}$$

Le vecteur propre v correspond alors à la projection orthogonale de v_d sur le sous-espace admissible. De façon générale, la détermination dépend de la méthode de placement utilisée. En ce qui concerne l'approche directe présentée dans ce chapitre, c'est le choix de z qui fixe celui de v et le choix optimal est donné par :

$$z = (N'_{\lambda}N_{\lambda})^{-1}N'_{\lambda}v_d. \tag{3.44}$$

Remarque 3.4 La spécification de v_d peut se faire en fonction de u_d . Autrement dit, l'on peut chercher à atteindre un vecteur propre à gauche plutôt qu'un vecteur propre à droite. Mais on ne peut chercher à atteindre les deux de manière indépendante puisque la structure propre est soumise à la contrainte d'orthogonalité (3.8).

3.2.5 Calcul de K

Une fois les valeurs propres λ_i choisies et les vecteurs propres admissibles les plus appropriés déterminés, il faut calculer la matrice de retour d'état K. Nous résumons, dans le théorème suivant, deux résultats de Moore.

Théorème 3.1 Soient la paire commandable (A, B) où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ainsi que $\{\lambda_i, i = 1, ..., n\}$ un ensemble auto-conjugué de n complexes. Il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que

$$(A + BK)v_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

$$(3.45)$$

 $si\ et\ seulment\ si$

(i) les vecteurs propres v_i sont linéairement indépendants; (ii) $v_i = \tilde{v}_j$ quand $\lambda_i = \tilde{\lambda}_j$; (iii) $v_i \in S(\lambda_i)$.

Si K existe et si B est de rang plein, alors K est unique et est donnée par

$$K = WV^{-1} \tag{3.46}$$

où V est la matrice modale issue des vecteurs v_i et où W est la concaténation des n directions d'entrées :

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

Compte des développements ci-avant, la justification est assez simple. La condition (iii) correspond à l'admissibilité des vecteurs propres. Ainsi, l'on obtient :

$$Av_i + Bw_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

$$(3.48)$$

Si l'on considère que les vecteurs w_i sont les directions d'entrée alors K est tel que

$$w_i = K v_i \,\forall i. \tag{3.49}$$

Il vient la relation (3.45). Puisque K doit satisfaire (3.49), alors il est nécessairement déterminé par (3.46). La condition (i) assure l'inversion de V et la condition (ii) assure que la solution K apportée au problème est bien réelle et non complexe.

Voici une procédure pour réaliser un placement de structure propre par retour d'état :

Algorithme :

- 1. Choix du spectre auto-conjugué désiré $\{\lambda_i\}$
- 2. Choix des vecteurs propres désirés v_{d_i} en respectant l'auto-conjugaison.
- 3. Détermination des matrices R_{λ_i}
- 4. Calcul des vecteurs z_i par la relation

$$z_{i} = (N_{\lambda_{i}}' N_{\lambda_{i}})^{-1} N_{\lambda_{i}}' v_{d_{i}} \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$
(3.50)

(on note que $v_j = \tilde{v}_i \Leftrightarrow z_j = \tilde{z}_i$)

5. Calcul des vecteurs propres v_i et des directions d'entrée par les relations

$$\begin{cases} v_i = N_{\lambda_i} z_i \\ & \forall i \in \{1, ..., n\} \\ w_i = M_{\lambda_i} z_i \end{cases}$$
(3.51)

- 6. Vérification de l'indépendance linéaire des v_i (sinon retour à l'étape 2)
- 7. Calcul de V et W.
- 8. Calcul de K par la formule (3.46)

Remarque 3.5 Numériquement, le calcul de K, qui fait intervenir deux matrices complexes dont l'une doit être inversée, peut se révéler quelque peu imprécis et conduire à une faible partie imaginaire. Il existe une technique pour transformer W et V en deux matrices réelles qui sur le plan théorique, conduisent à la même valeur de K. Par souci de concision, ce point n'est pas détaillé.

Cette approche est qualifiée de directe. Il existe d'autres approches parmi lesquelles l'une est dite paramétrique. L'on peut montrer que l'approche paramétrique correspond en fait au choix restrictif $M_{\lambda_i} = I\!I_m \forall i$ déjà évoqué plus haut.

3.3 Placement de structure propre par retour de sortie

Soit toujours le modèle (1.1). L'on suppose qu'il n'y a pas de transmission directe (D = 0). Il s'agit maintenant de déterminer une matrice F de retour statique de sortie telle que :

- 1. la matrice d'état du système bouclé $A_c = A + BFC$ admet un spectre spécifié au préalable
- 2. les vecteurs propres répondent à des exigences de découplage si possible.

Les spécifications sont les mêmes que pour le retour d'état mais le problème est bien plus ardu comme le montre le bilan des ddl.

3.3.1 Bilan des ddl

La matrice $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$ comporte mp composantes. Or, il faut placer n pôles. Il est clair que si mp < n, le défi est impossible à relever.

Même dans le cas où $mp \ge n$, il faut n ddl pour placer les pôles et il reste a priori (n - mp) ddl pour tenter de placer les vecteurs propres. En réalité, le problème s'avère un peu plus compliqué qu'il n'y paraît comme le précise la sous-partie suivante.

3.3.2 Condition de placement de pôles

Une première condition nécessaire pour placer n pôles par retour statique de sortie est la suivante :

La paire
$$(A, B)$$
 est commandable
La paire (A, C) est observable

Sous cette condition nécessaire, il convient de déterminer des conditions sur les dimensions du système pour pouvoir placer les pôles.

En 1975, Kimura démontre qu'une condition génériquement suffisante de placement total est

$$m + p > n \tag{3.52}$$

Par générique, l'on entend que pour presque tout choix arbitraire du spectre, le placement est possible. Dans le cas contraire une altération minime du spectre désiré autorise le placement. Seuls quelques très rares modèles pathologiques se révèlent infirmer la condition (3.52) et ils sont souvent construits à cet effet.

Plus récemment, d'autres auteurs ont montré que la condition (3.52) pouvait être améliorée et qu'une autre condition génériquement suffisante était

$$mp \ge n \tag{3.53}$$

ce qui semble être parfaitement compatible avec le bilan des ddl. Toutefois, cette condition est établie dans le cas où toutes les matrices (y compris F) sont supposées complexes. Dans le cas réel, la même condition devient

$$mp > n. (3.54)$$

Cependant, si cette dernière condition est la plus aboutie, il n'en faut pas moins garder présent à l'esprit que même si une condition suffisante est vérifiée, il faut disposer d'une technique de placement de pôles. Beaucoup de techniques de placement de pôles par retour statique de sortie existent mais elles ne sont pas toutes aussi faciles à mettre en oeuvre. Selon le rédacteur de ces notes (et en toute subjectivité), les techniques les plus pertinentes sont souvent telles qu'une condition génériquement nécessaire pour les appliquer n'est autre que celle proposée par Kimura, *i.e.* (3.52). Relativement à ces techniques, la condition (3.52) devient donc génériquement nécessaire et suffisante. C'est pourquoi elle est communément admise comme "la condition de placement". Selon que cette condition est vérifiée ou non, l'on envisage le placement total par retour statique de sortie.

En résumé, deux cas peuvent se présenter :

- la condition (3.52) n'est pas vérifiée et l'on peut se contenter d'un placement partiel de pôles (voir paragraphe 3.3.3) ou encore envisager un retour dynamique (voir partie 3.4);
- la condition (3.52) est vérifiée et l'on peut procéder à un **placement complet** par retour statique de sortie.

3.3.3 Placement partiel de pôles

Pour un tel placement l'on peut procéder par une extension immédiate de la technique de placement de pôles par retour d'état selon l'approche directe. En effet, il est toujours possible de placer p pôles, c'est-à-dire autant que de sorties. Pour ce faire, il suffit d'appliquer l'algorithme du placement par retour d'état mais en se contentant de spécifier p pôles et p vecteurs propres désirés v_{d_i} puis de déterminer seulement p vecteurs z_i , p vecteurs propres admissibles v_i et p directions d'entrée w_i . Ensuite, compte tenu que les directions d'entrée sont définies dans ce cas par

$$w_i = FCv_i, \tag{3.55}$$

la matrice de retour statique de sortie est donnée par

$$F = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cv_1 & \dots & Cv_p \end{bmatrix}^{-1}.$$
(3.56)

Ce type de placement ne doit être envisagé que pour des systèmes dont les dimensions ne vérifient pas (3.52). En effet, il est impératif de vérifier *a posteriori* que les pôles non placés sont convenablement localisés. Il n'existe aucune façon de s'en assurer au préalable, ni même d'assurer la stabilité en boucle fermée.

3.3.4 Placement total

Ne sont ici concernés que les modèles pour lesquels la condition (3.52) est vérifiée.

Il existe de nombreuses approches pour résoudre ce problème parmi lesquelles l'on peut citer l'approche polynomiale, l'approche paramétrique, l'approche géométrique, ..., et celle qui est privilégiée dans ces notes de cours, reposant sur la résolution de deux équations de Sylvester couplées.

Cette technique repose donc sur l'utilisation de deux équations de Sylvester couplées entre elles par une condition supplémentaire. De manière simplifiée, placer un spectre auto-conjugué $\{\lambda_i, i \in \{1, ..., n\}\}$ revient à résoudre en U et V les deux équations de Sylvester suivantes :

$$AV - V\Lambda = -BW \tag{3.57}$$

$$U'A - \Lambda U' = -L'C \tag{3.58}$$

couplées entre elles par la condition :

$$\operatorname{Ker}(U') = \operatorname{Im}(V) \tag{3.59}$$

pour un choix de W et de L. Ces équations reprennent bien sûr la notation utilisées dans la définition de la structure propre. D'une part V représente la matrice des vecteurs propres à droite de A_c et l'équation (3.57) correspond à l'admissibilité de ces vecteurs propres à droite. D'autre part, U représente la matrice des vecteurs propres à gauche de A_c et l'équation (3.58) correspond à l'admissibilité de ces vecteurs propres à droite. D'autre part, U représente la matrice des vecteurs propres à gauche de A_c et l'équation (3.58) correspond à l'admissibilité de ces vecteurs propres à gauche. W et L représentent les matrices de directions d'entrée et de sortie associées. La relation (3.59) n'est qu'une autre formulation de la condition d'othogonalité (3.8).

Sur la base de ces deux équations, un algorithme de placement de pôles a été proposé. Une version quelque peu simplifiée en est ici donnée. On note $\Lambda_p \in \mathbb{C}^{p \times p}$ la matrice diagonale contenant les p premières valeurs propres de A_c et $\Lambda_{n-p} \in \mathbb{C}^{(n-p) \times (n-p)}$ la matrice diagonale contenant les n-p valeurs propres de A_c restantes. Ceci suppose que les ensembles $\{\lambda_i, i \in \{1, ..., p\}\}$ et $\{\lambda_i, i \in \{p+1, ..., n\}\}$ sont auto-conjugués.

Algorithme commenté :

1. Choisir un ensemble auto-conjugué de n-p valeurs propres désirées $\{\lambda_i, i \in \{p+1, ..., n\}\}$ et résoudre :

$$U'_{n-p}A - \Lambda_{n-p}U'_{n-p} = -L'_{n-p}C$$
(3.60)

en U_{n-p} pour un choix de L_{n-p} . Il s'agit en fait de l'équation (3.58) réduite au spectre $\{\lambda_i, i \in \{p+1,...,n\}\}$, à la matrice de vecteurs propres à gauche $U_{n-p} = [u_{p+1}, ..., u_n] \in \mathbb{C}^{n \times (n-p)}$ et à la matrice de directions de sortie $L_{n-p} = [l_{p+1}, ..., l_n] \in \mathbb{C}^{p \times (n-p)}$.

2. Choisir un ensemble auto-conjugué des p premières valeurs propres désirées $\{\lambda_i, i \in \{1, ..., p\}\}$:

 $-\forall i \in \{1, ..., p\},$ calculer :

$$\mathcal{N}_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} A - \lambda_i \mathbf{I}_n & B \\ U'_{n-p} & \mathbf{0}_{n-p,m} \end{bmatrix}$$
(3.61)

ainsi que

$$\begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix}$$

(où $N_{\lambda_i} \in \mathbb{C}^{n \times r_i}$ et $M_{\lambda_i} \in \mathbb{C}^{m \times r_i}$), une matrice dont les colonnes constituent une base du noyau à droite de \mathcal{N}_{λ_i} .

— Trouver p vecteurs colonnes z_i de dimension $r_i, \forall i \in \{1, ..., p\}$ tels que :

$$V_p = [Cv_1, ..., Cv_p] = [CN_{\lambda_1} z_1, ..., CN_{\lambda_p} z_p]$$
(3.62)

soit de rang plein.

— Calculer :

$$W_p = [w_1, \dots, w_p] = [M_{\lambda_1} z_1, \dots, M_{\lambda_p} z_p]$$
(3.63)

Les vecteurs v_i et w_i , $\forall i \in \{1, ..., p\}$, correspondent respectivement aux vecteurs propres à droite et aux directions d'entrées admissibles associées aux p premières valeurs propres de A_c désirées. Ainsi V_p et W_p vérifient l'équation

$$AV_p - V_p\Lambda_p = -BW_p \tag{3.64}$$

qui correspond à l'équation (3.57) ramenée aux p premières valeurs propres.

Ce pas de l'algorithme permet également de s'assurer de la satisfaction de la condition d'orthogonalité puisque clairement $U'_{n-p}V_p = \mathbf{0}_{n-p,p}$.

3. Calculer la matrice de retour de sortie :

$$F = W_p (V_p)^{-1}. (3.65)$$

Il suffit de quelques lignes de code informatique pour implanter un tel algorithme. Bien entendu, la condition de Kimura (3.52) apparaît inplicitement au niveau du calcul de la base du noyau à droite de toute matrice \mathcal{N}_{λ_i} , noyau dont la dimension ne doit pas être nulle, $\forall i \in \{1, ..., p\}$.

En ce qui concerne les ddl, l'algorithme ci-dessus n'est pas très explicite. Les paramètres libres sont a priori L_{n-p} et les vecteurs z_i . Mais on ne peut bénéficier, une fois le spectre choisi, de plus de flexibilité que les (mp-n) ddl supplémentaires apportés par la matrice de retour de sortie K. Or, dans cette méthode, les ddl sont utilisés au fur et à mesure. Ainsi, il faut (n-p)(p-1) ddl pour placer les (n-p) directions propres à gauche. Soit $(n-p)(p-1) \ge mp-n$, en quel cas il faut répartir les (mp-n) ddl sur les composantes de L_{n-p} , les autres composantes de L_{n-p} et les z_i n'étant plus réellement des paramètres libres $(r_i = 1, \forall i \in \{1, ..., p\})$; soit (n-p)(p-1) < mp-n, en quel cas on utilise (n-p)(p-1) ddl pour jouer sur les directions propres à gauche et les ddl restant doivent être répartis sur les composantes des z_i en fonction des valeurs des dimensions r_i , de manière à bénéficier au maximum de la flexibilité liée aux directions propres à droite.

Remarque 3.6 La technique ci-dessus privilégie le placement des vecteurs propres à gauche. Cependant, si c'est la structure propre à droite qui est significative des performances espérées, l'on peut raisonner par dualité et chercher à déterminer F' à partir du triplet de matrices (A', C', B').

3.3.5 Placement par retour de sortie et transmission directe

Dans toute cette partie, il a toujours été supposé que D était nulle. Lorsque $D \neq 0$, l'équation (1.8) montre que la matrice d'état en boucle fermée est

$$A_c = A + B\hat{F}C,\tag{3.66}$$

où

$$\hat{F} = (\mathbb{I}_m - FD)^{-1}F.$$
(3.67)

De l'équation (3.67), l'on déduit que

$$F = \hat{F}(\mathbf{I}_p + D\hat{F})^{-1}.$$
(3.68)

Pour résoudre le probème de la transmission directe, il suffit donc d'appliquer l'algorithme de placement en remplaçant F par \hat{F} . Ensuite, la véritable matrice de retour de sortie F est obtenue par la relation (3.68) sous réserve d'inversibilité de ($\mathbf{I}_p - D\hat{F}$).

3.4 Placement de structure propre par retour dynamique de sortie

Lorsque la condition (3.52) n'est pas vérifiée, ce n'est pas une fatalité que de se contenter d'un placement partiel de pôles. L'on peut augmenter le nombre de ddl disponibles en procédant à un retour dynamique de sortie tel que celui décrit en (1.11). L'on rappelle qu'une telle loi de commande peut être déduite d'un retour statique tel que celui donné en (1.16) appliqué au système (1.14) avec $\tilde{D} = \emptyset$. Il suffit alors de choisir l'ordre du compensateur dynamique *l* tel que la condition de Kimura soit satisfaite pour le modèle augmenté c'est-à-dire telle que

$$m + p + 2l > n + l \Leftrightarrow l > n - m - p. \tag{3.69}$$

Ceci revient à chosir au minimum

$$l = n - m - p + 1. ag{3.70}$$

En présence d'une transmission directe, le raisonnement du paragraphe 3.3.5 reste valide.

3.5 Placement de structure propre et précommande

Dans tout ce chapitre, la question du calcul d'une matrice de précommande H a toujours été éludée. Cette matrice est bien souvent calculée de manière à assurer un découplage entrées/sorties. Ce problème a été abordé au paragraphe 2.2.1. Si l'on se réfère à ce paragraphe, à la partie (1.2) ainsi qu'à l'équation (1.8), l'on déduit que le découplage statique peut être assuré, en présence d'une transmission directe, par une précommande

$$H = (\mathbf{I}_m - FD)\hat{H} \tag{3.71}$$

où la matrice \hat{H} doit vérifier

$$(-(C+D\hat{F}C)(A+B\hat{F}C)^{-1}B+D)\hat{H} = \mathbb{I}_{p}.$$
(3.72)

Si le système est carré (m = p), il suffit de calculer

$$\hat{H} = (-(C + D\hat{F}C)(A + B\hat{F}C)^{-1}B + D)^{-1}.$$
(3.73)

Si m > p, il est génériquement possible de calculer une pseudo-inverse de $(-(C + D\hat{F}C)(A + B\hat{F}C)^{-1}B + D)$ telle que l'égalité (3.72) soit vérifiée.

Si, en revanche, p > n, il est impossible de trouver H.

Si \hat{H} peut être calculée, il suffit de déduire la précommande réellement applicable H de l'équation (3.71).

Dans tous les cas, le découplage statique peut être assuré par l'adjonction d'intégrateurs à chaque entrée du système. Ceci a l'avantage non seulement d'assurer un découplage statique mais aussi de pouvoir rejeter des perturbations en échelon, rampe, etc. Toutefois, ces intégrateurs augmentent l'ordre du système ce qui peut rendre difficile la vérification de la condition de Kimura et donc peut obliger à complexifier la loi de commande (retour dynamique plutôt que statique).

3.6 Petite illustration

Tout ceci mérite sans doute une petite illustration. Cette dernière concerne la technique de placement complet de pôles par utilisation des deux équations de Sylvester couplées (cf. §3.3.4). Soit le système décrit par (1.1) où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La condition de Kimura (3.52) est vérifiée. L'on choisit de résoudre le problème du placement de pôles par retour statique de sortie selon la technique présentée dans ce chapitre. Le spectre placé est $\{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\} = \{-1; -2; -3\}$. La résolution est effectuée numériquement à l'aide du logiciel MATLAB.

On saisit sous MATLAB le modèle du système, les dimensions impliquées et le spectre désiré :

```
>> A=[1 4 5;0 2 6;1 0 3];
>> B=[1 1;1 0;0 0];
>> C=[1 0 0;0 1 0];
>> D=eye(2);
>> n=3;m=2;p=2;
>> lambda=[-1 -2 -3];
```

L'on choisit ensuite Λ_{n-p} qui se réduit ici à λ_3 et pour le choix arbitraire $l_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}' = L_{n-p}$, on résoud l'équation de Sylvester associée à la structure propre à gauche (3.58) afin de déterminer le seul et unique vecteur propre à gauche placé $u_3 = U_{n-p}$.

```
>> Lam_nmoinsp=diag(lambda(p+1:n))
```

Lam_nmoinsp =

-3 >> L_nmoinsp=[1;1]; >> U_nmoinsp=sylv(A',-Lam_nmoinsp',-C'*L_nmoinsp)

U_nmoinsp =

-0.3025 0.0420 0.2101

L'on calcule alors \mathcal{N}_1 et son noyau à droite :

>> NN1=[A-lambda(1)*eye(3) B;U_nmoinsp' zeros(n-p,m)]

NN1 =

2.0000	4.0000	5.0000	1.0000	1.0000
0	3.0000	6.0000	1.0000	0
1.0000	0	4.0000	0	0
-0.3025	0.0420	0.2101	0	0

>> R1=null(NN1)

R1 =

-0.0364 -0.3074 0.0091 0.8675 0.3892

L'on note qu'ici, ce noyau est de dimension 1 puisque sa base se limite à un seul vecteur. Il n'y a donc pas de ddl disponible sur le choix de v_1 et w_1 et seul celui présent sur l_3 est utilisable (ceci provient du fait que mp = 4 = n + 1). v_1 et w_1 sont donc ainsi calculables :

```
>> v1=R1(1:3);w1=R1(4:5);
```

L'on procède de même pour λ_2 :

```
>> NN2=[A-lambda(2)*eye(3) B;U_nmoinsp' zeros(n-p,m)]
```

3.0000	4.0000	5.0000	1.0000	1.0000
0	4.0000	6.0000	1.0000	0
1.0000	0	5.0000	0	0
-0.3025	0.0420	0.2101	0	0

```
>> R2=null(NN2)
```

R2 =

-0.0305 -0.2499 0.0061 0.9629 0.0975

```
>> v2=R2(1:3);w2=R2(4:5);
```

Il reste alors à calculer W_p , V_p et en déduire \hat{F} grâce aux relations (3.62), (3.63) et (3.65).

```
>> Wp=[w1 w2];Vp=C*[v1 v2];
>> F_hat=Wp*inv(Vp)
```

 $F_hat =$

-285.8000 31.0000 242.8000 -30.0000

L'on peut dors et déjà vérifier que le spectre assigné est bien le bon :

```
>> eig(A+B*F_hat*C)
```

ans =

-3.0000 -2.0000 -1.0000

Enfin, il faut terminer d'établir la loi de commande par le calcul de F et H. F se déduit de (3.68) :

```
>> F=F_hat*inv(eye(p)-D*F_hat)
```

F =

-0.9773 0.0227 0.1780 -0.7897

La matrice de précommande intermédiaire \hat{H} est donnée par (3.72) puis H est obtenue par (3.71) :

```
>> H_hat=inv(-(C+D*F_hat*C)*inv(A+B*F_hat*C)*B+D)
```

H_hat =

58.5529 -84.1059 -49.6706 71.3412

>> H=(eye(p)-F*D)*H_hat

H =

-0.2161 0.3106 -0.0962 0.1406

L'on peut véridier par reconstruction du système bouclé que le gain statique est bien égal à l'identité :

3.7 Notes

Ce chapitre s'inspire partiellement de [1] et de [2]. Les bases d'algèbre linéaire peuvent être rappelées par n'importe quel cours de mathématiques de niveau Bac+2. Pour en savoir plus sur le nombre de conditionnement d'une matrice, l'ouvrage [3] est conseillé. La technique de placement par retour d'état qui utilise la conditionnement de la matrice modale (fonction **place** de MATLAB) est détaillée dans [4]. La condition de placement de pôles par retour statique d'état donnée en §3.2.1 est démontrée dans [5]. Le bilan des degrés de liberté lors d'un placement de pôles par retour d'état est bien détaillé dans [6]. La notion de sous-espaces caractéristiques est explicitée dans [7]. L'approche directe est due à [6]; le cas particulier constituant l'approche paramétrique est dû à [8]. L'explication sur la spécification des vecteurs propres désirés est empruntée à [1]. Le principe de la projection orthogonale sur l'espace admissible est pris dans [9]. Pour ce qui est du calcul de la matrice de retour d'état, l'exploitation de [6] est immédiate même si ce cours utilise quelques éclaircissements de [1]. La remarque 3.5 relève des réflexions de [6]. La généralisation des techniques classiques monovariables basées sur les formes compagnes au cas multivariable, qui n'est pas présentée dans ce chapitre, est envisagée dans [10]. Pour ce qui est du retour de sortie, la condition (3.52) est proposée dans [11] alors que la condition (3.54) peut être trouvée dans [12] et les références qui y sont citées. L' idée du placement partiel découle logiquement de [6]

mais est présentée dans [9]. La technique de placement complet de pôles par retour statique de sortie est celle de [13]. Le passage au retour dynamique s'inspire de [14] et les derniers développements de ce chapitre concernant le problème de la transmission font référence au premier chapitre. Le lecteur curieux pourra aussi s'intéresser à la l'approche géométrique pour le placement complet de pôles par retour statique de sortie [7], ou encore l'approche polynomiale [15] et l'approche paramétrique [16]. Plus encore, il est possible en réalité, pour un placement complet de pôles par retour statique de sortie, de se contenter de satisfaire la condition non stricte de Kimura (c'est à dire $m + p \ge n$). Pour s'en convaincre, voir l'article [17]. Certaines extensions de [17] autorisent même une violation de la condition non stricte de Kimura [18].

Par ailleurs, le découplage dynamique peut également s'obtenir grâce aux techniques de commande non interactive [1].

Enfin, pour un tour d'horizon bien mené des problèmes inhérents au retour statique de sortie, la lecture de l'article [19] est conseillée.

Bibliographie

- [2] I. Chouaib. Placement et robustesse de structure propre. Thèse de doctorat es Sciences, INSA Toulouse, France, 1994
- [3] P. G. Ciarlet. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Editions Masson, France, 1982.
- [4] J. Kautsky, N. K. Nichols et P. Van Dooren. Robust pole assignment in linear state feedback. International Journal of Control, Vol 41(5), p. 1129-1155, 1985.
- [5] W. N. Wonham. Linear multivariable control: a geometric approach. Springer-Verlag, New York, 3ème édition, 1985.
- [6] B. C. Moore. On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed-loop eigenvalue assignment. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 21, p.689-692, 1976.
- [7] C. Champetier et J. F. Magni. Analyse et synthèse de lois de commande modale. La Recherche Aérospatiale, Vol 6, p.17-35, 1989.
- [8] M. M. Fahmy et J. O'Reilly. On eigenstructure assignment in linear multivariable systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 27(3), p.690-693, 1982.
- [9] A. N. Andry, E. Y. Shapiro et J. C. Chung. *Eigenstructure assignment for linear systems*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol 19(5), p.711-729, 1983.
- [10] N. F. Trubitsyn. Synthesis of the characteristic polynomial of a linear system. Journal of Computer and Systems Sciences (Traduction anglaise officielle de Izvestiya Akademika Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya), Vol. 36(1), p.21-24, 1997
- [11] H. Kimura. Pole assignment by gain output feedback. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 20, p.509-516, 1975.
- [12] J. Rosenthal et F. Sottile. Some remarks on real and complex output feedback. Systems and Control Letters, Vol 33, p.73-80, 1997.
- [13] V. L. Syrmos et F. L. Lewis. Output feedback eigenstructure assignment using two Sylvester equations. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 38(3), p.495-499, 1993.
- [14] P. Hippe et J. O'Reilly. Parametric compensator design. International Journal of Control, Vol 45(4), p. 1455-1468, 1987.
- [15] J. F. Magni. Commande modal des systèmes multivariables. Thèse de doctorat es sciences, Université Paul Sabatier, Toulouse-France, 1987.
- [16] G. Roppenecker et J. O'Reilly Parametric output feedback controller design. Automatica, 25(2):259-265, 1989.
- [17] O. Bachelier, J. Bosche et D. Mehdi On pole placement via eigenstructure assignment approach. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 51(9), p.1554-1558, 2006
- [18] O. Bachelier et D. Mehdi Non-iterative pole placement technique : a step further. Rapport technique LAII-ESIP n^o 20060531OB soumis pour parution dans « Journal of the Franklin Institute ».
- [19] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato et K. Grigoriadis Static output feedback : a survey. Automatica, 33(2) :125-137, 1997.

Chapitre 4

Réduction de modèle

Ce chapitre aborde un point qui constitue en lui-même une discipline à part entière de l'automatique : la réduction de modèle. Ce cours se restreint bien sûr aux modèles linéaires. Il s'agit de partir d'un modèle linéaire considéré comme trop compliqué et d'en déduire un modèle simplifié qui puisse néanmoins décrire convenablement le comportement du système étudié.

4.1 À propos des modèles linéaires réduits

4.1.1 Le but de la réduction

Ces notes de cours ne concernent que les modèles linéaires. Ces derniers sont généralement des descriptions approximatives du comportement réel d'un système, obtenus par exemple, après linéarisation d'équations physiques non linéaires. Ils peuvent aussi être obtenus par identification et là encore, l'on espère qu'ils sont fidèles au comportement du procédé. L'avantage des modèles linéaires est qu'ils facilitent la détermination d'une loi de commande. Cependant, même un modèle linéaire peut rendre la synthèse d'un correcteur délicate s'il est d'ordre élevé, et ce pour des raisons souvent plus numériques que théoriques. C'est pourquoi il importe d'obtenir un modèle qui soit non seulement linéaire mais aussi d'ordre peu élevé. Lorsque le modèle linéaire obtenu est d'ordre trop élevé, l'on peut recourir à ce que l'on appelle une réduction de modèle. Il s'agit plus exactement d'une réduction de l'ordre du modèle. Bien entendu, cette réduction correspond à une nouvelle approximation du comportement du système et doit donc s'effectuer avec précaution.

Des méthodes de réduction existent tant dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel. Toutefois, seules des méthodes temporelles, plus populaires dans le cadre multivariable, seront abordées ici. Ainsi, mathématiquement, l'on peut définir le problème de la réduction de modèle comme suit :

Soit le modèle initial

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu\\ y = Cx + Du \end{cases}$$
(4.1)

d'ordre n comportant m entrées et p sorties. Déterminer un modèle réduit consiste à obtenir la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + B_r u\\ y_r = C_r x_r + D_r u \end{cases}$$

$$\tag{4.2}$$

d'ordre n_r , comportant *m* entrées (les mêmes que celles du modèle initial) et *p* sorties (des approximations des sorties du modèle initial), telles que le comportement du modèle (4.2) est proche de celui du modèle (4.1).

Remarque 4.1 Par souci de simplification, l'on supposera dans ce qui suit que la transmission directe du modèle initial est nulle $(D = \mathbf{0})$. Cette transmission est un transfert direct entre u et y et peut de toute façon être ajoutée après réduction.

4.1.2 La qualité d'un modèle réduit

Il existe plusieurs manières de juger de la qualité d'une réduction. En réalité, tout dépend de ce que l'on souhaite faire à partir du modèle réduit. Par exemple, lorsqu'un placement de pôles est réalisé sur un modèle réduit (qui peut être vu comme un placement partiel sur le modèle initial), il peut être souhaité que le modèle réduit conserve les modes du modèle initial.

Toutefois, ce qui est priviliégié, la plupart du temps, est le comportement externe du système c'est-à-dire le comportement entrées/sorties. Un bon moyen d'alors juger de l'efficacité d'une technique est de comparer la sortie y_r à la sortie y, en termes de norme par exemple.

Dans ces notes de cours, faute de plus amples connaissances, il ne sera pas donné de critère rigoureux pour assurer de la qualité d'une réduction. Seuls quelques jugements et remarques subjectifs seront portés.

4.1.3 Les différentes méthodes de réduction

Il est illusoire, dans le cadre de ces notes de cours, de vouloir aborder toutes les techniques de réduction existantes. Il est même déraisonnable d'espérer présenter toutes les méthodes les plus utilisées. Pour cette raison, un choix somme toute assez drastique a été opéré, dont l'auteur de ces notes espère qu'il fera appréhender un peu aux étudiants ce que peut-être la réduction de modèles, et ce sous différents angles.

Quatre méthodes ont été sélectionnées, à la fois pour leurs différences de philosophie et pour leur simplicité :

- la réduction par technique modale;
- la réduction par technique d'agrégation;
- la réduction par décomposition de Schur;
- -- la réduction par transformation équilibrante.

4.2 Réduction par technique modale

Il s'agit sans doute là de la plus accessible des méthodes qui consiste à déduire une réalisation (A_r, B_r, C_r, D_r) à partir de (A, B, C) en procédant à une diagonalisation du modèle (4.1).

Si A est diagonalisable ou quasi-diagonalisable ("Jordanisable"), l'on peut envisager le changement de base x = Vz tel que $\Lambda = V^{-1}AV$ est une matrice diagonale semblable à A. L'on peut alors décomposer V et z de sorte que

$$x = Vz = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$
(4.3)

où $V_1 \in \mathbb{C}^{n_r \times n_r}$.

Le but est d'obtenir un modèle réduit de vecteur d'état x_r tel que x_r corresponde à la dynamique dominante. L'on a :

$$\begin{cases} \dot{z} = \Lambda z + V^{-1} B u = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u \\ y = C V z = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

$$(4.4)$$

A ce stade, l'on peut considérer que z_1 correspond à la dynamique dominante du système que l'on souhaite conserver dans le modèle réduit et que z_2 correspond à la dynamique plus rapide que l'on souhaite occulter. Il est possible de procéder de deux manières qui ne sont pas équivalentes. L'une peut être considérée comme assez grossière et la seconde comme plus raisonnable.

4.2.1 Troncature de l'état

Cette approximation revient tout simplement à ignorer totalement la dynamique rapide de l'état c'est-à-dire à poser $z_2 = 0$. Il vient

$$x_1 = V_1 z_1 \quad \text{et} \quad x_2 = V_3 z_1,$$
(4.5)

d'où l'on déduit

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \Lambda_1 z_1 + \tilde{B}_1 u \\ y_r = \tilde{C}_1 z_1. \end{cases}$$

$$(4.6)$$

En revenant dans la base initiale (dans laquelle $x_r = x_1$), l'on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + B_r u\\ y_r = C_r x_r, \end{cases}$$

$$(4.7)$$

avec

$$A_r = V_1 \Lambda_1 V_1^{-1}; \quad B_r = V_1 \tilde{B}_1; \quad C_r = \tilde{C}_1 V_1^{-1}.$$
(4.8)

Cette approximation, quoiqu'usuelle et très facile à appliquer, présente quelques inconvénients :

- elle peut engendrer d'importantes modifications de la réponse du système dans les premiers instants puisque la dynamique rapide est totalement ignorée;
- elle trahit le comportement entrées/sorties du modèle (4.1) en régime permanent car elle ne permet pas de retrouver le gain statique :

$$y_{\infty} = \lim_{t \to \infty} \frac{y_r}{u} = -C_r A_r^{-1} B_r = -\tilde{C}_1 \Lambda_1^{-1} \tilde{B}_1 \neq y_{r_{\infty}} = \lim_{t \to \infty} \frac{y}{u} = -C A^{-1} B ; \qquad (4.9)$$

• V_1 doit être inversible.

Pour les deux premières raisons, l'approximation utilisée dans le paragraphe suivant est largement préférable.

4.2.2 Négligence de la dynamique des modes rapides

Cette fois-ci, ce n'est pas z_2 qui est totalement ignoré mais simplement sa dérivée qui est posée nulle ($\dot{z}_2 = 0$) dans le but de conserver l'apport statique des modes rapides. On a :

$$z_2 = -\Lambda_2^{-1} \tilde{B}_2 u_1$$

puis

$$x_r = x_1 = V_1 z_1 + V_2 z_2 = V_1 z_1 - V_2 \Lambda_2^{-1} \tilde{B}_2 u$$

$$\Rightarrow z_1 = V_1^{-1} (x_1 + V_2 \Lambda_2^{-1} \tilde{B}_2 u).$$

L'expression de \dot{z}_1 dans (4.4) devient

$$\dot{z}_1 = \Lambda_1 V_1^{-1} x_1 + \Lambda_1 V_1^{-1} V_2 \Lambda_2^{-1} \tilde{B}_2 u + \tilde{B}_1 u.$$
(4.10)

Cette dernière équation conduit à (4.2) avec

$$\begin{cases}
A_r = V_1 \Lambda_1 V_1^{-1}, \\
B_r = V_1 (\tilde{B}_1 + \Lambda_1 V_1^{-1} V_2 \Lambda_2^{-1} \tilde{B}_2), \\
C_r = \tilde{C}_1 V_1^{-1}, \\
D_r = (\tilde{C}_1 V_1^{-1} V_2 \Lambda_2^{-1} - \tilde{C}_2 \Lambda_2^{-1}) \tilde{B}_2.
\end{cases}$$
(4.11)

Cette méthode présente les inconvénients suivants :

- elle fait apparaître une transmittance directe D_r (inconvénient mineur);
- la réduction d'un modèle initial sous forme compagne (donc assez creuse) et comportant des valeurs propres complexes peut aboutir à une matrice de commande B_r nulle;
- V_1 doit être de rang plein.

Mais, outre ces limites pas trop contraignantes, elle présente aussi les avantages suivants :

- elle permet de supprimer à coups sûr les modes rapides et de conserver, dans le modèle réduit, des modes dominants proches des originaux (à ce titre, elle peut sembler utile pour précéder un placement de pôles);
- elle est assez efficace sur le plan du comportement entrées/sorties (en comparaison de la précédente) et conserve le gain statique.

Il est assez facile de vérifier que le gain statique original est conservé. En effet, en régime permanent,

$$y_{r_{\infty}} = \tilde{C}_1 V_1^{-1} x_1.$$

Or, le régime statique implique que $\dot{x}_1 = 0$ *i.e.* que $x_1 = -A_r^{-1}B_r u$. Ainsi,

$$\begin{split} x_1 &= -V_1 \Lambda_1^{-1} V_1^{-1} V_1 \tilde{B}_1 u + V_1 \Lambda_1^{-1} V_1^{-1} V_1 \Lambda_1 V_1^{-1} V_2 \Lambda_2^{-1} \tilde{B}_2 u \\ x_1 &= -V_1 \Lambda_1^{-1} \tilde{B}_1 u + V_2 \Lambda_2^{-1} \tilde{B} u \\ \Rightarrow y_{r_{\infty}} &= \tilde{C}_1 V_1^{-1} x_1 + \tilde{C}_1 V_1^{-1} V_2 \Lambda_2^{-1} \tilde{B}_2 u - \tilde{C}_2 \Lambda_2^{-1} \tilde{B}_2 u \\ y_{r_{\infty}} &= -\tilde{C}_1 \Lambda_1^{-1} \tilde{B}_1 u - \tilde{C}_1 V_1^{-1} V_2 \Lambda_2^{-1} \tilde{B}_2 u + \tilde{C}_1 V_1^{-1} V_2 \Lambda_2^{-1} \tilde{B}_2 u - \tilde{C}_2 \Lambda_2^{-1} \tilde{B}_2 u \\ y_{r_{\infty}} &= -\tilde{C}_1 \Lambda_1^{-1} \tilde{B}_1 u - \tilde{C}_2 \Lambda_2^{-1} \tilde{B}_1 u - \tilde{C}_2 \Lambda_2^{-1} \tilde{B}_2 u \\ y_{r_{\infty}} &= -CA^{-1} Bu = y_{\infty} \end{split}$$

4.3 Réduction par technique d'agrégation

L'idée de cette technique est assez différente de celle exploitée précédemment. En effet, plutôt que de procéder à un changement de base bijectif de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n , l'idée est d'utiliser une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^{n_r} telle que le vecteur d'état dans le nouvel espace est

$$x_r = Mx. (4.12)$$

Cette application conduit à

$$\dot{x}_r = MAx + MBu \tag{4.13}$$

qui définit un nouveau système dynamique

$$\dot{z} = A_r x_r + B_r u. \tag{4.14}$$

Les matrices A_r et B_r peuvent être choisies dès lors qu'il existe une matrice M vérifiant

$$\begin{cases}
A_r M = MA \\
B_r = MB
\end{cases}$$
(4.15)

S'il existe une matrice M^+ vérifiant $MM^+ = II_{n_r}$, alors il vient

$$\begin{cases}
A_r = MAM^+ \\
B_r = MB
\end{cases} (4.16)$$

En pratique, on peut utiliser la pseudo-inverse de Moore-Penrose :

$$M^{+} = M'(MM')^{-1} \tag{4.17}$$

Le problème de réduction de modèle par agrégation peut donc être décomposé en deux sous problèmes :

- calcul de M en fonction du choix de la dynamique souhaitée pour le modèle réduit (*i.e.* A_r et B_r);
- calcul de la matrice d'observation C_r permettant de définir la sortie y_r en fonction de x_r .

4.3.1 Calcul de la matrice d'agrégation

Ce qui suit est donné sans justification. Le lecteur est invité à se référer à la littérature sur le sujet.

4.3.1.1 Utilisation de la matrice de commandabilité

Soit la matrice de commandabilité de Kalman

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$\tag{4.18}$$

correspondant au système initial. Le produit $Q_{c_r} = MQ_c$ représente la matrice de commandabilité du modèle réduit. En effet,

$$Q_{c_r} = MQ_c = \begin{bmatrix} MB & MAB & \dots & MA^{n-1}B \end{bmatrix}$$
(4.19)

$$\Leftrightarrow Q_{c_r} = \begin{bmatrix} B_r & A_r B_r & \dots & A_r^{n-1} B_r \end{bmatrix}.$$
(4.20)

En supposant que le modèle initial est commandable, c'est-à-dire que Q_c est de rang plein, on a

$$M = Q_{c_r} Q_c^+ \tag{4.21}$$

où Q_c^+ est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de Q_c .

La méthode consiste à choisir la forme de A_r et de B_r . A_r est choisie en fonction des modes que l'on veut conserver du modèle initial. Il n'y a pas de méthode pour guider le choix de B_r (on peut par exemple prendre A_r et B_r de forme compagne horizontale). On calcule Q_c et Q_{c_r} par les formules (4.18) et (4.20). Il reste à déduire M par (4.21).

Cette réduction donne trop de liberté à l'utilisateur et induit parfois des résultats assez mauvais d'où une alternative fournie par la technique suivante.

Remarque 4.2 Dans le cas d'un modèle monovariable (m = p = 1), on obtient $M = Q_{c_r}$.

4.3.1.2 Utilisation de la décomposition spectrale

Soient $\{w_i, i = 1, ..., n_r\}$, l'ensemble des vecteurs propres à droite de A' associés aux n_r valeurs propres dominantes. Soit aussi $T \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$, une matrice de rang plein. Afin d'obtenir une matrice d'évolution qui soit la matrice diagonale des modes dominants, l'on peut calculer la matrice d'agrégation par :

$$M = T \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_{n_r} \end{bmatrix}'. \tag{4.22}$$

Dans le cas particulier non rare où A est diagonalisable avec des valeurs propres distinctes et où V est la matrice modale de A, l'on a

$$M = T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_r} & \mathbf{0}_{n_r, n - n_r} \end{bmatrix} V^{-1}.$$
(4.23)

En pratique, on peut prendre $T = II_{n_r}$.

Cette méthode de calcul de M laisse un peu moins de liberté dans le choix de la forme obtenue et induit de meilleurs résultats.

4.3.2 Calcul de la matrice d'observation

Trouver une matrice d'agrégation qui donne au modèle réduit une certaine dynamique ne suffit pas à réduire proprement le système initial. Il faut aussi déterminer une matrice d'observation qui va contribuer à retrouver le comportement entrées/sorties en particulier en régime permanent.

S'il existe une première méthode simpliste qui consiste à déduire que $C = C_r M$ et ainsi calculer $C_r = CM^+$ il faut la proscrire. Elle ne revient qu'à projeter le modèle initial maladroitment dans un sous-espace d'état. Associée à la technique utilisant la matrice de commandabilité et à un mauvais choix de A_r , l'on peut raisonnablement, penser que le modèle réduit obtenu n'a pas grand chose à voir avec le modèle initial.

En revanche, il est intéressant de déterminer C_r en cherchant à conserver le gain statique. Si le modèle (4.1) ne comporte pas d'intégrateur, A est inversible et l'identité des gains statiques conduit à

$$C_r A_r^{-1} B_r = C A^{-1} B (4.24)$$

$$\Rightarrow C_r = (CA^{-1}B)(A_r^{-1}B_r)^+.$$
(4.25)

Dans le cas où A a une valeur propre nulle, la formule (4.25) ne peut être appliquée. Soit alors la matrice adjointe de A donnée par

$$\operatorname{adj}(A) = A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \mathbb{I}_n$$
 (4.26)

où les coefficients a_i sont ceux du polynôme caractéristique

$$\det(s \mathbf{I}_n - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_0.$$
(4.27)

Il peut être montré que C_r est alors donnée par

$$C_r = \frac{1}{\prod_{i=n_r+1}^n} C(\mathrm{adj}(A)) B(\mathrm{adj}(A_r)B_r)^+.$$
(4.28)

La formule (4.25) n'est pas valable pour les systèmes continus comportant une intégration mais peut être utilisée avec toutes les méthodes de réduction. Au contraire, la formule (4.28) est valable pour tout système continu mais uniquement lors d'une réduction par technique d'agrégation.

4.3.3 Propriétés du modèle agrégé

Une première propriété intéressante de la réduction par agrégation est qu'elle conserve la commandabilité. En effet, si le modèle (4.1) est commandable alors Q_c est de rang plein. Si la matrice M est de rang plein n_r (ce qui est souhaitable pour réduire proprement le modèle), alors Q_{c_r} est aussi de rang n_r et le modèle réduit est commandable. Cette propriété est très importante si une loi de commande doit être déterminée à partir du modèle réduit (ce qui est généralement le but).

Par ailleurs, l'agrégation conserve les modes dominants. Soient v_i , les vecteurs propres à droite de A. Si $Mv_i \neq 0$, il vient

$$MAv_i = A_r M v_i = \lambda_i M v_i. \tag{4.29}$$

Ainsi, v_i et Mv_i sont respectivement vecteurs propres de A et A_r pour la même valeur propre λ_i .

4.4 Réduction par décomposition de Schur

Le but de cette méthode est d'apporter une procédure numériquement robuste. La matrice d'état A peut subir une décomposition de Schur de la manière suivante :

$$S = U'AU \tag{4.30}$$

où U est une matrice unitaire $(UU' = \mathbb{I})$ et S est triangulaire et ainsi constituée :

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & S_{12} \\ \mathbf{0} & S_2 \end{bmatrix}. \tag{4.31}$$

 $S_1 \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ et $S_2 \in \mathbb{R}^{(n-n_r) \times (n-n_r)}$ sont des matrices triangulaires supérieures contenant respectivement les modes lents et les modes rapides. On réalise le changement de variable w = U'x, ce qui donne

$$\begin{cases} \dot{w} = Sw + U'Bu \\ y = CUw \end{cases}$$
(4.32)

En faisant la partition $w = [x_r \ w_2]'$ et $CU = [C_1 \ C_2]$ où $x_r \in \mathbb{R}^{n_r}$, l'on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}_r = S_1 z + S_{12} w_2 + B_1 u \\ \dot{w}_2 = S_2 w_2 + B_2 u \\ y = C_1 z C_2 w_2 \end{cases}$$
(4.33)

À partir de là, plusieurs approches peuvent être suivies, qui s'inspirent des techniques présentées précédemment.

4.4.1 Agrégation

Une première approche consiste à suivre, à partir du modèle (4.33), la technique d'agrégation. En réalité, ceci revient à prendre $w_2 = 0$ et il vient

$$A_r = S_1 \quad \text{et} \quad B_r = B_1.$$
 (4.34)

La matrice d'agrégation correspondante est

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_r} & \mathbf{0}_{n_r, n-n_r} \end{bmatrix} U' \tag{4.35}$$

sous réserve que les valeurs propres de A soient distinctes. On calcule alors la matrice d'observation C_r par (4.25) si A n'a pas de valeur propre nulle.

4.4.2 Négligence de la dynamique rapide

 \Rightarrow

Plutôt que de tronquer le vecteur w, on pose simplement $\dot{w}_2 = 0$. Cette façon de procéder pour finaliser la réduction est dite méthode "des perturbations singulières" en référence à une autre technique de réduction applicable aux systèmes qualifiés de "singulièrement perturbés". Comme on l'a vu au paragraphe 4.2.2, ceci revient à négiliger la dynamique des modes rapides. L'avantage est que S_2^{-1} existe toujours puisque 0 n'est pas un mode rapide. L'on a

$$w_{2} = -S_{2}^{-1}B_{2}u$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{r} = S_{1}x_{r} + (B_{1}S_{12}S_{2}^{-1}B_{2})u$$

$$A_{r} = S_{1} \quad \text{et} \quad B_{r} = B_{1} - S_{12}S_{2}^{-1}B_{2}.$$
(4.36)

Pour la matrice d'observation, l'on peut soit utiliser la formule (4.25) (dans le cas où A n'a pas de valeur propre nulle) mais ceci déteriore le gain statique, soit choisir

$$C_r = C_1, \tag{4.37}$$

ce qui entraîne une transmittance directe

$$D_r = -C_2 S_2^{-1} B_2. (4.38)$$

4.4.3 Remarques sur la méthode

Cette méthode semble intéressante d'une part parce qu'elle peut s'associer avec la méthode de réduction par agrégation permettant ainsi de conserver les modes lents du modèle (4.1), d'autre part parce que le fait de négliger la dynamique des modes rapides ($\dot{w}_2 = 0$ avec l'inversibilité de S_2 garantie) est réputé judicieux. En outre, la robustesse numérique de la décomposition de Schur autorise une implantation systématique relativement efficace. Cependant, le progrès théorique par rapport aux réductions précédentes reste à mettre véritablement en évidence. Par ailleurs, il faut disposer d'une procédure de décomposition de Schur qui ordonne convenablement les éléments diagonaux de S (qui sont aussi les valeurs propres de A) dans le sens de la rapidité. Ce n'est pas toujours le cas.

4.5 Réduction par transformation équilibrante

Il s'agit sans doute de la reine des méthodes. La plus populaire. Le principe est de supprimer certains états ou, au moins, de négliger leur dynamique, de manière à rester le plus fidèle possible au comportement entrées/sorties du modèle initial.

Pour cela, il faut d'abord envisager, sur le système (4.1), une transformation dite équilibrante. Ceci suppose deux hypothèses sur le modèle (4.1):

- la matrice A est stable au sens d'Hurwitz;
- la réalisation est minimale c'est-à-dire que les paires (A, B) et (A, C) sont respectivement commandable et observable.

Cette transformation consiste en fait en un changement de base. Dans la nouvelle base, chaque état n'est pas plus commandable qu'observable et réciproquement. En d'autres termes, chaque composante du vecteur d'état est sujète à une certaine commandabilité-observabilité. Il convient alors d'agir sur les états qui sont les moins commandables-observables car ce sont eux qui ont le moins d'influence sur le comportement entrées/sorties du système. Le cas extrême correspond à une réalisation non minimale où des états qui ne sont pas commandables ou pas observables n'ont aucune influence sur la forme de la réponse.

Toutefois, la commandabilité et l'observabilité d'un état sont généralement valuées par des booléens. C'est pourquoi il convient de rappeler ici la notion de grammiens de commandabilité et d'observabilité. C'est grâce à cette notion qu'il est possible de déterminer le changement de base équilibrant.

4.5.1 Les grammiens

Dans cette sous-partie, l'on rappelle la définition des grammiens pour les systèmes linéaires continus. Une interprétation de ces grammiens est évoquée ainsi qu'une propriété.

Il est à noter que la notion de grammiens a déjà été abordée dans le premier volet du cours sur les systèmes multivariables.

4.5.1.1 Définition des grammiens

On définit le grammien de commandabilité par

$$W_c = \int_0^\infty e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} d\tau.$$
(4.39)

L'on peut démontrer qu'il vérifie l'équation de Lyapunov

$$AW_c + W_c A' = -BB'. ag{4.40}$$

De même, l'on définit le grammien d'observabilité par

$$W_o = \int_0^\infty e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau.$$
(4.41)

Il vérifie l'équation de Lyapunov

$$A'W_o + W_o A = -C'C. (4.42)$$

4.5.1.2 Interprétation des grammiens

Il est assez difficile d'interpréter directement un grammien pour des systèmes continus. Cependant, par analogie avec le cas des systèmes discrets, l'on peut établir une interprétation énergétique. Le détail de cette analogie n'est pas présenté ici mais en voici les conclusions.

L'on peut définir le grammien transitoire de commandabilité par

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} d\tau$$
(4.43)

Ce grammien transitoire traduit le fait qu'un système de réalisation partielle (A, B) peut être commandé ou non sur un horizon de temps [0; t]. Si ce grammien présente une déficience de rang, il se peut qu'aucune commande d'énergie finie ne puisse amener l'état x du système à une valeur arbitrairement choisie x^* en un temps t. Au contraire, si $W_c(t)$ est défini positif, il existe toujours une telle commande.

Dans ce cas favorable, il existe un changement de base, par une matrice de passage unitaire, tel que, dans la nouvelle base, le grammien devient diagonal. Chaque élément diagonal correspond à l'inverse de l'énergie minimale de commande qu'il faut pour amener l'état à la valeur $[0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]'$. Autrement dit, c'est un indice de commandabilité de la i^{ème} composante du vecteur d'état.

Un tel raisonnement s'étend lorsque t tend vers l'infini et l'on raisonne alors sur le grammien lui-même W_c . Dans cette base qui diagonalise le grammien, chaque élément diagonal est un indice de commandabilité de l'état correspondant.

Par dualité, l'on peut raisonner de même sur le grammien d'observabilité.

4.5.1.3 Propriété des grammiens

Les valeurs propres du produit $W_c W_o$ sont invariantes par changement de base.

En effet, Il est facile de voir sur la définition des grammiens que si un changement de base $z = T^{-1}x$ est appliqué alors les grammiens de commandabilité et d'observabilité W_c et W_o deviennent

$$\hat{W}_c = T^{-1} W_c (T')^{-1}$$
 et $\hat{W}_o = T' W_o T.$ (4.44)

De ce fait, il vient

$$\hat{W}_c \hat{W}_o = T^{-1} W_c W_o T. \tag{4.45}$$

Les deux produits sont donc semblables et présentent les mêmes valeurs propres.

4.5.2 La transformation équilibrante

Dans un premier paragraphe, l'on définit ce qu'est une réalisation équilibrée. Dans un second, il est expliqué comment obtenir une telle forme.

4.5.2.1 Réalisation équilibrée

Une réalisation (A, B, C) minimale stable est dite équilibrée si et seulement si :

$$W_c = W_o = \sigma = \operatorname{diag}\{\sigma_1 \dots \sigma_n\}.$$
(4.46)

Chaque élément diagonal σ_i est, comme on l'a vu, positif et correspond à un indice de commandabilitéobservabilité de l'état x_i .

4.5.2.2 Transformation équilibrante

Théorème 4.1 Soit la rélisation minimale stable $\mathcal{R} = (A, B, C)$. Il existe une matrice non singulière T telle que la réalisation $\overline{\mathcal{R}} = (T^{-1}AT, T^{-1}B, CT) = (\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ est équilibrée.

Ce théorème équivaut à affirmer l'existence systématique d'une matrice diagonale définie positive Σ telle que $\overline{W}_o = \overline{W}_c = \Sigma$ et

$$\bar{A}\Sigma + \Sigma\bar{A}' = -\bar{B}\bar{B}' \quad \text{et} \quad \bar{A}'\Sigma + \Sigma\bar{A}' = -\bar{C}'\bar{C}. \tag{4.47}$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de montrer l'existence de T. W_c peut subir une décomposition de Choleski :

$$W_c = R'R. \tag{4.48}$$

Le produit RW_oR' est alors décomposable en valeurs singulières par l'intervention d'une matrice unitaire U:

$$RW_{o}R' = U\Sigma^{2}U', \tag{4.49}$$

où $U'U = \mathbb{I}$ et $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ avec $\sigma_1 \leq \ldots \leq \sigma_n$. L'on choisit

$$T = R' U \Sigma^{-\frac{1}{2}}.$$
 (4.50)

Ainsi, l'on a

$$\bar{W}_o = T'W_oT = \Sigma^{-\frac{1}{2}}U'RW_oR'U\Sigma^{-\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \bar{W}_o = \Sigma^{-\frac{1}{2}}U'U\Sigma^2U'U\Sigma^{-\frac{1}{2}} = \Sigma.$$
(4.51)

De même, en adoptant la notation $T^{-'}$ pour $(T^{-1})' = (T')^{-1}$,

$$\bar{W}_{c} = T^{-1}W_{c}(T')^{-1} = \Sigma^{\frac{1}{2}}U'R^{-'}W_{c}R^{-1}U\Sigma^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \bar{W}_{c} = \Sigma^{\frac{1}{2}}U'R^{-'}R'RR^{-1}\Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma.$$
(4.52)

L'on peut également vérifier en prémultipliant (4.40) par T^{-1} et en la postmultipliant $T^{-'}$, que

$$T^{-1}A(TT^{-1})W_{c}T^{-'} + (T^{-1}A(TT^{-1})W_{c}T^{-'})' = -T^{-1}BB'T^{-'}$$

$$\Rightarrow \bar{A}\Sigma + \Sigma\bar{A}' = -\bar{B}\bar{B}'.$$
(4.53)

L'on vérifie de même que

$$\Rightarrow \bar{A}'\Sigma + \Sigma\bar{A} = -\bar{C}'\bar{B}.$$
(4.54)

Puisque T peut toujours être déterminée, alors il existe toujours une transformation équilibrante produisant une réalisation pour laquelle chaque état est commandable et observable avec la même magnitude.

4.5.3 Réduction du modèle

Une fois cette réalisation équilibrée calculée, l'on utilise les éléments diagonaux de σ pour déterminer quels états éliminer. En effet, l'on a vu, pour une réalisation équilibrée, que σ_i donne un degré de commandabilité et d'observabilité de l'état x_i . Chaque état n'est pas plus commandable qu'observable et réciproquement. σ_i donne un critère équilibré de commandabilité et d'observabilité de x_i . Les états les moins commandables et observables sont de moindre influence sur le comportement entrées/sorties. L'on est alors confronté à une alternative :

• soit l'on tronque purement et simplement ces états mais ceci est peu conseillé car le gain statique n'est pas conservé par la réduction;

• soit l'on néglige simplement la dynamique de ces états faiblement commandable et observables à l'instar de la méthode dite "des perturbations singulières", ce qui, dans ce cas, revient à procéder comme suit. Le modèle initial, dans la base équilibrée, s'exprime :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \bar{A}_{11}x_1 + \bar{A}_{12}x_2 + \bar{B}_1u \\ \dot{x}_2 = \bar{A}_{21}x_1 + \bar{A}_{22}x_2 + \bar{B}_2u \\ y = \bar{C}_1x_1 + \bar{C}_2x_2 + Du. \end{cases}$$
(4.55)

Ici, l'on peut raisonner avec une transmission directe $D \neq \emptyset$. L'on suppose que $\dot{x}_2 = 0$ ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + B_r u \\ y_r = C_r x_r + D_r u. \end{cases}$$

$$(4.56)$$

où $x_r = x_1$ et

$$\begin{cases}
A_r = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21} \\
B_r = B_1 - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{B}_2 \\
C_r = \bar{C}_1 - \bar{C}_2\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21} \\
D_r = D - \bar{C}_2\bar{A}_{22}^{-1}\bar{B}_2.
\end{cases}$$
(4.57)

Cette seconde possibilité est largement à privilégier car elle conserve le gain statique initial. Il est possible d'utiliser des fonctions MATLAB pour utiliser cette technique de réduction :

- minreal : calcule une réalisation minimale du système;
- balreal : calcule une réalisation équilibrée de la forme minimale ;
- modred : complète la réduction par la "méthode des perturbations singulières".

4.6 Comparaison succincte des méthodes

La première remarque qu'il convient de formuler concerne la phase finale de ces différentes techniques de réduction. Il est essentiel pour obtenir un modèle réduit qui soit une bonne approximation du modèle initial de chercher à conserver le gain statique. Ainsi, par exemple, lorsqu'après transformation, l'on a le choix entre annuler une partie du vecteur d'état ou annuler sa dérivée, il vaut mieux choisir d'annuler sa dérivée (méthode dite "des perturbations singulières").

S'il faut faire une critique des techniques présentées, l'on peut regarder avec intérêt la réduction par voie modale qui a le mérite d'éliminer la dynamique des pôles rapides. L'on peut donc interpréter cette réduction en termes de spectre ce qui peut présenter un avantage selon la loi de commande utilisée après. Elle est par ailleurs assez efficace en termes de comportement entrées/sorties.

De même, s'il est peut-être préférable de proscrire la technique par agrégation via la matrice de commandabilité pour la faible fiabilité de ces résultats, la décomposition spectrale propose de meilleures résultats sans que l'intérêt en soit pour autant très clair.

Si la réduction par décomposition de Schur a la réputation d'être numériquement robuste, elle permet aussi, éventuellement, de conserver les modes lents.

La plus populaire, à juste titre, reste la réduction par transformation équilibrante. C'est elle qui assure la meilleure approximation entrées/sorties. Elle permet aussi, en cas de troncature de l'état (même si ce point n'est pas abordé ici) de déterminer une borne sur la norme de la différences entre y et y_r . C'est une façon de quantifier la qualité de la réduction. Même si elle est restreinte aux systèmes stables, il existe quelques travaux qui étendent cette technique au cas des systèmes instables.

Il existe maintes autres méthodes de réduction dans la littérature scientifique qui ne sont pas présentées ici faute de temps et de connaissances. L'on peut toutefois citer l'approche qui consiste à réduire la norme \mathcal{H}_{∞} du transfert entre u et $(y-y_r)$ (cf. troisième volet du cours sur les systèmes multivariables et cours sur la commande robuste pour appréhender la notion de norme \mathcal{H}_{∞}). Ce chapitre n'est qu'une sensibilisation au problème. Si une seule méthode devait être conservée, ce serait celle utilisant la transformation équilibrante.

4.7 Notes

L'on peut consulter l'ouvrage [1] qui est une bonne première approche et un bon tour d'horizon pour comprendre les techniques simples de réduction de modèles, telles qu'elles sont présentées dans ce chapitre.

La réduction par diagonalisation trouve son origine dans les travaux de Davison [2]. Voir [3] pour une critique très complète des diverses extensions de ce travail.

Puisque la technique de réduction par transformation équilibrante est préférée dans ce chapitre, il convient de savoir que les bases en sont formulées dans [4]. Le lecteur appréciera peut-être l'excellente interprétation des grammiens présentée dans [5]. L'extension de la technique de réduction par transformation équilibrante est réalisée dans [6].

Bibliographie

- A. Rachid et D. Mehdi Réalisation, réduction et commande des systèmes linéaires. Editions ScientifikA, 1993
- [2] E. J. Davison. A method for simplifying linear dynamic systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 11(1), p. 93-101, 1966.
- [3] D. Bonvin et D. A. Mellichamp. A unified derivation and critical review of modal approaches to model reduction. International Journal of Control, Vol. 35(5), p. 829-848, 1982.
- [4] B. Moore. Principal component analysis in linear systems : controllability, observability and model reduction. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 26, p. 17-31, 1981.
- [5] Ph. de Larminat. Automatique : Commande des systèmes linéaires. Editions Hermes, 1993.
- [6] L. Fortuna et G. Muscato Model reduction via singular perturbation approximation of normalized right coprime factorizations. Actes du congrès « European Control Conference ECC'95 », Rome, Italie, Septembre 1995.