

Cours d'Automatique

Représentations d'état linéaires
des systèmes monovariabiles

Olivier BACHELIER

Courriel : Olivier.Bachelier@univ-poitiers.fr

Tel : 05-49-45-36-79 ; Fax : 05-49-45-40-34

Cours d'Automatique

Représentations d'état linéaires
des systèmes monovariables

Olivier BACHELIER

Courriel : Olivier.Bachelier@univ-poitiers.fr

Tel : 05-49-45-36-79 ; Fax : 05-49-45-40-34

28 juin 2017

Résumé

Ce cours d'Automatique s'inscrit dans le cadre de la deuxième année de « cycle ingénieur » de l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers (**ENSIP**) et s'adresse aux étudiants de la filière *Énergie*, parcours Maîtrise de *Énergie Électrique* (**MEE**). Ces derniers ont déjà suivi un enseignement relatif à l'étude des systèmes linéaires modélisés par une fonction de transfert (approche fréquentielle). Ce cours s'intéresse aux mêmes systèmes mais propose une étude via un modèle différent, appelé représentation d'état linéaire (approche temporelle).

Connaissances préalables souhaitées : notions de systèmes linéaires, équations différentielles, fonction de transfert en p (voire en z), analyse et commande des systèmes linéaires par approche fréquentielle, quelques bases d'algèbre linéaire.



Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Notion de système	1
1.2	Notion de modèle	2
1.3	Grandes lignes du cours	3
2	Rappel sur la fonction de transfert	5
2.1	Équations préliminaires	5
2.1.1	Linéarité	5
2.1.2	Modèle entrée/sortie : l'équation différentielle	6
2.1.3	Transformée de Laplace : de l'équation différentielle à la fonction de transfert	6
2.2	Fonction de transfert	8
2.2.1	Comment obtenir la fonction de transfert ?	8
2.2.2	Intérêt de la fonction de transfert	8
3	La représentation d'état	11
3.1	Principe général	11
3.2	De la non-linéarité à la linéarité	12
3.3	Historique de la représentation d'état	15
3.4	Comment obtenir un modèle d'état ?	16
3.4.1	Par le jeu d'équations	16
3.4.2	Par l'équation différentielle unique	16
3.5	De la fonction de transfert à la représentation d'état	17
3.5.1	Cas d'une fonction de transfert strictement propre ($m < n$)	17
3.5.1.1	Réalisation diagonale ou quasi diagonale de Jordan	17
3.5.1.2	Réalisation de forme compagne	19
3.5.2	Cas d'une fonction de transfert non strictement propre ($m = n$)	20
3.6	De la représentation d'état à la fonction de transfert	21
3.7	D'une réalisation à l'autre	21
3.7.1	Changement de base	21
3.7.2	Obtention d'une forme compagne (horizontale)	22
3.7.3	Obtention d'une forme de Jordan	22
3.7.3.1	Les valeurs propres λ_i de A sont distinctes	23
3.7.3.2	Les valeurs propres λ_i de A sont multiples	23
4	Réponse d'un modèle d'état	25
4.1	Solution du système autonome	25
4.1.1	Matrice de transition d'état	25
4.1.2	Solution de l'équation homogène	26
4.2	Solution de l'équation d'état complète	26
4.3	Calcul de e^{At}	27
4.3.1	Méthode des séries	27
4.3.2	Par la transformation de Laplace	28
4.3.3	Méthodes des modes	29

4.4	Régime transitoire : influence des modes	30
4.5	Réponse impulsionnelle	31
4.6	Réponse indicielle	31
4.7	Réponse harmonique	32
5	Stabilité des modèles d'état	35
5.1	Une approche quasi intuitive : la stabilité BIBO	35
5.2	Stabilité d'un état d'équilibre	36
5.2.1	Définition et recherche d'un état d'équilibre	36
5.2.2	Stabilité	36
5.3	Critères de stabilité	36
5.3.1	Critère des racines	37
5.3.1.1	$\text{rang}(A) = n$	37
5.3.1.2	$\text{rang}(A) = n$	38
5.3.1.3	$\text{rang}(A) < n$	38
5.3.1.4	En résumé	39
5.3.1.5	Stabilité interne et stabilité BIBO	39
5.3.1.6	Les marges de stabilité	40
5.3.2	Critère de Routh/Hurwitz	40
5.3.3	Méthode de Lyapunov	40
6	Commandabilité et observabilité	43
6.1	Définitions	43
6.1.1	Commandabilité ou gouvernabilité	43
6.1.2	Observabilité	43
6.2	Critère de Kalman	44
6.2.1	Commandabilité	44
6.2.2	Observabilité	44
6.2.3	Dualité des deux concepts	46
6.3	Critères s'appliquant aux formes de Jordan	47
6.3.1	A diagonalisable	47
6.3.2	A non diagonalisable	47
6.4	Grammiens de commandabilité et d'observabilité	48
6.4.1	Définition des grammiens	48
6.4.2	Interprétation des grammiens	48
6.4.3	Calcul des grammiens	49
6.5	Modèles et structures	49
6.5.1	Différence entre les modèles	49
6.5.2	Systèmes composites	51
6.6	Réalisation minimale	53
6.6.1	Définition	53
6.6.2	Réalisation minimale et notion de pôles	53
6.6.3	Réalisation minimale et stabilité	54
7	Commande par retour d'état	55
7.1	Notion de retour d'état	55
7.2	Retour d'état et performances transitoires : le placement de pôles	56
7.2.1	Commandabilité et placement de pôles	57
7.2.2	Placement de pôles sur une réalisation canonique	57
7.2.3	Placement de pôles sur une réalisation quelconque	58
7.2.3.1	Obtention de la forme canonique à partir de la fonction de transfert	58
7.2.3.2	Obtention de la forme canonique à partir d'une autre réalisation	58
7.2.3.3	Algorithme de placement de pôles	58
7.3	Performances statiques et retour d'état : la précommande	60
7.4	Rejet de perturbation et retour d'état : adjonction d'intégrateurs	61

7.4.1	Première approche	61
7.4.2	Seconde approche	64
8	Commande par retour de sortie : les observateurs	69
8.1	Notions préliminaires	69
8.1.1	Motivation	69
8.1.2	Principe de l'observation	70
8.1.3	Propriété d'un observateur	70
8.1.4	Condition d'existence d'un observateur	71
8.1.5	À propos de la transmission directe	71
8.2	Synthèse d'un observateur d'ordre minimal	71
8.2.1	Observateur d'ordre minimal	71
8.2.2	Procédure de Luenberger	72
8.3	Synthèse d'un observateur d'ordre plein	74
8.3.1	Observateur d'ordre plein	75
8.3.2	Procédure de synthèse	76
8.4	Commande par retour d'état observé	77
9	Introduction à la représentation d'état discrète	81
9.1	Rappels sur les signaux	81
9.1.1	Signaux continus, discrets, quantifiés, non quantifiés	81
9.1.2	Transformation de signaux	82
9.1.2.1	Échantillonnage	82
9.1.2.2	Quantification	82
9.1.2.3	Blocage	82
9.2	Systèmes discrets linéaires	85
9.2.1	Définition	85
9.2.2	Modèles externes	85
9.2.2.1	Équation récurrente	86
9.2.2.2	Transformation en z	86
9.2.2.3	Fonction de transfert en z	86
9.2.3	Représentation d'état	87
9.2.4	Lien entre les modèles	88
9.2.4.1	D'une réalisation à l'autre	88
9.2.4.2	De l'équation d'état à la fonction de transfert en z	88
9.2.4.3	De la fonction de transfert en z à l'équation d'état	88
9.3	Systèmes échantillonnés	88
9.3.1	Pourquoi étudier les modèles discrets ? (notion de système échantillonné)	88
9.3.2	La commande numérique	89
9.3.3	Échantillonnage et théorème de Shannon	90
9.3.4	Obtention d'un modèle échantillonné	90
9.3.4.1	Calcul de $G(z)$	90
9.3.4.2	Modèle d'état	91
9.4	Réponse d'un système discret	93
9.4.1	Réponse du modèle d'état	93
9.4.1.1	Réponse par résolution de l'équation d'état	93
9.4.1.2	Calcul de A^k	93
9.4.1.3	Réponse d'un système échantillonné	94
9.4.2	Analyse de la réponse : étude des modes	95
9.5	Stabilité d'un système discret	96
9.5.1	Stabilité BIBO	96
9.5.2	Stabilité interne	96
9.5.2.1	Définition et recherche d'un état d'équilibre	96
9.5.2.2	Stabilité	96
9.5.3	Critère des racines	97

9.5.3.1	Résultat général	97
9.5.3.2	Stabilité interne et stabilité BIBO	98
9.5.3.3	Marge de stabilité	98
9.5.4	Critère de Jury	98
9.5.5	Méthode de Lyapunov	98
9.5.6	Stabilité d'un système échantillonné	99
9.5.6.1	Échantillonnage d'une boucle ouverte	100
9.5.6.2	Bouclage d'un système échantillonné	100
9.6	Commandabilité/observabilité d'un modèle discret	100
9.6.1	Définitions	101
9.6.1.1	Commandabilité	101
9.6.1.2	Observabilité	101
9.6.2	Critère de Kalman	101
9.6.2.1	Commandabilité	101
9.6.2.2	Observabilité	101
9.6.2.3	Dualité des deux concepts	102
9.6.3	Critères s'appliquant aux formes de Jordan	102
9.6.4	Grammiens	102
9.6.4.1	Définition des grammiens	102
9.6.4.2	Interprétation des grammiens	103
9.6.4.3	Calcul des grammiens	103
9.6.5	Modèles et structures	103
9.6.6	Réalisation minimale	103
9.7	Commande par retour d'état	104
9.7.1	Les différentes approches de la commande numérique	104
9.7.2	Retour d'état discret	104
9.7.3	Placement de pôles par retour d'état	105
9.7.3.1	Commandabilité et placement de pôles	105
9.7.3.2	Technique de placement de pôles	105
9.8	Commande par retour de sortie	106
10	Conclusion	107
10.1	Résumé du cours	107
10.2	Perspectives	107
	Annexes	109
A	Rappels d'algèbre et d'analyse	111
A.1	À propos des matrices	111
A.1.1	Transposition et conjugaison	111
A.1.2	Matrices carrées	111
A.1.3	Opérations sur les matrices	112
A.1.3.1	Addition de matrices	112
A.1.3.2	Multiplication de matrices	112
A.1.4	Déterminant d'une matrice carrée	113
A.1.4.1	Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2	114
A.1.4.2	Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 ou plus	114
A.1.4.3	Quelques propriétés du déterminant	115
A.1.5	Cofacteurs et matrice adjointe	115
A.1.6	Polynôme caractéristique d'une matrice carrée	115
A.1.7	Rang d'une matrice	115
A.1.8	Matrices inverses	115
A.1.8.1	Définition et calcul	115
A.1.8.2	Propriétés des inverses	116
A.1.9	Valeurs propres d'une matrice	116

A.1.9.1	Structure propre d'une matrice	116
A.1.9.2	Propriétés des valeurs propres	117
A.1.9.3	Propriétés des vecteurs propres	117
A.1.10	Rang d'une matrice carrée, déterminant et valeurs propres	118
A.1.11	Trace d'une matrice	118
A.2	À propos de la définition positive	118
A.2.1	Fonction définie positive	118
A.2.2	Matrices Hermitiennes définies en signe	119
B	À propos du régime transitoire	121
B.1	Influence du spectre de la matrice d'état	121
B.2	Influence des vecteurs propres de A	122
B.2.1	Couplage modes/sortie	122
B.2.2	couplage modes/commandes en boucle fermée	123
B.2.3	Couplage modes/consigne en boucle fermée	123
B.2.4	En résumé sur les vecteurs propres	124
B.3	Influence des zéros	124
B.3.1	Les zéros d'un modèle d'état	124
B.3.2	Contribution des zéros	124
C	Formule d'Ackermann pour le placement de pôles par retour d'état	127
C.1	Rappel du problème	127
C.2	Résolution selon Ackermann	127
D	À propos de \mathcal{L}	129
D.1	Propriétés de \mathcal{L}	129
D.2	Tableau de transformées	130
E	Lyapunov et les systèmes linéaires	131
E.1	Le cas continu	131
E.2	Le cas discret	132
E.3	Le cas échantillonné	132
F	À propos des grammians	135
F.1	Signification des grammians	135
F.2	Invariance des valeurs propres de $W_c W_o$	136
G	MATLAB et la représentation d'état	139
G.1	Fonctions mathématiques de base	139
G.2	Fonctions liées au modèle d'état	143
G.3	Fonctions liées aux modèles discrets	150
H	Biographies	153
H.1	Alexandr Lyapunov	153
H.2	Rudolf Kalman	155
	Références bibliographiques	159

Chapitre 1

Introduction

L'Automatique est une discipline scientifique qui vise à conférer à un dispositif donné, appelé système, des propriétés souhaitées et ce, sans nécessité d'une intervention humaine. Une telle discipline requiert d'attribuer un modèle au comportement du dit système (phase de modélisation) et de l'utiliser afin, d'une part, de mieux comprendre ce comportement (phase d'analyse) et d'autre part, d'agir sur le système dans le but d'améliorer ses propriétés (phase de commande).

Sans revenir trop longuement dans cette introduction sur des concepts étudiés lors des cours relatifs à l'approche dite fréquentielle, il convient de rappeler quelques notions de base.

1.1 Notion de système

Un système est une combinaison de composants interconnectés pour atteindre un objectif, rendre un service à un ou plusieurs opérateurs humains. Le « composant » est un organe fonctionnel qui ne se limite pas à un objet physique mais peut correspondre à un objet plus abstrait de telle sorte qu'un système peut être économique, financier, démographique même si, dans le cadre de cet enseignement, seront plutôt rencontrés des systèmes physiques, c'est-à-dire mécaniques, électriques, électroniques, hydrauliques, pneumatiques, chimiques, mécatroniques voire biologiques.

Parmi les grandeurs, éventuellement physiques, mises en jeu dans le fonctionnement d'un système, l'on peut distinguer celles qui, générées par l'environnement extérieur au système, agissent sur ce dernier. Ce sont les entrées parmi lesquelles figurent celles dont l'homme a la maîtrise (les entrées de commande ou simplement entrées) et celles qui échappent à son contrôle (les perturbations). L'on distingue aussi les grandeurs par lesquelles le système agit sur l'environnement extérieur, à savoir les sorties. L'on note souvent par les lettres u , d et y , respectivement les entrées, les perturbations et les sorties, de sorte qu'un système peut-être représenté par le schéma de la figure 1.1.

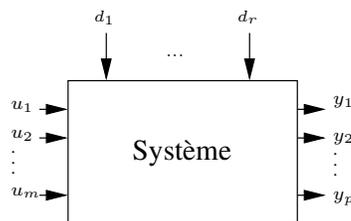


FIGURE 1.1 – Système comportant m entrées, p sorties et r perturbations

Dans le cadre de ce cours, seuls seront étudiés les systèmes monovariables pour lesquels $m = p = 1$, c'est-à-dire ne comportant qu'une seule entrée et une seule sortie.

Il est rappelé que l'automaticien est souvent amené à réintroduire l'information présente au niveau de la sortie sur l'entrée afin de modifier les performances du système. Ce dernier est alors dit bouclé. La notion de boucle étant déjà connue des étudiants, elle n'est pas détaillée dans cette introduction. Une partie de ce cours consacrée à la commande y reviendra. Il va de soi que les performances attendues sont les mêmes que celles envisagées lors de l'étude de l'approche fréquentielle, à savoir la stabilité, la forme des régimes transitoires, la précision et le rejet de perturbations.

1.2 Notion de modèle

Comme le sous-entend le préambule de cette introduction, l'analyse d'un système et *a fortiori* sa commande font appel à un modèle du comportement du système. De cette description mathématique du comportement peuvent naître des outils d'analyse et de commande qui sont utilisés par la suite. L'on distingue plusieurs automatiques selon la nature des signaux et des modèles considérés.

◇ Ainsi les signaux continus peuvent prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné alors que d'autres signaux sont susceptibles de prendre uniquement certaines valeurs bien déterminées. Sur la base de cette différence, l'on distingue l'automatique des systèmes à *événements continus* de l'automatique des systèmes à événements discrets. Seul le cas des événements continus sera envisagé dans ce cours.

◇ Une autre distinction tout aussi fondamentale se fait sur le temps. En effet, les signaux peuvent être définis à tout instant du temps ou simplement connus à des instants donnés (l'on parle de signaux discrets, discrétisés, ou échantillonnés). Les signaux de sortie sont ainsi mesurés, et donc connus, uniquement à certains instants, et la séquence des échantillons est obtenue sous forme numérique en sortie d'un convertisseur analogique numérique. Elle est transmise à un ordinateur qui en déduit une séquence de signaux de commande. Celle-ci est transformée par un convertisseur numérique analogique qui restitue un signal à temps continu sur l'entrée du système. Pour le calculateur, l'ensemble constitué du système et des convertisseurs est vu comme un système à temps discret (ou, de manière plus générale, « système discret »). Dans ce cours, sera essentiellement considérée l'automatique des *systèmes à temps continu* (ou simplement des « systèmes continus »). Seul le dernier chapitre traitera de l'automatique des systèmes discrets.

◇ Il existe d'autres distinctions qui reposent sur le modèle mathématique utilisé pour décrire le comportement du système. Ce modèle est obtenu soit par identification (l'on fait correspondre un modèle de structure donnée au comportement entrées/sorties du système) ou, et ce sera le cas ici, par une utilisation judicieuse des équations correspondant aux lois de la physique régissant le comportement du système. La plupart de ces équations sont différentielles et non linéaires. Cependant, il est souvent recommandé de travailler dans une gamme de valeurs autour d'un point de fonctionnement de telle sorte que les équations sont raisonnablement remplaçables par des équations différentielles dites linéaires à coefficients constants. Cette approximation permet donc de passer d'un modèle non linéaire à un modèle *linéaire*. Bien que moins fidèle à la réalité, ce dernier facilite l'analyse et la commande du système, notamment grâce à un principe fondamental, celui de *superposition* (ou de séparation), résumé sur la figure 1.2.

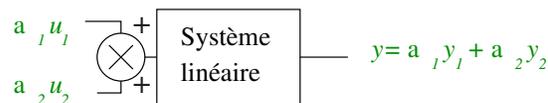


FIGURE 1.2 – Principe de séparation

Si l'entrée u_1 entraîne la sortie y_1 et si l'entrée u_2 entraîne la sortie y_2 alors une entrée $a_1 u_1 + a_2 u_2$ entraîne une sortie $y = a_1 y_1 + a_2 y_2$. Ce cours est restreint à l'étude des systèmes linéaires.

◇ Enfin, comme il a déjà été mentionné, une dernière distinction est essentielle pour ce cours. Les systèmes sont soit monovariables (une seule entrée, une seule sortie) soit multivariables (plusieurs entrées, plusieurs sorties). Seuls les systèmes *monovariables* seront étudiés.

En résumé, ce cours concerne les systèmes **linéaires monovariables** (continus et **discrets**), c'est-à-dire ceux qui peuvent être décrits par une fonction de transfert.

1.3 Grandes lignes du cours

Compte tenu des connaissances préalables des étudiants, ce cours est organisé comme suit. Après un rappel sur la fonction de transfert, son origine, son intérêt, un nouveau modèle alternatif est présenté : la représentation d'état linéaire. Ses propriétés sont explicitées, en particulier le lien existant avec la fonction de transfert. Une fois ce modèle introduit, l'on s'intéresse à la manière de déterminer la réponse des systèmes linéaires monovariables. Ensuite, il sera montré comment analyser la stabilité d'un tel modèle d'état. Bien moins familières seront les notions de commandabilité et d'observabilité d'une représentation d'état. La commande de tels modèles sera abordée vers la fin du cours avant de consacrer une chapitre au modèle d'état discret et de conclure sur les perspectives d'étude en automatique.

Chapitre 2

Rappel sur la fonction de transfert

Dans ce chapitre, l'on revient brièvement sur la notion *a priori* familière de fonction de transfert. D'où vient-elle ? Comment l'obtenir ? Pourquoi est-elle utilisée ?

2.1 Équations préliminaires

Il faut d'abord noter que le système évoluant avec le temps, les grandeurs impliquées peuvent être assimilées à des signaux temporels, c'est-à-dire, mathématiquement, des fonctions du temps. Lors de la phase de modélisation, l'on essaie généralement de décrire le comportement du système par un jeu d'équations, de relations mathématiques entre les signaux, qui paraît correspondre fidèlement à ce qu'est le système. Dans le cas d'un système physique, l'on s'appuie sur les lois de la physique (électricité, mécanique, etc...) pour déterminer plusieurs équations reliant les différentes grandeurs en jeu, en essayant de prendre en compte tous les phénomènes afin de décrire l'intégralité du système. Très souvent, ce dernier fait apparaître un comportement dynamique (et pas seulement statique) de sorte que les équations obtenues sont non seulement algébriques mais aussi différentielles.

Prenons comme exemple un circuit RLC comme celui de la figure 2.1

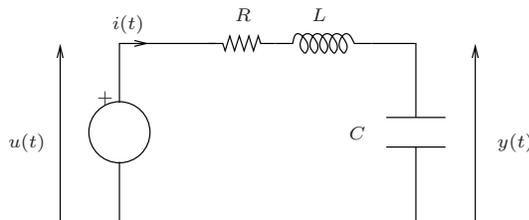


FIGURE 2.1 – Circuit RLC

Les équations issues des lois de l'électricité qui régissent le comportement du circuit RLC sont les suivantes :

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + y(t) \\ y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1.1 Linéarité

La première constatation souvent fâcheuse est que ces équations algèbro-différentielles ne sont pas linéaires en fonction des grandeurs impliquées ou de leurs dérivées successives. Or, les modèles non linéaires sont par essence difficiles à manipuler. Cela signifie en pratique qu'ils rendent ardues l'analyse du comportement du système et, plus encore, sa commande. Par conséquent, même si c'est une entorse au principe de description fidèle de la dynamique

du système, l'on décide bien souvent de travailler dans une gamme de valeurs des grandeurs se situant autour de valeurs centrales constituant ce qu'il est convenu d'appeler un point de fonctionnement. Sous réserve de ne pas trop s'éloigner de ce point de fonctionnement, l'on peut approcher les équations non linéaires par des équations certes approximatives mais linéaires. Sans revenir sur ces notions connues, l'on peut utiliser pour ce faire des développements limités ou de Taylor au premier ordre de certaines fonctions mathématiques en jeu. L'on parle alors du système non linéaire et de son « linéarisé tangent » qui est linéaire. L'on s'arrange également pour que les coefficients intervenant dans les équations soient indépendants du temps. L'on parle alors de modèle linéaire invariant dans le temps.

Dans le cas des équations (2.1), elles sont déjà linéaires à coefficients constants donc il est inutile de recourir à une approximation.

2.1.2 Modèle entrée/sortie : l'équation différentielle

Pour simplifier le modèle linéaire obtenu, pour le rendre plus compact, une tendance habituelle consiste à regrouper toutes les équations en une seule. Il s'agit d'éliminer du jeu d'équations toutes les grandeurs internes au système qui ne sont ni l'entrée, ni la sortie. L'on obtient alors une unique équation différentielle ne faisant apparaître que l'entrée u , la sortie y et, éventuellement, leurs dérivées successives. Une telle équation a l'allure suivante :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t). \quad (2.2)$$

(NB : le point sur une lettre désignant un signal correspond à la dérivation par rapport au temps ; exemple : $\dot{y}(t)$ signifie $\frac{dy(t)}{dt}$.)

Il s'agit là d'un modèle de comportement entrée/sortie, c'est-à-dire qui traduit l'évolution de la sortie en fonction de celle de l'entrée et ce, en édulcorant la dynamique interne du système.

Physiquement, il est inconcevable que m soit strictement supérieur à n . L'on peut toujours imaginer un modèle mathématique correspondant à ce cas mais en pratique, cela signifierait que la sortie du système à un instant donné dépend de la valeur de l'entrée à un instant ultérieur. C'est pourquoi, l'on suppose que $m \leq n$. Un tel système est dit *causal*.

Si l'on revient à l'exemple du circuit RLC, en regroupant les deux équations données en (2.1), l'on obtient, par élimination de $i(t)$:

$$u(t) = LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \dot{y}(t) + y(t). \quad (2.3)$$

Cette équation différentielle unique constitue bien un modèle du lien existant entre l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$.

En outre, il est clair que des valeurs élevées de m et n rendent difficile la détermination analytique de l'expression du signal $y(t)$. En d'autres termes, il est fastidieux, sinon impossible, de résoudre une équation différentielle d'ordre élevé. Aussi a-t-on ressenti le besoin d'introduire un nouvel outil de modélisation, plus aisé à manipuler, et plus à même d'aider l'automaticien dans les phases d'analyse et de commande : il s'agit de la fonction de transfert.

2.1.3 Transformée de Laplace : de l'équation différentielle à la fonction de transfert

Pour éviter d'avoir à manipuler une équation différentielle pas toujours simple, les électroniciens et à leur suite, les automaticiens, ont décidé d'exploiter un outil mathématique bien connu, la transformée de Laplace.

Chaque signal temporel $f(t)$ causal, c'est-à-dire pour lequel $f(t) = 0, \forall t < 0$, peut subir une transformation dite de « Laplace », notée \mathcal{L} et ainsi définie :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

$F(p)$, si elle existe, c'est-à-dire si l'intégrale est calculable, est appelée transformée de Laplace de $f(t)$ et la variable complexe $p = \alpha + j\beta$ (notée s dans les ouvrages de culture anglo-saxonne) est connue sous le nom de variable de Laplace. Cet opérateur possède les propriétés suivantes :

1. linéarité :

$$f_1(t) + kf_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(p) + kF_2(p)$$

2. théorème de la dérivation :

$$\bullet \dot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0)$$

$$\bullet \ddot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p^2F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$$

$$\bullet \frac{d^l f(t)}{dt^l} \xrightarrow{\mathcal{L}} p^l F(p) - p^{l-1}f(0) - p^{l-2}\dot{f}(0) - \dots - \frac{df^{l-1}(0)}{dt^{l-1}}$$

p correspond donc, en présence de conditions initiales nulles, à une dérivation dans le domaine de Laplace.

3. théorème de l'intégration :

$$\bullet \int_0^{t \geq 0} f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(p)}{p}$$

$1/p$ est donc l'opérateur d'intégration dans le domaine de Laplace.

4. théorème du retard :

$$\bullet f(t - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-\theta p} F(p)$$

5. théorème du décalage fréquentiel :

$$\bullet f(t)e^{\omega t} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p + \omega)$$

6. théorème de la valeur initiale :

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

(sous réserve d'existence des deux limites)

7. théorème de la valeur finale :

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

(sous réserve d'existence des deux limites)

Comme il est parfois fastidieux de calculer la transformée de Laplace d'une fonction temporelle compliquée (de même que la transformée inverse notée \mathcal{L}^{-1}), en pratique, les automaticiens disposent de tableaux de transformées.

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (2.1), il vient :

$$U(p) = LC(p^2 Y(p) - py(0) - \dot{y}(0)) + RC(pY(p) - y(0)) + Y(p). \quad (2.4)$$

L'équation (2.4) constitue un lien entre la transformée de Laplace du signal d'entrée et celle du signal de sortie.

2.2 Fonction de transfert

2.2.1 Comment obtenir la fonction de transfert ?

La fonction de transfert est un modèle de comportement entrée/sortie qui s'obtient à partir de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants. Plutôt que de chercher à obtenir $y(t)$ en fonction de $u(t)$, l'on cherche à obtenir $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$ en fonction de $U(p) = \mathcal{L}(u(t))$. Comme il s'agit de déterminer un modèle qui soit indépendant des conditions initiales, ces dernières sont considérées nulles et l'on applique tout simplement la transformée de Laplace à l'équation différentielle (2.2), ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (2.5)$$

$G(p)$ est une fraction rationnelle dépendant de la variable de Laplace, de numérateur $N(p)$ et de dénominateur $D(p)$. Elle est appelée fonction de transfert et se révèle très utile pour l'étude des systèmes linéaires monovariés. $G(p)$ est dite d'ordre n et selon la règle de causalité, l'on aura généralement $m \leq n$.

L'on note que les racines de $N(p)$ sont appelées zéros du système et celles de $D(p)$ sont appelées pôles du système. Bien que les zéros aient une influence difficile à estimer sur le comportement du système, il convient surtout de se souvenir que les pôles ont une influence encore plus grande en termes de stabilité et de régime transitoire de la réponse du système. Cette influence des pôles est beaucoup plus facile à prévoir (voir cours sur la fonction de transfert).

Dans le cas du circuit RLC, l'application de \mathcal{L} conduit à :

$$Y(p) = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1} U(p) + \frac{LCpy(0) + LC\dot{y}(0) + RCy(0)}{LCp^2 + RCp + 1}$$

$$Y(p) = \underbrace{\frac{N(p)}{D(p)}}_{G(p)} U(p) + \frac{I(p)}{D(p)}. \quad (2.6)$$

$G(p)$ permet de déterminer le terme de $Y(p)$ dépendant seulement de $U(p)$ et non des conditions initiales, ici présentes au niveau du numérateur $I(p)$.

2.2.2 Intérêt de la fonction de transfert

Même dans le cas d'un modèle d'ordre élevé, la réponse du système à une excitation $u(t)$ est plus facile à déterminer si l'on utilise la fonction de transfert. En effet, lorsque $u(t)$ est une impulsion de Dirac (réponse impulsionnelle), ou un échelon unitaire (réponse indicielle), alors $Y(p) = G(p)U(p)$ peut être décomposé en éléments simples faisant intervenir les pôles du système. Ainsi chaque élément simple génère un terme de la réponse $y(t)$ par application de \mathcal{L}^{-1} . C'est ainsi que l'on voit l'influence des pôles. De ce fait, connaître la fonction de transfert, c'est connaître ses pôles donc prévoir en partie le comportement du système.

Dans le cas où $u(t)$ est un signal sinusoïdal (réponse harmonique), l'on peut tracer, par exemple, le diagramme de Bode du modèle grâce à $G(p)$ (voir cours sur la fonction de transfert). Ce diagramme est particulièrement utile

pour comprendre la réaction du système à des signaux et ce, selon la fréquence de ces signaux. La fonction de transfert permet donc une analyse fréquentielle du comportement du système par l'intermédiaire du diagramme de Bode.

En outre, de $G(p)$, l'on déduit facilement des lois de commande (par exemple de type régulateur PID), basées sur l'obtention de certaines marges de gain ou marges de phase, déterminables grâce au diagramme de Bode. De même, $G(p)$ peut-être utilisée pour calculer une loi de commande plaçant les pôles du système en boucle fermée. Dans les deux cas, c'est la manipulation de $G(p)$ qui conduit à l'établissement de la loi de commande, ce qui démontre la pertinence d'un tel outil.

Concernant le circuit RLC, l'on peut par exemple calculer les racines de $D(p)$ pour savoir si le signal $y(t)$ comportera une forte oscillation ou pas. L'on peut aussi écrire $G(p)$ sous la forme dite canonique de deuxième ordre (voir cours sur la fonction de transfert)

$$G(p) = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2},$$

la valeur de m , le coefficient d'amortissement, renseignant sur le niveau d'oscillation.

Chapitre 3

La représentation d'état

Devant la complexité croissante des systèmes, la fonction de transfert peut parfois sembler ne pas être le modèle le plus approprié pour décrire les comportements considérés. La recherche de performances toujours plus fines peut conduire à la même conclusion. Ceci est particulièrement vrai si l'on sort du cadre de ce cours et si l'on envisage l'étude de systèmes multivariables. Pour cette raison, d'autres modèles sont utilisés et apparaissent comme une alternative à la fonction de transfert. Le plus célèbre d'entre eux est la représentation d'état ou équation d'état ou encore modèle d'état. Il fut popularisé dans les années 1960 même si son origine est plus lointaine. Il s'agit d'un modèle qui prend en compte la dynamique interne du système et ne se limite pas à la description d'un comportement de type entrée/sortie. Ce chapitre présente les principes de base d'un tel modèle en se restreignant néanmoins, comme pour la fonction de transfert, au cas linéaire monovarié continu.

3.1 Principe général

Comme précisé dans le préambule ci-avant, il s'agit de décrire un système en considérant sa dynamique interne et pas seulement une relation entre son entrée et sa sortie. Ainsi, il convient de « redonner de l'importance » à des grandeurs qui ne sont ni l'entrée, ni la sortie, tout en prenant en compte l'ensemble des phénomènes dynamiques et statiques qui confère au système son comportement. Une telle préoccupation conduit aux définitions suivantes :

État : l'état d'un système dynamique est le plus petit ensemble de variables, de grandeurs, tel que la connaissance de cet ensemble à l'instant $t = t_0$, ainsi que celle du signal d'entrée pour $t \geq t_0$, suffit à déterminer complètement le comportement du système pour $t \geq t_0$.

L'évolution de l'état à partir de l'instant t_0 n'est donc pas déterminée par son évolution avant l'instant t_0 . Seuls importent l'état à t_0 et l'entrée à partir de t_0 , comme l'illustre la figure 3.1. où plusieurs trajectoires de $x(t)$ avant l'instant t_0 aboutissant en $x(t_0)$ sont compatibles avec la même trajectoire de $x(t)$ après t_0 .

Variables d'état : ce sont les variables, grandeurs qui constituent l'état du système.

L'on considère traditionnellement que ces variables sont au nombre de n et notées x_1, x_2, \dots, x_n . Cette valeur de n est l'ordre du modèle. Chacune de ses variables est associée à un signal temporel. L'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$ constitue l'état. Les grandeurs x_i ne sont pas nécessairement des grandeurs physiques.

Vecteur d'état : de manière plus mathématique, l'on représente l'état par une concaténation de l'ensemble des variables d'état en un vecteur, *a priori* réel, de dimension n , que l'on note $x = [x_1, \dots, x_n]'$.

Il va de soi que les expressions *état* et *vecteur d'état* sont fréquemment utilisées l'une pour l'autre sans que cela n'altère fondamentalement le propos.

Espace d'état : Il s'agit tout simplement de l'espace vectoriel dans lequel le vecteur d'état x est susceptible d'évoluer, chaque instance de x étant associé à un point de cet espace. Cet espace est donc \mathbf{R}^n .

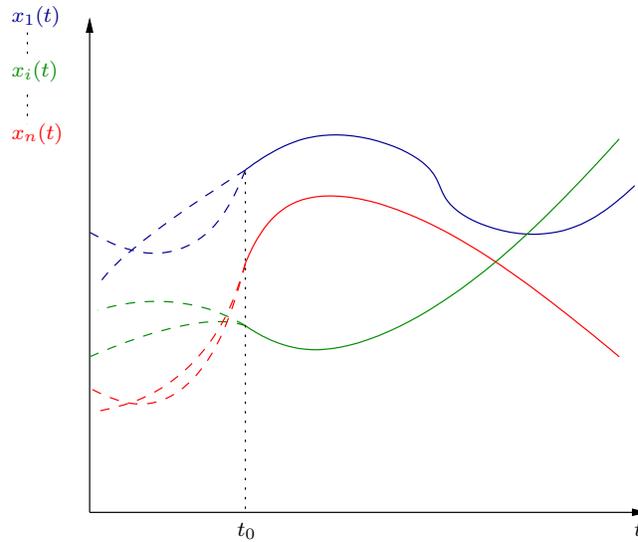


FIGURE 3.1 – L'évolution des composantes de $x(t)$ après t_0 (trait plein) est indépendante de leur évolution avant t_0 (pointillés)

L'on dit souvent de la représentation d'état que c'est une modélisation dans l'espace d'état.

Pour un système dynamique, le vecteur d'état n'est pas unique. Plusieurs choix sont possibles. Mais pour que x soit effectivement vecteur d'état, il importe que chacune des variables d'état apparaissent, de manière explicite ou implicite, sous forme dérivée dans le jeu d'équations décrivant le système. Dans le cas contraire, il sera difficile de se servir de cette variable pour prévoir l'évolution du système. Cette constatation conduit à un système d'équations différentielles auquel s'ajoute une équation algébrique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = f(x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x(t), u(t), t) \end{bmatrix} \\ y(t) = g(x(t), u(t), t). \end{cases} \quad (3.1)$$

où f et g sont des fonctions susceptibles de prendre presque n'importe quelles formes. Cependant, l'on ne parle de représentation d'état que si la fonction vectorielle f de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^n est Lipschitzienne en x , continue en u et continue par morceaux en t .

Le système différentiel apparaissant dans (3.1) est appelé *équation dynamique* ou *équation d'évolution* alors que l'équation algébrique est dite *équation de mesure* ou *équation de sortie*.

3.2 De la non-linéarité à la linéarité

Bien entendu, f et g sont des fonctions éventuellement très complexes, généralement non linéaires et il convient, dans le cadre de ce cours, de recourir à une approximation linéaire. Pour ce faire, l'on considère souvent que l'état du système ainsi que son entrée évoluent au voisinage d'un point d'équilibre, ou point de fonctionnement

et l'on fait l'hypothèse que toutes les variations autour de ce point sont faibles. Ainsi, en supposant que ce point d'équilibre est caractérisé par les valeurs x_e et u_e , l'on peut considérer la variation d'état $\xi(t) = x(t) - x_e$, celle d'entrée $v(t) = u(t) - u_e$ et celle de sortie $z(t) = y(t) - g(x_e, u_e, t)$. Si les valeurs de $v(t)$ et des composantes $\xi_i(t)$ de $\xi(t)$ restent faibles (donc assimilables aux différentielles correspondantes), l'on peut calculer les matrices jacobiennes suivantes

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \end{bmatrix} ; \quad B(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_e, u_e, t) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u}(x_e, u_e, t) \end{bmatrix} ; \quad (3.2)$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \end{bmatrix} ; \quad D(t) = \frac{\partial g}{\partial u}(x_e, u_e, t).$$

Ainsi, si l'on considère que $\xi(t)$ et $v(t)$ sont respectivement le nouveau vecteur d'état et la nouvelle entrée du modèle « linéarisé tangent » autour du point d'équilibre, il vient :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + B(t)v(t) \\ z(t) = C(t)\xi(t) + D(t)v(t). \end{cases} \quad (3.3)$$

L'approximation linéaire au premier ordre consiste donc à supposer que $\xi(t)$ et $v(t)$ restent faibles et à décrire le comportement du système par (3.3). Comme $x(t)$, $u(t)$ et $y(t)$ sont les notations habituelles de l'état, de l'entrée et de la sortie, l'on écrira plutôt

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases} \quad (3.4)$$

d'autant plus qu'il n'est pas rare que l'origine soit le point d'équilibre ($\xi = x$), que l'on s'intéresse au système autonome, voire que le modèle soit obtenu directement sous forme linéaire, sans avoir à recourir à une approximation. Par ailleurs, les signaux $u(t)$, $y(t)$ et $x_i(t)$ sont de toute évidence des signaux temporels. De plus, il est assez fréquent, comme il a déjà été mentionné, que les fonctions non-linéaires f et g ne dépendent pas explicitement du temps. L'on peut alors très souvent omettre la dépendance en t de manière à obtenir la représentation d'état suivante, qui correspond à un système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du. \end{cases} \quad (3.5)$$

Les relations données en (3.5) constituent une représentation d'état *linéaire invariante dans le temps* d'un système. Par abus de langage, l'on parle souvent de système **LTI** (acronyme anglais pour **Linear Time-Invariant**, c'est-à-dire linéaire invariant dans le temps). C'est ce type de modèle qui fait l'objet de ce cours.

La matrice A est appelée *matrice d'état* ou *d'évolution*. On la nomme aussi parfois *matrice dynamique*. B est appelée *vecteur d'entrée* ou de *commande* (d'où une ambiguïté avec le vecteur u). C est le *vecteur de sortie*, *d'observation* ou de *mesure* (d'où une ambiguïté avec le vecteur y). Quant à D , c'est un scalaire dit de *transmission directe*, qui est nul s'il n'existe aucun lien statique direct entre le signal d'entrée et celui de sortie.

Remarque 3.1 Dans le cas où f et g dépendent explicitement de t , alors A , B , C et D sont des fonctions de t et le modèle est dit *linéaire variant dans le temps*. Il est souhaitable, si possible de recourir aussi à une approximation pour considérer ces matrices comme constantes. L'on retrouve alors un modèle LTI.

La représentation d'état peut-être associée au schéma-bloc donné par la figure 3.2.

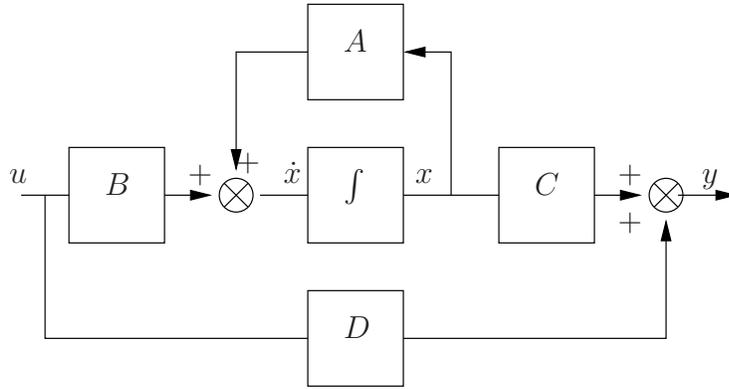


FIGURE 3.2 – Schéma-bloc d'une représentation d'état

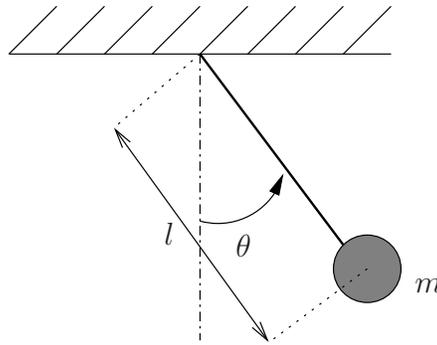


FIGURE 3.3 – Pendule en mouvement libre

Exemple :

L'on considère le mouvement du pendule autonome représenté sur la figure 3.3.

L'application de la relation fondamentale de la dynamique et le choix d'un vecteur d'état x tel que $x' = [\theta \ \dot{\theta}]$ conduit à instancier l'équation (3.1) ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 & = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

où g est la constante gravitationnelle, l la longueur du pendule, m sa masse et k sa raideur. Le système étant autonome, les fonctions f_1 et f_2 ne dépendent pas d'une entrée u . Le point de fonctionnement considéré est le seul des deux points d'équilibre (c.-à-d. $\dot{x} = 0$) physiquement atteignable, à savoir $x'_e = [0 \ 0]$, l'autre étant $x'_e = [\pi \ 0]$.

Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e) &= 0 & ; & \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_e) = 1 & ; \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_e) &= -\frac{g}{l} \cos(x_{e1}) & ; & \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_e) = -\frac{k}{m} & . \end{aligned}$$

Cette approximation conduit à la représentation LTI du système autonome

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} x$$

3.3 Historique de la représentation d'état

Bien que la fonction de transfert fût popularisée dans les années 30 et 40 alors que la représentation le fut dans les années 1960, il n'est pourtant pas exact de dire que cette dernière est ultérieure. En réalité, la notion d'état était définie depuis le XIX^{ème} siècle et apparaissait par exemple en Mécanique (la formulation de la loi de Newton par W. R. Hamilton utilise implicitement la notion d'état) et en Thermodynamique au travers des contributions de H. Poincaré). Elle est particulièrement présente dans les travaux d'Alexandr Lyapunov (mathématicien et physicien russe (1857-1918)) relatifs à la stabilité du mouvement en mécanique (1892). Ces travaux eurent d'importantes répercussions, entre autres dans la perception de certains modèles d'astronomie mais aussi dans bien d'autres domaines. Cependant, malgré deux traductions françaises en 1902 et 1907 puis une anglaise en 1949, ils ne restèrent un centre d'intérêt que dans les milieux scientifiques soviétiques.

Pendant ce temps, en occident, ces méthodes dites temporelles (parce que basées sur des modèles faisant intervenir des dérivées par rapport au temps) furent supplantées par l'approche dite fréquentielle. En effet, le formalisme de la contre-réaction et les théories connexes furent progressivement développées dans les années 1930 et 1940 par des électroniciens (Black, Bode aidés tout de même de mathématiciens tel Nyquist) qui virent les systèmes d'abord comme des filtres et privilégièrent donc l'étude du comportement d'un système en fonction de la fréquence du signal d'entrée. Par ailleurs, certains outils mathématiques disponibles depuis longtemps (travaux de Fourier, Laplace, Routh, Hurwitz) semblaient convenir parfaitement à leurs besoins ce qui conduisit tout naturellement à une prééminence de la fonction de transfert en tant que modèle de système linéaire. En outre, les progrès de l'électronique et les nécessités d'accentuer le développement de technologies usant d'Automatique en temps de guerre aidèrent à la popularisation de cet outil, particulièrement aux USA. La France fut partie prenante de cette évolution, surtout après la guerre. De fait, il est vrai que la fonction de transfert s'avéra un outil très utile.

Néanmoins, pendant ce temps, les Soviétiques continuèrent d'accorder une grande importance à la notion d'état et aux travaux de Lyapunov, grâce, entre autres, à Chetayev et Lur'e qui s'intéressaient à des problèmes aéronautiques et/ou militaires. L'occident ne prêta pas forcément beaucoup d'attention à ce clivage scientifique jusqu'en 1957 ou le premier satellite artificiel, Spoutnik, fut mis en orbite par les scientifiques de l'est. Il apparut donc clairement que si l'approche fréquentielle était utile, il y avait aussi à gagner à développer l'approche temporelle, en particulier dans le domaine spatial. C'est pourquoi le professeur Salomon Lefschetz organisa une équipe de recherche, aux USA, chargée de promouvoir en occident la théorie de Lyapunov. Parmi ces chercheurs figuraient entre autres La Salle, Bertram et surtout Kalman. Ce dernier fut le grand initiateur de la représentation d'état linéaire et sut mettre en évidence l'intérêt de cette dernière au regard des outils de l'algèbre linéaire. Il introduisit les notions de commandabilité et d'observabilité et, grâce à ses travaux, la théorie de Lyapunov fit un retour significatif dans la communauté des automaticiens occidentaux. Des projets à caractère spatial tels qu'Apollo ou Polaris bénéficièrent directement de ce regain d'intérêt.

Il est à noter, enfin, que, sans remplacer la fonction de transfert qui continue d'être utilisée efficacement pour de nombreuses applications, la représentation d'état se prête particulièrement bien à l'étude des systèmes multivariables (plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties) fréquemment rencontrés dans le domaine aérospatial. Selon certaines nomenclatures anglo-saxonnes, la branche de l'automatique basée sur le concept de représentation d'état est qualifiée de moderne, par opposition à la branche fréquentielle parfois qualifiée de classique. De fait, l'approche temporelle ou interne basée sur les travaux de Kalman est celle qui procure le plus d'outils novateurs de nos jours. Les notions de base de cette approche étant cependant maintenant bien connues, le qualificatif de « moderne » n'est pas toujours considéré comme approprié ou tout du moins communément admis.

3.4 Comment obtenir un modèle d'état ?

L'on peut obtenir une représentation d'état linéaire en manipulant le jeu d'équations préliminaires ou en opérant à partir de l'équation différentielle unique.

3.4.1 Par le jeu d'équations

L'on suppose ici que les équations manipulées sont déjà linéaires. Par souci de simplicité, l'on considère l'exemple du circuit RLC modélisé par les équations (2.1). Les deux grandeurs dont la dérivée intervient sont i et y (à partir de maintenant, la dépendance en le temps est omise pour alléger les notations). Soient donc les deux variables d'état $x_1 = i$ et $x_2 = y$. Les équations de (2.1) peuvent se récrire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1. \end{cases}$$

ce qui conduit au modèle (3.5) avec :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad C = [0 \quad 1] ; \quad D = 0. \quad (3.6)$$

3.4.2 Par l'équation différentielle unique

La technique consiste à considérer l'équation différentielle globale (2.2). L'on suppose d'abord que $m = 0$. L'on suppose également, sans perte de généralité, que $a_n = 1$ et l'on pose, sans se soucier de la signification du vecteur d'état, les variables d'état suivantes :

$$x_1 = y ; \quad x_2 = \dot{y} ; \quad x_3 = \ddot{y} ; \quad \dots ; \quad x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}.$$

L'on peut alors montrer que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} ; \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] ; \quad D = 0. \quad (3.7)$$

La technique ci-dessus appliquée à l'équation (2.3) conduit à récrire cette dernière ainsi :

$$\ddot{y} + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{LC}u.$$

L'on obtient alors

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} ; \quad C = [1 \quad 0] ; \quad D = 0. \quad (3.8)$$

qui est un quadruplet de matrices différent de celui trouvé précédemment et donné en (3.6). Ceci permet de constater que le modèle d'état obtenu dépend du choix des variables d'état. Il n'est donc pas unique, contrairement à la fonction de transfert. En effet, cette dernière est un modèle externe et non interne, c'est-à-dire un modèle

entrée/sortie. Or, la sortie et l'entrée étant uniques, il n'existe qu'une fonction de transfert.

Dans le cas où $m \neq 0$, la procédure est un peu plus complexe mais répond au même principe. L'on suppose que $m = n$ sans perte de généralité (il suffit de considérer $b_j = 0 \forall j \mid m < j \leq n$). Le coefficient a_n est toujours supposé égal à 1. L'on définit :

$$\begin{cases} \beta_n = b_n, \\ \beta_{n-j} = b_{n-j} - \sum_{k=0}^{j-1} a_{n-j+k} \beta_{n-k} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Les variables d'état peuvent alors être ainsi choisies :

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_n u \\ x_2 = \dot{x}_1 - \beta_{n-1} u \\ x_3 = \dot{x}_2 - \beta_{n-2} u \\ \vdots \\ x_n = \dot{x}_{n-1} - \beta_1 u \end{cases}$$

Il vient

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0], \quad D = \beta_n, \quad (3.9)$$

Pour le circuit RLC, on retrouve les quatre matrices données en (3.8).

3.5 De la fonction de transfert à la représentation d'état

Comme il vient d'être vu, s'il existe une seule et unique fonction de transfert décrivant un système linéaire, il peut en revanche exister plusieurs représentations d'état dites réalisations du système. Dans cette partie, il est montré comment passer de la fonction de transfert à plusieurs formes de réalisations.

Dans un premier temps, il est supposé que $n > m$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de transmission directe ($D = 0$). Il existe alors des méthodes pour déterminer des réalisations diagonales, de Jordan, ou encore dites compagnes. Ensuite, le cas $m = n$ est envisagé. Il est alors montré que l'on peut néanmoins bénéficier des résultats obtenus dans le cas où $n > m$.

3.5.1 Cas d'une fonction de transfert strictement propre ($m < n$)

3.5.1.1 Réalisation diagonale ou quasi diagonale de Jordan

L'on suppose sans perte de généralité que $a_n = 1$ de sorte que la fonction de transfert $G(p)$ peut s'écrire :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} = \frac{N(p)}{\prod_{i=1}^n (p - \lambda_i)}.$$

L'expression ci-dessus fait apparaître les pôles du système, c'est-à-dire les racines du dénominateur $D(p)$.

Pôles distincts

Dans le cas où tous les pôles $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ sont distincts, il est facile de réaliser la décomposition en éléments simples de $Y(p) = G(p)U(p)$ et il vient :

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{\alpha_i}{p - \lambda_i} U(p) \right)}_{X_i(p)}.$$

Si l'on focalise son attention sur chaque terme $X_i(p)$, l'on déduit que

$$pX_i(p) = \alpha_i U(p) + \lambda_i X_i(p),$$

ce qui se traduit dans le domaine temporel, par application de \mathcal{L}^{-1} , par

$$\dot{x}_i = \alpha_i u + \lambda_i x_i.$$

En choisissant le vecteur d'état $x = [x_1 \ \dots \ x_n]'$, il vient aisément la réalisation suivante, dite diagonale :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 1 \ \dots \ 1] x, \end{cases} \quad (3.10)$$

laquelle peut également être modifiée en remplaçant B par C' et C par B' . De manière plus générale, dans une réalisation diagonale, $B = [\beta_1 \ \dots \ \beta_n]'$ et $C = [\gamma_1 \ \dots \ \gamma_n]$ doivent être telles que $\beta_i \gamma_i = \alpha_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Une réalisation de la forme (3.10) est dite diagonale car la matrice d'évolution A est diagonale.

Par exemple, la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)(p-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2(p-1)}$$

peut conduire à la réalisation

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} u \\ y = [-1 \ 1 \ 2] x. \end{cases}$$

Pôles multiples

Dans le cas où $G(p)$ possède un pôle d'ordre de multiplicité supérieur à 1, la diagonalisation de A n'est pas forcément possible. Pour comprendre ce qui peut être envisagé dans cette situation, l'on peut tout simplement considérer une fonction de transfert $G(p)$ ne possédant qu'un seul pôle λ de multiplicité n . L'on a alors :

$$Y(p) = G(p)U(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\frac{U(p)}{(p-\lambda)^i}}_{X_{n+1-i}(p)}.$$

L'on voit bien sur cette expression que le premier terme est tel que

$$X_n(p) = \frac{U(p)}{p-\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{x}_n = \lambda x_n + u.$$

Quant aux autres termes, ils sont tels que

$$X_{j-1}(p) = \frac{U(p)}{(p-\lambda)^j} = \frac{X_j(p)}{p-\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{x}_{j-1} = \lambda x_{j-1} + x_j, \forall j \in \{2, \dots, n\}.$$

Ceci conduit à la réalisation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [\alpha_n \quad \alpha_{n-1} \quad \alpha_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_2 \quad \alpha_1] x. \end{cases} \quad (3.11)$$

Dans la réalisation ci-dessus, l'on constate que la matrice d'évolution A est quasi diagonale c.-à-d. constitue un bloc de Jordan.

Pour le cas où $G(p)$ contient des pôles d'ordre de multiplicité divers, il suffit d'associer les deux cas répertoriés précédemment comme le montre l'exemple ci-après :

$$G(p) = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p(p+1)^2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Il apparaît un pôle simple nul et un pôle double de Jordan égal à -1. Ceci conduit à la réalisation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 1 \quad 1] x. \end{cases}$$

Remarque 3.2 Il est clair que ces formes de Jordan font apparaître les pôles de $G(p)$ sur la diagonale de A . Ainsi, ces pôles sont aussi les valeurs propres de A . Lorsque les pôles sont multiples, la matrice peut ne peut être diagonale, mais ce n'est pas systématique. En effet, il est possible qu'une matrice carrée ayant des valeurs propres multiples puissent être diagonalisée (voir cours de mathématiques).

3.5.1.2 Réalisation de forme compagne

Il existe plusieurs réalisations de forme compagne qui peuvent être facilement obtenues à partir de la fonction de transfert. Ce paragraphe est restreint aux formes compagnes les plus classiques. Pour ce faire, $G(p)$ est supposé de la forme (2.5) avec $a_n = 1$. Les deux formes dites « compagnes » les plus communément rencontrées sont :

◊ Forme compagne horizontale :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0] x. \end{cases} \quad (3.12)$$

◊ Forme compagne verticale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ -a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ \dots \ \dots \ \dots \ 0] x. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Aucune justification rigoureuse n'est apportée ici mais l'on peut comprendre que ces formes compagnes sont liées aux formes issues de l'équation différentielle.

Reprenant le dernier exemple de fonction de transfert, il vient

$$G(p) = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p(p+1)^2} = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p^3 + 2p^2 + p},$$

qui peut correspondre à la forme compagne horizontale suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 4 \ 2] x. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

3.5.2 Cas d'une fonction de transfert non strictement propre ($m = n$)

Dans le cas où $m = n$, il est impossible d'appliquer directement les techniques présentées ci-avant pour obtenir une réalisation du système. Cependant, l'on peut se ramener au cas d'une fonction de transfert strictement propre en opérant une division polynomiale de la façon suivante :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 p + \dots + \mathbf{b}_n p^n}{D(p)} = \frac{R(p)}{D(p)} + Q = G_{pr}(p) + Q = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n}{D(p)} + Q. \quad (3.15)$$

Comme $m = n$, le quotient Q est une constante et le reste $R(p)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à celui du diviseur $D(p)$. Ainsi, $G_{pr}(p)$ est une fonction de transfert strictement propre.

Les coefficients du numérateur $N(p)$ de la fonction de transfert globale $G(p)$ sont notés \mathbf{b}_i pour les distinguer des coefficients b_i du numérateur $R(p)$ du transfert strictement propre $G_{pr}(p)$ extrait de $G(p)$.

Par ailleurs, l'on a $Y(p) = G(p)U(p) = G_{pr}U(p) + QU(p) = Y_{pr}(p) + QU(p)$. Donc, si l'on prend y_{pr} comme sortie, la fonction de transfert associée au système obtenu est G_{pr} dont on peut déterminer une réalisation (A, B, C) . Il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y_{pr} = Cx. \end{array} \right.$$

En posant $D = Q$ et en réalisant le changement de variable inverse (dans le domaine temporel cette fois-ci) $y = y_{pr} + Du$, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du. \end{array} \right.$$

Par exemple, soit la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{p^3 + 4p^2 + 5p + 1}{p^3 + 2p^2 + p} = \frac{(p^3 + 2p^2 + p) + (2p^2 + 4p + 1)}{p^3 + 2p^2 + p} = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p^3 + 2p^2 + p} + 1 = G_{pr}(p) + 1.$$

$G_{pr}(p)$ correspond à la fonction de transfert du dernier cas traité. Il suffit donc de conserver les matrices A , B et C données en (3.14) en y ajoutant la transmission directe $D = 1$.

3.6 De la représentation d'état à la fonction de transfert

S'il existe plusieurs manières d'obtenir une réalisation à partir de la fonction de transfert, cette dernière étant unique, il n'existe qu'une façon de l'obtenir à partir d'une équation d'état. Pour cela, il faut noter que \mathcal{L} est un opérateur linéaire qui peut donc s'appliquer aux matrices. Partant de l'équation (3.5), il vient

$$\begin{cases} pX(p) = AX(p) + BU(p) \Leftrightarrow X(p) = (pI - A)^{-1}BU(p) \\ Y(p) = CX(p) + DU(p), \end{cases}$$

les conditions initiales étant considérées nulles puisqu'il s'agit de déterminer $G(p)$. De toute évidence, ceci amène :

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D. \quad (3.16)$$

Le dénominateur $D(p)$ de la fonction de transfert est souvent appelé polynôme caractéristique. Il est facile de voir qu'il est, dans l'expression ci-dessus, engendré par l'inversion matricielle et égal à (cf. §A.1.5 et §A.1.8.1 en annexe A) :

$$D(p) = \det(pI - A). \quad (3.17)$$

3.7 D'une réalisation à l'autre

Il a été vu qu'une fonction de transfert pouvait correspondre à plusieurs réalisations. En réalité, elle en admet même une infinité comme le montre le paragraphe qui suit.

3.7.1 Changement de base

L'on peut passer d'une réalisation à une autre tout simplement par un changement de base dans l'espace d'état \mathbb{R}^n . En effet, si l'on considère l'équation d'état (3.5), l'on peut appliquer au vecteur d'état un changement de repère de sorte à obtenir un nouveau vecteur d'état \tilde{x} . Ainsi, soit le changement de base $x = M\tilde{x}$ où M est une matrice de rang plein, il vient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \underbrace{M^{-1}AM}_{\tilde{A}} \tilde{x} + \underbrace{M^{-1}B}_{\tilde{B}} u \\ y = \underbrace{CM}_{\tilde{C}} \tilde{x} + Du. \end{cases} \quad (3.18)$$

Le quadruplet de matrices obtenu est donc $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) = (M^{-1}AM, M^{-1}B, CM, D)$. Comme il existe une infinité de matrices de passage M utilisables, il existe aussi une infinité de réalisations équivalentes qui correspondent toutes à la même fonction de transfert. En effet,

$$\tilde{G}(p) = CM(pI - M^{-1}AM)^{-1}M^{-1}B + D = CM(M^{-1}(pI - A)M)^{-1}M^{-1}B + D = C(pI - A)^{-1}B + D = G(p).$$

En outre, puisque $M^{-1}AM$ est semblable à A , les valeurs propres de A sont les mêmes que celle que soit la réalisation considérée. De ce fait, ce sont toujours les pôles de $G(p)$ c'est-à-dire les racines du polynôme caractéristique (même si l'on sera plus tard amené à porter une nuance à ce propos).

Les racines du polynôme caractéristique $D(p)$, c'est-à-dire les pôles du système, sont valeurs propres de la matrice d'état A quelle que soit la réalisation choisie.

Il est possible de passer d'une réalisation à une autre ce qui peut se révéler utile quand la seconde a une forme particulière. Le principe est de déterminer la matrice de passage.

3.7.2 Obtention d'une forme compagne (horizontale)

Soit un quadruplet de matrices (A, B, C, D) constituant une représentation d'état d'un système. Il s'agit alors de déterminer M , une matrice de passage à une autre réalisation $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) = (M^{-1}AM, M^{-1}B, CM, D)$ qui soit compagne horizontale.

◇ *L'on s'attache d'abord à exprimer les colonnes de M :*

L'on note que \tilde{A} est de la forme (3.12) où les composantes a_i sont les coefficients du polynôme caractéristique $P(\lambda)$ qui peut être calculé :

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i \lambda^i).$$

Ceci permet d'obtenir \tilde{A} . Si l'on décompose la matrice M en $M = [m_1, \dots, m_n]$, alors l'égalité $AM = M\tilde{A}$ conduit à écrire

$$\begin{cases} Am_1 & = & -a_0 m_n & & \text{colonne 1} \\ Am_2 & = & v_1 - a_1 m_n & & \text{colonne 2} \\ & & \vdots & & \vdots \\ Am_{n-1} & = & m_{n-2} - a_{n-2} m_n & & \text{colonne } n-1 \\ Am_n & = & m_{n-1} - a_{n-1} m_n & & \text{colonne } n. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{n-1} & = & (A + a_{n-1}I)m_n \\ m_{n-2} & = & (A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I)m_n \\ & & \vdots \\ m_1 & = & (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_2A + a_1I)m_n \end{cases} \quad (3.19)$$

◇ *L'on constate que M est fonction de m_n . Comment déterminer m_n ?*

Compte tenu de $Am_1 = -a_0 m_n$, il vient :

$$(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_2A^2 + a_1A + a_0I)m_n = 0.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, toute matrice A vérifie son propre polynôme caractéristique, c.-à-d.

$$P(A) = \det(A - A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_2A^2 + a_1A + a_0I = 0, \quad (3.20)$$

ce qui signifie que l'égalité précédente est vérifiée quelle que soit A et quel que soit m_n .

◇ *Procédure pratique :*

Il est donc possible de fixer arbitrairement $m_n \neq 0$ et de déterminer la matrice de changement de base M grâce à (3.19).

3.7.3 Obtention d'une forme de Jordan

Le problème est le même que celui du paragraphe précédent mais la matrice M doit être telle que \tilde{A} est diagonale ou de Jordan.

3.7.3.1 Les valeurs propres λ_i de A sont distinctes

Il suffit de déterminer n vecteurs non nuls linéairement indépendants v_i tels que

$$Av_i = \lambda_i v_i.$$

Les vecteurs v_i sont appelés vecteurs propres. L'on a alors $M = V = [v_1, \dots, v_n]$. La matrice $\Lambda = V^{-1}AV$ est diagonale et sa diagonale contient les valeurs propres de A .

3.7.3.2 Les valeurs propres λ_i de A sont multiples

Dans ce cas, A peut ne pas être diagonalisable mais l'on peut lui associer une matrice de Jordan. Pour simplifier, l'on suppose ici que A n'a qu'une valeur propre λ , d'ordre de multiplicité n . Il convient de déterminer le nombre de blocs de Jordan dans $J = V^{-1}AV$. Ce nombre est donné par

$$q = n - \text{rang}(\lambda I - A).$$

Pour comprendre comment déterminer les vecteurs propres généralisés, il est plus facile d'envisager les deux cas extrêmes, $q = 1$ (un seul bloc de Jordan) et $q = n$ (matrice J diagonale). Les cas intermédiaires ne correspondent qu'à une association de ces deux cas comme il est expliqué par la suite.

◇ $q = 1$:

La relation

$$AV = A[v_1, \dots, v_n] = VJ = [v_1, \dots, v_n] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

conduit aux égalités suivantes (une égalité par colonne) :

$$\begin{cases} Av_1 & = & \lambda v_1 \\ Av_2 & = & v_1 + \lambda v_2 \\ & \vdots & \\ Av_{p-1} & = & v_{p-2} + \lambda v_{p-1} \\ Av_p & = & v_{p-1} + \lambda v_p. \end{cases}$$

Il faut donc procéder à une résolution séquentielle de toutes ces équations linéaires en s'assurant toujours que les v_i sont bien linéairement indépendants.

◇ $q = n$:

Dans ce cas, l'on détermine simplement n vecteurs v_i linéairement indépendants tels que

$$Av_i = \lambda v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

◇ $q \neq n$ et $q \neq 1$:

Dans ce cas là, il y a plusieurs blocs de Jordan et il convient d'associer les deux techniques expliquées ci-avant.

Remarque 3.3 *Il peut exister une ambiguïté sur la taille des blocs de Jordan ; si cela se produit, l'on peut envisager tous les cas possibles sachant qu'un seul conduira à une solution. Ainsi, la première solution rencontrée est recevable.*

Dans le cas où il y a plusieurs valeurs propres multiples, il faut procéder comme ci-dessus, mais ce, pour chaque valeur propre.

Exemple :

Soit la matrice d'état

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'on a :

$$P(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda(\lambda - 1)^2$$

$\lambda_1 = 0$ est une valeur propre simple. En résolvant $Av_1 = \lambda_1 v_1$, l'on peut voir que $v_1 = [0 \ 1 \ -1]'$ est une solution.

$\lambda_2 = 1$ est valeur propre double. Or, $q = n - \text{rang}(I - A) = 3 - 1 = 2$ donc l'on sait que A est diagonalisable. En résolvant $Av = \lambda v$, l'on trouve

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b$$

où a et b sont deux degrés de liberté. En choisissant $[a \ b] = [0 \ 1]$ et $[a \ b] = [1 \ 0]$, l'on obtient les deux derniers vecteurs propres et

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Lambda = V^{-1}AV = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Remarque 3.4 Dans l'exemple ci-avant, la matrice A est diagonalisable malgré la présence d'une valeur propre multiple, à savoir 1. Il s'agit là d'une distinction entre multiplicité algébrique et multiplicité géométrique (voir cours de mathématiques).

Chapitre 4

Réponse d'un modèle d'état

Dans ce chapitre, il s'agit d'utiliser un modèle d'état pour déterminer la réponse d'un système linéaire à une excitation classique (impulsion, échelon, sinusoïde). Par réponse, l'on entend la forme (ou l'expression) de la sortie $y(t)$ du système délivrée sous l'effet d'une excitation $u(t)$.

4.1 Solution du système autonome

Avant d'envisager une solution à l'équation d'état complète, l'on peut s'attarder un peu sur la réponse du système autonome. Un tel système se décrit ainsi :

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.1)$$

Le vecteur x_0 constitue l'ensemble des conditions initiales à l'instant t_0 . Il s'agit ici de voir comment le système réagit librement, en l'absence d'entrée, à cette condition initiale.

4.1.1 Matrice de transition d'état

L'on recherche la solution sous la forme suivante :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0.$$

La matrice $\Phi(t, t_0)$ est dite matrice de transition d'état puisqu'elle permet de passer de l'état x_0 à l'état $x(t)$. En dérivant x par rapport au temps, l'on obtient

$$\dot{x} = Ax = \dot{\Phi}(t, t_0)x_0 = A\Phi(t, t_0)x_0,$$

ce qui conduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t, t_0) = A\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) = I. \end{cases} \quad (4.2)$$

Les propriétés de cette matrice sont notables. En effet,

$$\left. \begin{aligned} x(t_2) &= \Phi(t_2, t_1)x(t_1) \\ x(t_3) &= \Phi(t_3, t_2)x(t_2) \\ x(t_3) &= \Phi(t_3, t_1)x(t_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Phi(t_3, t_1) = \Phi(t_3, t_2)\Phi(t_2, t_1) \quad \forall \{t_1; t_2; t_3\} \in \mathbf{R}^3 \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} x(t_1) &= \Phi(t_1, t_2)x(t_2) \\ x(t_1) &= \Phi^{-1}(t_2, t_1)x(t_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Phi^{-1}(t_2, t_1) = \Phi(t_1, t_2) \quad \forall \{t_1; t_2\} \in \mathbf{R}^2. \quad (4.4)$$

4.1.2 Solution de l'équation homogène

La solution d'un tel système matriciel (c.-à-d. (4.2)) est analogue à celle obtenue dans le cas scalaire donc il vient :

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

Pour s'en convaincre, l'on peut rappeler qu'une exponentielle de matrice peut se calculer grâce au développement en série :

$$e^{A(t-t_0)} = I + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2!} + \frac{A^3(t-t_0)^3}{3!} + \dots \quad (4.5)$$

Si l'on dérive l'expression ci-dessus par rapport au temps, l'on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d(e^{A(t-t_0)})}{dt} &= A + A^2(t-t_0) + \frac{A^3(t-t_0)^2}{2!} + \dots \\ \Rightarrow \frac{d(e^{A(t-t_0)})}{dt} &= A(I + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2!} + \frac{A^3(t-t_0)^3}{3!} + \dots) = Ae^{A(t-t_0)}, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $e^{A(t-t_0)}$ est solution de (4.2). La réponse du système autonome à une condition initiale x_0 est donc :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0. \quad (4.6)$$

4.2 Solution de l'équation d'état complète

L'on recherche maintenant une solution en x puis y à l'équation (3.5). L'on suppose que cette solution est de la forme :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)z(t) \quad \text{avec} \quad z(t_0) = x_0.$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{\Phi}(t, t_0)z(t) + \Phi(t, t_0)\dot{z}(t) \\ &= A\Phi(t, t_0)z(t) + \Phi(t, t_0)\dot{z}(t) = Ax(t) + Bu(t). \end{aligned}$$

Par identification des deux membres de la dernière égalité, l'on a

$$\dot{z}(t) = \Phi^{-1}(t, t_0)Bu(t)$$

qui, compte tenu de la propriété (4.4), devient

$$\dot{z}(t) = \Phi(t_0, t)Bu(t).$$

En intégrant, l'on exprime $z(t)$:

$$\begin{aligned} z(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)Bu(\tau)d\tau \\ \Leftrightarrow x(t) &= \Phi(t, t_0)x_0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)Bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Compte tenu de l'expression de la matrice Φ , il vient

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (4.7)$$

Bien entendu, l'expression de $x(t)$ dépend ensuite de celle $u(t)$. Si l'on donne la solution en y de l'équation d'état, l'égalité (4.7) amène :

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C \left(\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right) + Du(t). \quad (4.8)$$

Dans l'égalité ci-dessus, l'on peut faire une distinction utile (déjà étudié dans le cours sur l'approche fréquentielle) dans le membre de droite et faire apparaître deux régimes dans la réponse :

- ◇ *Le régime libre* : il correspond au premier terme et ne dépend que du modèle du système et de la condition initiale. Il ne dépend pas de l'action de l'environnement extérieur pendant la réponse.
- ◇ *Le régime forcé* : il est associé aux deux derniers termes et correspond en fait à la réaction du système à l'excitation $u(t)$. Il dépend du modèle du système mais aussi de la nature du signal $u(t)$.

En outre, lorsque la réponse tend asymptotiquement vers une valeur constante de $y(t)$ ou vers un comportement périodique de ce signal, l'on peut distinguer

- ◇ *Le régime transitoire* qui est le temps durant lequel $y(t)$ subit une évolution avant de se rapprocher d'une valeur constante ou d'un comportement périodique. La durée du régime transitoire correspond à un temps appelé *temps de réponse* et noté t_r .
- ◇ *Le régime permanent* qui succède au régime transitoire, qui commence donc à t_r et qui correspond à l'intervalle de temps durant lequel $y(t)$ est considéré comme restant toujours proche de sa valeur finale (généralement à moins de 5% de la variation totale de $y(t)$) ou comme ayant un comportement périodique.

4.3 Calcul de e^{At}

Pour calculer $x(t)$ ou $y(t)$, il est nécessaire de savoir calculer une exponentielle de matrice. Plusieurs méthodes sont ici présentées.

4.3.1 Méthode des séries

Il suffit pour cette méthode d'utiliser le développement en série donnée en (4.5). Lorsque le calcul est effectué manuellement, cette méthode n'est envisageable que pour des matrices nilpotentes c'est-à-dire des matrices pour lesquelles il existe un k fini tel que $A^l = 0$ quel que soit l supérieur à k .

En revanche, il est tout à fait raisonnable d'utiliser cette technique lorsque le calcul est effectué numériquement, le développement convergant de manière absolue.

Le théorème de Cayley-Hamilton peut être utilisé pour calculer plus facilement les différentes puissances de A à partir de A^n . En effet, ce théorème stipule que la matrice A vérifie son propre polynôme caractéristique (cf. équation (3.20)). Il vient donc :

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{i=1}^n a_i A^i = 0 \quad \text{avec} \quad a_n = 1 \\
&\Leftrightarrow A^n = - \sum_{i=1}^{n-1} a_i A^i \\
&\Rightarrow A^{n+k} = - \sum_{i=1+k}^{n+k-1} a_{i-k} A^i.
\end{aligned}$$

Exemple :

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton conduit à :

$$A^2 + 3A + 2I = 0 \Leftrightarrow A^2 = -3A - 2I.$$

Ceci permet donc de déduire A^2 plus aisément, mais aussi

$$A^3 = A^2 \cdot A = -3A^2 - 2A = 7A - 2I$$

ainsi que les puissances successives de A .

4.3.2 Par la transformation de Laplace

Soit le système autonome (4.1) avec $t_0 = 0$. La solution d'un tel système pour une condition initiale $x(0) = x_0$ est donnée par $x(t) = e^{At}x_0$. Or, si l'on applique \mathcal{L} à (4.1), l'on a

$$\begin{aligned}
pX(p) - x_0 &= AX(p) \Leftrightarrow X(p) = (pI - A)^{-1}x_0 \\
&\Leftrightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(pI - A)^{-1}]x_0.
\end{aligned}$$

L'exponentielle de matrice peut donc s'écrire :

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(pI - A)^{-1}].$$

Prenons comme exemple la matrice suivante :

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow pI - A = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 2 & p+3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

L'inversion de la matrice ci-dessus amène à

$$(pI - A)^{-1} = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} \begin{bmatrix} p+3 & 1 \\ -2 & p \end{bmatrix}.$$

Une décomposition en éléments simples conduit à

$$(pI - A)^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2} & & \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} & \\ & & & \\ \hline & & & \\ -\frac{2}{p+1} + \frac{2}{p+2} & & -\frac{1}{p+1} + \frac{2}{p+2} & \end{array} \right]$$

qui, par application de \mathcal{L}^{-1} , donne

$$e^{At} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2e^{-t} - e^{-2t} & & e^{-t} - e^{-2t} & \\ & & & \\ \hline & & & \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & & -e^{-t} + 2e^{-2t} & \end{array} \right]$$

4.3.3 Méthodes des modes

Il est bien connu que si J est une forme de Jordan semblable à A telle que $A = MJM^{-1}$ alors

$$A^k = MJ^kM^{-1} \quad \forall k \geq 0.$$

Ceci s'applique à chaque terme du développement (4.5) de sorte que

$$e^{At} = Me^{Jt}M^{-1}.$$

Dans le cas où

$$J = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

est une forme strictement diagonale alors il est facile de voir que

$$e^{At} = M \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} M^{-1}.$$

Si l'on reprend l'exemple du paragraphe précédent, la matrice de passage à la forme diagonale est

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui permet de retrouver la même expression de e^{At} .

Dans le cas où J est une forme de Jordan non strictement diagonale et comportant p blocs de Jordan,

$$J = \text{blocdiag}\{J_1; \dots; J_p\} \quad \text{avec} \quad J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad \forall k \in \{1, \dots, p\},$$

l'exponentielle de matrice s'écrit

$$e^{At} = Me^{Jt}M^{-1} = M \text{blocdiag}\{e^{J_k t}\}M^{-1} \quad \text{avec} \quad e^{J_k t} = e^{\lambda_k t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} & \frac{t^{n_k}}{n_k!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n_k-3}}{(n_k-3)!} & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il existe également une quatrième méthode dite de Cayley-Hamilton qui n'est pas détaillée ici.

4.4 Régime transitoire : influence des modes

L'on suppose que l'on s'intéresse à la réponse du modèle (3.5) pour lequel la transmission directe D est considérée nulle par souci de simplicité des expressions. Les conditions initiales sur les variables d'état sont concaténées dans un vecteur $x_0 = x(0)$. La réponse d'un tel système est donné par la relation

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (4.9)$$

où le premier terme constitue le régime libre de la réponse ne dépendant que des conditions initiales et où le second terme est le régime forcé dépendant du signal d'entrée $u(t)$. Ces deux termes font tous deux apparaître e^{At} . Cette exponentielle de matrice est donc fondamentale pour comprendre l'allure de la réponse du système. Elle peut s'écrire, sous l'hypothèse de n valeurs propres distinctes

$$e^{At} = \sum_{i=1}^n N_i e^{\lambda_i t}$$

où les scalaires λ_i sont les valeurs propres de A et où $N_i = w_i v_i$, les vecteurs v_i et w_i étant respectivement la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de passage diagonalisante M et la $i^{\text{ème}}$ ligne de son inverse M^{-1} . Si les coefficients N_i ont bien entendu une influence sur la forme de $y(t)$, ce sont surtout les facteurs $e^{\lambda_i t}$ qui en déterminent les caractéristiques principales.

Remarque 4.1 On appelle mode d'un système un terme de son régime libre. Chaque mode est donc lié à une valeur propre. Aussi, par abus de langage, parle-t-on parfois du mode λ_i .

- Ainsi, lorsqu'une valeur de λ_i est à partie réelle strictement négative, le terme correspondant est évanescent et disparaît asymptotiquement. Si tous les λ_i sont ainsi, et si $u(t)$ converge vers une valeur finie avec le temps, alors la réponse de $y(t)$ converge elle aussi vers une valeur finie. Il est alors possible de mesurer t_r , le temps de réponse, et de distinguer clairement le régime transitoire et le régime permanent.

- Lorsque λ_i n'est pas à partie réelle strictement négative, il est impossible que l'exponentielle correspondante disparaisse. Elle peut même croître avec le temps si la partie réelle de λ_i est *strictement* positive. Il est alors impossible que $y(t)$ converge vers une valeur finie, même si $u(t)$ est fini. $y(t)$ peut même diverger infiniment. Dans ce dernier cas, il est impropre de parler de régime permanent.

- Par ailleurs, si λ_i et λ_j sont des valeurs propres complexes conjuguées non réelles, leurs parties imaginaires vont engendrer des termes sinusoïdaux dans l'expression de $y(t)$ ce qui est susceptible de générer des oscillations dans la réponse.

- Lorsque les termes exponentiels sont convergents ($\text{Re}(\lambda_i) < 0$), la convergence est d'autant plus rapide que $|\text{Re}(\lambda_i)|$ est grande, ce qui correspond donc à une diminution du temps de réponse t_r .

En résumé :

- ◇ C'est le plus ou moins grand ratio entre partie imaginaire et partie réelle d'un pôle qui caractérise le comportement oscillatoire lié à ce pôle ;
- ◇ Ce sont les pôles dominants (ceux dont la partie réelle est la plus grande au sens algébrique) qui ont le plus d'influence sur la forme de la réponse.

L'influence des valeurs propres de A sur le régime libre de $y(t)$ est illustrée sur la figure 4.1.

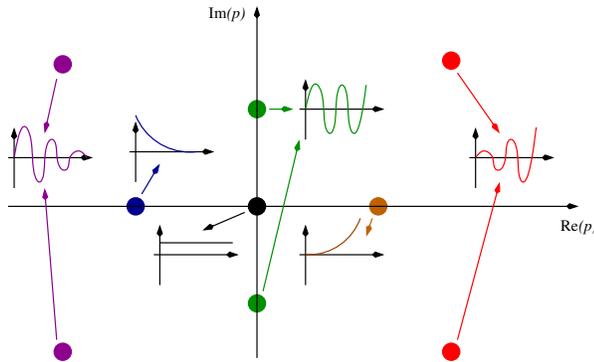


FIGURE 4.1 – Influence des valeurs propres λ_i de A sur le régime libre

Les comportements indiqués sur la figure 4.1 se retrouvent aussi en présence de $u(t)$, c'est-à-dire sur le régime forcé de la réponse. Même si les pôles sont prépondérants pour analyser ou prévoir le comportement d'un système (comme il apparaîtra d'ailleurs davantage au chapitre suivant), il existe bien sûr d'autres éléments qui peuvent influencer ce régime transitoire et c'est pourquoi l'on revient sur ces diverses influences dans l'annexe B.

4.5 Réponse impulsionnelle

Sans détailler ce type de réponse, il est rappelé qu'il s'agit de la réponse à une impulsion de Dirac $u(t) = \delta(t)$. Le calcul aboutit, en l'absence de transmission directe ($D = 0$), à :

$$y(t) = Ce^{At}(x_0 + B). \quad (4.10)$$

C'est dans ce cas-ci que l'influence des valeurs propres de A apparaît clairement telle qu'elle est illustrée par la figure 4.1.

4.6 Réponse indicielle

Dans ce cas de figure, l'entrée est un échelon unitaire ($u(t) = \Gamma(t)$) également appelé fonction de Heavyside. L'expression de $y(t)$ est alors

$$y(t) = Ce^{At}(x_0 + A^{-1}B) - CA^{-1}B \quad (4.11)$$

ce qui suppose ici que A est inversible. C'est le cas si la réponse est convergente ($\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$). L'on voit clairement que le régime permanent est égal à $-CA^{-1}B$. Ceci est cohérent avec la définition du gain statique d'une fonction de transfert :

$$G(0) = C(0 \times I - A)^{-1}B (+D) = -CA^{-1}B (+D).$$

Soit l'exemple du circuit RC de la figure 4.2.

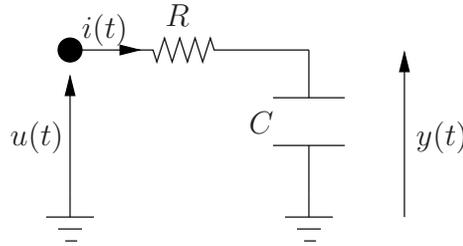


FIGURE 4.2 – Circuit RC

Les équations qui régissent le comportement de ce système RC sont :

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}, \\ u(t) = Ri(t) + y(t). \end{cases}$$

En prenant l'unique variable d'état $x = y$, l'on obtient

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u \\ y = x. \end{cases}$$

L'application de (4.11) pour un système initialement au repos conduit à l'équation bien connue :

$$y(t) = 1 - e^{-t/RC}.$$

Les résultats obtenus sont évidemment les mêmes que ceux issus de l'approche fréquentielle et le lecteur est invité à se reporter aux formes de réponses des systèmes de premier et deuxième ordre données dans le cours sur la fonction de transfert.

4.7 Réponse harmonique

Il s'agit là de la réponse à une excitation sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(\omega t)$. L'on peut d'abord noter que $u(t) = \text{Im}(U_m e^{j\omega t})$. L'expression de $y(t)$ est alors

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{At}x_0 + \text{Im} \left(\int_0^t Ce^{A(t-\tau)} BU_m e^{j\omega\tau} d\tau \right) \\ y(t) &= Ce^{At}x_0 + \text{Im} \left(\int_0^t Ce^{At} e^{(j\omega I - A)\tau} BU_m d\tau \right) \\ y(t) &= Ce^{At}x_0 + \text{Im} \left([Ce^{At} e^{(j\omega I - A)\tau} (j\omega I - A)^{-1} BU_m]_0^t \right) \\ y(t) &= Ce^{At}x_0 + \text{Im} \left(Ce^{At} (e^{(j\omega I - A)t} - I) (j\omega I - A)^{-1} BU_m \right) \\ y(t) &= Ce^{At} [x_0 - \text{Im} ((j\omega I - A)^{-1} BU_m)] + \text{Im} [C(j\omega I - A)^{-1} BU_m e^{j\omega t}]. \end{aligned}$$

C'est le régime permanent qui importe dans une réponse harmonique. Or si $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$, alors le premier terme de l'expression de $y(t)$ ci-dessus tend asymptotiquement vers zéro et constitue le régime transitoire. Le second terme correspond alors à ce qu'il est convenu d'appeler le régime permanent et est ici noté $y_\infty(t)$.

En observant l'expression de $y_\infty(t)$, l'on constate qu'il est possible de l'écrire

$$y_\infty(t) = \text{Im}(G(j\omega)U_m e^{j\omega t})$$

où $G(p)$ désigne bien sûr la fonction de transfert du système.

L'on définit :

$$\begin{aligned} \text{Le gain harmonique :} & \quad \rho(\omega) = |G(j\omega)|; \\ \text{Le déphasage harmonique :} & \quad \phi(\omega) = \angle(G(j\omega)). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Le régime permanent apparaît alors comme un signal sinusoïdal. En effet,

$$y_\infty(t) = \text{Im}(\rho(\omega)e^{j\phi(\omega)}U_m e^{j\omega t})$$

$$y_\infty(t) = \text{Im}(\rho(\omega)U_m e^{j(\omega t + \phi(\omega))})$$

$$y_\infty(t) = \rho(\omega)U_m \sin(\omega t + \phi(\omega)). \quad (4.13)$$

Ce signal sinusoïdal conserve la même pulsation que le signal d'entrée mais possède une amplitude et un déphasage qui sont fonctions de cette pulsation. Ils peuvent être déterminés grâce à la fonction de transfert.

Comme il est impossible de représenter toutes les réponses (c'est-à-dire $y_\infty(t)$ pour toutes les valeurs de ω), l'on préfère donner une représentation graphique de l'évolution de $\rho(\omega)$ et de $\phi(\omega)$ en fonction de ω . Il existe plusieurs façons de représenter cette dépendance. Les plus célèbres sont le lieu de Nyquist, celui de Black, ainsi que les diagrammes de Bode. Tous les résultats bien connus de l'approche fréquentielle sont donc ici retrouvés par résolution de l'équation d'état.

Chapitre 5

Stabilité des modèles d'état

Ce chapitre traite de la stabilité des représentations d'état linéaires. De ce fait, certaines notions sont communes avec les enseignements relatifs à l'approche fréquentielle.

La notion de stabilité est bien entendu fondamentale dans l'étude des systèmes et, à quelques rares exceptions près, les systèmes ne vérifiant pas cette qualité sont inutilisables voire dangereux. Si la notion de stabilité peut sembler assez intuitive, il n'est pourtant pas trivial d'en donner une définition mathématique uniforme pour tous les systèmes aussi existe-t-il de nombreuses « stabilités » différentes. Une approche intuitive conduit à la notion de stabilité externe ou celle de stabilité BIBO qui est succinctement présentée et qui découle naturellement de l'approche fréquentielle. Dans l'espace d'état il faut avoir une approche interne de la stabilité et c'est cette approche qui est privilégiée au cours du chapitre.

5.1 Une approche quasi intuitive : la stabilité BIBO

Comme il est dit en préambule de ce chapitre, la stabilité d'un système est une notion qui peut sembler assez intuitive. L'on comprend que si un système est excité par une entrée, l'opérateur utilisant ce système a sans doute peu envie de voir sa sortie diverger brutalement. Cette façon assez simple d'envisager la stabilité donne naissance à une définition plus rigoureuse qui est celle de la stabilité BIBO (de l'acronyme anglais *Bounded input bounded output*, entrée bornée, sortie bornée).

Un système est stable au sens BIBO (ou encore au sens entrée/sortie) si et seulement si, quelle que soit l'état initial $x_0 = x(0)$, pour toute entrée u bornée, la sortie y l'est aussi.

Une autre définition de la BIBO-stabilité, plus mathématique et « philosophiquement » quelque peu différente, peut être donnée : en notant $y^*(t)$ la réponse impulsionnelle du modèle, ce dernier est BIBO-stable si et seulement s'il existe un scalaire k vérifiant $0 < k < \infty$ et

$$\int_0^{\infty} |y^*(\tau)| d\tau \leq k.$$

Un modèle BIBO-stable peut donc être interprété, dans cette seconde définition, comme un modèle dont la réponse impulsionnelle est un signal d'énergie finie. Il n'est pas facile d'exploiter directement cette dernière formulation. Aussi a-t-on recours, en particulier dans l'espace d'état, à l'étude de stabilité d'un système au travers de la notion de stabilité des états d'équilibre.

Remarque 5.1 *La stabilité BIBO est une manière d'envisager la stabilité d'un système au sens de son comportement entrée/sortie c'est-à-dire dans ses interactions avec l'environnement extérieur. L'on parle donc de stabilité externe. Dans les développements qui suivent, la stabilité est étudiée au travers du modèle interne que constitue la représentation d'état. La stabilité est-elle alors qualifiée d'interne.*

Exemple : un moteur à courant continu est excité par une tension d'entrée $u(t)$. La sortie considérée est la vitesse angulaire de l'arbre du moteur. Si l'on impose un signal borné sur l'induit du moteur, l'on sait que la vitesse reste

bornée donc le moteur est BIBO-stable au sens de la première définition. De même, toute impulsion au niveau de cette tension d'induit entraîne une évolution de la vitesse telle que celle-ci augmente transitoirement pour s'annuler ensuite, son intégrale étant ainsi finie. Le moteur est donc BIBO-stable au sens de la définition alternative.

L'on suppose maintenant que la sortie est la position angulaire de l'arbre. Un échelon appliqué sur l'induit du moteur engendre, en régime permanent, une vitesse constante, donc la position angulaire augmente indéfiniment. Le moteur (associé à cette nouvelle sortie) est alors BIBO-instable. Si une impulsion intervient sur l'induit, l'arbre va tourner et ne reviendra pas à sa position angulaire initiale donc l'intégrale de la position dans ce cas n'est pas finie. Le moteur est BIBO-instable.

5.2 Stabilité d'un état d'équilibre

Pour envisager rigoureusement d'étudier la stabilité d'un système, il faut donc d'abord définir la notion d'état d'équilibre et celle de stabilité d'un état d'équilibre.

5.2.1 Définition et recherche d'un état d'équilibre

Un système se trouve dans un état d'équilibre (par état, l'on entend un point de l'espace d'état c.-à-d. une instance du vecteur d'état) si cet état n'est pas modifié lorsque le système est abandonné à lui-même.

Un tel état d'équilibre se détermine en posant à la fois $u = 0$ (« livré à lui-même ») et $\dot{x} = 0$ (« pas modifié »). La recherche des états d'équilibre possibles d'un système modélisé par la représentation (3.5) revient donc à résoudre

$$Ax = 0. \quad (5.1)$$

De cette équation, l'on comprend qu'il peut exister un seul ou plusieurs états d'équilibre selon le rang de A . Soit $\text{rang}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ (ceci signifie que A n'a pas de valeur propre nulle) et le seul point d'équilibre est l'origine $x_e = 0$. Soit $\text{rang}(A) < n \Leftrightarrow \det(A) = 0$ (ceci implique l'existence d'au moins une valeur propre nulle de A) alors il existe une infinité d'états d'équilibre.

Remarque 5.2 *Même s'il est plus rigoureux de parler de stabilité d'un état d'équilibre, il s'avère que, quel que soit l'état d'équilibre d'un système linéaire, sa stabilité dépend de la matrice A . Ainsi parle-t-on toujours de la stabilité du système.*

5.2.2 Stabilité

Un état d'équilibre est dit **asymptotiquement stable** si, lorsque le système est écarté de cet état sous l'effet d'une perturbation, il y revient (en un temps infini).

L'état d'équilibre est dit **instable**, si après perturbation, le système s'en éloigne davantage.

L'état d'équilibre est dit **simplement stable** si après perturbation, le système reste dans un voisinage du point d'équilibre.

Pour illustrer ces trois cas, l'on procède très souvent à une analogie mécanique. Cette dernière consiste à décrire l'état d'équilibre d'une bille dans trois positions différentes comme le montre la figure 5.1.

5.3 Critères de stabilité

Analyser la stabilité d'un système revient donc à rechercher ses états d'équilibre et à déterminer leur stabilité. Pour ce faire, il faut disposer de critères de stabilité. La présentation de certains de ces critères fait l'objet de cette partie.

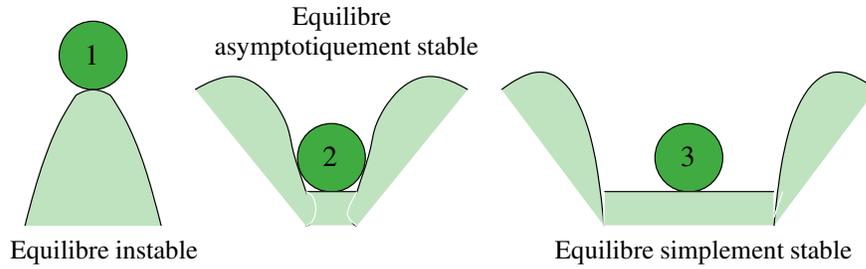


FIGURE 5.1 – Les trois états d'équilibre possibles d'une bille

5.3.1 Critère des racines

L'on rappelle que la réponse du système autonome est $x(t) = e^{At}x_0$. Si l'on décompose la matrice de passage M qui diagonalise ou « Jordanise » A et son inverse M^{-1} de la façon suivante

$$M = [v_1 \quad \dots \quad v_n] \quad ; \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

alors on peut exprimer $x(t)$ de deux façons, selon l'ordre de multiplicité des valeurs propres de A .

◊ Les valeurs propres de A sont distinctes

$$x(t) = \sum_{i=1}^n v_i w_i x_0 e^{\lambda_i t} = \left(\sum_{i=1}^n N_i e^{\lambda_i t} \right) x_0.$$

◊ Les valeurs propres de A sont multiples

L'on a alors, en supposant que J fait apparaître r valeurs propres différentes et $p \geq r$ blocs de Jordan :

$$e^{Jt} = \text{blocdiag}\{e^{J_k t}\} \quad \text{avec} \quad e^{J_k t} = e^{\lambda_k t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} & \frac{t^{n_k}}{n_k!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n_k-3}}{(n_k-3)!} & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \forall k. \quad (5.2)$$

Ceci conduit à déduire que $x(t)$ répond à la formulation suivante :

$$x(t) = M e^{Jt} M^{-1} = \left(\sum_{i=1}^r N_i(t) e^{\lambda_i t} \right) x_0 \quad (5.3)$$

5.3.1.1 rang(A) = n

Dans ce cas, il n'existe qu'un point d'équilibre : l'origine de l'espace d'état. L'on parle donc indifféremment de stabilité de l'origine ou de stabilité du système. En analysant les formes (5.2) et (5.3), l'on déduit que trois cas se présentent.

- $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$: le système est asymptotiquement stable ;
- $\exists j \mid \text{Re}(\lambda_j) > 0$: le système est instable ;
- $\exists j \mid \text{Re}(\lambda_j) = 0$ et $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i$:
 - $\lambda_j = 0$ (impossible par hypothèse) ;
 - $\lambda_{j,l} = \pm j\omega \Rightarrow$ comportement oscillatoire d'amplitude constante \Rightarrow système simplement stable.

5.3.1.2 $\text{rang}(A) = n$

Dans ce cas, il n'existe qu'un point d'équilibre : l'origine de l'espace d'état. L'on parle donc indifféremment de stabilité de l'origine ou de stabilité du système. En analysant les formes (5.2) et (5.3), l'on déduit que trois cas se présentent.

- $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$: le système est asymptotiquement stable ;
- $\exists j \mid \text{Re}(\lambda_j) > 0$: le système est instable ;
- $\exists j \mid \text{Re}(\lambda_j) = 0$ et $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i$:
 - $\lambda_j = 0$ (impossible par hypothèse) ;
 - $\lambda_{j,l} = \pm j\omega \Rightarrow$ comportement oscillatoire d'amplitude constante \Rightarrow système simplement stable.

5.3.1.3 $\text{rang}(A) < n$

Dans ce cas, il existe plusieurs états d'équilibre dont l'origine. Comme au moins une valeur propre est nulle, la stabilité asymptotique est impossible. Toujours en analysant (5.2) et (5.3), l'on déduit que deux cas se présentent.

- $\exists j \mid \text{Re}(\lambda_j) > 0$: le système est instable ;
- $\nexists j \mid \text{Re}(\lambda_j) > 0$:
 - Les blocs de Jordan relatifs aux éventuelles valeurs propres de partie réelle nulle sont tous scalaires (la multiplicité géométrique de ces valeurs propres à partie réelle nulle est égale à leur multiplicité algébrique) \Rightarrow le système est simplement stable ;
 - Il existe un bloc de Jordan non scalaire associé à une valeur propre à partie réelle nulle (la multiplicité géométrique de cette valeur propre à partie réelle nulle est strictement inférieure à sa multiplicité algébrique) \Rightarrow le système est instable.

5.3.1.4 En résumé

- $\exists j \mid \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$: le système est instable ;
- $\nexists j \mid \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$:
 - $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$: le système est asymptotiquement stable ;
 - La multiplicité géométrique des valeurs propres de partie réelle nulle est égale à leur multiplicité algébrique \Rightarrow le système est simplement stable ;
 - La multiplicité géométrique d'une valeur propre nulle est strictement inférieure à sa multiplicité algébrique \Rightarrow le système est instable.

En réalité, la propriété souvent recherchée est la stabilité asymptotique. La condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique d'un système et les propriétés associées se résument à ceci :

Soit le système modélisé par (3.5). Ce dernier est dit asymptotiquement stable si et seulement si le système autonome associé $\dot{x} = Ax$ est asymptotiquement stable, c'est-à-dire si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative.

5.3.1.5 Stabilité interne et stabilité BIBO

L'on peut déduire, par exemple grâce à l'équation (4.8), la relation existant entre la stabilité interne et la stabilité BIBO.

Si A possède une valeur propre à partie réelle strictement positive et si l'on suppose que l'entrée $u(t)$ est nulle, tout état initial x_0 conduit à un état non borné (et donc potentiellement à une sortie non bornée).

Au contraire, si A ne possède que des valeurs propres négatives, dès lors que $u(t)$ est un signal borné, tous les termes de la réponse $x(t)$, et *a fortiori* ceux de $y(t)$, convergent vers une valeur finie.

Le système décrit par une représentation (3.5) d'ordre n et de fonction de transfert $G(p)$ d'ordre n est BIBO-stable si il est asymptotiquement stable.
Il est BIBO instable si il est instable de manière interne.

Dans la proposition ci-avant, l'équivalence entre les deux stabilités n'est pas mentionnée. À choisir entre les deux propriétés, c'est la stabilité interne qui doit être privilégiée. Elle assure de la stabilité BIBO. Il faut noter que deux hypothèses sont implicites dans cette assertion. La première est la linéarité du modèle. Une telle proposition ne peut être formulée pour un modèle non linéaire. La seconde est la dimension commune du modèle interne et du modèle externe, à savoir n . Il s'agit là d'une différence entre l'approche interne temporelle et l'approche externe fréquentielle sur laquelle il sera revenu au chapitre 6.

Remarque 5.3 À propos de la non-équivalence des instabilités interne et externe : un intégrateur $1/p$ est-il instable ? On l'entend souvent dire mais est-ce exact ? La réponse est **oui et non**. Si l'on applique le critère des racines détaillé ci-avant, un intégrateur est un modèle (interne ou externe) d'ordre 1 ayant un pôle nul unique donc le bloc de Jordan associé est scalaire. Le système est donc **simplement stable** mais non asymptotiquement stable. En revanche il est **BIBO-instable** puisqu'il répond à un échelon par une rampe ce qui est logique puisque la BIBO-stabilité est équivalente à la stabilité asymptotique. En résumé :

Un intégrateur est stable au sens de la stabilité interne et instable au sens de la stabilité externe.

L'on peut noter en revanche qu'un double intégrateur $1/p^2$ est instable de manière interne comme de manière externe.

5.3.1.6 Les marges de stabilité

Par analogie avec les systèmes de second ordre qui possèdent soit deux pôles réels soit deux pôles complexes conjugués, l'on peut définir une marge de stabilité absolue et une marge de stabilité relative.

Soit un système asymptotiquement stable dont le comportement est décrit par (3.5). Les valeurs propres de A sont toutes à partie réelle strictement négative. Les marges absolue et relative sont ainsi définies :

Marge de stabilité absolue : distance minimale, dans le plan complexe, entre un point dont l'affixe est une valeur propre de A et l'axe imaginaire. Mathématiquement, elle s'exprime

$$\sigma = \min_i |\operatorname{Re}(\lambda_i)|. \quad (5.4)$$

Marge de stabilité relative : angle minimal, dans le plan complexe, formé par l'axe imaginaire et par l'axe reliant l'origine et un point dont l'affixe est une valeur propre de A . Mathématiquement, elle s'exprime

$$\psi = \min_i \left(\operatorname{Atan} \left(\left| \frac{\operatorname{Re}(\lambda_i)}{\operatorname{Im}(\lambda_i)} \right| \right) \right). \quad (5.5)$$

La marge absolue quantifie la stabilité asymptotique alors que la marge relative est liée aux pôles complexes donc permet de quantifier le caractère plus ou moins oscillatoire induit par les pôles et est, à ce titre, reliée au coefficient d'amortissement. Ces marges sont illustrées sur la figure 5.2.

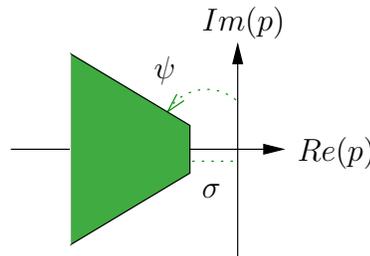


FIGURE 5.2 – Marges de stabilité absolue et relative

5.3.2 Critère de Routh/Hurwitz

Le critère de Routh-Hurwitz permet d'attester ou non de la stabilité asymptotique d'un modèle grâce au polynôme caractéristique $D(p)$. Ce critère algébrique est plutôt utilisé lorsqu'une approche fréquentielle est privilégiée puisque $D(p)$ est le dénominateur de la fonction de transfert. Cependant, il convient de rappeler que $D(p)$ s'exprime aussi $D(p) = \det(pI - A)$ et qu'il peut, de ce fait, être déduit de A . En outre, si A est de forme compagne, les coefficients de $D(p)$ sont directement lisibles sur la dernière ligne ou la première colonne de A ce qui permet de dresser directement la table de Routh et d'appliquer ainsi le critère.

Toutefois, ce critère n'est pas rappelé ici. Il a déjà été étudié lors des enseignements relatifs à l'approche fréquentielle.

5.3.3 Méthode de Lyapunov

Comme il a été dit précédemment, la popularisation de la représentation d'état est née d'une volonté de certains chercheurs de promouvoir la théorie de Lyapunov. Lyapunov s'intéressait à la stabilité d'un système mécanique en mouvement. Son étude se révèle néanmoins fort utile pour l'étude de la stabilité de n'importe quel système.

La théorie de Lyapunov est très complète et parfois assez sophistiquée. Il n'est pas utile, dans le cadre de ce cours,

de la détailler. Il faudrait de toute façon beaucoup de temps et d'efforts pour y parvenir. Cependant, l'on peut en extraire des résultats intéressants. Ils sont empruntés à ce qu'il est convenu d'appeler « seconde méthode » (ou « méthode directe ») de Lyapunov. En voici, de manière résumée, la teneur.

Soit le modèle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ f_i(0, \dots, 0) = 0 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow x = 0 \text{ état d'équilibre.} \end{cases}$$

Il s'agit là d'un modèle de système autonome qui possède l'origine pour état d'équilibre. Lyapunov propose une condition suffisante pour vérifier la stabilité de cet état d'équilibre. S'il existe une fonction V telle que $V(x) > 0 \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$, ($V(0) = 0$) et telle que

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega, x \neq 0$$

alors le modèle d'état non linéaire est asymptotiquement stable pour des conditions initiales dans un voisinage Ω de 0.

Si l'on s'intéresse à la stabilité asymptotique d'un système linéaire autonome

$$\dot{x} = Ax,$$

la seconde méthode permet de voir qu'un tel système est asymptotiquement stable **si et seulement si** il existe une fonction de Lyapunov (quadratique) $V = x'Px > 0$ ($\Leftrightarrow P = P' > 0$) telle que $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x'(A'P + PA)x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow A'P + PA < 0 \tag{5.6}$$

$$\Leftrightarrow \exists Q = Q' < 0 \text{ et } P = P' > 0 \mid A'P + PA = Q. \tag{5.7}$$

Plusieurs points sont notables dans ce résultat. En premier lieu, il n'est plus question de faire référence à l'origine de \mathbb{R}^n qui est de toute façon l'unique point d'équilibre. En deuxième lieu, la condition devient nécessaire et suffisante. En troisième lieu, il n'est pas restrictif de supposer que $V(x)$ est une fonction quadratique de x ce qui permet d'aboutir, soit à une inégalité matricielle donnée en (5.6), soit à une égalité matricielle donnée en (5.7), dont l'inconnue est, dans les deux cas, une matrice symétrique strictement définie positive.

Résoudre une inégalité matricielle linéaire telle que (5.6) est possible depuis le début des années 1990 grâce à des outils numériques. Toutefois, l'on préfère, lorsqu'aucun outil numérique sophistiqué n'est disponible, manipuler l'égalité (5.7). La difficulté peut sembler *a priori* de choisir $Q = Q' < 0$ pour que la solution $P = P'$ existe et soit définie positive. En fait, en 1974, E. I. Jury et S. M. Ahn prouvèrent qu'un choix arbitraire de la matrice Q était possible. L'on peut donc résumer l'application de la théorie de Lyapunov à ceci :

Un modèle d'état linéaire (3.5) est asymptotiquement stable si et seulement si, quelle que soit la matrice symétrique définie négative Q , l'unique solution de l'équation

$$A'P + PA = Q \tag{5.8}$$

est définie positive.

L'habitude consiste à choisir $Q = -I$ pour effectuer le test.

Lorsque le système (3.5) est le linéarisé tangent d'un système non linéaire, le test ci-dessus peut permettre d'affirmer que le modèle initial non linéaire est aussi asymptotiquement stable dans un voisinage autour du point de fonctionnement (le point d'équilibre du modèle linéaire est alors l'origine et celui du modèle non linéaire est le point de fonctionnement). En effet, sans détailler ces concepts, lorsque le linéarisé tangent est tel que $\text{rang}(A) = n$, alors le point de

fonctionnement est qualifié de point d'équilibre *hyperbolique*. Pour ce genre de points d'équilibre, il y a *équivalence topologique* entre le modèle non linéaire et son linéarisé tangent. De ce fait, la stabilité du linéarisé tangent est celle du non linéaire dans un voisinage du point de fonctionnement. Or, tout modèle linéaire asymptotiquement stable correspond à un point d'équilibre hyperbolique pour le modèle non linéaire original qui est donc lui aussi asymptotiquement stable dans un voisinage du point de fonctionnement.

En revanche, si le modèle non linéaire fait apparaître un point d'équilibre non hyperbolique alors on ne peut déduire la stabilité du modèle non linéaire à partir de son linéarisé tangent.

L'annexe E reprend quelques aspects évoqués ci-avant.

En conclusion, il faut noter que tous ces critères de stabilité ne font intervenir que A . Ainsi, seule la matrice d'évolution détermine la stabilité du système.

Chapitre 6

Commandabilité et observabilité

Ce chapitre introduit des concepts nécessaires pour établir des lois de commande telles que celles qui seront étudiées dans les chapitres suivants. Ces concepts sont ceux de commandabilité et d'observabilité. Ils furent introduits par Kalman.

6.1 Définitions

6.1.1 Commandabilité ou gouvernabilité

Soit le modèle d'état (3.5) d'un système linéaire dont l'état initial est à une valeur quelconque $x_0 = x(t_0)$. L'on peut supposer sans restriction que la transmission directe est nulle ($D = 0$).

Le modèle est commandable ou gouvernable si pour toute instance x_1 du vecteur d'état, il existe un signal d'entrée $u(t)$ d'énergie finie qui permet au système de passer de l'état x_0 à l'état x_1 en un temps fini.

Il est possible que, si la commandabilité n'est pas vérifiée sur tout le vecteur d'état, elle puisse néanmoins l'être sur une partie de ses composantes. L'on dit alors des variables d'état concernées que ce sont les états commandables du système.

La commandabilité peut être vue comme la possibilité de modifier les dynamiques d'un modèle en agissant sur ses entrées. À ce titre cette propriété ne se réfère qu'à l'état et à l'entrée du système. Il est donc clair qu'elle ne dépend que des matrices A et B .

6.1.2 Observabilité

L'on s'intéresse toujours au même modèle que dans la partie précédente.

Le modèle est observable si, quel que soit t_0 , il existe un intervalle de temps fini $[t_0, t_1]$ tel que la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ sur cet intervalle permet de reconstituer $x(t_0)$.

Encore une fois, il est possible que cette propriété ne se vérifie que pour une partie du vecteur d'état que constituent alors les états observables du système.

La définition de l'observabilité ne fait pas d'hypothèse particulière sur la nature de l'entrée. Cette propriété peut être interprétée comme la capacité d'un système à révéler l'historique de son vecteur d'état au travers de celui de ses sorties. Elle ne dépend en fait que des matrices A et C .

6.2 Critère de Kalman

En plus d'introduire les concepts de commandabilité et d'observabilité, R. E. Kalman est aussi l'auteur d'un critère éponyme.

6.2.1 Commandabilité

La paire de matrices (A, B) (ou le système (3.5)) est commandable si et seulement si

$$\text{rang}(Q_c) = n \quad \text{où} \quad Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

La matrice Q_c est dite matrice de commandabilité.

Ce résultat est basé sur l'*interpolation de Sylvester* qui permet d'affirmer que $e^{A\tau}$ peut s'écrire ainsi :

$$e^{A\tau} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k \quad \text{où} \quad \alpha_k(\tau) \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

En effet, si l'on revient à la définition de la commandabilité, l'on peut, sans perte de généralité, considérer que x_1 est l'origine de \mathbb{R}^n et que t_0 est nul. Dès lors, la solution de l'équation d'état s'écrit

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

et conduit à

$$x_1 = x(t_1) = 0 = e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau \Leftrightarrow x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau.$$

Compte tenu de (6.2), il vient

$$x_0 = - \sum_{k=1}^{n-1} A_k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (6.3)$$

En posant

$$\beta_k = \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau,$$

l'on peut récrire (6.3) de la façon suivante :

$$x_0 = -Q_c \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Le système est commandable si et seulement si le système (6.4) peut être résolu quel que soit x_0 c'est-à-dire si et seulement si $\text{rang}(Q_c) = n$.

6.2.2 Observabilité

L'on s'intéresse maintenant à l'observabilité du système (3.5) qui se résume à l'observabilité de

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx. \quad (6.5)$$

En effet, si l'on regarde la solution complète de l'équation d'état (4.7), connaissant A, B, C, D ainsi que $u(t)$, les deux derniers termes du membre de droite sont connus et peuvent être soustraits de la valeur mesurée de $y(t)$, ce qui revient à considérer le système (6.5). La sortie s'écrit alors

$$y(t) = Ce^{At}x_0$$

ce qui, en tenant compte de (6.2), donne

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k x_0 = \text{blocdiag}\{\alpha_k I\} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0.$$

L'on voit clairement que la détermination de x_0 en fonction de $y(t)$ ne sera possible que si le système d'équations ci-dessus ne présente pas de déficience de rang ce qui conduit au critère d'observabilité de Kalman :

La paire de matrices (A, C) (ou le système (3.5)) est observable si et seulement si

$$\text{rang}(Q_o) = n \quad \text{où} \quad Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

La matrice Q_o est dite matrice d'observabilité.

Exemple 1 :

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] x. \end{cases}$$

La matrice de commandabilité est

$$Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang 2 donc le système est commandable.

La matrice d'observabilité est

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang 2 donc le système est observable.

Exemple 2 :

Soit le système électronique représenté par le schéma de la figure 6.1. Le vecteur d'état choisi est $x = [x_1 \quad x_2] = [v_{s_1} \quad (v_{s_2} - V_{ref})]$. L'entrée est la tension $u = v_1$ et la sortie est la tension $y = v_s$. Ce choix, ainsi que l'application des règles d'électronique, en considérant les amplificateurs opérationnels de puissance comme parfaits, conduit à la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [-1 \quad -1] x. \end{cases} \quad (6.7)$$

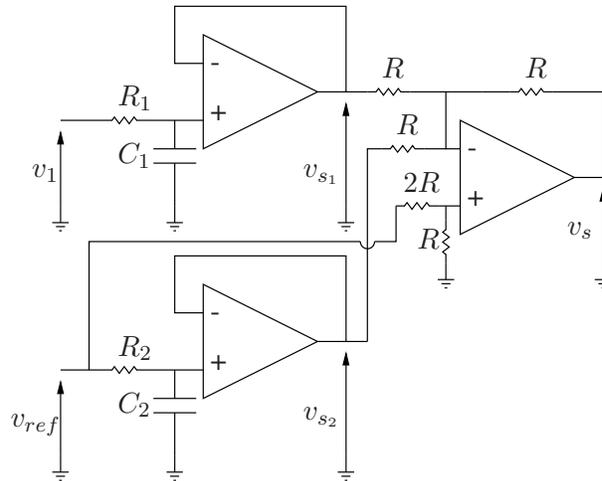


FIGURE 6.1 – Circuit électronique

La matrice de commandabilité de Kalman est

$$Q_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{(R_1 C_1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et comme elle est de rang 1, le système n'est pas complètement commandable. Ceci traduit le fait que, dans ce montage électronique, v_1 ne peut influencer sur v_{s2} .

La matrice d'observabilité de Kalman est

$$Q_o = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix}$$

Elle est de rang plein donc le système est observable.

Si l'on décide de considérer v_{s1} comme la sortie du système, alors la matrice de mesure devient $C = [1 \ 0]$ et celle d'observabilité devient :

$$Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang 1 et le système n'est donc plus observable. Ceci traduit le fait que l'on ne peut déduire v_{s2} de v_{s1} car v_{s2} n'agit en rien sur v_{s1} .

6.2.3 Dualité des deux concepts

Il est important de noter l'analogie entre les structures de Q_c et Q_o . Elle permettent de comprendre que la commandabilité et l'observabilité sont deux notions duales comme le soulignent les propositions suivantes :

Dualité :

La paire (A, B) est commandable si et seulement si la paire (A', B') est observable.
La paire (A, C) est observable si et seulement si la paire (A', C') est commandable.

Les critères de Kalman ont un grand intérêt théorique et permettent de comprendre un peu mieux ces notions fondamentales de commandabilité et d'observabilité. Cependant, lorsqu'ils ne sont pas satisfaits ($\text{rang}(Q_c) < n$ ou $\text{rang}(Q_o) < n$), ils ne donnent aucune information sur les composantes du vecteur d'état qui sont commandables et/ou observables.

6.3 Critères s'appliquant aux formes de Jordan

Comme toujours, il faut distinguer deux cas selon la multiplicité géométrique des valeurs propres de A .

6.3.1 A diagonalisable

Dans ce cas, il existe une matrice de passage M qui permet de changer de base et d'obtenir la réalisation

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u \\ y = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] x + Du. \end{cases}$$

Dans ce cas, l'on peut assimiler la commandabilité d'un mode λ_i à celle de la composante x_i du vecteur d'état associé. Il en est de même pour l'observabilité. Clairement, sur cette forme diagonale simple, l'on voit que l'on peut agir sur x_i lorsque la composante b_i est non nulle de même que l'on peut constater une évolution de x_i si la composante c_i est non nulle.

Le mode λ_i est commandable (respectivement observable) si et seulement si $b_i \neq 0$ (resp. $c_i \neq 0$ par dualité).

6.3.2 A non diagonalisable

Pour simplifier, l'on considère uniquement le sous-système associé à la valeur propre multiple λ . Une réalisation de Jordan est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u \\ y = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ \dots \ c_{n-1} \ c_n] x + \bar{D}u. \end{cases}$$

Le mode λ associé à un unique bloc de Jordan est commandable (respectivement observable) si et seulement si $b_n \neq 0$ (resp. $c_1 \neq 0$). Dans le cas où plusieurs blocs de Jordan lui sont associés, il ne peut être ni commandable, ni observable.

Il faut noter que la dernière affirmation concernant les modes multiples associés à plusieurs blocs de Jordan n'est pas forcément vraie pour un système multivariable.

Exemple :

L'on reconsidère l'exemple électronique de la figure 6.1. La représentation d'état en est donnée en (6.7). Elle

est diagonale. L'on s'aperçoit en appliquant les critères ci-avant que la seconde composante du vecteur d'état ($v_{s_2} - V_{ref}$) (donc le pôle associé) n'est pas commandable par la tension v_1 . En revanche, la composante v_{s_1} (donc son pôle associé) l'est. Les deux composantes sont observables. Ce résultat est compatible avec celui obtenu grâce au critère de Kalman.

6.4 Grammiens de commandabilité et d'observabilité

Soit le modèle LTI donné en (3.5) et supposé **asymptotiquement stable**. L'on se propose ici de présenter un critère de commandabilité et d'observabilité qui repose sur les notions de grammien.

6.4.1 Définition des grammien

Le grammien de commandabilité W_c et le grammien d'observabilité W_o , également appelés matrices grammien, sont respectivement définies par

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B' e^{A'\tau} d\tau, \quad (6.8)$$

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau, \quad (6.9)$$

d'où l'on retrouve bien que les deux propriétés sont duales l'une de l'autre.

6.4.2 Interprétation des grammien

L'interprétation d'un grammien ainsi défini n'est pas chose aisée. Cependant, les grammien peuvent aussi être définis pour des modèles LTI à temps discret et sont dans ce cas plus faciles à interpréter. En procédant par analogie pour les modèles à temps continu, l'on déduit que le grammien de commandabilité W_c est lié à l'énergie minimale du signal de commande $u(t)$ nécessaire pour amener l'état d'une condition initiale à une condition finale en un temps infini.

Plus précisément, W_c est une matrice symétrique semi-définie positive donc il existe une matrice de passage unitaire U et telle que $W_c = U W_c^D U'$ telle que, dans la nouvelle base, W_c^D est diagonale et ses éléments diagonaux d_i sont positifs ou nuls. Ces éléments sont représentatifs de la commandabilité de chaque variable d'état \bar{x}_i dans la nouvelle base. En effet, d_i^{-1} quantifie l'énergie minimale nécessaire pour atteindre $e'_i = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]$, le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base. Ainsi, si d_i est faible, cette énergie est grande et l'état \bar{x}_i est faiblement commandable. Si d_i est nul, \bar{x}_i n'est pas commandable du tout (voir annexe F).

Le raisonnement sur le grammien d'observabilité W_o se fait par dualité.

La paire (A, B) (respectivement la paire (A, C)) est commandable (resp. observable) si et seulement si le grammien de commandabilité W_c (resp. d'observabilité W_o) est strictement défini positif.

Ainsi, les grammien fournissent-ils des conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité ou de commandabilité d'un modèle LTI. Mais de plus, à l'instar des critères basés sur les formes de Jordan, ils indiquent le nombre de variables d'état non commandables et non observables. En outre, ils permettent de quantifier cette propriété c'est-à-dire de savoir si chaque variable d'état est très ou peu commandable ou observable. En revanche, ils se limitent à l'étude des modèles LTI asymptotiquement stables.

Remarque 6.1 W_c est égal à la variance de $x(t)$ en régime stationnaire lorsque l'entrée $u(t)$ est un bruit blanc.

Remarque 6.2 L'on peut démontrer que, quelle que soit la base de l'espace d'état considérée, le produit $W_c W_o$ conserve le même spectre.

6.4.3 Calcul des grammians

Les intégrales définies en (6.8) et (6.9) ne sont pas utilisées pour le calcul des grammians. En réalité,

$$AW_c + W_cA' = \int_0^\infty (Ae^{A\tau}BB'e^{A'\tau} + e^{A\tau}BB'e^{A'\tau}A')d\tau = [e^{A\tau}BB'e^{A'\tau}]_0^\infty.$$

Sous l'hypothèse de stabilité de A , la quantité ci-dessus est égale à $-BB'$. En résumé, prenant en compte la dualité, l'on peut proposer l'assertion suivante :

Soit la réalisation (3.5), supposée asymptotiquement stable. Le grammien de commandabilité W_c et celui d'observabilité W_o sont les solutions respectives des équations de Lyapunov

$$AW_c + W_cA' = -BB', \tag{6.10}$$

$$A'W_o + W_oA = -C'C. \tag{6.11}$$

Il est plus facile, à l'aide des outils numériques d'aujourd'hui de résoudre les équations (6.10) et (6.11) que de calculer les intégrales (6.8) et (6.9).

Remarque 6.3 Il existe une base de l'espace d'état dans laquelle les grammians de commandabilité et d'observabilité sont égaux et diagonaux. Ainsi, chaque élément diagonal de ce double grammien quantifie à la fois la commandabilité et l'observabilité de la variable d'état associée dans la base considérée, c'est-à-dire son influence sur le comportement entrée/sortie du système. La réalisation correspondante est dite équilibrée. Elle se révèle particulièrement utile pour réduire le modèle à savoir trouver une réalisation d'ordre moindre dont le comportement entrée/sortie se rapproche de celui du modèle initial. Il suffit pour ce faire de négliger la dynamique des variables d'état faiblement commandables et observables. Cette technique de réduction de modèle a même été étendue au cas d'une réalisation instable.

6.5 Modèles et structures

Ces notions de commandabilité n'étaient pas étudiées lors des enseignements relatifs à l'approche fréquentielle. L'objectif de cette partie est d'expliquer pourquoi elles n'étaient pas requises et ce que l'approche temporelle peut apporter de plus que l'approche fréquentielle sur ce point.

6.5.1 Différence entre les modèles

L'on considère le système composite de la figure 6.2, formé de trois systèmes en cascade.

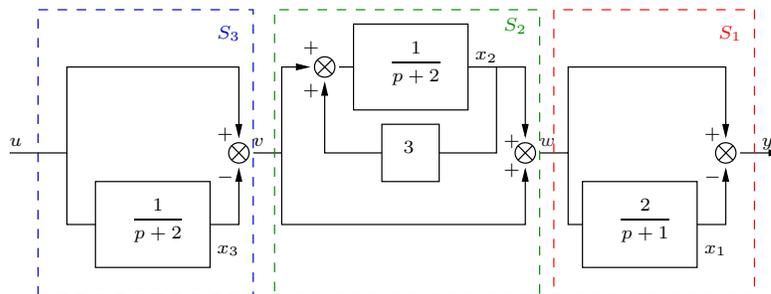


FIGURE 6.2 – Système composite

Une représentation d'état est d'abord établie en utilisant x_1 , x_2 et x_3 comme variables d'état. Le sous-système S_3 fait clairement apparaître

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + u.$$

Le sous-système S_2 amène

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + 3x_2 + v = x_2 - x_3 + u.$$

Enfin, le sous-système S_1 conduit à

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2w = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2u.$$

Ces trois équations différentielles permettent, en exprimant parallèlement $y = x_1 + w$, d'écrire la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [-1 \quad 1 \quad -1] x + u \end{cases}$$

Le système est donc d'ordre 3 et a pour modes $\{-1; 1; -2\}$. Les matrices de commandabilité et d'observabilité sont

$$Q_c = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} ; \quad Q_o = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Elles sont toutes deux de rang 2 ce qui indique qu'il existe un mode non commandable et un mode non observable. En effet, la déficience de rang renseigne quant au nombre de modes non commandables/observables. En revanche, l'on ne sait si ces modes sont confondus c'est-à-dire si c'est le même mode qui est non commandable et non observable. Pour le savoir, l'on peut diagonaliser la représentation d'état. En utilisant la matrice de passage

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

une réalisation diagonale possible est la suivante :

$$\Lambda = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = V^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CV = [-1 \quad 0 \quad -6], \quad \tilde{D} = D = 1.$$

Cette réalisation diagonale, selon les critères du paragraphe 6.3.1, fait apparaître que le mode -1 est non commandable et que le mode 1 est non observable.

L'on cherche maintenant à établir l'équation différentielle unique reliant u et y .

Le sous-système S_1 correspond en fait à un bloc

$$S_1(p) = \frac{p-1}{p+1},$$

ce qui se traduit de manière temporelle par

$$\dot{y} + y = \dot{w} - w.$$

Le sous-système S_2 correspond à un bloc

$$S_2(p) = \frac{p}{p-1},$$

ce qui se traduit de manière temporelle par

$$\dot{w} - w = \dot{v}.$$

Enfin, le sous-système S_3 correspond à un bloc

$$S_3(p) = \frac{p+1}{p+2},$$

ce qui se traduit de manière temporelle par

$$\dot{v} + 2v = \dot{u} + u.$$

Ces trois équations différentielles obtenues conduisent à :

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \ddot{u} + \dot{u}.$$

Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2 qui laisse penser que le système est d'ordre 2. Les modes associés sont -1 et -2 .

La fonction de transfert globale du système est

$$G(p) = S_1(p)S_2(p)S_3(p) = \frac{p}{p+2}.$$

Elle laisse présumer que le système est d'ordre 1 et que son seul mode est -2 .

Que s'est-il donc passé ? L'équation différentielle a perdu le mode non observable et la fonction de transfert a perdu le mode non commandable. Un tel processus se vérifie toujours.

L'équation différentielle ne représente que la partie observable du système.

La fonction de transfert ne représente que la partie commandable et observable du système.

L'on constate ici que l'équation d'état est un modèle plus complet que l'équation différentielle unique qui est elle-même un modèle plus complet que la fonction de transfert. Toute réalisation restreinte à la partie commandable et observable d'un système est dite *minimale*.

Il doit être clair dans l'esprit du lecteur qu'une fonction de transfert dont les racines du dénominateur sont à partie réelle strictement négative peut laisser penser que le système décrit est asymptotiquement stable alors qu'il peut exister un mode instable qui est non commandable et/ou non observable. Un tel mode apparaîtrait dans une représentation d'état.

6.5.2 Systèmes composites

Soit le système correspondant à la mise en cascade de plusieurs sous-systèmes (schéma-bloc de la figure 6.3). Dans ce cas, le mode a est non commandable.

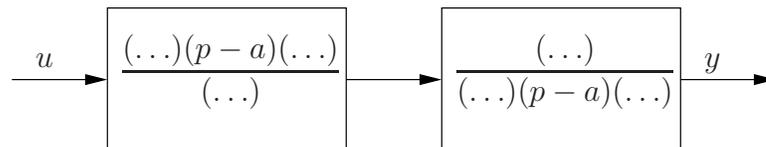
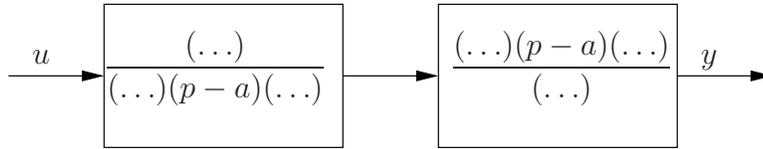
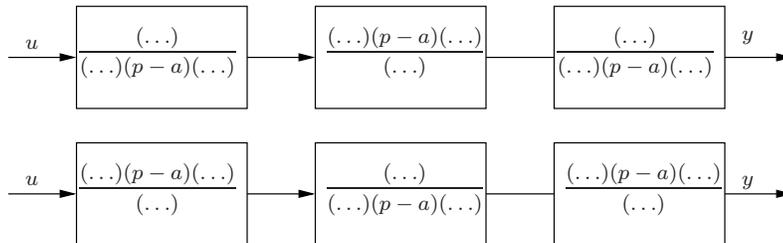


FIGURE 6.3 – mode a non commandable


 FIGURE 6.4 – mode a non observable

Si l'on considère maintenant une inversion des blocs telle qu'illustrée sur la figure 6.4, alors le mode a redevient commandable mais est non observable. Dans les deux cas, il n'apparaîtra pas dans la fonction de transfert et dans le premier cas, il ne sera pas non plus révélé par la résolution de l'équation différentielle.

Soit le système de la figure 6.5. Dans ces deux cas, le mode a n'est ni commandable, ni observable. Il ne sera révélé ni par la fonction de transfert, ni par l'équation différentielle.


 FIGURE 6.5 – mode a non commandable et non observable

Remarque 6.4 Lorsque l'on pratique un asservissement de type PI sur un système de premier ordre par la technique de la compensation de pôle (voir cours sur l'approche fréquentielle), l'on rend la constante de temps du procédé non commandable. En effet, si le procédé et le régulateur sont respectivement décrits par

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \text{et} \quad R(p) = \frac{A}{p}(1 + \tau p),$$

soit deux systèmes de premier ordre, la chaîne directe $L(p)$, qui devrait a priori être de second ordre, par compensation de $(1 + \tau p)$, est en réalité de premier ordre :

$$L(p) = \frac{AK}{p}.$$

C'est un simple intégrateur qui cache le pôle $-1/\tau$. Pourtant les dynamiques liées à τ sont toujours effectives dans le système.

Soient deux sous-systèmes en parallèle comme indiqué sur la figure 6.6.

L'association de S_1 et S_2 constitue alors un système commandable (respectivement observable) si S_1 et S_2 sont tous deux commandables et s'ils ne possèdent pas de mode commun. L'hypothèse de commandabilité et d'observabilité de S_1 et S_2 est bien sûr nécessaire mais dans le cas où les deux sous-systèmes ont un mode en commun, il se peut que le système global soit tout de même commandable (observable).

Enfin, si S_2 constitue un organe de contre-réaction sur S_1 comme l'illustre la figure 6.7,

alors, le système global est :

- commandable si la cascade $S_1 S_2$ est commandable ;
- observable si la cascade $S_2 S_1$ est observable.

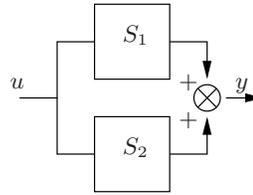


FIGURE 6.6 – Deux systèmes en parallèle

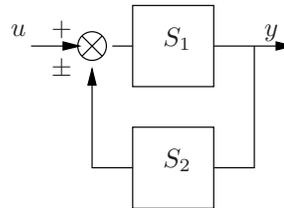


FIGURE 6.7 – Deux systèmes en contre-réaction

6.6 Réalisation minimale

Cette partie définit la notion de réalisation minimale et ce qu'elle induit sur les concepts de pôles et de stabilité.

6.6.1 Définition

Comme l'on vient de le voir, l'ordre de la représentation d'état n'est pas toujours le même que celui de la fonction de transfert. Tout dépend de la commandabilité et de l'observabilité de ce dernier. Lorsqu'il est complètement commandable et observable, les deux ordres sont égaux. L'on peut cependant restreindre la représentation d'état du système à un sous-vecteur d'état, de dimension maximale, qui soit entièrement commandable et observable.

On appelle réalisation minimale ou irréductible d'un système LTI toute représentation d'état ne décrivant que la dynamique commandable et observable du système.

6.6.2 Réalisation minimale et notion de pôles

Jusqu'alors, il a été opéré à une identification systématique des pôles de la fonction de transfert aux valeurs propres de la matrice d'état. Cette assimilation apparaît maintenant peu rigoureuse.

En effet, soit une réalisation (A, B, C, D) d'ordre n d'un système LTI. Soit également une réalisation minimale $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ d'ordre \bar{n} de ce système. Si le système est entièrement commandable et observable alors les deux réalisations sont de même ordre ($n = \bar{n}$) et les matrices A et \bar{A} sont semblables. Les deux réalisations sont alors minimales. S'il existe une partie non commandable et/ou non observable dans le système, alors $\bar{n} < n$. La fonction de transfert admet, entre autres, les deux expressions

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D = \bar{C}(pI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$$

mais est toujours d'ordre \bar{n} . Ceci conduit tout naturellement, dans le cas où $\bar{n} < n$, à comparer le nombre de pôles au cardinal du spectre de la matrice d'état pour constater qu'il n'y a pas nécessairement identité des deux ensembles. Ainsi les valeurs propres de \bar{A} sont les pôles de $G(p)$ mais celles de la matrice A ne le sont pas forcément. En revanche, tout pôle de $G(p)$ est bien valeur propre des deux matrices. Ceci résulte de la perte de commandabilité ou d'observabilité qui conduit à la compensation de pôles et de zéros dans la fonction de transfert. Il faut donc distinguer pôles de la fonction de transfert et valeurs propres de la matrice d'état. De même il faut faire la nuance entre dénominateur de fonction de transfert et polynôme caractéristique associé à la matrice dynamique.

Les pôles de la fonction de transfert d'un système sont égaux aux valeurs propres de toute matrice d'état d'une réalisation minimale du système.

Exemple :

Soit la réalisation :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0] x. \end{cases}$$

Une telle réalisation correspond à la fonction de transfert

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B = \frac{(p-1)}{(p-1)(p+1)} = \frac{1}{p+1}$$

d'où il apparaît que la valeur propre 1 n'est ni commandable ni observable puisqu'elle est à la fois pôle et zéro de la fonction de transfert. L'on peut construire une réalisation à partir de la fonction de transfert d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = x. \end{cases}$$

Cette réalisation d'ordre 1 est minimale.

6.6.3 Réalisation minimale et stabilité

Au paragraphe 5.3.1, il avait été pris soin, dans les explications relatives à l'équivalence entre BIBO-stabilité et stabilité asymptotique, de préciser que fonction de transfert et modèle d'état étaient de même ordre. Ceci pouvait sembler un peu redondant mais la précision est nécessaire comme le montre l'exemple du paragraphe précédent.

En effet, si l'on considère la fonction de transfert $G(p) = 1/(p+1)$, il ne fait pas de doute que ce système de premier ordre ayant un pôle dans le demi-plan gauche répond à une impulsion par une exponentielle décroissante. Il est BIBO-stable. Toutefois, si l'on applique le critère des racines à la réalisation initiale, la présence de la valeur propre +1 atteste de l'instabilité de ce dernier.

En réalité, tout est une question de minimalité de la réalisation ou si l'on préfère, de commandabilité et d'observabilité. Le pôle +1, parce qu'il n'est ni commandable ni observable, n'est pas sensible à l'entrée du système et n'agit pas sur la sortie. Il est indiscernable dans le comportement entrée/sortie du système et n'altère donc pas la BIBO-stabilité du système. L'équivalence entre stabilité asymptotique d'une réalisation et BIBO-stabilité du système associé n'est vraie que si la réalisation est minimale.

De même que l'on avait vu qu'il était possible de dire qu'un système est simplement stable de manière interne mais BIBO-instable (donc instable de manière externe), tel l'intégrateur, un système peut également être instable de manière interne et stable de manière externe à l'instar de l'exemple ci-dessus.

Chapitre 7

Commande par retour d'état

Dans ce chapitre et dans le prochain, l'on aborde l'aspect ultime de l'étude des systèmes linéaires : l'établissement d'une loi de commande capable de conférer au système des performances requises, dans la mesure du possible. Il est ici supposé que l'intégralité des composantes du vecteur d'état est mesurée et utilisée par la loi commande. L'on parle alors de commande par retour d'état.

7.1 Notion de retour d'état

Quelques aspects du retour d'état sont abordés dans cette partie. Le retour d'état est le moyen le plus classique d'envisager la commande d'un système modélisé par une représentation d'état. Il suppose que toutes les composantes x_i du vecteur d'état x sont accessibles à la mesure. Une loi de commande possible est alors

$$u(t) = Hy_c(t) + Kx(t). \quad (7.1)$$

où $K \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur ligne de n composantes qu'il est convenu d'appeler « vecteur de retour d'état », H est un scalaire dit de précommande et y_c est la consigne, c'est-à-dire l'entrée du système en boucle fermée.

Si l'on regarde attentivement l'équation (7.1), l'on comprend que ce type de loi de commande ne correspond plus au schéma d'asservissement classiquement rencontré dans l'approche fréquentielle mais à un nouveau schéma de commande, comme indiqué sur la figure 7.1.

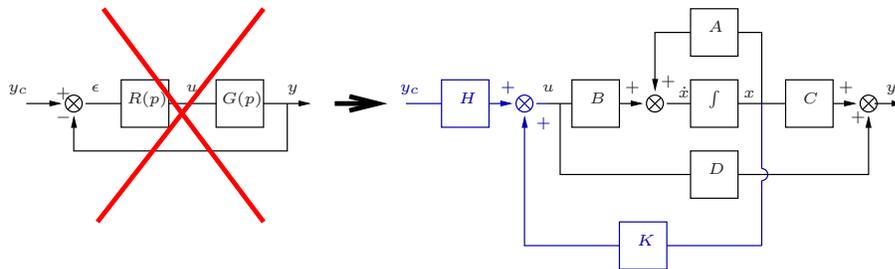


FIGURE 7.1 – Schéma d'asservissement

La motivation pour appliquer une telle commande est illustrée sur un exemple. L'on suppose que l'on cherche à asservir la position angulaire θ d'un moteur à courant continu dont la vitesse et la position sont toutes deux mesurables. Sous l'hypothèse que la vitesse ω du moteur évolue en fonction de la tension d'induit u selon une loi associée à la fonction de transfert

$$G_{\Omega}(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{L}{1 + \tau p},$$

alors une loi de commande possible par retour d'état correspond au schéma de la figure 7.2. Le vecteur d'état est $x' = [\theta \ \omega]$ et le retour d'état est $K = [k_1 \ k_2]$. Le scalaire H représente la précommande. Dans ce cas précis, l'on peut récrire le schéma comme indiqué sur la figure 7.3. Ceci conduit à une fonction de transfert en boucle fermée

$$G_f(p) = \frac{HL}{\tau p^2 + (1 - Lk_2)p - Lk_1}$$

dont on peut choisir à la fois les pôles et le gain statique, agissant ainsi sur les performances tant statiques que transitoires. L'on peut aussi noter que, dans le cas présent, le retour dynamique de la figure 7.3 peut s'implanter, en mesurant la vitesse ω , comme un retour statique, ce qui évite la dérivation de θ (parfois délicate notamment si l'implantation est numérique). De façon générale, il s'agit là d'un des intérêts du retour d'état.

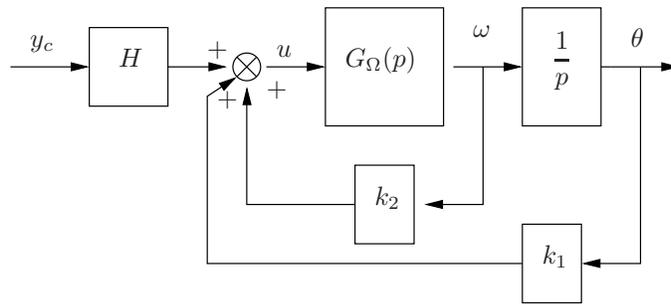


FIGURE 7.2 – Retour d'état appliqué au moteur

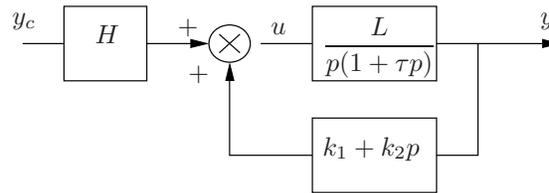


FIGURE 7.3 – Schéma-bloc équivalent

7.2 Retour d'état et performances transitoires : le placement de pôles

Le placement de pôles consiste à déterminer K de telle sorte que le système ait les pôles désirés ou, plus rigoureusement, de telle sorte que la matrice d'état en boucle fermée ait les valeurs propres spécifiées. Ceci permet d'agir de manière significative sur le comportement transitoire du système, en termes de temps de réponse, d'oscillations, etc. (voir partie 4.4).

Plus exactement, si l'on injecte l'équation (7.1) dans le système (3.5), il vient

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A + BK)x + BH y_c \\ y &= (C + DK)x + DH y_c. \end{cases} \quad (7.2)$$

Ainsi, la matrice en boucle fermée est $A_f = A + BK$. Donc le problème de placement de pôles se résume à ceci :

Placement de pôles :

Soient une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un vecteur $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, déterminer le vecteur $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tel que le spectre de $A + BK$ coïncide avec un spectre donné.

Ce problème n'est pas forcément simple et il convient de l'aborder en plusieurs étapes.

7.2.1 Commandabilité et placement de pôles

Le choix de K est prépondérant pour agir sur les performances transitoires du système car il induit un choix de pôles. Cependant, une question peut venir à l'esprit : le problème du placement de pôles a-t-il une solution ? *A priori*, il s'agit d'imposer les n valeurs propres de la matrice d'état en boucle fermée en choisissant les n composantes de K . L'on dispose donc de suffisamment de degrés de liberté. Toutefois, le problème n'est pas aussi simple et l'on peut montrer que ce problème n'admet une solution que lorsque le modèle d'état est commandable.

Le problème de placement de pôles par retour d'état admet une solution si et seulement si la paire (A, B) est commandable.

La démonstration de cette assertion n'est pas évidente. Elle est volontairement omise dans ce cours.

7.2.2 Placement de pôles sur une réalisation canonique

Avant d'aborder le problème dans son intégralité, l'on se contente de supposer que le système est décrit dans une base de l'espace d'état particulière telle que la réalisation est dite canonique de commande. En réalité, il s'agit de la forme compagne horizontale (3.12) associée à une matrice d'état ici notée \tilde{A} et à un vecteur de commande ici noté \tilde{B} . La matrice d'état du système bouclé est alors :

$$\tilde{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

où $\alpha_i = a_i - \tilde{k}_{i+1}$, $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$. Par ailleurs, les vecteurs de commande et d'observation \tilde{B} et \tilde{C} ne changeant pas, l'on note que la réalisation obtenue par le retour d'état est toujours de la forme compagne horizontale. Or les composantes α_i sont les coefficients du polynôme caractéristique désiré en boucle fermée $D_d(p)$. Ainsi, si l'on désire placer les pôles λ_i , $i = 1, \dots, n$, il faut choisir les composantes \tilde{k}_i du retour d'état $\tilde{K} = [\tilde{k}_1 \dots \tilde{k}_n]$ de sorte que

$$D_d(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i p^i) = \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i). \quad (7.4)$$

En développant le membre de droite de l'équation (7.4), l'on détermine, par identification, les coefficients α_i et il reste à déduire les paramètres du retour :

$$\tilde{k}_i = a_{i-1} - \alpha_{i-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (7.5)$$

Remarque 7.1 . Une telle loi de commande change les pôles du système mais ne modifie en rien ces zéros puisque seuls les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert, sont modifiés.

7.2.3 Placement de pôles sur une réalisation quelconque

La technique présentée ci-dessus s'applique à une forme compagne horizontale. Lorsque la réalisation n'est pas canonique, il faut d'abord en obtenir une.

7.2.3.1 Obtention de la forme canonique à partir de la fonction de transfert

Une première solution consiste à déterminer la fonction de transfert telle que celle donnée en (2.5) avec $a_n = 1$ et de déduire la forme canonique de commande à partir des coefficients du numérateur et du dénominateur de cette fonction de transfert.

7.2.3.2 Obtention de la forme canonique à partir d'une autre réalisation

Le passage d'une forme quelconque à une forme compagne horizontale consiste en un changement de base dans l'espace d'état, comme il a été détaillé dans la partie 3.7.2. L'on prend généralement $m_n = B$ ce qui signifie que la matrice de passage est :

$$M = [m_1 \quad \dots \quad m_n] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m_n &= B \\ m_{n-1} &= (A + a_{n-1}I)B \\ m_{n-2} &= (A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I)B \\ &\vdots \\ m_1 &= (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I)B. \end{cases} \quad (7.6)$$

L'on rappelle que la matrice M est telle que la réalisation canonique vérifie ($\tilde{A} = M^{-1}AM, \tilde{B} = M^{-1}B, \tilde{C} = CM, \tilde{D} = D$). Lorsque le système n'est pas commandable, la matrice M est singulière et le changement de base est impossible. Ainsi, l'algorithme présenté ci-après n'est pas applicable pour un système non commandable.

7.2.3.3 Algorithme de placement de pôles

L'on dispose d'un spectre désiré $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$.

Étape 1 Vérification de la commandabilité. Si la paire (A, B) n'est pas commandable, le placement de pôles est génériquement impossible.

Étape 2 Détermination du polynôme caractéristique désiré :

$$D_d(p) = \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0.$$

Étape 3 Détermination du polynôme caractéristique en boucle ouverte :

$$D(p) = \det(pI - A) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0.$$

Étape 4 Calcul du retour d'état \tilde{K} dans la base canonique par l'équation (7.5).

Étape 5 Calcul de la matrice de passage M grâce à (7.6).

Étape 6 Calcul du retour d'état dans la base initiale :

$$K = \tilde{K}M^{-1}, \quad (7.7)$$

puisque la commande s'exprime

$$u = \tilde{K}\tilde{x} = \tilde{K}M^{-1}x = Kx.$$

Exemple :

Soit le système de réalisation $(A, B, C, 0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x. \end{cases} \quad (7.8)$$

auquel on souhaite assigner le pôle double -1 .

Étape 1 : La matrice de commandabilité est

$$Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang 2 donc le système est commandable.

Étape 2 : Le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée est

$$D_d(p) = (p + 1)^2 = p^2 + 2p + 1 = p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0.$$

Étape 3 : Le polynôme caractéristique en boucle ouverte est

$$D(p) = \det(pI - A) = p^2 - 3p - 2 = p^2 + a_1 p + a_0.$$

Étape 4 : Le retour d'état correspondant à la base canonique de commande est

$$\tilde{K} = [\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{k}_1 = a_0 - \alpha_0 = -2 - 1 = -3 \\ \tilde{k}_2 = a_1 - \alpha_1 = -3 - 2 = -5. \end{cases}$$

Étape 5 : La matrice de passage à la base canonique est :

$$M = [m_1 \quad m_2] = [(A - 3I)B \quad B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Étape 6 : Le retour d'état dans la base initiale est

$$K = \tilde{K}M^{-1} = [-3 \quad -5] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-3 \quad -8].$$

Épilogue : L'on peut vérifier que la matrice d'état en boucle fermée est

$$A_f = A + BK = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix},$$

qui conduit bien au polynôme caractéristique

$$D(p) = \det(pI - A_f) = (p - 1)(p + 3) + 4 = p^2 + 2p + 1,$$

et donc aux bonnes valeurs de pôles.

Remarque 7.2 Il est possible de tenter de procéder directement à l'identification

$$\det(pI - A - BK) = D_d(p).$$

Cette équation peut se résoudre facilement dès lors que le problème est de dimension peu élevée (classiquement $n = 2$). Pour la résoudre à des ordres plus élevés, l'on peut recourir à la formule d'Ackermann qui est démontrée en annexe C. Cependant, la procédure présentée ci-avant revêt un caractère systématique qui se prête mieux à l'implantation d'une fonction informatique.

7.3 Performances statiques et retour d'état : la précommande

L'on se contente ici de déterminer une loi de commande telle que le gain statique du modèle en boucle fermée est unitaire. Pour obtenir ce gain statique, l'on utilise le dernier degré de liberté disponible, à savoir le scalaire de précommande H .

La fonction de transfert d'un système bouclé par retour d'état peut être déduite de sa représentation d'état (7.2) :

$$G_f(p) = (C + DK)(pI - A - BK)^{-1}BH + DH. \quad (7.9)$$

Ainsi le gain statique d'une telle fonction de transfert est-il égal à :

$$G_f(0) = [D - (C + DK)(A + BK)^{-1}B]H,$$

ce qui signifie que si l'on souhaite obtenir $G_f(0) = 1$, il suffit de calculer H ainsi :

$$H = [D - (C + DK)(A + BK)^{-1}B]^{-1}. \quad (7.10)$$

Le calcul de H est indépendant de la base considérée, aussi il est parfois plus facile, de déduire l'ensemble de la réalisation compagne horizontale notée $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$, puis, compte tenu des formes données en (3.12), de déduire H tel que

$$G_f(0) = 1 \quad \text{où} \quad G_f(p) = \frac{(\hat{b}_0 + \hat{b}_1 p + \dots + \hat{b}_{n-1} p^{n-1})H}{\alpha_0 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_{n-1} p^{n-1} + p^n} + DH,$$

$$\text{avec} \quad \hat{b}_i = b_i + D\tilde{k}_{i+1} \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Il convient de rappeler de noter que les coefficients b_i correspondent à ceux de $R(p)$, le numérateur de $G_{pr}(p)$ dans l'équation (3.15). En faisant une réduction au même dénominateur du membre de droite de la seconde équation ci-dessus, l'on obtient

$$G_f(p) = \frac{(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 p + \dots + \mathbf{b}_{n-1} p^{n-1} + \mathbf{b}_n p^n)H}{\alpha_0 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_{n-1} p^{n-1} + p^n},$$

où les coefficients \mathbf{b}_i sont ceux de $N(p)$, le numérateur de $G(p)$, la fonction de transfert globale en boucle ouverte (voir équation (3.15)). Il est ainsi montré que la remarque 7.1 est vraie même en présence d'une transmission directe.

Il devient clair dans ces conditions que

$$H = \frac{\alpha_0}{\hat{b}_0 + \alpha_0 D} = \frac{\alpha_0}{\mathbf{b}_0} \quad (7.11)$$

Exemple :

Si l'on revient à l'exemple du système (7.8) pour lequel un retour d'état a été calculé, il suffit de déterminer le coefficient b_0 . Pour cela, on peut calculer \tilde{C} , le vecteur d'observation dans la base canonique :

$$\tilde{C} = CM = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix}.$$

Le scalaire de précommande est donc (sachant que $D = 0$).

$$H = \frac{\alpha_0}{b_0} = \frac{1}{1} = 1,$$

ce qui signifie ici qu'il est inutile d'appliquer une précommande.

7.4 Rejet de perturbation et retour d'état : adjonction d'intégrateurs

Cette partie présente deux approches de la prise en compte de perturbations en échelon dans une loi de commande de type retour d'état. Ce sont deux approches que l'on peut trouver dans les divers cours et ouvrages. Toutefois, la seconde a la préférence de l'auteur.

7.4.1 Première approche

Indépendamment du gain statique, il peut être souhaitable de réduire l'effet d'une perturbation exogène agissant, en tant qu'entrée non contrôlée, sur le système. Il est parfois très difficile de réduire l'effet de la perturbation et les quelques techniques existantes nécessitent souvent la connaissance d'un modèle de la perturbation. L'on peut noter que toute perturbation de type impulsion de Dirac est rejetée *en régime permanent* dès lors que le système est asymptotiquement stable. Si la perturbation est plus franche, il faut envisager de sophistiquer la loi de commande et ceci peut s'avérer délicat.

Toutefois, lorsque cette perturbation peut être assimilée à un *échelon* (exemple : effet d'« offset » sur la commande) et lorsque seul l'effet de cette perturbation sur le *gain statique* est en jeu, alors, il est possible d'ajouter un intégrateur dans la chaîne directe. Le lecteur est invité à se référer à un cours sur l'approche fréquentielle traitant de la précision des systèmes bouclés. Il y a été mentionné qu'un système de classe 1 (c'est-à-dire comportant un intégrateur dans la chaîne directe) est précis en position c'est-à-dire que l'erreur de position de ce système, une fois bouclé, est nulle quand on lui applique un échelon en consigne. Enfin, en présence d'une perturbation elle aussi en échelon, cet intégrateur n'a l'effet escompté que s'il est placé en amont du point d'entrée de la perturbation dans la chaîne directe. Sur la base de ces constatations, l'on peut choisir d'ajouter un intégrateur à l'entrée d'un système avant de réaliser un retour d'état.

Cependant, dès lors qu'un intégrateur est ajouté, le modèle en boucle ouverte change. Il devient d'ordre $n + 1$, c'est-à-dire que le vecteur d'état x de dimension n est augmenté d'une $(n + 1)^{\text{ème}}$ composante u de sorte que $\bar{x}' = [x' \ u]$.

La fonction de transfert en boucle ouverte d'un tel système est

$$\bar{G}(p) = \frac{1}{p}G(p) = \frac{b_0 + b_1p^1 + \dots + b_{n-1}p^{n-1}}{0 + a_0p + a_1p^2 + \dots + p^{n+1}} + \frac{D}{p} = \frac{b_0 + b_1p^1 + \dots + b_{n-1}p^{n-1} + D(a_0 + a_1p + \dots + p^n)}{\bar{a}_0 + \bar{a}_1p + \bar{a}_2p^2 + \dots + p^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{G}(p) = \frac{\bar{b}_0 + \bar{b}_1p^1 + \dots + \bar{b}_{n-1}p^{n-1} + Dp^n}{\bar{a}_0 + \bar{a}_1p + \bar{a}_2p^2 + \dots + p^{n+1}} \quad \text{avec} \quad \bar{a}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \bar{a}_i = a_{i-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \bar{b}_i = b_i + Da_i \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}. \end{cases}$$

De plus, il convient de calculer une loi de commande de type retour d'état utilisant les $(n + 1)$ composantes de \bar{x} , à savoir

$$\bar{u} = \bar{K}\bar{x} + \bar{H}y_c,$$

où \bar{u} est la nouvelle entrée du système telle que $U(p) = \frac{\bar{U}(p)}{p}$ et $\bar{K} = [\bar{k}_1 \dots \bar{k}_{n+1}]$ est le vecteur de retour d'état à appliquer sur le système augmenté. Si l'on se place dans la base canonique de commande du système initial (d'état \tilde{x}), augmenté ensuite de l'intégrateur (c.-à-d. à l'état $\tilde{\tilde{x}}$), l'on obtient le schéma de la figure 7.4 où le retour d'état est associé à la matrice $\bar{\tilde{K}}$ de composantes $\bar{\tilde{k}}_i$.

L'on constate que la chaîne directe allant de \bar{u} à z est un système de classe au moins égale à 1. De ce fait, toute perturbation en échelon agissant sur le procédé en aval du premier intégrateur n'a pas d'effet sur le régime statique de z . Le cas typique est celui où la perturbation intervient au niveau de u .

En observant le schéma, l'on comprend qu'aucun effet n'est alors visible sur le régime permanent des variables d'état $\tilde{\tilde{x}}_i$. Si aucune perturbation n'intervient entre ces états $\tilde{\tilde{x}}_i$ et y , alors y n'est pas non plus altéré en régime statique.

L'on se place maintenant dans la base canonique de commande du système augmenté où l'état est noté $\tilde{\tilde{x}}$.

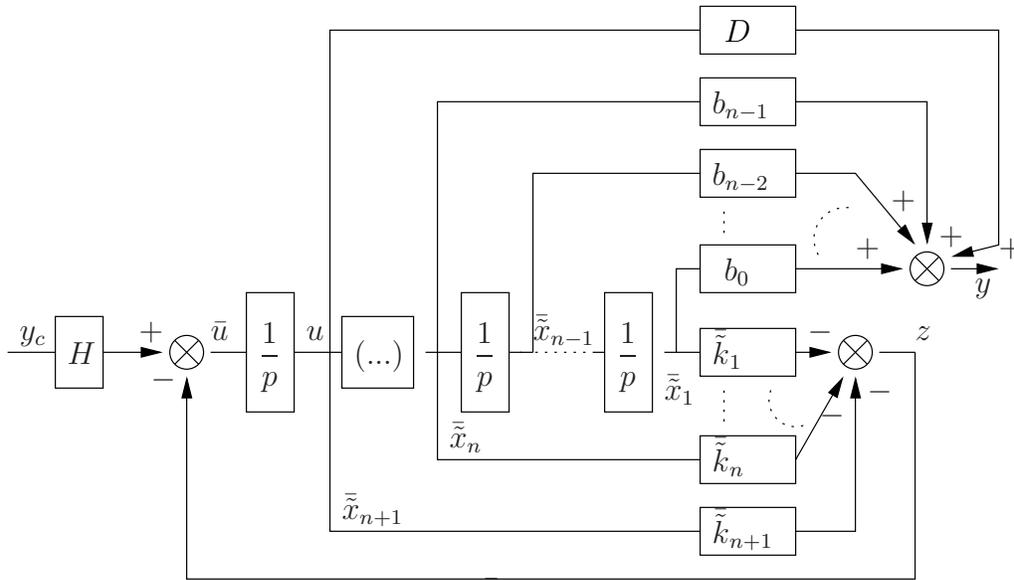


FIGURE 7.4 – Retour d'état avec intégration de la commande

Remarque 7.3 Attention, il ne faut pas confondre l'état \tilde{x} , qui est le vecteur d'état du système initial dans sa forme canonique de commande auquel on ajoute ensuite l'intégrateur (la forme alors obtenue n'est plus canonique) avec l'état \tilde{x} qui est le vecteur d'état de la forme canonique de commande de l'ensemble (système initial augmenté de l'intégrateur). Cette seconde forme est donc bien canonique. Le vecteur \tilde{x} n'intervient que dans la figure 7.4 alors que le vecteur \tilde{x} intervient dans ce qui suit.

Appliquer la technique du retour d'état conduit alors à modifier l'équation (7.5) en

$$\tilde{k}_i = \bar{a}_{i-1} - \bar{\alpha}_{i-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n+1\} \quad (7.12)$$

(où les coefficients $\bar{\alpha}_i$ sont ceux du polynôme caractéristique désiré pour le modèle d'ordre $(n+1)$ en boucle fermée correspondant aux $(n+1)$ pôles désirés) afin de déduire la retour d'état $\tilde{K} = [\tilde{k}_1 \dots \tilde{k}_{n+1}]$. Dans la base initiale, le retour est $\bar{K} = \tilde{K}\bar{M}^{-1}$ où \bar{M} est la matrice de passage à la forme canonique pour le système augmenté. Le scalaire de précommande est alors donné par

$$\bar{H} = \frac{\bar{\alpha}_0}{b_0} = -\frac{\tilde{k}_1}{b_0 + Da_0}. \quad (7.13)$$

La loi de commande devient donc :

$$u(t) = \int_0^t \bar{u}(\theta) d\theta = \int_0^t \left(-\frac{\tilde{k}_1}{b_0 + Da_0} y_c(\theta) + \bar{K} \tilde{x}(\theta) \right) d\theta. \quad (7.14)$$

Exemple :

Si l'on revient de nouveau au système (7.8) la fonction de transfert est facilement déduite de la forme compagne horizontale :

$$G(p) = \frac{1}{p^2 - 3p - 2}.$$

En ajoutant un intégrateur, l'on change l'entrée $u(t)$ du procédé en une autre entrée notée $\bar{u}(t)$ comme indiqué sur la figure 7.4. Il vient :

$$U(p) = \frac{1}{p} \bar{U}(p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dot{u}(t) = \bar{u}(t).$$

$u(t)$, dont la dérivée apparaît dans l'expression ci-avant, devient une nouvelle variable d'état et conduit à une représentation :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u} \\ y = [1 \ 1 \ 0] \bar{x} = \bar{C}\bar{x}. \end{cases} \quad (7.15)$$

L'ajout d'un intégrateur amène sans surprise à l'ordre 3. Le vecteur d'état \bar{x} de la réalisation (7.15) est défini par $\bar{x}' = [x' \ u]$. La dernière ligne de la matrice d'état \bar{A} est entièrement nulle ce qui confirme l'existence d'une valeur propre nulle liée à l'intégrateur.

Quant à la fonction de transfert, elle devient :

$$\bar{G}(p) = \frac{1}{p(p^2 - 3p - 2)} = \frac{1}{p^3 - 3p^2 - 2p + 0} = \frac{1}{p^3 + \bar{a}_2 p^2 + \bar{a}_1 p + \bar{a}_0}.$$

Il est nécessaire de placer un pôle supplémentaire puisque le modèle est maintenant d'ordre 3 et ce pôle est ici choisi de valeur (-1). Ainsi le polynôme caractéristique désiré est-il égal à

$$\bar{D}_d(p) = (p + 1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = p^3 + \bar{\alpha}_2 p^2 + \bar{\alpha}_1 p + \bar{\alpha}_0.$$

Il est inutile de vérifier la commandabilité du système augmenté car l'ajout de l'intégrateur n'altère pas cette propriété qui a déjà été vérifiée sur le modèle initial. L'on déduit le retour d'état dans la base canonique

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_0 - \bar{\alpha}_0 & \bar{a}_1 - \bar{\alpha}_1 & \bar{a}_2 - \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

et le scalaire de précommande

$$\bar{H} = -\frac{-1}{1} = 1.$$

Il est donc de nouveau inutile d'appliquer une précommande dans ce cas.

Il reste à déterminer la matrice de passage

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & \bar{m}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{m}_3 = \bar{B} \\ \bar{m}_2 = (\bar{A} + \bar{a}_2 I) \bar{B} \\ \bar{m}_1 = (\bar{A}^2 + \bar{a}_2 \bar{A} + \bar{a}_1 I) \bar{B}, \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\bar{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

et donc au retour d'état dans la base initiale :

$$\bar{K} = \tilde{K} \bar{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -13 & -36 & -6 \end{bmatrix}.$$

La méthode présentée dans ce paragraphe peut être efficace mais elle présente deux inconvénients :

- le premier inconvénient peut se concevoir en regardant la figure 7.4. Le lien statique entre \bar{x} et y ne se place pas dans la chaîne directe. Ceci induit la nécessité du calcul d'une précommande \bar{H} , dont la valeur peut être sensible à des variations de paramètres dans le modèle, mais surtout, toute perturbation en échelon située dans cette partie du système ne sera pas rejetée en régime permanent par l'intégrateur ajouté. Or ce cas n'est pas inhabituel puisqu'il peut correspondre, par exemple, à un *offset* sur la mesure de y , lié à un capteur imprécis ;
- le second inconvénient peut se comprendre par l'analyse rapide de l'expression de la loi de commande (7.14). Dans cette expression u dépend de l'intégrale de \bar{x} dont une des composantes est u . De ce fait, il n'y a pas stricte causalité de la loi de commande ce qui peut poser des problèmes d'implantation, notamment lors d'approximations numériques de cette loi de commande.

Pour remédier à ces deux inconvénients potentiels, le prochain paragraphe présente une structure de commande quelque peu différente mais qui repose sur le même principe.

7.4.2 Seconde approche

L'idée est toujours d'adjoindre un intégrateur mais en se rapprochant encore d'avantage du schéma classique d'asservissement utilisé en fréquentiel. La figure 7.5 résume la structure de commande.

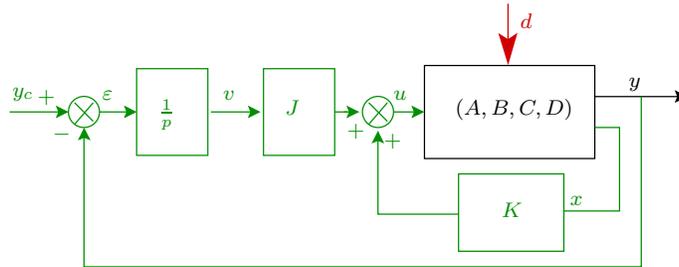


FIGURE 7.5 – Retour d'état avec intégration de l'écart

Une perturbation exogène d vient s'ajouter comme entrée non maîtrisable du système agissant directement sur la dynamique de x . Cette perturbation peut résulter d'un vrai phénomène exogène ou résumer approximativement l'effet de dynamiques négligées, d'imprécisions sur le modèle du système.

La loi de commande s'exprime

$$u(t) = Kx(t) + Jv(t) = Kx(t) + J \int_0^t \varepsilon(\theta) d\theta, \quad (7.16)$$

où K appartient à \mathbf{R}^n et J est un scalaire. L'écart ε est tout simplement, comme dans l'approche fréquentielle, défini par $\varepsilon = y_c - y$. En considérant l'état $\bar{x} = [x \ v]'$, il est assez facile de voir que ce dernier vérifie le système algèbro-différentiel

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \bar{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix}}_{\bar{B}_1} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_2} y_c + \underbrace{\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_3} d, \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \bar{x} + \underbrace{D}_{\bar{D}} u. \end{cases} \quad (7.17)$$

Il est ici supposé que la paire de matrices (\bar{A}, \bar{B}) est commandable. Quant à la loi de commande (7.16), elle peut se récrire

$$u = \underbrace{[K \quad J]}_{\bar{K}} \bar{x}. \quad (7.18)$$

En injectant (7.18) dans (7.17), il vient

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = (\bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K}) \bar{x} + \bar{B}_2 y_c + \bar{B}_3 d, \\ y = (\bar{C} + \bar{D} \bar{K}) \bar{x}. \end{cases} \quad (7.19)$$

Il apparaît clair, à la vue de (7.19) que le vecteur \bar{K} (c'est-à-dire la concaténation de K et J) peut être choisi par une méthode de placement de pôles telle que celle présentée au paragraphe 7.2. La procédure s'applique alors à la paire (\bar{A}, \bar{B}_1) de manière à placer les valeurs propres de la matrice d'évolution $\bar{A}_f = \bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K}$. Ce placement est possible dès lors que la paire (\bar{A}, \bar{B}_1) est commandable. Il faut bien sûr penser à spécifier un pôle de plus (donc $(n + 1)$ en tout) pour prendre en compte la présence de l'intégrateur. La procédure n'est pas redétaillée ici puisqu'elle se rapproche des algorithmes précédemment introduits, et le lecteur est invité à regarder l'exemple à fin du paragraphe.

L'écart de poursuite ε est la dernière composante du vecteur $\nu = \dot{\bar{x}}$. C'est pourquoi il est utile d'analyser la dynamique de ν :

$$\dot{\nu} = (\bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K}) \nu + \bar{B}_2 \dot{y}_c + \bar{B}_3 \dot{d}.$$

Si l'on considère que la consigne y_c est un échelon (où une succession lente d'échelons), alors $\dot{y}_c = 0$ pour à peu près chaque instant du temps (sauf à l'instant de commutation de y_c). Si l'on considère que d est aussi une perturbation en échelon, il vient également $\dot{d} = 0$ et donc

$$\dot{\nu} = (\bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K}) \nu.$$

Puisque le vecteur \bar{K} est choisi de telle sorte que $(\bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K})$ soit Hurwitz-stable, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\nu) = 0,$$

ce qui implique nécessairement

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon) = 0. \quad (7.20)$$

Ceci signifie que l'erreur de position est nulle ou encore que le gain statique du système augmenté bouclé est unitaire. La consigne en échelon est donc suivie en régime permanent. Les perturbations de type échelon situées en aval de l'intégrateur dans la chaîne directe sont rejetées en régime permanent.

Une hypothèse a rapidement été formulée. En effet, le vecteur de retour d'état augmenté \bar{K} peut être efficacement calculé si la paire (\bar{A}, \bar{B}_1) est commandable. L'algorithme présenté dans ce chapitre (c'est-à-dire, grossièrement, l'approche de Bass-Gura) s'illustre sans difficulté si cette propriété de commandabilité est satisfaite. Il est donc naturel de se poser la question : cette hypothèse est-elle toujours vérifiée ?

Pas tout à fait en réalité. Un cas particulier assez peu restrictif échappe à cette hypothèse. En effet, si l'on veut attester de la commandabilité de (\bar{A}, \bar{B}_1) , il est possible d'appliquer le test de Popov-Belevitch-Hautus (test PBH, cf. §??) qui consiste pour le cas présent à vérifier que

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} \lambda I - \bar{A} & \bar{B}_1 \end{bmatrix} \right) = n + 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Si les expressions de \bar{A} et de \bar{B}_1 explicitées en (7.17) sont prises en compte, la matrice concernée par l'équation ci-avant s'écrit

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A & 0 & B \\ -C & -\lambda & D \end{bmatrix}.$$

Si la paire de matrices (A, B) est commandable (ce qui est une hypothèse de départ évidente pour faire un placement de pôles, qui a toujours été posée depuis le début du chapitre), alors les n premières lignes constituent une matrice de rang n . Il est clair que la $(n + 1)^{\text{ème}}$ ligne est indépendante dès lors que $\lambda \neq 0$. En revanche, si $\lambda = 0$, le problème revient à vérifier que la matrice

$$\begin{bmatrix} -A & B \\ -C & D \end{bmatrix}$$

est de rang $(n + 1)$. Si le modèle initial (A, B, C, D) présente un pôle nul non observable (seul le pôle nul est d'intérêt dans cette partie du raisonnement puisque $\lambda = 0$), alors les $(n - 1)$ premières colonnes de la matrice ci-dessus ne constituent qu'une matrice de rang $(n - 1)$ au plus (test PBH d'observabilité, cf. §??). Par conséquent, même en ajoutant la dernière colonne, la matrice globale ne peut atteindre que le rang n , et non $(n + 1)$, ce qui interdit la commandabilité complète.

En résumé :

L'hypothèse de commandabilité de la paire (\bar{A}, \bar{B}_1) est vérifiée si et seulement si (A, B, C, D) ne présente pas de valeur propre nulle non observable.

Pour prolonger l'interprétation de ce cas particulier légèrement restrictif, il est possible de se référer au paragraphe ?? consacré aux systèmes composites, ainsi qu'à la figure 7.6 ci-après.

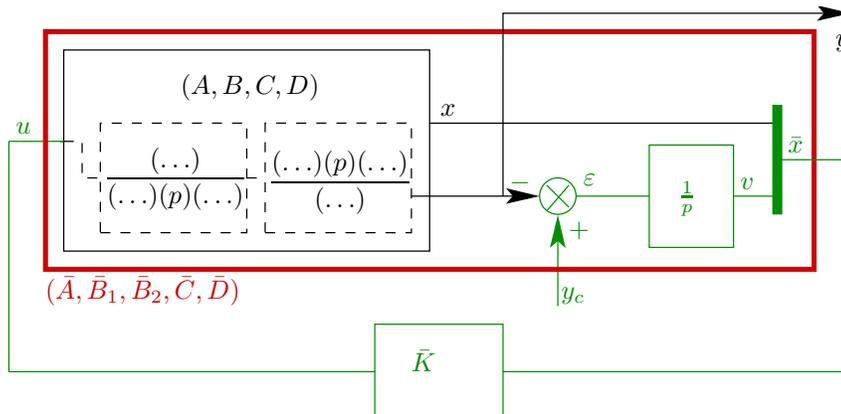


FIGURE 7.6 – Retour d'état avec intégration de l'écart : présence d'une valeur propre nulle non observable

Sur cette figure, l'on fait apparaître, dans le modèle initial, la valeur propre nulle non observable, conformément à la figure 6.4. Cependant, dans le transfert entre u et v , l'intégrateur ajouté se retrouve dans la configuration du schéma 6.3, c'est-à-dire qu'il devient non commandable.

Exemple :

Si l'on revient de nouveau au système (7.8). Il vient alors

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice de Kalman de commandabilité est égale à

$$\bar{Q}_c = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -8 \\ 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Son rang est de 3 donc la paire (\bar{A}, \bar{B}_1) est commandable et le calcul de la loi de commande est donc possible.

À titre de remarque, cette vérification de la commandabilité aurait pu se faire autrement et plus simplement. En effet, à l'étape 3 de l'application de l'algorithme de placement de pôles effectuée sur cet exemple au paragraphe ??, le polynôme caractéristique en boucle ouverte a été calculé. Il ne fait clairement pas apparaître de racine nulle, ce qui implique qu'il n'existe aucune valeur propre nulle de A , et *a fortiori* aucune valeur propre nulle non observable. Compte tenu des discussions ci-avant, la commandabilité de (\bar{A}, \bar{B}_1) ne pouvait être que vérifiée.

Comme pour la première approche, les pôles spécifiés sont tous trois en (-1) . Le polynôme caractéristique désiré pour \bar{A}_f est donc toujours

$$\bar{D}_d(p) = (p+1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = p^3 + \bar{\alpha}_2 p^2 + \bar{\alpha}_1 p + \bar{\alpha}_0.$$

Le polynôme caractéristique associé à \bar{A} est

$$D(p) = \det(pI - \bar{A}) = p^3 - 3p^2 + 2p + 0 = p^3 + \bar{a}_2 p^2 + \bar{a}_1 p + \bar{a}_0.$$

Dans la base canonique de commande du système augmenté, le vecteur de retour d'état \tilde{K} est donc donné par

$$\tilde{K} = [\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad \tilde{J}] = [\bar{a}_0 - \bar{\alpha}_0 \quad \bar{a}_1 - \bar{\alpha}_1 \quad \bar{a}_2 - \bar{\alpha}_2] = [-1 \quad -5 \quad -6].$$

La matrice de passage à la forme canonique vérifiant $\bar{x} = \bar{M}\tilde{x}$ est donnée par (cf. §3.7.2)

$$\bar{M} = [\bar{m}_1 \quad \bar{m}_2 \quad \bar{m}_3] = [(\bar{A}^2 + \bar{a}_2\bar{A} + \bar{a}_1I)\bar{B}_1 \mid (\bar{A} + \bar{a}_2I)\bar{B}_1 \mid \bar{B}_1]$$

$$\Leftrightarrow \bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans la base initiale, le retour d'état est donné par

$$\bar{K} = \tilde{K}\bar{M}^{-1} = [-5 \quad -11 \quad 1],$$

c'est à dire que

$$K = [-5 \quad -11] \quad \text{et} \quad J = 1.$$

La matrice d'état du système augmenté bouclé devient

$$\bar{A}_f = \bar{A} + \bar{B}_1\bar{K} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -3 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elle présente bien une valeur propre triple égale à (-1) .

Chapitre 8

Commande par retour de sortie : les observateurs

Dans ce second chapitre consacré à la commande dans l'espace d'état, l'on suppose que les composantes du vecteur d'état ne sont pas forcément accessibles et l'on se contente d'utiliser l'information présente au niveau de la sortie y pour établir une loi de commande.

8.1 Notions préliminaires

8.1.1 Motivation

Comme il est dit dans le préambule du chapitre, il s'agit de mettre en œuvre une loi de commande qui n'utilise a priori que l'information présente sur la sortie y . Cependant, il va de soi qu'une autre information est accessible, à savoir celle contenue dans le signal de commande u .

Le principe pourrait tout simplement être de déterminer un scalaire de retour k ainsi qu'un autre scalaire de précommande H de telle sorte que la loi de commande

$$u = ky + Hy_c$$

confère au système bouclé (dont la matrice d'état est alors $A_f = A + BkC$) les propriétés requises. Cependant, procéder de la sorte se révèle extrêmement ardu pour plusieurs raisons. Entre autres, il semble difficile d'atteindre un niveau de performance souhaité en ne jouant que sur un seul paramètre de retour k . Par exemple, comment placer tous les pôles du modèle bouclé avec un seul degré de liberté ? Pour cette raison, il est rare de se contenter d'un retour statique de la sortie y mais il est souvent envisagé d'effectuer un retour dynamique, c'est-à-dire que la sortie y est rebouclée sur l'entrée u au travers d'un autre système dynamique comme le montre la figure 8.1.

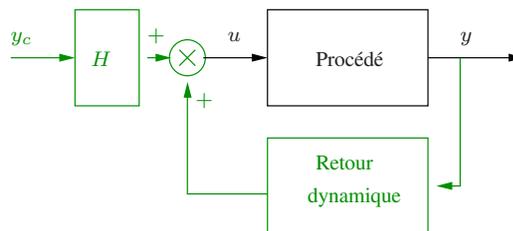


FIGURE 8.1 – Principe du retour dynamique

Il est alors nécessaire de déterminer une représentation d'état du système dynamique de retour qui confère au système bouclé global un bon comportement.

En outre, si l'on se réfère au chapitre précédent, une loi de commande de type retour d'état est souvent judicieuse pour obtenir des performances spécifiées, tant statiques que transitoires. Or, le vecteur d'état n'étant pas disponible dans le problème abordé ici, une autre solution consisterait alors à le reconstruire ou à le simuler. Pour ce faire, l'on pourrait utiliser la solution de l'équation d'état (4.7) mais ceci nécessiterait de connaître x_0 ce qui n'est pas le cas. Aussi faut-il trouver un autre moyen de reconstruire le vecteur x pour essayer de bénéficier des avantages d'un retour d'état.

En résumé, deux possibilités viennent d'être présentées : l'une consiste à construire un retour dynamique de sortie ; l'autre consiste à reconstruire le vecteur d'état pour ensuite appliquer un retour d'état. En réalité, les deux solutions peuvent être regroupées en une seule grâce au principe des observateurs présenté ci-après.

8.1.2 Principe de l'observation

Le principe de l'observation est d'utiliser u et y pour reconstruire un vecteur \hat{x} qui soit aussi proche que possible de x afin d'effectuer ensuite un retour d'état comme le montre la figure 8.2.

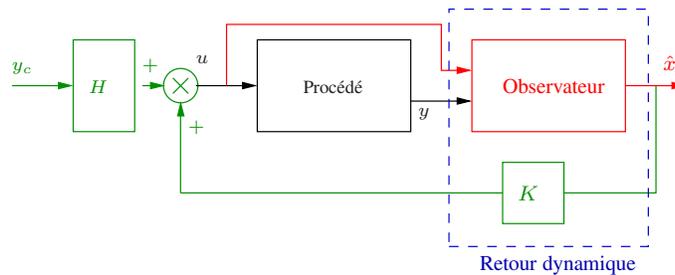


FIGURE 8.2 – Principe de l'observateur

Comme le montre cette figure, l'ensemble constitué de l'observateur (encore appelé reconstruteur d'état) et du retour d'état K constitue un retour dynamique proche de celui proposé par la figure 8.1. Toutefois, celui-ci comporte deux entrées : u et y .

Faire la synthèse d'un observateur consiste à déterminer, sur la base du modèle d'état du procédé, un modèle d'état pour l'observateur. Il existe plusieurs techniques pour réaliser cette synthèse mais avant d'en présenter deux, il convient auparavant de s'attarder un peu sur quelques points.

8.1.3 Propriété d'un observateur

La logique de l'observation est simple. Il est utopique de vouloir construire un observateur tel que $\hat{x}(t) = x(t) \forall t$. En effet, ceci signifierait que l'observateur réagit de manière infiniment rapide à une évolution de l'état du procédé même quand $\hat{x}(0) \neq x(0)$. En revanche, l'on peut espérer obtenir cette égalité en régime permanent. Ainsi si l'on définit l'écart vectoriel

$$\epsilon(t) = \hat{x} - x, \quad (8.1)$$

la propriété fondamentale que doit satisfaire un observateur est de répondre à un modèle tel que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0 \quad (8.2)$$

8.1.4 Condition d'existence d'un observateur

Dans ce paragraphe, il est proposé, sans démonstration, une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un observateur. Cette dernière est très simple :

L'on peut construire un observateur d'état si et seulement si la paire (A, C) est observable.

8.1.5 À propos de la transmission directe

Dans la suite de ce chapitre, l'on considère que la transmission directe est nulle ($D = 0$). Si ce n'est pas le cas, il suffit de poser le changement de variable

$$\check{y} = y - Du$$

et de réaliser les procédures présentées ci-après en remplaçant y par \check{y} . Une fois les calculs effectués, l'on revient au problème initial en effectuant le changement inverse.

8.2 Synthèse d'un observateur d'ordre minimal

Dans cette partie, il est question de synthétiser un observateur d'ordre minimal. l'on en donne d'abord la définition et la structure avant de proposer la procédure dite « de Luenberger » qui permet de réaliser cette synthèse.

8.2.1 Observateur d'ordre minimal

Il s'agit là d'un observateur dont le modèle d'état correspond à un vecteur d'état de dimension minimale. L'on peut démontrer que pour observer convenablement un vecteur d'état de dimension n , la dimension du vecteur d'état de l'observateur doit être au minimum de $(n - 1)$. Ceci conduit à un modèle d'observateur de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} &= Fz + Py + Ru \\ \hat{x} &= Lz + Qy. \end{cases} \quad (8.3)$$

avec $z \in \mathbb{R}^{n-1}$. Faire la synthèse d'un observateur consiste ici à déterminer convenablement $F \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$, $\{P; R\} \in \{\mathbb{R}^{n-1}\}^2$ et $Q \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire de faire en sorte que l'équation (8.2) soit vérifiée.

Si l'on supposait alors que l'on pût satisfaire

$$z = Tx, \quad T \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n},$$

et ce à tout instant, alors ceci amènerait :

$$\hat{x} = Lz + Qy = LTx + QCx = (LT + QC)x$$

ce qui, puisque l'on souhaite vérifier $\hat{x} = x$, conduirait à

$$LT + QC = I. \quad (8.4)$$

Mais, comme on l'a vu, il est utopique d'espérer $\hat{x} = x \forall t$ (c'est-à-dire ici $z = Tx$). En effet, cela n'a pas de sens de vouloir satisfaire l'égalité $z(t) = Tx(t) \forall t \geq 0$ dès lors que $z(0)$ n'est pas a priori égal à $Tx(0)$. Aussi l'on se contente d'essayer d'obtenir

$$z(t) = Tx(t) + \mu(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0. \quad (8.5)$$

Si l'on dérive μ , l'on obtient :

$$\dot{\mu} = \dot{z} - T\dot{x} = F\mu + (FT - TA + PC)x + (R - TB)u.$$

Dès lors, l'on peut imposer les contraintes

$$TA - FT = PC \quad \text{et} \quad R = TB.$$

Il reste alors

$$\dot{\mu} = F\mu,$$

ce qui signifie que (8.5) se vérifie lorsque F est stable au sens d'Hurwitz, c'est-à-dire ne possède que des valeurs propres à partie réelle négative. En prenant en compte la seconde équation de (8.3), il vient :

$$\hat{x} = (LT + QC)x + L\mu,$$

qui, si l'on impose (8.4), conduit à $\hat{x} = x$ en régime permanent, soit à (8.2).

Finalement, c'est par un choix judicieux du modèle (8.3) que l'on parvient à satisfaire (8.5). De manière plus précise, ceci consiste à :

- choisir F stable au sens d'Hurwitz et dont les modes sont plus rapides que ceux de A (l'idée est d'observer x plus vite qu'il n'évolue) ;
- choisir P et T tels que $TA - PC = FT$;
- calculer $R = TB$;
- déterminer L et Q tels que $LT + QC = I$.

La procédure de Luenberger permet d'effectuer les différentes étapes ci-dessus.

8.2.2 Procédure de Luenberger

Voici l'algorithme que propose Luenberger :

Étape 1 Vérification de l'observabilité de la paire (A, C) .

Étape 2 Changement de base pour obtenir une réalisation canonique d'observation. En réalité, cette forme correspond à la forme compagne verticale (3.13). L'on passe alors de la réalisation (A, B, C) à la réalisation $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$ en posant le changement de variable $x = N\underline{x}$. La matrice N est donnée par la relation :

$$(N')^{-1} = [n_1 \quad \dots \quad n_n] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_1 &= C' \\ n_2 &= (A' + a_{n-1}I)C' \\ n_3 &= ((A')^2 + a_{n-1}A' + a_{n-2}I)C' \\ &\vdots \\ n_n &= ((A')^{n-1} + a_{n-1}(A')^{n-2} + \dots + a_1I)C' \end{cases} \quad (8.6)$$

Étape 3 Choix de la dynamique de F . Pour cela, on décide d'un polynôme caractéristique de degré $(n - 1)$:

$$D_F(p) = p^{n-1} + f_{n-2}p^{n-2} + f_{n-3}p^{n-3} + \dots + f_1p + f_0.$$

Étape 4 Dédution de F : F est arbitrairement choisie sous forme compagne verticale

$$F = \begin{bmatrix} -f_{n-2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -f_{n-3} & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -f_1 & \vdots & \dots & \ddots & 1 \\ -f_0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Étape 5 Détermination (arbitraire) de T :

$$T = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ F & \vdots \\ & 0 \\ & 1 \end{array} \right]$$

Étape 6 Détermination de P à partir de l'équation

$$T\underline{A} - FT = P\underline{C}.$$

F étant prise sous forme canonique, l'on résoud l'équation dans la base canonique, c'est-à-dire en prenant \underline{A} et \underline{C} . Ceci a l'avantage, compte tenu des structures de F , \underline{A} , T , et \underline{C} et du fait que $P \in \mathbb{R}^{n-1}$ est un simple vecteur, de calculer P , dans la base canonique, grâce à

$$P = \{T\underline{A}\}_1 - \{FT\}_1,$$

où $\{\cdot\}_1$ est une notation correspondant à la première colonne d'une matrice.

Étape 7 Calcul de R :

$$R = T\underline{B}.$$

Étape 8 Détermination de Q et L : ces matrices doivent vérifier

$$Q\underline{C} + LT = I,$$

que l'on peut récrire

$$\begin{bmatrix} Q & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \hline T \end{bmatrix} = I.$$

Compte tenu des structures particulières des matrices impliquées dans l'égalité, il vient :

$$\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \hline T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -f_{n_2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -f_0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{n-2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & | & L \end{bmatrix}.$$

L'équation ci-dessus fait apparaître clairement Q et L .

Étape 9 Retour à la base initiale : en réalité, le modèle ainsi construit permet d'observer \underline{x} par l'état reconstruit $\hat{\underline{x}}$, sortie de l'observateur actuel. Pour retrouver \hat{x} , l'état reconstruit du procédé dans la base initiale, il suffit d'appliquer le changement de base

$$\hat{x} = N\hat{\underline{x}}.$$

L'on reviendra par la suite sur l'utilité véritable de cette étape.

Remarque 8.1 Si la paire (A, C) n'est pas observable, alors la matrice N n'est pas inversible et le changement de base devient impossible.

Exemple :

Si l'on revient à l'exemple (7.8) dans lequel la réalisation est caractérisée par les trois matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad C = [1 \quad 1],$$

l'on peut appliquer toutes les étapes de la procédure de Luenberger :

Étape 1 La matrice d'observabilité relative à la paire (A, C) est

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang plein donc la paire (A, C) est observable.

Étape 2 Le calcul de la matrice de passage N (même s'il n'est pas utile pour l'instant) conduit à :

$$(N')^{-1} = [n_1 \quad n_2] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_1 = C' & = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ n_2 = (A' - 3I)C' & = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

et donc à

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow N = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Étape 3 L'on décide de placer l'unique pôle de l'observateur à -5 ce qui mène à :

$$D_F(p) = p + 5 = f_1 p + f_0.$$

Étape 4 F est donc égale à -5 .

Étape 5 L'on en déduit

$$T = [-5 \quad 1].$$

Étape 6 Le vecteur P doit satisfaire

$$P = \{T\underline{A}\}_1 - \{FT\}_1 = -13 - 25 = -38.$$

Étape 7

$$R = T\underline{B} = TN^{-1}B = [-5 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Étape 8 Les matrices Q et L sont également facilement déduites :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Étape 9 Elle est implicite et pas vraiment utile pour l'instant.

8.3 Synthèse d'un observateur d'ordre plein

Dans cette partie, l'on considère que l'observateur est du même ordre que le procédé, soit n . La définition et la structure d'un tel observateur sont présentées avant de donner une procédure de synthèse.

8.3.1 Observateur d'ordre plein

Une structure classique d'un tel observateur consiste à exprimer ce dernier comme un système bouclé de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + Z(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (8.7)$$

Ici, le vecteur d'état de l'observateur est directement \hat{x} et la sortie de ce dernier, \hat{y} , ne sert qu'à réaliser un bouclage au sein de l'observateur lui-même comme le montre la figure 8.3.

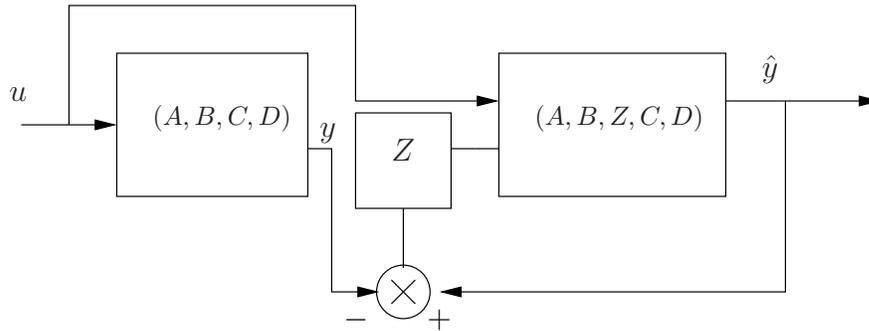


FIGURE 8.3 – Schéma de l'observateur d'ordre plein

Le modèle de l'observateur s'appuie clairement sur celui du système et il s'agit en fait de déterminer Z de telle sorte que la dynamique de l'observateur soit plus rapide que celle du procédé d'une part, et, d'autre part, que la relation (8.2) soit satisfaite. En effet, la réalisation (8.7) se réécrit

$$\dot{\hat{x}} = (A + ZC)\hat{x} + Bu - Zy \quad (8.8)$$

où l'on voit clairement que le choix de Z fixe la dynamique de la matrice d'état $\hat{A}_f = A + ZC$ de l'observateur. Ainsi, si l'on analyse l'évolution de ϵ , l'on constate que

$$\dot{\epsilon} = (A + ZC)\epsilon. \quad (8.9)$$

Il est donc nécessaire que $(A + ZC)$ soit stable au sens de Hurwitz, c'est-à-dire ait toutes ses valeurs propres à partie réelle négative, pour que l'on ait bien $\hat{x} = x$ en régime permanent. Dans le cas contraire (une valeur propre à partie réelle non strictement négative), ϵ ne peut tendre vers zéro.

La synthèse d'un observateur d'ordre plein revient donc à choisir Z pour fixer arbitrairement les pôles de l'observateur. C'est un problème dual de celui du retour d'état. En effet, les valeurs propres de $A + ZC$ sont celles de $A' + C'Z'$, matrice qui peut être identifiée à $A + BK$ avec $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow C'$ et $K \rightarrow C'$.

La synthèse d'un observateur de rang plein constitue un problème dual de la commande par retour d'état.

Sur la base de cette remarque, l'on peut établir un algorithme de synthèse d'un observateur d'ordre plein. Ceci est l'objet du paragraphe suivant.

8.3.2 Procédure de synthèse

Voici l'algorithme qui peut être facilement déduit de celui du placement de pôles par retour d'état. En fait, plutôt que de raisonner sur la matrice transposée $(A' + C'Z')$, l'on raisonne directement sur $(A + ZC)$ ce qui revient à travailler dans la base canonique d'observation.

Algorithme

L'on dispose d'un spectre désiré $\{\eta_i, i = 1, \dots, n\}$.

Étape 1 Vérification de l'observabilité. Si la paire (A, C) n'est pas observable, la synthèse de l'observateur risque d'être impossible.

Étape 2 Détermination du polynôme caractéristique désiré pour l'observateur :

$$\hat{D}_d(p) = \prod_{i=1}^n (p - \eta_i) = p^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \beta_1p + \beta_0.$$

Étape 3 Détermination du polynôme caractéristique en boucle ouverte :

$$D(p) = \det(pI - A) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0.$$

Étape 4 Calcul du retour d'état $\underline{Z} = [z_n \dots z_1]'$ dans la base canonique d'observation par l'équation.

$$z_i = a_{i-1} - \beta_{i-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (8.10)$$

Étape 5 Calcul de la matrice de passage N grâce à (8.6).

Étape 6 Calcul du retour d'état dans la base initiale :

$$Z = NZ \quad (8.11)$$

Exemple :

L'on reprend de nouveau l'exemple (7.8).

Étape 1 Déjà franchie. La paire (A, C) est observable.

Étape 2 L'on décide de placer un pôle double $\eta_1 = \eta_2 = -5$ sur l'observateur. Le polynôme caractéristique désiré pour cet observateur est donc

$$\hat{D}_d(p) = (p - \eta_1)(p - \eta_2) = (p + 5)^2 = p^2 + 10p + 25 = \beta_2p^2 + \beta_1p + \beta_0.$$

Étape 3 Le polynôme caractéristique du modèle du procédé est déjà connu :

$$D(p) = p^2 - 3p - 2 = a_2p^2 + a_1p + a_0.$$

Étape 4 Le retour d'état au sein de l'observateur est calculé dans la base canonique :

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - \beta_1 \\ a_0 - \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ -27 \end{bmatrix}.$$

Étape 5 La matrice de passage N est déjà connue :

$$N = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Étape 6 La matrice de retour calculée dans la base initiale est

$$Z = N\underline{Z} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -13 \\ -27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 \\ -66 \end{bmatrix}.$$

Remarque 8.2 Il est à noter que si l'on concatène les deux vecteurs d'état (celui du procédé et celui de l'observateur) en vecteur d'état unique, l'on obtient l'équation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -ZC & A + ZC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u.$$

Ceci montre bien que les pôles du système observé sont les pôles de l'observateur ajoutés à ceux du procédé.

8.4 Commande par retour d'état observé

La reconstruction du vecteur d'état a pour but ici de mettre en oeuvre une loi de commande par retour d'état lorsque le vecteur d'état n'est pas mesurable. Si l'on associe l'observateur et la loi de commande par retour d'état l'on obtient les schémas des figures 8.4 et 8.5.

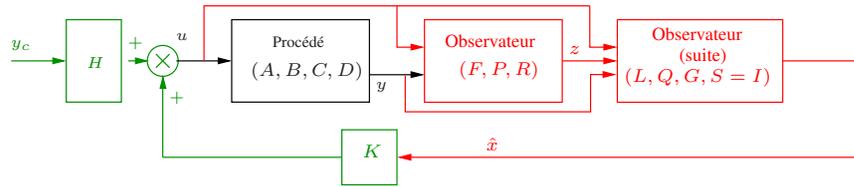


FIGURE 8.4 – Schéma d'un retour d'état par via un observateur de Luenberger

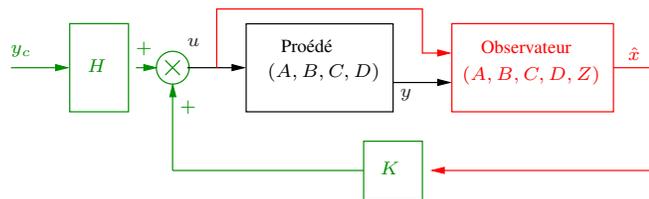


FIGURE 8.5 – Schéma d'un retour d'état par via un observateur d'ordre plein

Dans le cas du retour par observateur de Luenberger, l'observateur proprement dit peut être implanté de manière à observer l'état du procédé dans la base canonique d'observation (\hat{x}). C'est pourquoi la dernière étape de la procédure de Luenberger consiste à retrouver l'état observé dans la base initiale (\hat{x}) avant d'appliquer le retour K , comme le montre la figure 8.4. Pour ce choix d'observateur, le modèle global est d'ordre $(2n - 1)$.

Dans le cas du retour avec observateur d'ordre plein, l'observateur implanté correspond au modèle exprimé dans la base initiale ce qui permet ensuite d'appliquer directement le retour K . Pour ce second choix d'observateur, les équations du système global, qui est d'ordre $2n$, sont

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + Z(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \\ u = K\hat{x} + Hy_c. \end{cases}$$

En considérant le vecteur d'état $\xi = [x \ \epsilon]'$ où $\epsilon = \hat{x} - x$, il vient le modèle global suivant :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \begin{bmatrix} A+BK & BK \\ 0 & A+ZC \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} BH \\ 0 \end{bmatrix} y_c \\ y = [C \ 0] \xi. \end{cases} \quad (8.12)$$

Remarque 8.3 Comme suite à la remarque de 8.2, l'on voit dans l'équation d'état ci-avant que les pôles du système observé bouclé sont les pôles de l'observateur ajoutés à ceux du procédé bouclé par retour d'état.

Quoi qu'il en soit, dans les deux cas, la procédure de calcul d'une loi de commande par retour de sortie consiste d'une part à synthétiser un retour d'état, d'autre part à synthétiser un observateur. Il n'est donc pas utile de répéter la procédure dans sa globalité.

Exemple :

L'on reprend l'exemple du modèle (7.8) pour lequel un retour d'état et deux observateurs ont été synthétisés. C'est l'observateur d'ordre plein qui est ici pris en compte. En supposant que les conditions initiales sont toutes nulles, la réponse indicielle du système bouclé global est donnée par la figure 8.6. Elle est superposée à la réponse indicielle du système bouclé par retour d'état sans observation. L'on constate que les deux courbes sont parfaitement confondues. L'observateur remplit donc très bien son rôle. Par ailleurs, puisque x et \hat{x} sont tous deux nuls à l'origine du temps, l'observateur décrit immédiatement l'état du procédé sans qu'un régime transitoire de l'observation ne soit visible. Le régime transitoire de l'ensemble de la réponse est étroitement lié aux pôles λ_i du système qui sont placés par K . Le régime statique est assuré par la précommande H (ici de 1).

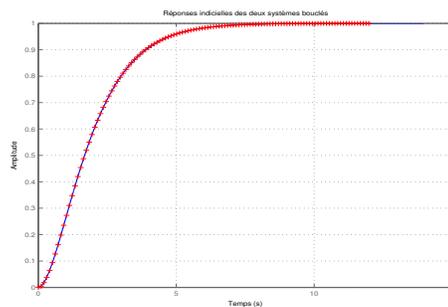


FIGURE 8.6 – Réponses indicielles à conditions initiales nulles.

En revanche, si l'on considère qu'à l'instant 0, l'on a $x(0) = [0, 5 \ -1]'$ et $\hat{x}(0) = [0 \ 0]'$, ce qui revient à considérer $\xi(0) = [0, 5 \ -1 \ -0, 5 \ 1]'$, et si l'on superpose la réponse indicielle du système bouclé par retour d'état direct avec celle du système observé bouclé, l'on constate cette fois-ci une différence, comme le montre la figure 8.7. Cette différence est liée au régime transitoire de l'observation liée à la dynamique de l'observateur c'est-à-dire aux pôles η_i de cet observateur. Il est donc essentiel de choisir convenablement cette dynamique (plus rapide que celle du système).

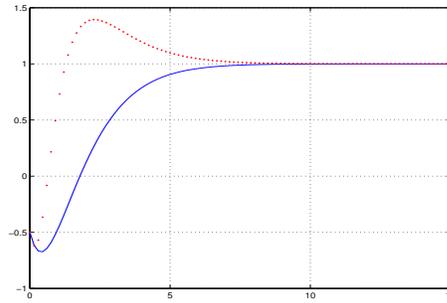


FIGURE 8.7 – Réponses indicielles à conditions initiales non nulles

Remarque 8.4 Dans le cas où le procédé est soumis à l'influence d'une perturbation en échelon, l'on peut, comme il est montré à la fin du chapitre précédent, ajouter un intégrateur en amont de la chaîne directe et procéder à un retour d'état augmenté observé. La présence d'un observateur ne change pas le principe de l'adjonction d'intégrateurs.

Chapitre 9

Introduction à la représentation d'état discrète

Dans ce chapitre, une première approche de la version discrète des représentations d'état linéaires est proposée. Il ne peut en aucun cas s'agir d'un cours sur les systèmes discrets, mais plutôt d'un aperçu rapide. À cette fin, des rappels sur les signaux sont néanmoins nécessaires, avant d'introduire le modèle d'état discret. La relation entre ce modèle et la fonction de transfert en z est résumée. Les concepts de réponse temporelle, stabilité, commande sont également très brièvement abordés.

9.1 Rappels sur les signaux

9.1.1 Signaux continus, discrets, quantifiés, non quantifiés

Un signal peut être vu comme une quantité, notée f , qui varie dans le temps, de sorte que $f(t)$ est une fonction ou une distribution du temps. Plus simplement, un signal se caractérise par une amplitude f (généralement associée à une grandeur physique) qui évolue en fonction du temps t . L'on peut distinguer différentes classes de signaux selon les valeurs que peuvent prendre f et t . Ainsi l'on peut faire une première distinction sur le temps t :

- les signaux à temps continu ou simplement « *signaux continus* » : ceux-ci sont tels que l'amplitude f est définie quel que soit le temps t (cas (a) et (b) de la figure 9.1) ;
- les signaux à temps discret ou simplement « *signaux discrets* » : ceux-là sont tels que l'amplitude f est définie à des instants précis du temps (le temps est alors « discrétisé » : cas (c) à (f) de la figure 9.1).

Par ailleurs, l'on fait une autre distinction sur l'amplitude f :

- les *signaux non quantifiés* pour lesquels f peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle continu (cas (a-c-e) de la figure 9.1) ;
- les *signaux quantifiés* pour lesquels f est un nombre quantique c'est-à-dire qu'il ne peut prendre que des valeurs discrètes bien définies (l'amplitude est alors discrète : cas (b), (d) et (f) de la figure 9.1).

Un signal continu et non-quantifié est appelé *analogique* (*analog signal* en anglais) tel que celui dessiné sur la figure 9.1, cas (a). Dans les ouvrages sur le sujet, il arrive que l'on ne distingue pas signaux continus et analogiques sans que cela ne soit nécessairement problématique. Toutefois, ces deux vocables ne sont pas synonymes et la classe des signaux analogiques constitue un sous-ensemble des signaux continus.

De même, un signal discret et quantifié est qualifié de *numérique* (*digital signal* en anglais) tels que ceux dessinés sur la figure 9.1, cas (d) et (f). Là encore, il arrive très souvent que l'on confonde signal discret et signal numérique bien que les signaux numériques constituent un sous-ensemble des signaux discrets.

Il se peut que pour un signal discret (numérique ou pas), les instants du temps pour lesquels l'amplitude f est définie soient régulièrement espacés, faisant apparaître une *période*, comme dans les cas (e) et (f) de la figure 9.1. Par ailleurs, l'on peut noter qu'un signal quantifié est tel qu'il existe toujours un intervalle minimal entre deux valeurs admissibles de l'amplitude f . Cet intervalle minimal est appelé *quantum*.

Remarque 9.1 *En toute rigueur, cette acception du mot « numérique » n'est pas tout à fait conforme au sens habituel que l'on en a. Un signal numérique est plus souvent vu comme un signal certes discret, mais pour lequel les valeurs définies de f sont régulièrement espacées dans le temps. De plus, son amplitude peut être codée de façon binaire et est alors manipulable par un ordinateur. De ce fait, un signal numérique au sens pratique du terme ne peut avoir une amplitude rigoureusement réelle.*

L'objet de ce chapitre est de s'intéresser aux signaux discrets et aux systèmes associés. Si les signaux continus sont bien modélisés par des fonctions mathématiques, les signaux discrets le seraient plutôt par des distributions. Cependant, il est plus facile de s'affranchir du temps en définissant un signal discret par une suite de valeurs successives que l'on indice. Ainsi les valeurs $f(t_0)$, $f(t_1)$, etc., en supposant que t_0 est l'origine du temps, sont notées f_0 , f_1 et appelées *échantillons* (voir figure 9.1.(e)). La séquence d'échantillons caractérisant le signal discret est notée $\{f_k\}$. L'indice k est alors un entier relatif qui peut, si on le souhaite, faire référence au temps.

Remarque 9.2 *Un modèle de signal discret sous forme d'une séquence d'échantillons est en réalité plus général qu'un modèle de signal un temps discret puisque la référence au temps n'est plus nécessaire. Il est donc possible de faire une nuance entre signaux discrets et signaux à temps discret même si cette nuance ne sera pas vraiment utile dans la suite de ce document.*

9.1.2 Transformation de signaux

9.1.2.1 Échantillonnage

Il est possible de transformer un signal continu en un signal discret. Ce processus est appelé *échantillonnage* ou *discrétisation*. Il est représenté sur la figure 9.2. Le signal est dit *discrétisé* ou *échantillonné*. Les instants d'échantillonnage ne sont pas nécessairement régulièrement espacés dans le temps. Toutefois, généralement, les échantillons sont « prélevés » à intervalles réguliers. La durée entre deux instants d'échantillonnage, notée T sur la figure 9.2, est appelée *période d'échantillonnage*.

9.1.2.2 Quantification

L'on peut aussi envisager le passage d'un signal non quantifié à un signal quantifié. Il s'agit de la *quantification*. Ceci consiste, par exemple, à forcer les valeurs non admissibles de $f(t)$ aux valeurs quantiques admissibles les plus proches. Ce processus est illustré pour un signal continu par la figure 9.3 (L'on peut aussi quantifier un signal discret).

Les valeurs admissibles d'un signal quantifié ne sont pas nécessairement régulièrement espacées. Toutefois, elles le sont généralement et l'écart entre deux valeurs, noté q sur la figure 9.3, est un donc un quantum appelé *quantum de conversion*.

Il est possible de recourir à l'échantillonnage et à la quantification à la fois. L'on parle alors de *numérisation*.

9.1.2.3 Blocage

Il est possible de définir la transformation d'un signal discret en un signal continu. Le principe consiste à faire en sorte qu'entre deux échantillons, l'amplitude du signal f reste bloquée sur les valeurs d'une fonction mathématique. Cette transformation est ici appelée *blocage*. La technique de blocage la plus classique consiste, entre deux échantillons f_k et f_{k+1} , à bloquer la valeur du signal à f_k . L'on parle alors de *bloqueur d'ordre zéro*. L'effet d'un tel bloqueur est illustré par la figure 9.4 où l'on voit que le signal continu est alors un signal « en escalier ». Si l'on interprète le bloqueur d'ordre zéro comme un modèle continu associé à la fonction de transfert de $B_0(p)$, l'on peut déterminer cette fonction de transfert $B_0(p)$ en analysant la réponse impulsionnelle de ce bloc (cf. figure 9.5).

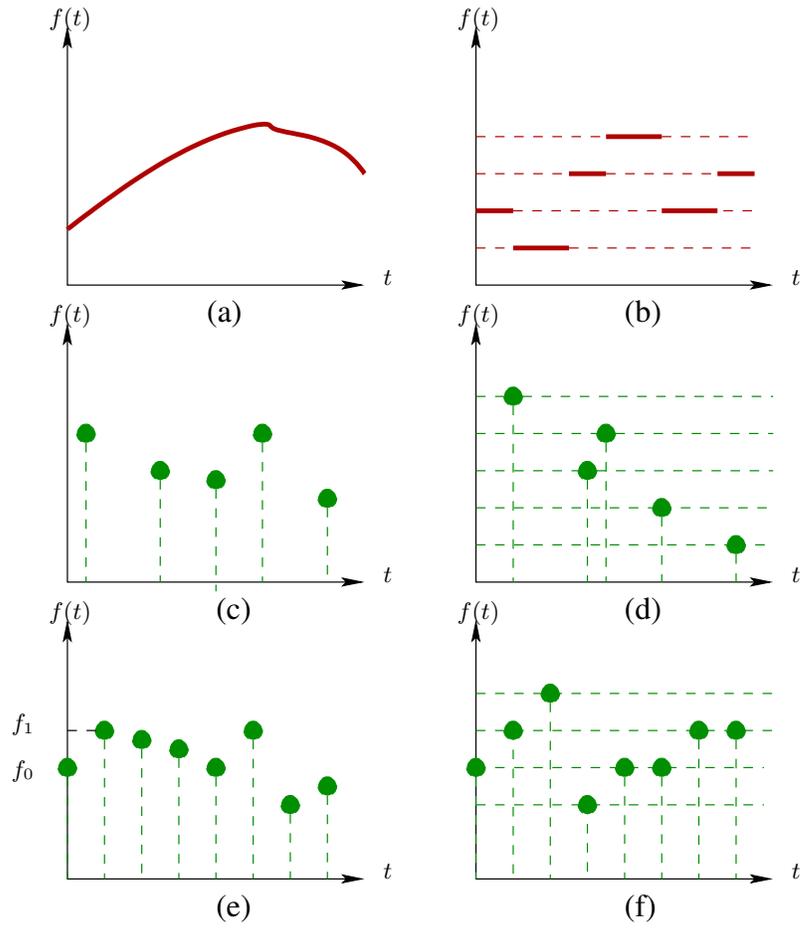


FIGURE 9.1 – Signaux continus et discrets

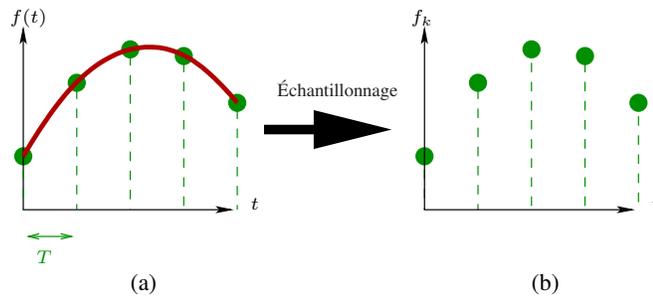


FIGURE 9.2 – Processus d'échantillonnage

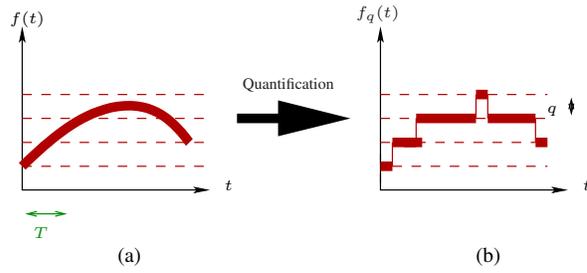


FIGURE 9.3 – Processus de quantification

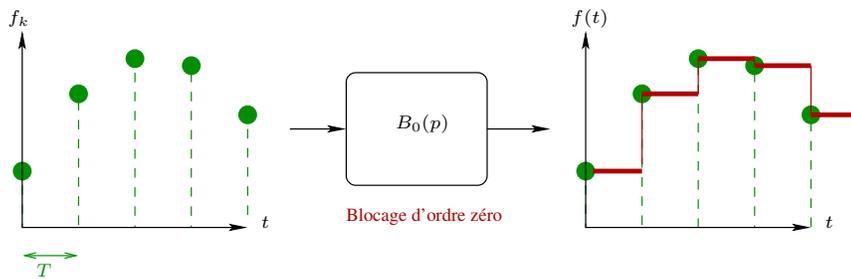


FIGURE 9.4 – Blocage d'ordre zéro

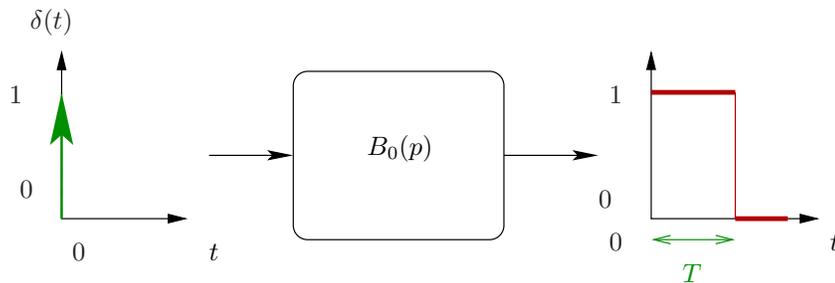


FIGURE 9.5 – Réponse impulsionnelle du bloqueur d'ordre zéro

La réponse d'un bloqueur d'ordre zéro à une impulsion de Dirac $\delta(t)$ est la somme de deux échelons unitaires :

$$y(t) = \Gamma(t) - \Gamma(t - T).$$

($\Gamma(t)$ représente la fonction de Heaviside). L'application de \mathcal{L} permet de déduire $B_0(p)$:

$$B_0(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-Tp}}{p} = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}. \quad (9.1)$$

Il est aussi possible d'envisager d'autres types de blocage tels que le blocage d'ordre 1 pour lequel le bloqueur utilise l'échantillon courant ainsi que le précédent pour bloquer l'amplitude f sur la droite définis par ces deux points. L'on peut aussi considérer toutes sortes d'interpolations plus ou moins sophistiquées à partir des échantillons. Ces cas de figure ne sont pas détaillés ici.

9.2 Systèmes discrets linéaires

Dans cette partie, un rappel est effectué sur la notion de système discret linéaire. Après une brève définition, deux types de modèles sont proposés : les modèles externes de transfert, c'est-à-dire l'équation récurrente et la fonction de transfert en z , puis le modèle interne, à savoir la représentation d'état. Un lien entre ces modèles est établi.

9.2.1 Définition

Un système discret est un système qui transforme une séquence d'échantillons d'entrée $\{u_k\}$ en une séquence d'échantillons de sortie $\{y_k\}$, comme le montre la figure 9.6.

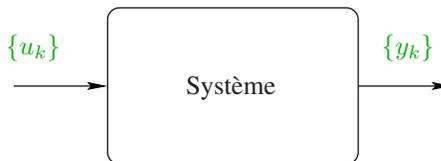


FIGURE 9.6 – Système discret

Un *système discret linéaire* est un système discret qui respecte le principe de superposition c'est-à-dire, à l'instar des modèles continus (cf. §1.2), qui vérifie

$$\{u_k\}_i \Rightarrow \{y_k\}_i \quad \forall i \Rightarrow \{u_k\} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \{u_k\}_i) \Rightarrow \{y_k\} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \{y_k\}_i), \quad \{\alpha_i\} \in \mathbb{R}^n. \quad (9.2)$$

9.2.2 Modèles externes

Dans ce paragraphe sont présentés deux modèles dits « externes », c'est-à-dire deux modèles de transfert qui proposent un lien direct entre la séquence d'entrée $\{u_k\}$ et la séquence de sortie $\{y_k\}$ sans préjuger des relations internes au système. Le premier modèle est l'équation récurrente. Le second est la fonction de transfert en z . Le lien entre ces deux modèles est obtenu grâce à la transformation en z .

9.2.2.1 Équation récurrente

De même que le comportement d'un système continu peut-être caractérisé par une equation différentielle telle que (2.2), un système discret peut être modélisé par une équation récurrente impliquant l'entrée u et la sortie y , et qui prend la forme suivante :

$$a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \dots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b_m u_{k+m} + b_{m-1} y_{k+m-1} + \dots + b_1 y_{k+1} + b_0 u_k. \quad (9.3)$$

Cette équation récurrente est linéaire à coefficients constants. L'on peut donc parler de systèmes discrets LTI.

Si l'on précise les conditions initiales sur $\{u_k\}$ et $\{y_k\}$ (à savoir $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_{m-1}$), le système est alors complètement défini.

L'équation récurrente est un modèle particulièrement indiqué pour une loi de commande car, dès lors que le système est *causal* ($m \leq n$), elle constitue un algorithme très facilement implantable dans un processeur. En effet, si l'on connaît entièrement $\{u_k\}$ ainsi que les conditions initiales, il est facile de faire reconstruire $\{y_k\}$ par un calculateur.

9.2.2.2 Transformation en z

Soit une séquence $\{f_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ (k est défini toujours positif ou nul (signal causal)). La transformation en z (opérateur symbolisé par \mathcal{Z}) de $\{f_k\}$ est définie par la série entière :

$$F(z) = \mathcal{Z}[\{f_k\}] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}. \quad (9.4)$$

L'image $F(z)$ de $\{f_k\}$ est appelée transformée en z de $\{f_k\}$. Les propriétés de l'opérateur \mathcal{Z} sont données en annexe D.

L'opérateur \mathcal{Z} est donc pour les signaux discrets ce qu'est l'opérateur \mathcal{L} pour les signaux continus. De même, la variable $z \in \mathbf{C}$ représente pour les signaux discrets ce que la variable de Laplace p représente pour les signaux continus, quoique l'interprétation « fréquentielle » de z soit plus difficile à appréhender.

Comme pour la transformation de Laplace, il est possible de calculer la transformée en z de fonctions usuelles. Un tableau de transformées est disponible en annexe D.

9.2.2.3 Fonction de transfert en z

De même que pour les signaux continus, l'on peut raisonner dans le domaine de Laplace, pour les signaux discrets, l'on peut raisonner dans le plan en z . Il s'agit alors d'appliquer \mathcal{Z} à l'équation récurrente (9.3). Compte tenu des propriétés de \mathcal{Z} (cf. annexe D), il vient :

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n) Y(z) \\ & - (a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n) y_0 - \dots - a_n z y_{n-1} = \\ & (b_0 + b_1 z + \dots + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m) U(z) \\ & - (b_1 z + \dots + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m) u_0 - \dots - b_n z u_{m-1}, \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire l'expression de la transformée en z de $\{y_k\}$ ainsi :

$$Y(z) = \underbrace{\frac{N(z)}{D(z)}}_{G(z)} U(z) + \frac{I(z)}{D(z)}$$

et, sachant que le polynôme $I(z)$ regroupe les conditions initiales, de définir la *fonction de transfert en z* :

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1z + \dots + b_{m-1}z^{m-1} + b_mz^m}{a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n}. \quad (9.5)$$

$G(z)$ est donc un modèle de comportement entrée/sortie qui caractérise le système indépendamment des conditions initiales (voir figure 9.7).

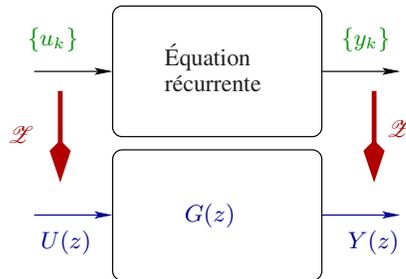


FIGURE 9.7 – Modélisation dans le plan en z

Comme dans le cas d'une fonction de transfert en p , le dénominateur $D(z)$ est appelé *polynôme caractéristique* et ses racines sont les *pôles* du système discret. De même, les racines de $N(z)$ sont les *zéros* du système discret.

9.2.3 Représentation d'état

Il s'agit d'exprimer le lien entre $\{u_k\}$ et $\{y_k\}$ en faisant intervenir des vecteur intermédiaires internes au système discret représenté par la figure 9.6. Ces variables internes constituent le vecteur d'état $x_k \in \mathbb{R}^n$ qui obéit à l'équation récurrente matricielle (évidemment linéaire) :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (9.6)$$

Il s'agit d'une **représentation d'état** du système discret qui est donc une modèle « interne » du système. Les matrices A , B , C et D portent le même nom que pour une représentation d'état continue et jouent le même rôle (cf. §3.2).

La représentation d'état d'un système discret n'est pas unique. Il suffit de changer la vecteur d'état x_k pour obtenir un autre modèle. Chaque choix correspond, comme en continu, à ce que l'on appelle une *réalisation*.

9.2.4 Lien entre les modèles

9.2.4.1 D'une réalisation à l'autre

Tout d'abord, il faut noter qu'il est possible de passer d'une réalisation à une autre en utilisant une transformation de similarité, c'est-à-dire en opérant un changement de base dans l'espace d'état. Les règles sont les mêmes que pour les systèmes continus (cf. §3.7) et l'on peut ainsi obtenir des *réalisations compagnes* ou *diagonales*.

9.2.4.2 De l'équation d'état à la fonction de transfert en z

Le procédé mathématique est le même qu'en continu si ce n'est que l'on utilise l'opérateur \mathcal{Z} plutôt que \mathcal{L} (cf. §3.6). Ainsi, la première équation récurrente de (9.6), par application de \mathcal{Z} , devient :

$$zX(z) = AX(z) + BU(z) \Leftrightarrow (zI_n - A)X(z) = BU(z).$$

Sous réserve d'inversibilité de $(zI_n - A)$, en prenant en compte l'équation de sortie, il vient :

$$G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D. \quad (9.7)$$

$G(z)$ est définie pour toute valeur de z assurant l'inversibilité de $(zI_n - A)$. En réalité cette matrice est inversible pour tout z vérifiant

$$D(z) = \det(zI_n - A) \neq 0.$$

En effet, le polynôme caractéristique $D(z)$, comme en continu, se déduit de A .

Les valeurs propres de A sont les pôles de $G(z)$.

9.2.4.3 De la fonction de transfert en z à l'équation d'état

Il existe bien sûr différentes façons de procéder puisque la représentation d'état n'est pas unique. L'on peut obtenir, à partir de $G(z)$, des formes compagnes ou diagonales. Les méthodes de passages sont exactement les mêmes que pour les systèmes continus (cf. §3.5).

9.3 Systèmes échantillonnés

9.3.1 Pourquoi étudier les modèles discrets ? (notion de système échantillonné)

Il s'agit dans cette partie de justifier l'introduction d'un modèle discret pour des problèmes pratiques d'Automatique. En réalité, les procédés à commander sont très rarement discrets mais plutôt continus. Alors pourquoi étudier un modèle discret ? Il existe plusieurs raisons mais la principale est que les progrès en informatique ont permis l'implantation, sur des calculateurs, de lois de commande de plus en plus sophistiquées. Toutefois, cette implantation se fait au format numérique ce qui suppose que le processus de commande (qui sera ici appelé *contrôleur* même s'il s'agit d'un anglicisme) manipule des signaux numériques (donc discrets). Si le procédé est un système continu et le contrôleur un système discret, il convient de prévoir une interface entre les deux, comme précisé sur la figure 9.8. Sur cette figure, les signaux $u(t)$ et $y(t)$ sont continus (éventuellement analogique pour $u(t)$; forcément analogique pour $y(t)$ si le procédé est linéaire) ; les signaux $\{u_k\}$ et $\{y_k\}$ sont discrets (éventuellement numériques). Bien que ce formalisme ne l'exige pas nécessairement, les signaux discrets sont ici supposés faire apparaître une période d'échantillonnage T .

Un système continu précédé d'un bloqueur et suivi d'un échantillonneur est un système discret particulier que l'on appelle *système échantillonné*.

Remarque 9.3 À propos des systèmes échantillonnés et des systèmes bouclés, il est important de noter qu'un système échantillonné puis bouclé n'est pas équivalent au même système bouclé puis échantillonné.

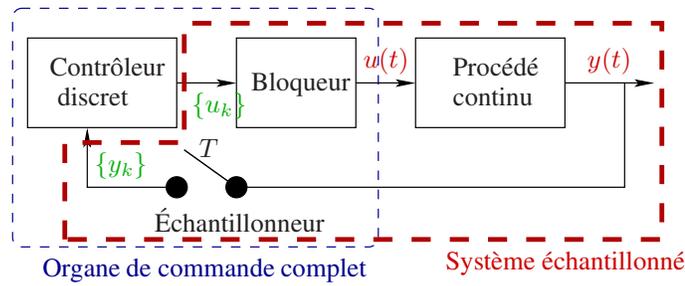


FIGURE 9.8 – Système continu discrétisé bouclé

9.3.2 La commande numérique

En pratique, le contrôleur discret est un organe informatique (processeur) qui ne manipule, par essence, que des signaux numériques. Lorsque qu'un procédé est asservi par un tel organe, l'on parle de *commande numérique*. Le principe en est résumé par la figure 9.9.

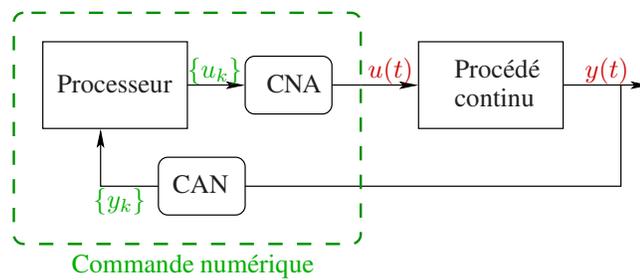


FIGURE 9.9 – Schéma de principe de la commande numérique

Dans ce cas, les signaux $\{u_k\}$ et $\{y_k\}$ sont numériques. Le signal $y(t)$ est continu et même analogique si le procédé est linéaire. Quant au signal $u(t)$, il est continu mais quantifié (donc pas analogique).

Sur la figure apparaît un **CAN** (Convertisseur Analogique Numérique). Il joue le rôle d'échantillonneur mais aussi de quantificateur. Cette quantification est inhérente au codage des valeurs du signal y en binaire, codage qu'effectue le CAN. Ce dernier peut aussi parfois intégrer le capteur de mesure. De plus, le **CNA** (Convertisseur Numérique Analogique), qui porte mal son nom, intervient en fait comme bloqueur d'un signal numérique en un signal continu (non analogique !). Ce blocage est inhérent au décodage des valeurs binaires de $\{u_k\}$ par le CNA.

Le processeur exécutant l'algorithme de commande est un contrôleur discret et même numérique car il reçoit un signal numérique $\{y_k\}$ et restitue un signal numérique $\{u_k\}$.

Il faut noter que puisque un processeur est cadencé à une certaine fréquence, les signaux numériques font apparaître une période d'échantillonnage T qui dépend de la fréquence d'utilisation du processeur mais aussi des convertisseurs. En outre, le CAN implique un quantum de conversion q dont l'effet est sans doute parfois perceptible bien qu'il ne soit que très rarement considéré dans les cours sur les systèmes échantillonnés.

Quoi qu'il en soit, cette commande numérique n'est qu'un cas particulier de la commande discrète schématisée sur la figure 9.8. C'est pourquoi l'étude des modèles discrets, leur analyse et leur commande se révèlent utiles.

9.3.3 Échantillonnage et théorème de Shannon

L'on s'intéresse ici à l'effet de la conversion analogique numérique. Comme souvent dans l'étude des systèmes échantillonnés, l'effet de la quantification est négligée de sorte que la conversion se résume à l'échantillonnage. Cette prise d'échantillons est assimilable à la modulation du signal continu de sortie $y(t)$ par un peigne de Dirac, c'est-à-dire un train d'impulsions unitaires. Ainsi, l'on construit un signal décrit par

$$y^*(t) = y(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT),$$

où T est toujours la période d'échantillonnage et $\delta(\cdot)$ représente l'impulsion de Dirac. Il vient :

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \delta(t - kT),$$

où l'on voit apparaître les éléments y_k de la séquence $\{y_k\}$.

Il est absolument essentiel, pour que la commande numérique soit efficace, que la boucle ramène une information pertinente sur la dynamique du système. En d'autres termes, il est capital que le signal $y^*(t)$ « capture » convenablement la dynamique de $y(t)$ qui n'est autre que la dynamique du procédé continu lui-même. Ainsi, pour que les échantillons y_k soient représentatifs de cette dynamique, il convient de faire un choix judicieux de T . Une étude plus approfondie des signaux échantillonnés a conduit Shannon à affirmer :

Théorème de Shannon strict. La fréquence d'échantillonnage doit être deux fois supérieure à la plus grande fréquence contenue dans le spectre de $y(t)$.

Cette assertion est établie sur la base d'arguments théoriques rigoureux mais n'est pas facilement applicable en pratique. Pour des cas concrets, l'on considère souvent une fréquence d'échantillonnage dix fois supérieure à la plus grande fréquence de cassure du modèle continu du procédé.

Théorème de Shannon pratique. La fréquence d'échantillonnage doit être au moins dix fois supérieure à la plus grande fréquence de cassure du modèle du procédé.

Il est bien sûr tentant d'échantillonner le plus rapidement possible pour que le modèle échantillonné se révèle le plus proche possible du modèle continu. Idéalement, une période nulle ($T = 0$) ne trahit en rien la dynamique du système. Mais ceci est utopique. Il subsiste toujours un temps d'échantillonnage. Bien que ce dernier soit modélisé selon une modulation par un peigne de Dirac, chaque échantillon n'est pas obtenu instantanément. Le CAN présente toujours un temps de conversion. Par ailleurs, il est nécessaire que le processeur dispose de temps pour exécuter l'algorithme et actualiser la commande u_k à chaque période. Il faut aussi que le CNA ait le temps de bloquer u_k . C'est pourquoi, malgré les progrès réalisés dans le domaine des circuits microélectroniques permettant des échantillonnages toujours plus rapides, il reste utile de formaliser un modèle échantillonné.

9.3.4 Obtention d'un modèle échantillonné

Dans ce paragraphe, un modèle de système échantillonné est proposé. L'hypothèse d'un bloqueur d'ordre zéro est retenue de sorte que le système échantillonné est celui représenté sur la figure 9.10.

Une première partie rappelle brièvement un résultat concernant la fonction de transfert discrète $G(z)$ d'un tel système. Une seconde partie détaille un peu plus l'obtention du modèle d'état.

9.3.4.1 Calcul de $G(z)$

Puisque le bloqueur d'ordre zéro peut être vu comme un modèle continu dont la fonction de transfert $B_0(p)$ est donnée en (9.1), il est toujours possible d'appliquer la formule :

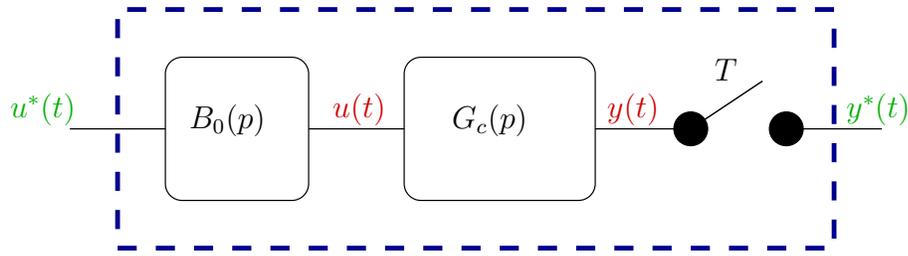


FIGURE 9.10 – Système échantillonné à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro

$$G(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}(B_0(p)G_c(p))]. \quad (9.8)$$

Cependant, il existe aussi un résultat obtenu par l'étude des propriétés de la transformée en z (voir cours sur les signaux échantillonnés) :

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G_c(p)}{p} \right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{G_c(p)}{p} \right]. \quad (9.9)$$

Exemple :

Soit la fonction de transfert continue :

$$G_c(p) = \frac{1}{p(p+2)} \quad (9.10)$$

La fonction de transfert en z de ce procédé échantillonné à $T = 1$ s se calcule par

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-p}}{p} \frac{1}{p(p+2)} \right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{p^2(p+2)} \right] \\ \Leftrightarrow G(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{0,5}{p^2} - \frac{0,25}{p} + \frac{0,25}{p+2} \right], \end{aligned}$$

soit, en utilisant les tableaux donnés en annexe D,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow G(z) &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{0,5z}{(z-1)^2} - \frac{0,25z}{z-1} + \frac{0,25z}{z-0,1353} \right] \\ \Leftrightarrow G(z) &= \frac{0,2838z + 0,1485}{(z-1)(z-0,1353)}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

9.3.4.2 Modèle d'état

L'on suppose que le procédé continu de fonction de transfert $G_c(p)$ apparaissant sur la figure 9.10 est représenté par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) = C_c x(t) + D_c u(t) \end{cases} \quad (9.12)$$

Pour une condition initiale x_0 sur l'état, la solution de l'équation ci-dessus se déduit de la relation (4.7). En outre, si l'on applique cette relation sur l'horizon $[kT; (k+1)T]$, alors le bloqueur d'ordre zéro maintient le signal d'entrée à $u(t) = u_k$, x_0 devient x_k et l'état final est x_{k+1} . L'on obtient :

$$x_{k+1} = e^{A_c T} x_k + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_c((k+1)T-\tau)} B_c u_k d\tau,$$

ce qui, en opérant le changement de variable d'intégration $\alpha = (k+1)T - \tau$, devient

$$x_{k+1} = e^{A_c T} x_k + \left(\int_0^T e^{A_c \alpha} d\alpha \right) B_c u_k. \quad (9.13)$$

De plus, l'équation de sortie est vérifiée à tout instant, donc en particulier lorsque $t = kT$. De fait il vient

$$y_k = C_c x_k + D_c u_k. \quad (9.14)$$

(Ceci traduit simplement le fait que \mathcal{Z} est un opérateur linéaire). L'identification de (9.13) et (9.14) d'une part, avec (9.6) d'autre part, permet de déduire les formules de d'échantillonnages suivantes :

$$\begin{aligned} A &= e^{A_c T} & ; & & B &= \int_0^T e^{A_c \alpha} B_c d\alpha; \\ C &= C_c & ; & & D &= D_c. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Remarque 9.4 Si la matrice dynamique A_c est non singulière, il est possible de calculer la matrice B en utilisant une relation plus simple :

$$B = A_c^{-1} (e^{A_c T} - I) B_c. \quad (9.16)$$

Il est important de noter que la relation unissant A_c à A se vérifie aussi sur les valeurs propres de ces dernières.

$$\begin{aligned} \lambda_i \text{ valeurs propres de } A_c, i = 1, \dots, n \\ \updownarrow \\ \mu_i = e^{\lambda_i T} \text{ valeurs propres de } A, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Exemple :

L'on reprend l'exemple du paragraphe 9.3.4.1. Une réalisation compagne verticale est donnée par

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c x + B_c u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = C_c x = [1 \ 0] x. \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer une réalisation pour le système échantillonné associé. En utilisant (9.15), il est facile de voir que $C = C_c$ et $D = 0$. Pour une période T , (9.15) conduit à

$$A = e^{A_c T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

et

$$B = \left(\int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2\alpha}) \\ 0 & e^{-2\alpha} \end{bmatrix} d\alpha \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(T + \frac{e^{-2T} - 1}{2} \right) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}.$$

Si l'on prend $T = 1s$, il vient :

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0,4323 & 0,2838 \\ 0 & 0,1353 & 0,4323 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

En appliquant la formule (9.7), l'on retrouve l'expression de $G(z)$ donnée en (9.11).

9.4 Réponse d'un système discret

Cette partie s'intéresse à la réponse des systèmes discrets. Bien que cette réponse puisse être obtenue en partant d'un modèle externe (équation récurrente ou fonction de transfert en z), ce document se focalise sur le modèle interne, à savoir l'équation d'état.

Trois sous parties sont considérées. La première établit la réponse temporelle d'un système discret, dans sa forme générale, en résolvant l'équation d'état. La seconde se concentre sur le cas spécifique des systèmes échantillonnés. Une troisième partie introduit la notion de modes d'un système discret.

9.4.1 Réponse du modèle d'état

9.4.1.1 Réponse par résolution de l'équation d'état

Il est facile de voir, pour un état initial x_0 , que application (9.6) conduit à

$$x_1 = Ax_0 + Bu_0,$$

puis

$$x_2 = Ax_1 + Bu_1 = A(Ax_0 + Bu_0) + Bu_1 = A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1.$$

La logique de cette récurrence conduit à écrire

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u_j. \quad (9.17)$$

En utilisant l'équation de sortie, la réponse d'un modèle discret est donnée par

$$y_k = CA^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} (A^{k-j-1} B u_j) + D u_k. \quad (9.18)$$

L'on voit clairement que, dans cette réponse, la matrice A est élevée à différentes puissances. Il est donc essentiel de pouvoir calculer A^k .

9.4.1.2 Calcul de A^k

Trois méthodes sont ici proposées :

- **Calcul direct** : il s'agit tout simplement d'enchaîner de façon récurrente de calcul de $A^0 = I$, A , $A^2 = A.A$, $A^3 = A^2.A$, etc., jusqu'à $A^k = A^{k-1}.A$. Pour simplifier ce calcul, il est possible de s'aider du théorème de Cayley-Hamilton, comme il est expliqué au paragraphe 4.3.1.

- **Méthode modale** : il s'agit de passer par la forme canonique de Jordan. Ainsi, si M est telle que $A = MJM^{-1}$, où J est une matrice de Jordan, il est facile de vérifier que $A^k = MJ^kM$. Une fois M déterminée, il faut calculer J^k et déduire M . Pour un bloc diagonal de J , l'on a

$$\begin{bmatrix} \lambda_h & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{h+l} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_h^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{h+l}^k \end{bmatrix}.$$

Pour un bloc de Jordan de dimension m , l'on a

$$\begin{bmatrix} \lambda_h & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_h & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_h \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_h^k & \mathcal{C}_n^2 \lambda_h^{k-1} & \mathcal{C}_n^2 \lambda_h^{k-2} & \dots & \mathcal{C}_n^m \lambda_h^{k-m+1} \\ 0 & \lambda_h^k & \mathcal{C}_n^2 \lambda_h^{k-1} & \dots & \mathcal{C}_n^{m-1} \lambda_h^{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_h^k \end{bmatrix},$$

où les scalaires \mathcal{C}_i^j sont les coefficients de la formule du binôme de Newton correspondant aux combinaisons :

$$\mathcal{C}_i^j = \frac{i}{(i-j)!j!}.$$

- **Utilisation de \mathcal{Z}** : la transformée en z de l'équation du système autonome $x_{k+1} = Ax_k$ s'écrit

$$zX(z) - zx_0 = AX(z) \Leftrightarrow X(z) = (zI - A)^{-1}zx_0,$$

sous réserve d'inversibilité de $(zI - A)$. Comme la solution du système autonome est $x_k = A^k x_0$, par identification, l'on déduit

$$A^k = \mathcal{Z}^{-1}[(zI - A)^{-1}z].$$

9.4.1.3 Réponse d'un système échantillonné.

Dans ce paragraphe, un problème essentiel est abordé. Sans entrer dans le détail, des précautions à prendre dans l'étude d'un système échantillonné sont exposées. Si l'on se reporte à la figure 9.10, l'on peut noter que la sortie $\{y_k\}$ du modèle discret n'est que la version échantillonnée de la véritable sortie du procédé, c.-à-d. $y(t)$. Or c'est cette dernière qui constitue la grandeur pertinente. Une fois le modèle discret établi, il est possible, comme le montrent les paragraphes précédents, de déterminer $\{y_k\}$ à partir de $\{u_k\}$. Cependant, $y(t)$ n'est pas reconstituée pour autant. Il faut alors distinguer deux cas :

- **Étude en boucle ouverte** : ce cas ne pose généralement pas trop de problème. L'application pratique du théorème de Shannon (cf. §9.3.3) dans le choix de T permet souvent d'obtenir un signal discret $\{y_k\}$ qui rend bien compte des dynamiques contenues dans le signal continu $y(t)$. Une interpolation des échantillons y_k doit donner une bonne idée de la forme de $y(t)$;
- **Étude en boucle fermée** : Malgré un choix pertinent de T en boucle ouverte, la commande numérique peut introduire des dynamiques plus rapides dans le système de sorte que T devient inappropriée en boucle fermée. Il faut alors envisager deux options :
 - recourir à un outil de calcul numérique pour reconstituer $y(t)$, la sortie du modèle continu excité par une commande discrète ;
 - diminuer T pour rendre l'échantillonnage de $y(t)$ représentatif de sa forme.

9.4.2 Analyse de la réponse : étude des modes

À l'instar de l'analyse faite du régime transitoire des modèles d'état continus (cf. §4.4), et conformément à la propriété de A^k et de sa forme modale, l'on peut constater que les valeurs propres λ_i de A ont une influence prépondérante sur la forme de $\{y_k\}$.

Pour simplifier, en supposant que A ne possède que des valeurs propres distinctes $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, l'on a :

$$\text{diag}_{i=1, \dots, n} (\lambda_i^k) = V^{-1} A^k V,$$

avec la matrice modale V qui vérifie

$$V = [v_1 \quad \dots \quad v_n] \quad \text{et} \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_n \end{bmatrix}.$$

Si l'on définit les matrices N_i de rang 1 par

$$N_i = v_i w'_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

l'expression (9.17) se récrit

$$x_k = \sum_{i=1}^n N_i \left(\lambda_i^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} (\lambda_i^{k-j-1} B u_j) \right).$$

Une telle réponse fait apparaître n termes impliquant des puissances de λ_i . Chaque terme associé à une valeur propre λ_i est appelé *mode du système discret*. Par abus de langage, l'on appelle parfois λ_i mode, assimilant ainsi mode, pôle et valeur propre.

Bien que les matrices N_i , qui sont de manière non triviale liées aux zéros du système, aient une influence certaine sur la forme de $\{x_k\}$ (donc $\{y_k\}$), ce sont surtout les valeurs propres λ_i elles-mêmes qui déterminent l'allure du mode associé. Les différents cas possibles peuvent se résumer par le tableau 9.1.

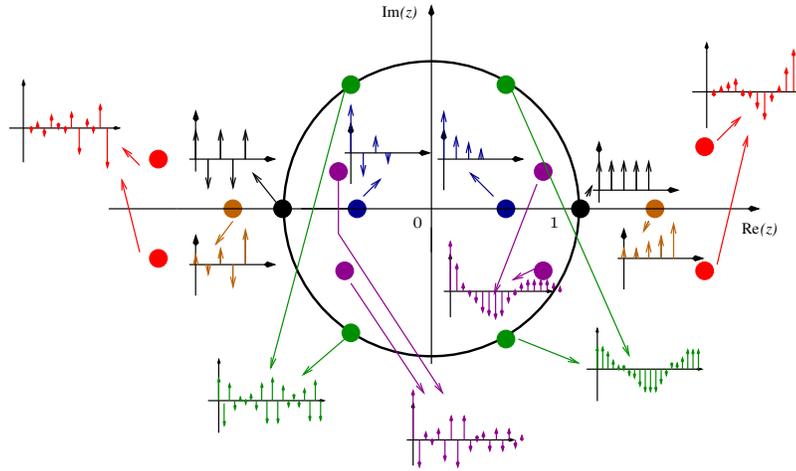
Valeur propre	Comportement du mode associé
$ \lambda_i > 1$	Mode divergent
$ \lambda_i < 1$	Mode convergent
$ \lambda_i = 1$	Mode entretenu
$\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$	Oscillation du mode
$\text{Re}(\lambda_i) < 0$	Changement de signe à chaque échantillon
$\text{Im}(\lambda_i) = 0$ et $\text{Re}(\lambda_i) \geq 0$	Pas d'oscillation du mode

TABLE 9.1 – Différents comportements des modes

Tous les comportements des différents modes sont répartis sur $\{x_k\}$ et sur $\{y_k\}$ par les matrices N_i, B et C . Quoi qu'il en soit, les comportements possibles sont résumés sur la figure 9.11.

Il existe deux sources d'oscillation d'un système discret :

- la présence de modes complexes (qui peut être liée à un mode complexe du procédé continu si l'on a affaire à un système échantillonné) ;
- la présence de modes à partie réelle négative (cette oscillation est due uniquement à la discrétisation dans le cas d'un système échantillonné).

FIGURE 9.11 – Allure des modes en fonction de la localisation de λ_i dans le plan en z

9.5 Stabilité d'un système discret

Il s'agit dans cette partie de reprendre les éléments du chapitre 5 sur la stabilité des modèles continus et de donner des équivalences pour le cas discret. Le lecteur est donc fortement incité à se reporter au chapitre 5.

9.5.1 Stabilité BIBO

Il n'y a pas de différence fondamentale avec le cas continu ce qui conduit tout naturellement à la définition suivante :

Un système discret est stable au sens BIBO (ou encore au sens entrée/sortie) si et seulement si, quelle que soit l'état initial $x_0 = x(0)$, pour toute entrée $\{u_k\}$ bornée, la sortie $\{y_k\}$ l'est aussi.

Là aussi, il est difficile d'exploiter cette définition. La notion de stabilité des états d'équilibre est donc privilégiée.

9.5.2 Stabilité interne

9.5.2.1 Définition et recherche d'un état d'équilibre

Un système se trouve dans un état d'équilibre (par état, l'on entend un point de l'espace d'état c.-à-d. une instance du vecteur d'état) si cet état n'est pas modifié lorsque le système est abandonné à lui-même.

Un système livré à lui-même est qualifié d'autonome ($u_k = 0, \forall k \in \mathbf{N}$). Un point d'équilibre x_e est une solution en x_k de l'équation :

$$x_{k+1} = Ax_k \Leftrightarrow (A - I)x_k = 0. \quad (9.19)$$

Deux cas se présentent alors. Soit la matrice $(A - I)$ est régulière et seule l'origine de l'espace d'état ($x_e = 0$) est un point d'équilibre. Soit $(A - I)$ est singulière et il faut résoudre (9.19) pour déterminer l'infinité des points d'équilibre.

9.5.2.2 Stabilité

Le stabilité d'un point d'équilibre se définit, comme dans le cas des modèles continus, de la façon suivante :

Un état d'équilibre est dit asymptotiquement stable si, lorsque le système est écarté de cet état sous l'effet d'une perturbation, il y revient (en un temps infini).
 L'état d'équilibre est dit instable, si après perturbation, le système s'en éloigne davantage.
 L'état d'équilibre est dit simplement stable si après perturbation, le système reste dans un voisinage du point d'équilibre.

Comme pour les modèles continus, quel que soit le point d'équilibre x_e considéré, la stabilité de ce dernier dépend de A donc il est logique d'associer la stabilité du système autonome lui-même à la stabilité de son ou ses points d'équilibre.

9.5.3 Critère des racines

9.5.3.1 Résultat général

Comme dans le cas continu, l'on se réfère à l'équation du régime libre, à savoir

$$x_k = A^k x_0. \quad (9.20)$$

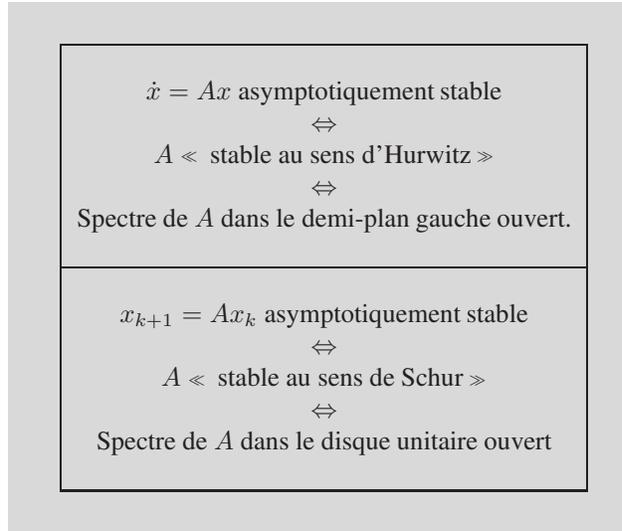
Une étude tout à fait similaire à celle qui est réalisée en continu, s'appuyant sur les valeurs propres de A (cf. §5.3.1), consiste à étudier la convergence des modes libres de x_k (voir §9.4.2), et conduit au résultat suivant :

- $\exists j \mid |\lambda_j| > 1$: le système est instable ;
- $\forall j \mid |\lambda_j| > 1$:
 - $|\lambda_i| < 1 \forall i$: le système est asymptotiquement stable ;
 - Les blocs de Jordan relatifs aux éventuelles valeurs propres λ_h telle que $|\lambda_h| = 1$ sont tous scalaires \Rightarrow le système est simplement stable ;
 - Il existe un bloc de Jordan non scalaire associé à une valeur propre λ_h telle que $|\lambda_h| = 1 \Rightarrow$ le système est instable.

Par ailleurs, l'on peut écrire :

Soit le système modélisé par (9.6). Ce dernier est dit asymptotiquement stable si et seulement si le système autonome associé $x_{k+1} = Ax_k$ est asymptotiquement stable, c'est-à-dire si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative.

Il faut donc en conclure que la région de stabilité asymptotique a changé par rapport au cas continu.



9.5.3.2 Stabilité interne et stabilité BIBO

À l'instar de ce qui a été affirmé pour les modèles à temps continu (cf. §5.3.1.5), l'on peut affirmer, par l'étude de l'équation (9.18) :

Le système décrit par une représentation (9.6) d'ordre n et de fonction de transfert $G(z)$ d'ordre n est BIBO-stable s' il est asymptotiquement stable.
 Il est BIBO-instable s'il est instable de manière interne.

9.5.3.3 Marge de stabilité

L'on peut définir, comme pour les systèmes continus, la marge de stabilité d'un système discret asymptotiquement stable :

Marge de stabilité absolue : distance minimale, dans le plan complexe, entre un point dont l'affixe est une valeur propre de A et le cercle unitaire. Mathématiquement, elle s'exprime

$$\sigma = \min_i (1 - |\lambda_i|). \quad (9.21)$$

En revanche, l'on ne définit pas (en tout cas de façon triviale) la marge de stabilité relative.

9.5.4 Critère de Jury

De même que pour les modèles continus, l'on peut déterminer le polynôme caractéristique $D(p) = \det(pI - A)$ et analyser le signe de la partie réelle de ses racines par le critère de Routh-Hurwitz, en discret, il est possible de déterminer le polynôme caractéristique $D(z) = \det(zI - A)$ et d'étudier le module de ses racines grâce au *critère de Jury*. Le critère n'est pas détaillé dans ce document. Il est déduit du critère de Routh-Hurwitz par une transformation bilinéaire qui permet de passer du demi-plan gauche au disque unitaire.

9.5.5 Méthode de Lyapunov

Ce paragraphe se réfère au paragraphe 5.3.3. Voici résumée la version discrète de la seconde méthode de Lyapunov.

Soit le modèle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) \\ f(0, \dots, 0) = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow x_e = 0 \text{ état d'équilibre.}$$

Il s'agit là d'un modèle de système autonome qui possède l'origine pour état d'équilibre. f est une fonction vectorielle non linéaire à plusieurs variables. L'adaptation de la seconde méthode de Lyapunov induit une condition suffisante pour vérifier la stabilité de cet état d'équilibre. Plutôt que de considérer la décroissance d'une fonction énergétique au travers de sa dérivée, l'on s'intéresse à un décrement de cette fonction énergétique. S'il existe une fonction V telle que $V(x_k) > 0 \forall x_k \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 \subset \Omega$, $(V(0) = 0)$ et telle que

$$\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0 \quad \forall x_k \in \Omega, x_k \neq 0$$

alors le modèle d'état discret non linéaire est asymptotiquement stable pour des conditions initiales dans un voisinage Ω de 0.

Si l'on s'intéresse à la stabilité asymptotique d'un système linéaire autonome

$$x_{k+1} = Ax,$$

la seconde méthode permet de voir qu'un tel système est asymptotiquement stable **si et seulement si** il existe une fonction de Lyapunov (quadratique) $V(x_k) = x_k' P x_k > 0$ ($\Leftrightarrow P = P' > 0$) telle que $\Delta(x_k) < 0$, $\forall x_k \neq 0$

$$\Leftrightarrow x_k'(A'PA - P)x_k < 0 \quad \forall x_k \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow A'PA - P < 0 \tag{9.22}$$

$$\Leftrightarrow \exists Q = Q' < 0 \text{ et } P = P' > 0 \mid A'PA - P = Q \tag{9.23}$$

Là encore, il n'est plus question de faire référence à l'origine de \mathbb{R}^n qui est de toute façon l'unique point d'équilibre. La condition devient nécessaire et suffisante. Enfin, il n'est pas restrictif de supposer que $V(x_k)$ est une fonction quadratique de x_k ce qui permet d'aboutir, soit à une inégalité matricielle donnée en (9.22), soit à une égalité matricielle donnée en (9.23), dont l'inconnue est, dans les deux cas, une matrice symétrique strictement définie positive. Ce sont, comme dans le cas continu, E. I. Jury et S. M. Ahn qui prouvèrent qu'un choix arbitraire de la matrice Q était possible. L'on peut donc résumer l'application de la théorie de Lyapunov aux modèles linéaires discrets à ceci :

Un modèle d'état discret linéaire (9.6) est asymptotiquement stable si et seulement si, quelle que soit la matrice symétrique définie négative Q , l'unique solution de l'équation

$$-P + A'PA = Q \tag{9.24}$$

est définie positive.

L'habitude consiste à choisir $Q = I$ pour effectuer le test.

L'annexe E reprend quelques aspects évoqués ci-avant.

En conclusion, il faut noter que tous ces critères de stabilité ne font intervenir que A . Ainsi, seule la matrice d'évolution détermine la stabilité du système.

9.5.6 Stabilité d'un système échantillonné

L'on s'intéresse ici au rapport entre la stabilité d'un procédé continu et la stabilité du système discret obtenu par échantillonnage de ce procédé continu.

9.5.6.1 Échantillonnage d'une boucle ouverte

L'on considère le schéma de la figure 9.10. Le procédé continu admet la réalisation (9.12). La matrice d'évolution A du système échantillonné se déduit donc de la matrice d'évolution A_c du procédé continu par la relation $A = e^{A_c T}$. Si l'on note $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, les valeurs propres de A_c et $\mu_i, i = 1, \dots, n$, les valeurs propres de A , l'on a vu qu'elles étaient liées par la relation (cf. §9.3.4.2) :

$$\mu_i = e^{\lambda_i T}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

d'où l'on déduit l'équivalence :

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \Leftrightarrow |\mu_i| < 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

La stabilité asymptotique d'un procédé linéaire continu est équivalente à la stabilité asymptotique du système discret obtenu par échantillonnage de ce procédé.

Il est possible de vérifier cette assertion en utilisant la théorie de Lyapunov. L'on constate alors que toute matrice de Lyapunov P obtenue pour le procédé continu est aussi matrice de Lyapunov pour le modèle échantillonné et réciproquement (cf. annexe E).

9.5.6.2 Bouclage d'un système échantillonné

L'on considère toujours un système échantillonné mais qui est ensuite bouclé comme le montre la figure 9.12.

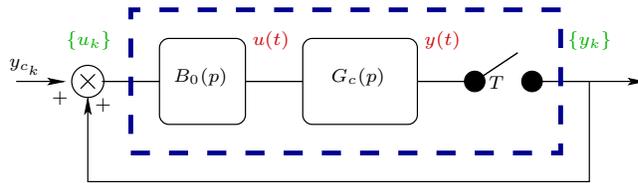


FIGURE 9.12 – Système échantillonné avec bouclage unitaire

Compte tenu de la réalisation continue (9.12) et des formules d'échantillonnage (9.15), le bouclage conduit, pour ce système discret bouclé, à la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \left(e^{A_c T} + \int_0^T e^{A_c T \alpha} B_c d\alpha \right) (1 - D)^{-1} C x_k + \left(\int_0^T e^{A_c T \alpha} B_c d\alpha \right) (1 - D)^{-1} y_{c_k} \\ y_k &= (1 + D(1 - D)^{-1}) C x_k + D(1 - D)^{-1} y_{c_k} \end{cases}$$

sous réserve que $D \neq 1$. L'on constate que la matrice dynamique en boucle fermée est grandement dépendante de T et à ce titre, T a une grande influence sur la stabilité de ce système discret bouclé. Il n'est donc pas question d'associer cette stabilité éventuelle à la stabilité éventuelle d'un quelconque système continu. Ceci rejoint l'idée formulée dans la remarque 9.3.

9.6 Commandabilité/observabilité d'un modèle discret

Cette partie propose, de façon résumée, un équivalent du chapitre 6 pour le cas des systèmes discrets. Le lecteur est invité à se référer au chapitre 6.

9.6.1 Définitions

9.6.1.1 Commandabilité

Soit le modèle d'état (9.6) d'un système linéaire dont l'état initial est à une valeur quelconque x_0 .

Le modèle est commandable si pour toute instance x_f du vecteur d'état, il existe une séquence finie d'échantillons d'entrée u_k ($k < \infty$) d'énergie bornée qui permet au système de passer de l'état x_0 à l'état x_f .

9.6.1.2 Observabilité

L'on s'intéresse toujours au même modèle que dans la partie précédente.

Le modèle est observable si, quel que soit l'état initial x_0 , il existe d'une séquence finie d'échantillons de sortie y_k (et éventuellement des échantillons d'entrée correspondants u_k) qui permet de retrouver x_0 .

9.6.2 Critère de Kalman

9.6.2.1 Commandabilité

Le résultat est complètement similaire à celui établi pour les modèles continus :

La paire de matrices (A, B) (ou le système (9.6)) est commandable si et seulement si

$$\text{rang}(Q_c) = n \quad \text{où} \quad Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

La matrice Q_c est dite matrice de commandabilité.

Démonstration : soit la réponse de l'état donnée par (9.17). L'on note que si Q_c est de rang plein, son image coïncide avec \mathbf{R}^n . De ce fait, n'importe quel $x_f \in \mathbf{R}^n$ admet un antécédent dans l'ensemble des commandes $\{u_0; u_1; \dots; u_{n-1}\}$. Il est donc possible d'atteindre x_f et la condition de Kalman est suffisante.

De plus, se pose la question de la nécessité. Q_c est supposée de rang inférieur à n . Soit la matrice Q_i définie par

$$Q_i = \begin{bmatrix} A & AB & \dots & A^{i-1}B \end{bmatrix}.$$

est-il possible qu'il existe une valeur de i telle que l'image de Q_i coïncide avec \mathbf{R}^n . Le théorème de Cayley Hamilton montre que, quel que soit i , la matrice $A^i B$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $B, AB, \dots, A^{n-1}B$. Ainsi le rang de Q_i ne peut excéder celui de Q_c et donc il existe des vecteurs dans \mathbf{R}^n qui ne peuvent être atteints. QED

Remarque 9.5 Tout état x_f peut être atteint en partant de x_0 grâce à une séquence d'entrée d'au plus n échantillons.

9.6.2.2 Observabilité

La paire de matrices (A, C) (ou le système (9.6)) est observable si et seulement si

$$\text{rang}(Q_o) = n \quad \text{où} \quad Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (9.26)$$

La matrice Q_o est dite matrice d'observabilité.

Démonstration : si l'on s'intéresse au système autonome, la réponse en y_k de ce système est

$$y_k = CA^k x_0.$$

Puisque y_k est de dimension 1 et x_0 de dimension n , il est nécessaire d'avoir n valeurs successives de y_k pour espérer retrouver x_0 à partir des échantillons y_k . Ceci conduit à écrire

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = Q_o x_0.$$

Le système peut se résoudre en x_0 (unique) si et seulement si $\text{rang}(Q_o) = n$. QED

9.6.2.3 Dualité des deux concepts

Il est important de noter, comme en continu, l'analogie entre les structures de Q_c et Q_o .

Dualité :

La paire (A, B) est commandable si et seulement si la paire (A', B') est observable.
La paire (A, C) est observable si et seulement si la paire (A', C') est commandable.

9.6.3 Critères s'appliquant aux formes de Jordan

Le principe étant rigoureusement le même que pour les modèles continus, le lecteur est invité à se reporter au paragraphe 6.3. Les résultats qui y sont mentionnés sont valables pour les modèles discrets.

9.6.4 Grammiens

Il s'agit ici d'apporter une analogie discrète aux notions présentées au paragraphe 6.4. Soit le modèle LTI discret donné en (9.6) et supposé *asymptotiquement stable*. L'on se propose ici de présenter un critère de commandabilité et d'observabilité qui repose sur les notions de grammiens.

9.6.4.1 Définition des grammiens

Le grammien de commandabilité W_c et le grammien d'observabilité W_o , également appelés matrices grammiennes, sont respectivement définies par

$$W_c = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k B B' (A')^k, \quad (9.27)$$

$$W_o = \lim_{k \rightarrow \infty} (A')^k C' C A^k, \quad (9.28)$$

d'où l'on retrouve bien que les deux propriétés sont duales l'une de l'autre.

9.6.4.2 Interprétation des grammien

Le grammien de commandabilité W_c est lié à l'énergie minimale du signal de commande $u(t)$ nécessaire pour amener l'état d'une condition initiale à une condition finale en un temps infini. La justification en est renvoyée en annexe F.

La paire (A, B) (respectivement la paire (A, C)) est commandable (resp. observable) si et seulement si le grammien de commandabilité W_c (resp. d'observabilité W_o) est strictement défini positif.

Comme en continu, les grammien fournissent des conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité ou de commandabilité et ils indiquent le nombre de variables d'état non commandables et non observables. En outre, ils permettent de quantifier cette propriété pour chaque variable d'état mais se limitent à l'étude des modèles asymptotiquement stables.

Remarque 9.6 *L'on peut démontrer que, quelle que soit la base de l'espace d'état considérée, le produit $W_c W_o$ conserve le même spectre (voir annexe F).*

9.6.4.3 Calcul des grammien

Les sommes définies en (9.27) et (9.28) sont difficilement utilisables pour le calcul des grammien. Il est facile, à l'instar de ce qui se fait en continu (cf. §6.4.3), d'affirmer :

Soit la réalisation (9.6), supposée asymptotiquement stable. Le grammien de commandabilité W_c et celui d'observabilité W_o sont les solutions respectives des équations de Lyapunov

$$-W_c + AW_c A' = -BB', \quad (9.29)$$

$$-W_o + A'W_o A = -C'C. \quad (9.30)$$

9.6.5 Modèles et structures

Il n'y a pas de différence majeure avec le cas continu et le lecteur peut se référer au paragraphe 6.5 pour y retrouver les principales notions. L'on retient juste :

L'équation récurrente ne représente que la partie observable du système discret.

La fonction de transfert en z ne représente que la partie commandable et observable du système discret.

9.6.6 Réalisation minimale

Là encore, il est inutile de reprendre toute l'étude pour le cas discret et, en se référant au cas continu, l'on peut écrire :

On appelle réalisation minimale ou irréductible d'un système LTI discret toute représentation d'état ne décrivant que la partie commandable et observable du système.

De ceci, l'on déduit que les pôles de la fonction de transfert en z d'un système discret sont égaux aux valeurs propres de toute réalisation *minimale* du système. Ainsi, il est possible qu'une fonction de transfert d'un système soit stable au sens de Schur mais qu'une réalisation non minimale de ce même système fasse apparaître une instabilité. Ceci correspond à une valeur propre instable qui n'est pas commandable et/ou pas observable.

9.7 Commande par retour d'état

Cette partie s'intéresse à la commande par retour d'état des systèmes discrets. Elle se réfère très largement au chapitre 7. Avant de brièvement jeter les bases de ce « retour d'état discret », un paragraphe est dédié aux différentes approches de la commande numérique. Une fois l'une des approches privilégiées, le problème du placement de pôles par retour d'état est abordé.

9.7.1 Les différentes approches de la commande numérique

Soit le principe de commande illustré par la figure 9.9. Il existe deux stratégies pour envisager cette commande :

- déterminer une loi de commande en continu, sur la base de $G_c(p)$, la fonction de transfert du procédé continu, ou d'une réalisation continue, puis approcher cette loi de commande analogique par une commande discrète qui aurait des performances similaires. Cette stratégie ne peut s'envisager que si T , la période d'échantillonnage est faible (Théorème pratique de Shannon largement respecté). Dans ce cas de figure, deux options quelque peu différentes sont alors possibles :
 - ◊ implanter la commande analogique en réalisant une approximation numérique des éventuelles intégrateurs ($1/p$) et dérivateurs (p);
 - ◊ prévoir par une transformation appropriée (reposant sur l'approximation de p ou $1/p$ par une fonction en z (« Euler avant », « Euler arrière », « Tustin ») quelque loi de commande discrète se rapprochant de la commande analogique puis implanter cette commande discrète sous forme de récurrence.

Il faut remarquer qu'un simple retour d'état est identique en continu et en discret puisqu'il s'agit d'une loi de commande statique.

- déterminer le modèle échantillonné puis en déduire une loi de commande discrète avant de l'implanter telle quelle.

C'est la seconde stratégie qui est ici privilégiée. Elle prend mieux en compte l'approximation liée à l'échantillonnage et par ailleurs, elle est utilisable pour un système non échantillonné (discret par essence ou échantillonné selon une variable qui n'est pas le temps).

9.7.2 Retour d'état discret

Le principe du retour d'état est le même que pour les modèles continus, à savoir qu'il suppose que toutes les composantes du vecteur d'état sont mesurées ce qui permet d'envisager la loi de commande suivante :

$$u_k = Hy_{c_k} + Kx_k, \quad \forall k \in \mathbf{N}. \quad (9.31)$$

Cette loi de commande, appliquée à un système discret décrit par (9.6) conduit au modèle discret bouclé :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= (A + BK)x_k + BH y_{c_k} \\ y_k &= (C + DK)x_k + DH y_{c_k}. \end{cases} \quad (9.32)$$

9.7.3 Placement de pôles par retour d'état

Comme on peut le voir dans (9.32), la matrice dynamique en boucle fermée est $A_f = A + BK$. Le problème de placement de pôles se formule donc toujours ainsi :

Placement de pôles :

Soient une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un vecteur $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, déterminer le vecteur $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tel que le spectre de $A + BK$ coïncide avec un spectre donné.

9.7.3.1 Commandabilité et placement de pôles

La condition pour pouvoir placer n pôles est la même qu'en continu, à savoir :

Le problème de placement de pôles par retour d'état admet une solution si et seulement si la paire (A, B) est commandable.

9.7.3.2 Technique de placement de pôles

Il est absolument inutile de détailler cette technique puisqu'elle est exactement la même que pour les modèles continus. Le lecteur doit donc se référer aux paragraphes 7.2 et 7.3, tant pour le calcul de la matrice de retour K que pour celui de la matrice de précommande H .

Il faut toutefois prendre deux précautions pour s'assurer de l'efficacité de la loi de commande.

Performances transitoires

Le choix des pôles est évidemment prépondérant dans les performances transitoires (cf. figure 9.11). Ce choix est moins facile qu'en continu. Une technique peut consister à choisir des pôles désirés pour un modèle continu et à chercher le polynôme caractéristique discret équivalent.

Performances statiques

Pour assurer un gain statique unitaire en boucle fermée, il faut se souvenir que le régime permanent d'un système continu correspond à $p = 0$. Pour un modèle discret, il correspond à $z = e^0 = 1$ (en effet, le régime statique s'exprime $x_{k+1} = x_k$ ce qui se traduit dans le domaine en z par $zX(z) = X(z) \Leftrightarrow z = 1$). Ceci conduit à la formule :

$$H = [D + (C + DK)(I - A - BK)^{-1}B]^{-1}. \quad (9.33)$$

Rejet de perturbation

De même qu'en continu, l'on peut insérer un intégrateur pour rejeter les perturbations en échelon se trouvant en amont de cet intégrateur dans la chaîne directe. Un intégrateur discret admet pour fonction de transfert

$$G(z) = \frac{1}{z - 1},$$

de sorte que si l'on adapte la figure 7.4 au cas discret, la récurrence liant \bar{u}_k et u_k s'exprime

$$u_{k+1} = u_k + \bar{u}_k.$$

En considérant u comme une nouvelle variable d'état et \bar{u} comme la nouvelle commande, l'on augmente de 1 l'ordre du modèle avec intégrateur et l'on peut ensuite calculer une loi de placement de pôles sur ce modèle d'ordre $(n - 1)$.

9.8 Commande par retour de sortie

Cette partie résume la version discrète du chapitre 8. L'idée est donc de construire un système discret qui observe l'évolution de l'état x_k (*observateur discret*) et d'utiliser son estimation de x_k pour réaliser ensuite une loi de commande par retour d'état. L'on se contente ici d'envisager la synthèse d'un observateur d'ordre n de vecteur d'état \hat{x}_k qui répond à la formulation suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + Z(\hat{y}_k - y_k), \\ \hat{y}_k = C\hat{x}_k. \end{cases} \quad (9.34)$$

Si l'on définit l'écart d'observation par

$$\varepsilon_k = \hat{x}_k - x_k,$$

alors la dynamique de l'observateur est donnée par l'équation

$$\dot{\hat{x}} = (A + ZC)\hat{x} + Bu - Zy. \quad (9.35)$$

Il faut d'abord donner l'assertion fondamentale qui est la même que pour les modèles continus :

Soit le système discret décrit par (9.6). L'on peut construire un observateur d'état si et seulement si la paire (A, C) est observable.

En outre, ce problème, comme en continu, peut être vu de manière purement matricielle et est dual du problème de placement de pôles. Par conséquent, il est inutile de reproduire la logique de calcul dans cette partie et le lecteur peut se référer au paragraphe 8.3 et en particulier le paragraphe 8.3.2 pour calculer Z et placer les pôles de $(A + ZC)$. Il va de soi qu'il faut choisir judicieusement la localisation des pôles à l'intérieur du disque unitaire pour fixer la dynamique de l'observateur discret.

Chapitre 10

Conclusion

10.1 Résumé du cours

Ce cours a balayé rapidement les concepts de base de l'Automatique des systèmes linéaires dans l'espace d'état. Trois des grands problèmes ont été abordés : la modélisation, l'analyse et la commande.

Concernant la modélisation, un nouveau modèle linéaire a été introduit pour décrire le comportement d'un système monovarié : la représentation d'état. Il a été expliqué que ce modèle n'est pas unique. Les moyens d'obtenir un tel modèle et le lien avec l'équation différentielle et la fonction de transfert ont été mis en évidence.

Concernant l'analyse, il a été montré que l'on pouvait utiliser la représentation d'état pour déterminer la réponse d'un système. La notion de valeurs propres de la matrice d'état s'est révélée fondamentale non seulement pour comprendre la forme de cette réponse mais également pour conclure quant à la stabilité du système.

Dans la partie relative à la commande, les notions de commandabilité et d'observabilité ont été introduites. Elles sont essentielles pour calculer des lois de commandes dites « par retour d'état », comprenant ou non un observateur d'état. Des techniques d'obtention de telles lois de commande ont été présentées.

10.2 Perspectives

Les perspectives d'étude qu'offre la représentation d'état sont nombreuses. Citons entre autres :

- L'étude des systèmes multivariables : la représentation d'état, bien plus que la fonction de transfert, se prête à l'extension des concepts étudiés au cas des systèmes possédant plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties. En effet, dans ce cas précis, B et C deviennent des matrices plutôt que de simples vecteurs mais le modèle varie peu.
- L'identification : il existe, comme dans l'approche fréquentielle, des techniques d'obtention de modèles qui s'appuient sur l'observation du comportement du système. Lorsque la phase de modélisation ne permet pas d'obtenir un modèle complet, l'on peut recourir à ces techniques d'identification. Elles font l'objet de cours spécifiques dans cette formation.
- La commande optimale : sous ce vocable sont regroupées un ensemble de techniques qui consistent à commander un modèle d'état tout en minimisant un critère de performances. Citons la commande LQ (minimisation d'un critère Quadratique (tel que l'énergie appliquée en commande) sous une contrainte Linéaire (le modèle du système)), les commandes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ (minimisation de la norme d'un transfert entre des perturbations et les sorties du système)...
- La robustesse : il s'agit là de faire l'étude de systèmes (analyse et commande) dont les modèles sont

incertains. L'on dit qu'ils sont sujet à des incertitudes. Le principe de l'analyse robuste est de savoir si un système a les propriétés souhaitées quelle que soit l'incertitude. Celui de la commande robuste est de déterminer une loi de commande qui assure les propriétés du modèle pour toute la gamme d'incertitudes possibles.

ANNEXES

Dans ces annexes, sont présentés quelques concepts qui permettent soit d'appréhender un peu mieux le contenu du cours, soit d'obtenir quelques compléments d'information de nature scientifique ou culturelle.

Annexe A

Rappels d'algèbre et d'analyse

Quelques notions d'algèbre linéaire et d'analyse sont ici brièvement rappelées. Il ne s'agit pas de présenter un petit cours de mathématiques mais simplement de rafraîchir la mémoire du lecteur s'il en est besoin.

A.1 À propos des matrices

L'on donne ici quelques définitions et propriétés des matrices. Une matrice $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$ peut être vue comme un « tableau » de $m \times n$ scalaires complexes m_{ij} à m lignes et n colonnes où m_{ij} est l'élément situé en $i^{\text{ème}}$ ligne et en $j^{\text{ème}}$ colonne. Une telle matrice est en réalité une représentation d'une application linéaire de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^m .

Exemple :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} = M = \begin{bmatrix} 1 & 2 + 3\mathbf{i} & 6 \\ -4 & 7 & 5 + \mathbf{i} \end{bmatrix}$$

A.1.1 Transposition et conjugaison

Soit la matrice $M = [m_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

Soit aussi la matrice $N = [n_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

- N est la transposée de M si et seulement si $n_{ij} = m_{ji}$, $\forall \{i; j\}$ (les lignes de M sont les colonnes de N et réciproquement). L'on note alors $N = M^T$.
- N est la transposée conjuguée de M si et seulement si $n_{ij} = \tilde{m}_{ji}$, $\forall \{i; j\}$ (les lignes de M sont les colonnes conjuguées de N et réciproquement). L'on note alors $N = M'$.

Exemple :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 + 5i \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 + 5i & 7 \end{bmatrix} \\ M' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 - 5i & 7 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Dans le cas de matrices réelles ($M \in \mathbb{R}^{m \times n}$), les deux opérateurs peuvent être confondus.

A.1.2 Matrices carrées

Une matrice est dite carrée si elle comporte le même nombre de lignes et de colonnes. Ce nombre est parfois appelé ordre de la matrice. Cette dernière représente une application de \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n) vers \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n) qui est

donc susceptible d'être automorphique.

Parmi les matrices carrées, certaines sont particulières, telles la *matrice nulle*, notée 0 , dont toutes les composantes sont nulles ($m_{ij} = 0, \forall \{i, j\}$) et la *matrice identité*, notée I , dont toutes les composantes sont nulles à l'exception de celles de sa diagonale principale qui sont égales à 1 ($m_{ii} = 1 \forall i$ et $m_{ij} = 0 \forall \{i, j \neq i\}$). 0 est l'élément neutre de l'addition des matrices de même dimension et l'élément absorbant de la multiplication. I est l'élément neutre de la multiplication¹ (voir ci-après).

Une matrice *triangulaire supérieure* n'a que des composantes nulles en dessous de sa diagonale principale ($m_{ij} = 0 \forall \{i, j < i\}$). Une matrice *triangulaire inférieure* n'a que des composantes nulles au dessus de sa diagonale principale ($m_{ij} = 0 \forall \{i, j > i\}$). Une matrice triangulaire inférieure et supérieure est dite *diagonale* ($m_{ij} = 0, \forall \{i, j \neq i\}$).

La matrice carrée complexe M est dite *Hermitienne* quand $M = M'$. Dans le cas où M est réelle, on a $M' = M^T = M$ et l'on dit alors de la matrice qu'elle est *symétrique*.

A.1.3 Opérations sur les matrices

A.1.3.1 Addition de matrices

Soient deux matrices $M = [m_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ et $N = [n_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ de mêmes dimensions alors leur somme $S = [s_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ est définie par

$$s_{ij} = m_{ij} + n_{ij} \quad \forall \{i, j\}.$$

L'on note $S = A + B$. Les propriétés de l'addition matricielle sont les suivantes :

- $A + B = B + A$ (commutativité);
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité);
- $s(A + B) = sA + sB, \forall s \in \mathbb{C}$;
- $\exists C \mid A + C = B$ et C est notée $C = A - B$ (différence);
- $A + 0 = A$ (élément neutre);
- $(A + B)^T = A^T + B^T$ (transposition de la somme);
- $(A + B)' = A' + B'$ (transposition-conjugaison de la somme).

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

A.1.3.2 Multiplication de matrices

Soient le vecteur $v = [v_1 \dots v_n]^T$ et le vecteur $w = [w_1 \dots w_n]^T$ de même taille. L'on définit le *produit scalaire* de v et w par

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

1. sous réserve de compatibilité des dimensions

À partir de ce produit scalaire de deux vecteurs, l'on peut définir le produit de deux matrices. Si l'on suppose que $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$ et $N \in \mathbb{C}^{n \times q}$ sont respectivement la concaténation en colonne de m vecteurs lignes $v^{[i]}$, $i = 1, \dots, m$ et la concaténation en ligne de q vecteur colonnes $w^{[j]}$, $j = 1, \dots, q$,

$$M = \begin{bmatrix} v^{[1]} \\ \vdots \\ v^{[m]} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N = [w^{[1]} \quad \dots \quad w^{[q]}],$$

alors le produit $P = [p_{ij}] = M \times N = MN \in \mathbb{C}^{m \times q}$ est défini par

$$p_{ij} = \langle v^{[i]}, w^{[j]} \rangle = \sum_{k=1}^n v_k^{[i]} w_k^{[j]} \quad \forall \{i; j\} \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, q\}.$$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

L'on note que la multiplication deux matrices M et N n'est définie que si le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N .

Le produit de deux matrices correspond à la composition de deux applications linéaires.

Les propriétés de la multiplication de matrices sont :

- $A(B + C) = AB + AC$ (distributivité à droite);
- $(A + B)C = AC + BC$ (distributivité à gauche);
- $A(BC) = (AB)C$ (associativité);
- $AB \neq BA$ (non-commutativité);
- $A \times I = A$ (élément neutre);
- $A \times 0 = 0$ (élément absorbant);
- $AB = 0$ n'implique pas toujours $A = 0$ ou $B = 0$;
- $AB = AC$ n'implique pas toujours $B = C$;
- $(AB)^T = B^T A^T$ (transposition du produit);
- $(AB)' = B' A'$ (transposition-conjugaison du produit).

Remarque A.1 Une matrice A carrée peut être élevée à une puissance k en définissant $A^k = A^{k-1} A$ et $A^0 = I$. Une matrice qui devient nulle pour une valeur de k est qualifiée de nilpotente.

A.1.4 Déterminant d'une matrice carrée

La définition du *déterminant* d'une matrice est un peu formelle pour nos besoins. Elle repose sur la notion permutation et pour des raisons de concision, elle n'est pas rappelée ici. L'on se contente de rappeler les règles de calcul pour des matrices carrées d'ordre 2 ou 3.

L'on note d'abord que le déterminant d'une matrice est un scalaire qui se déduit par calcul des compantes de la matrices.

A.1.4.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit la matrice carrée A ainsi composée :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de A est ainsi calculé :

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemple :

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) = 1 \times 4 - (-2) \times 3 = 10$$

A.1.4.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 ou plus

Soit A une matrice carrée d'ordre $n = 3$. L'on affecte un signe à chacune de ses composantes, en quinconce, de la façon suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^- & a_{13}^+ \\ a_{21}^- & a_{22}^+ & a_{23}^- \\ a_{31}^+ & a_{32}^- & a_{33}^+ \end{bmatrix}.$$

Chaque signe est noté $\text{sign}(i, j)$.

L'on note $\det_{ij}(A)$ le déterminant de la matrice 2×2 issue de A par élimination de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Il suffit alors de raisonner par rapport à la ligne (ou la colonne) k . L'on calcule :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n \text{sign}(k, j) a_{kj} \det_{kj}(A) = \sum_{j=1}^n \text{sign}(j, k) a_{jk} \det_{jk}(A).$$

En notant que $\text{sign}(i, j) = (-1)^{(i+j)}$, il vient

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{(k+j)} a_{kj} \det_{kj}(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{(j+k)} a_{jk} \det_{jk}(A). \quad (\text{A.1})$$

Exemple :

L'on raisonne, dans l'exemple ci-après, par rapport à la première ligne :

$$\det \left(\begin{bmatrix} 2^+ & 3^- & 5^+ \\ 1^- & 0^+ & 1^- \\ 2^+ & 1^- & 0^+ \end{bmatrix} \right) = 2 \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) - 3 \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right) + 5 \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = 9$$

La technique de calcul présentée ci-avant peut s'étendre à des matrices de dimension plus élevée c'est-à-dire que la formule (A.1) est valable pour $n > 3$.

A.1.4.3 Quelques propriétés du déterminant

- Une ligne ou une colonne nulle $\Rightarrow \det(A) = 0$.
- $\det(A^T) = \det(A)$.
- $\det(A') = (\det(A))$.
- Ligne ou colonne multipliée par $s \in \mathbb{C} \Rightarrow \det(A)$ multiplié par s .
- Si B est obtenue à partir de A en ajoutant à la $i^{\text{ème}}$ ligne (colonne) le produit d'un scalaire par une autre ligne (colonne) alors $\det(B) = \det(A)$.
- $\det(I_m + MN) = \det(I_n + NM)$ (Attention aux dimensions de M et N : MN et NM doivent être carrées).

A.1.5 Cofacteurs et matrice adjointe

L'on définit les *cofacteurs* d'une matrice carrée $A = [a_{ij}]$ par

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det_{ij}(A).$$

L'on remarque que le déterminant de A s'exprime alors

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{kj} \alpha_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{jk} \alpha_{jk}.$$

En outre, la *matrice adjointe* de A , notée $\text{adj}(A)$, est définie par la transposée des cofacteurs, à savoir

$$A = [a_{ij}] \Rightarrow \text{adj}(A) = [\alpha_{ji}].$$

A.1.6 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Le *polynôme caractéristique* d'une matrice carrée A est le polynôme en λ défini par

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Par ailleurs, $P(A) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton : toute matrice carrée vérifie son propre polynôme caractéristique).

A.1.7 Rang d'une matrice

L'on définit le rang r d'une matrice $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$ par le nombre maximal de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes de cette matrice. Elle est de rang plein si et seulement si $\min(m, n) = r$. Si ce n'est le cas, l'on dit que la matrice est déficiente en rang ou présente une déficience de rang.

Une matrice carrée A de rang plein est dite régulière. Dans ce cas, il vient $\det(A) \neq 0$. Par opposition, une matrice déficiente en rang est dite singulière et il vient alors $\det(A) = 0$. Bien souvent, le qualificatif « non-singulière » est préféré à « régulière ».

A.1.8 Matrices inverses

A.1.8.1 Définition et calcul

Une matrice carrée $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ admet une inverse de même dimension notée A^{-1} si et seulement si

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Une condition d'existence de A^{-1} est la non-singularité de A .

Pour calculer une inverse, l'on doit donc d'abord savoir si elle existe c'est-à-dire savoir si A est de rang plein, en montrant par exemple que $\det(A) \neq 0$. Puis les deux techniques de calcul les plus classiques sont :

- on résoud le système linéaire à n équations et n inconnues (fastidieux même pour un ordre faible) ;
- on applique la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

A.1.8.2 Propriétés des inverses

Sous réserve de compatibilité des dimensions et d'existence des diverses inverses :

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (inverse du produit) ;
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (inverse de la transposée) ;
- $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ (inverse de la transposée-conjuguée) ;
- $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$ (lemme d'inversion des matrices) ;
- $(I + A)^{-1} = I - (A^{-1} + I)^{-1}$ (lemme d'inversion des matrices simplifié).

A.1.9 Valeurs propres d'une matrice

A.1.9.1 Structure propre d'une matrice

$\lambda \in \mathbb{C}$ est *valeur propre* de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si et seulement si :

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Une matrice de dimension n a nécessairement n valeurs propres λ_i , $i = 1, \dots, n$. Pour simplifier, l'on supposera que celles-ci sont distinctes. Lorsque A est réelle, les valeurs propres constituent un ensemble auto-conjugué. Autrement dit, si λ est valeur propre de A , sa quantité conjuguée l'est aussi. Tous ces scalaires constituent un ensemble de cardinal n appelé *spectre* de A et parfois noté $\lambda(A)$.

Il existe n vecteurs $v_i \in \mathbb{C}^n$, $i = 1, \dots, n$ non nuls, appelés *vecteurs propres à droite*, tels que :

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{A.3})$$

Ces vecteurs propres sont tous définis à un facteur près.

Si l'on définit V , *matrice modale*, par :

$$V = [v_1, \dots, v_n] \quad (\text{A.4})$$

alors, il vient la relation :

$$\Lambda = V^{-1}AV \quad (\text{A.5})$$

où Λ est une matrice diagonale définie par :

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \quad (\text{A.6})$$

La détermination de Λ passe par celle de V . L'on parle de diagonalisation de matrice. Cette diagonalisation n'est pas toujours possible lorsque les valeurs propres ne sont pas distinctes. Des formes canoniques de Jordan peuvent néanmoins être calculées mais ceci n'est pas explicité ici.

L'on peut aussi définir les *vecteurs propres à gauche* u_i (également définis à un facteur multiplicatif près) par la relation

$$u'_i A = \lambda_i u'_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (\text{A.7})$$

En définissant la matrice U par la concaténation

$$U = [u_1, \dots, u_n], \quad (\text{A.8})$$

il apparaît, entre les matrices U et V , pour des choix de u_i et v_i convenablement mis à l'échelle, la condition d'orthogonalité :

$$U'V = I. \quad (\text{A.9})$$

L'ensemble constitué des valeurs propres et des vecteurs propres à gauche et à droite est appelé *structure propre*.

A.1.9.2 Propriétés des valeurs propres

Il est à noter que les valeurs propres d'une matrice carrée A vérifient les propriétés suivantes :

- $\lambda(A) = \lambda(A^T)$;
- $\lambda_i \in \lambda(A) \Rightarrow -\lambda_i \in \lambda(-A)$;
- $\lambda_i \in \lambda(A) \Rightarrow \bar{\lambda}_i \in \lambda(A')$;
- $\lambda_i \in \lambda(A) \Rightarrow \lambda_i^k \in \lambda(A^k)$;
- $\lambda_i \in \lambda(A) \Rightarrow s + \lambda_i \in \lambda(sI + A), \forall s \in \mathbb{C}$;
- les éléments diagonaux d'une matrice triangulaire sont ses valeurs propres.
- Les valeurs propres d'une matrice symétrique ou Hermitienne sont réelles.

A.1.9.3 Propriétés des vecteurs propres

Il est à noter que les vecteurs propres d'une matrice carrée A vérifient les propriétés suivantes :

- ils doivent être linéairement indépendants et constituent donc une base de \mathbb{C}^n ;
- ils sont orthogonaux pour une matrice Hermitienne diagonalisable (c.-à-d. $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \forall \{i; j \neq i\}$) et constituent donc une base orthogonale (et même orthonormale puisqu'ils peuvent être normalisés). L'on peut alors écrire

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v'_i.$$

Ces propriétés sont aussi vraies pour les vecteurs propres à gauche.

A.1.10 Rang d'une matrice carrée, déterminant et valeurs propres

Dans le cas d'une matrice carrée, l'on peut lier la notion de rang à celle de valeurs propres et de déterminant. En effet, le rang d'une matrice est égal à son ordre moins le nombre de ces valeurs propres nulles :

Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) La matrice A est inversible.
- (ii) La matrice A est non-singulière (de rang plein).
- (iii) $0 \notin \lambda(A)$.
- (iv) $\det(A) \neq 0$.

A.1.11 Trace d'une matrice

L'on définit la trace d'une matrice carrée $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ par :

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

La trace de A est donc la somme de ses éléments diagonaux. L'on peut par ailleurs montrer que c'est la somme de ses valeurs propres c.-à-d. :

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

De ce fait, toutes les matrices semblables ont la même trace. La trace est un scalaire complexe, également réel si A est réelle ou si A est complexe mais Hermitienne. En outre, sous réserve de compatibilité des dimensions, l'on a :

$$\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA) \tag{A.10}$$

$$\text{trace}(A + B) = \text{trace}(B + A) = \text{trace}(A) + \text{trace}(B) \tag{A.11}$$

A.2 À propos de la définition positive

A.2.1 Fonction définie positive

Une fonction $V(x, t)$ de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^+$ vers \mathbb{R} est dite localement *définie* (respectivement *semi-définie*) *positive* s'il existe une boule \mathcal{B} incluant l'origine de \mathbb{C}^n telle que :

- (i) $V(0, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$;
- (ii) $V(x, t) > 0$ (resp. $V(x, t) \geq 0$), $\forall \{x; t\} \in \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+$.

Lorsque la boule \mathcal{B} peut s'étendre à l'espace vectoriel \mathbb{C}^n , l'on dit simplement que la fonction V est définie (resp. semi-définie) positive.

Si V est (localement) définie (resp. semi-définie) positive alors la fonction $-V$ est dite (localement) définie (resp. semi-définie) négative.

Un cas particulier est d'un grand intérêt. Il s'agit de celui où la fonction V est une forme quadratique c'est-à-dire répond à la formulation $V(x) = x'Px$ où P est une matrice Hermitienne. Ce cas particulier conduit à la notion de définition positive d'une matrice (voir paragraphe suivant).

A.2.2 Matrices Hermitiennes définies en signe

Une matrice Hermitienne P est définie (resp. semi-définie) positive si et seulement si

$$x'Px > 0 \text{ (resp.) } x'Px \geq 0, \quad \forall x \neq 0$$

Si la propriété est vérifiée, alors la matrice Hermitienne $-P$ est définie (resp. semi-définie) négative.

La définition en signe d'une matrice Hermitienne est par définition équivalente à celle de la forme quadratique associée.

Quelques propriétés :

- $P = P' > 0 \Leftrightarrow \lambda(P) \subset \mathbf{R}^+$;
- $P = P' \geq 0 \Leftrightarrow 0 \in \lambda(P) \subset \{\mathbf{R}^+ \cup 0\}$;
- $P = P' > 0 \Leftrightarrow P^{-1} = (P^{-1})' > 0$;
- $P = P' > 0 \Rightarrow \det(P) \neq 0$;
- $P = P' \geq 0 \Rightarrow \det(P) = 0$;
- $P = P' > 0 \Rightarrow P$ admet une racine carrée notée $P^{1/2}$ telle que

$$\begin{cases} P = (P^{1/2})^2 ; \\ P^{1/2} > 0 ; \\ ((P^{1/2})^{-1})^2 = P^{-1} ; \end{cases}$$

- $M \in \mathbf{C}^{n \times n}$ et $\det(M) \neq 0 \Rightarrow P = M'M > 0$;
- $M \in \mathbf{C}^{n \times n}$ et $\det(M) = 0 \Rightarrow P = M'M \geq 0$;
- $P > 0$ (resp. ≥ 0) $\Rightarrow P$ admet une décomposition dite de Cholesky : $P = S'S$ avec $\det(S) \neq 0$ (resp. $\det(S) = 0$).

Annexe B

À propos du régime transitoire

Dans cette annexe, l'on revient quelque peu sur la notion de régime transitoire ou, plus exactement, sur les éléments qui influent sur le régime transitoire de la réponse d'un modèle LTI. Parmi ces éléments, l'on peut bien sûr citer les pôles dont l'influence a été établie dans le corps de ce document, mais aussi les vecteurs propres et les zéros du système.

Pour simplifier, la matrice A est toujours supposée diagonalisable dans ce qui suit.

B.1 Influence du spectre de la matrice d'état

L'on suppose que le système est en régime libre et est soumis à une perturbation instantanée (impulsionnelle) représentée par une condition initiale $x_0 = x(t_0)$. L'on s'intéresse alors à la réponse du système autonome $\dot{x} = Ax$ qui est la solution d'un système d'équations différentielles de premier ordre et est donné par

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Si l'on introduit la structure propre (cf. paragraphe A.1.9.1) de A dans cette expression, l'on obtient :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n v_i e^{\lambda_i t} u_i' x_0. \quad (\text{B.1})$$

Or, la décomposition de x_0 dans la base constituée par les vecteurs propres à droite de A peut s'exprimer par la combinaison linéaire suivante :

$$x_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j.$$

D'où l'on obtient

$$x(t) = \sum_{i=1}^n v_i e^{\lambda_i t} u_i' \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right).$$

Compte tenu de la condition (A.9) qui amène $u_i' v_j = 0, \forall \{i, j \neq 0\} \in \{1, \dots, n\}^2$ et $u_i' v_i = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, l'on a

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} v_i. \quad (\text{B.2})$$

L'on appelle mode réel la quantité $e^{\lambda_i t} v_i$ lorsque λ_i est réel et mode complexe la quantité $(e^{\lambda_i t} v_i + e^{\lambda_j t} v_j) \in \mathbb{R}$ lorsque $\lambda_i = \bar{\lambda}_j \in \{\mathbb{C} - \mathbb{R}\}$. Cette expression est essentielle car l'on constate que tous les termes de la réponse convergent vers zéro (donc le système est BIBO-stable) si et seulement si toutes les valeurs propres de A (parfois également appelées abusivement « modes ») sont à partie réelle négative. Plus précisément, l'on voit bien que le système retrouve d'autant plus vite sa position d'équilibre à l'origine que les parties réelles des valeurs propres de A sont très négatives (l'on parle de modes lents ou dominants et de modes rapides ou dominés). La rapidité de la réponse dépend de toute évidence des modes les plus lents. Bien entendu, la valeur de l'état initial x_0 conditionne aussi la forme de la réponse par le biais de $\{\alpha_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$.

De plus, l'on remarque que l'existence de valeurs propres complexes conjuguées induit un comportement oscillatoire dans la réponse du système. En effet, un mode complexe fait apparaître un sinus dans cette réponse. Le caractère oscillatoire d'un mode complexe est d'autant plus marqué que le rapport (en valeur absolue) entre la partie imaginaire et la partie réelle des valeurs propres correspondantes est élevé. Pour des systèmes de deuxième ordre ($n = 2$), ces considérations sont prises en compte pour définir un « coefficient d'amortissement » et une « pulsation propre non amortie » également définis dans le cadre du cours sur l'approche fréquentielle. Selon les valeurs de ces indicateurs, la nature de la réponse peut varier d'une absence d'oscillation à une très forte oscillation en passant par un léger dépassement. L'on se réfère souvent à ces indicateurs pour caractériser la dynamique dominante d'un système d'ordre plus élevé ($n > 2$) et donc ses performances en termes de temps de réponse, dépassement maximal, etc. Néanmoins, il importe de savoir que l'influence de chaque mode n'est pas toujours simplement dictée par la position de la (ou des) valeur(s) propre(s) associée(s).

Ce qu'il convient de retenir est que la localisation des valeurs propres de A dans le plan complexe (en particulier les modes dominants) est extrêmement utile pour caractériser le comportement d'un système ou pour spécifier les performances souhaitées d'un procédé à commander. Le spectre de A revêt donc une importance capitale dans le comportement du système. Les vecteurs propres associés ont également une influence puisqu'ils apparaissent dans (B.2). Leur influence est un peu mieux explicitée dans le paragraphe suivant.

B.2 Influence des vecteurs propres de A

B.2.1 Couplage modes/sortie

Dans la réponse du système en régime libre (B.2), l'on voit clairement apparaître les vecteurs propres à droite de A . Cette relation peut être ainsi détaillée :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_{1_1} \\ \vdots \\ v_{1_n} \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} \begin{bmatrix} v_{n_1} \\ \vdots \\ v_{n_n} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

L'on constate en examinant la relation (B.3) que la composante v_{i_j} distribue l'effet du mode λ_i sur l'état x_j . Ainsi, annuler v_{i_j} revient à éliminer l'influence de λ_i sur x_j . L'on en déduit que :

Les vecteurs propres à droite sont significatifs du couplage entre existant entre le spectre de A et le vecteur d'état.

Lorsque l'on s'intéresse à la sortie y , la matrice C exprime alors le couplage entre x et y donc plutôt que les vecteurs propres, ce sont les scalaires Cv_i qu'il convient d'étudier. L'on peut alors analyser le découplage modes/sortie.

Les scalaires Cv_i sont significatifs du couplage entre le spectre de A et la sortie y .

Cette assertion est vraie pour un système en boucle ouverte (il faut alors regarder les vecteurs propres à droite de la matrice A) mais aussi pour un système bouclé (il faut alors étudier les vecteurs propres à droite de la matrice $A_f = A + BK$).

Remarque B.1 Lorsqu'un scalaire Cv_i est nul, c'est-à-dire lorsque la sortie n'est pas affectée par le mode λ_i , ceci signifie que ce mode devient non observable.

B.2.2 couplage modes/commandes en boucle fermée

L'on rappelle qu'une loi de commande de type retour d'état est de la forme

$$u(t) = Kx(t).$$

Pour les besoins de l'explication, le terme de précommande est omis c'est-à-dire que le système bouclé est considéré en régime libre. Compte tenu de l'expression de $x(t)$, il vient

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i K v_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} k_j v_{ij}. \quad (\text{B.4})$$

La relation (B.4) permet de comprendre comment les vecteurs propres interviennent dans la répartition de l'effet des modes sur la commande du système bouclé¹. Il va de soi qu'en cas de bouclage comme ci-dessus, les scalaires λ_i désignent les valeurs propres de A_f et les v_i désignent leurs vecteurs propres à droite associés.

Dans le cas d'un modèle LTI bouclé par retour d'état $u(t) = Kx(t)$, les vecteurs Kv_i sont significatifs du couplage existant entre le spectre de A et la commande u .

B.2.3 Couplage modes/consigne en boucle fermée

Cette fois-ci, la précommande est présente de sorte que le système n'est pas en régime libre et la loi de commande est :

$$u(t) = Kx(t) + Hy_c(t).$$

La réponse du système au niveau de son vecteur d'état est

$$x(t) = \int_0^t e^{A_f(t-\tau)} B H y_c(\tau) d\tau$$

$$\Leftrightarrow x(t) = V \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} U' B H y_c(\tau) d\tau.$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \sum_i^n v_i \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u'_i B H y_c(\tau) d\tau = \sum_i^n \sum_{j=1}^n v_i \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u'_i b_j H y_c(\tau) d\tau. \quad (\text{B.5})$$

Grâce à (B.5), l'on comprend que le produit $u'_i B$ est significatif de l'interaction entre le signal de consigne et le mode λ_i . Ainsi, si ce produit est nul (u_i et B sont alors orthogonaux), le mode λ_i de la matrice dynamique $A_f = A + BK$ n'est pas excité par la consigne.

Les vecteurs propres à gauche ont une influence prépondérante sur la répartition de l'excitation en consigne sur les modes.

Remarque B.2 Lorsque le scalaire $u'_i B$ est nul et qu'ainsi le signal de consigne n'excite pas le mode λ_i , alors le mode λ_i est non commandable.

1. et non pas sur la consigne du système bouclé

B.2.4 En résumé sur les vecteurs propres

Il apparaît que l'effet du monde extérieur sur la dynamique interne d'un système LTI est décrit par la structure propre à gauche alors que la répartition de cette dynamique sur les sorties est essentiellement décrite par la structure propre à droite.

B.3 Influence des zéros

B.3.1 Les zéros d'un modèle d'état

Il est possible de définir les zéros d'un système dans l'espace d'état. Dans le cadre des systèmes multivariables, les définitions sont multiples et conduisent à quatre, voire cinq types de zéros dont les caractérisations ne sont pas équivalentes. En monovariante, de manière un peu simpliste, l'on peut définir les zéros d'un système comme les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ telles que la matrice

$$M(z) = \begin{bmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

présente une déficience de rang. L'on note qu'il n'est pas aisé de déterminer les zéros d'une réalisation mais cette définition a l'avantage d'utiliser une représentation d'état.

Si la réalisation est minimale (entièrement commandable et observable) alors, les zéros sont les racines du polynôme $N(p)$, le numérateur de la fonction de transfert $G(p)$. Dans le cas d'une réalisation non minimale, il peut exister des valeurs des zéros de la réalisation qui ne sont pas racines de $N(p)$. Ceci résulte d'une compensation dans $G(p)$ du facteur $(p - z)$ de $N(p)$ avec un facteur $(p - z)$ du dénominateur $D(p)$ (compensation pôle/zéro caractéristique des modèles non-commandables ou non observables (cf. paragraphe 6.5)).

Les zéros à partie réelle négative sont qualifiés de stables et ceux à partie réelle positive sont qualifiés d'instables.

B.3.2 Contribution des zéros

Même si les zéros ne déterminent pas la stabilité du système LTI, il va de soi qu'ils ont une influence sur le comportement transitoire du système. En effet, si l'on écrit la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{\prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - \lambda_i)},$$

alors une décomposition en éléments simples conduit à

$$G(p) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{(p - \lambda_i)}. \quad (\text{B.6})$$

L'on comprend en appliquant la transformée de Laplace inverse sur (B.6) et par une comparaison avec (B.1) (qui n'est pas détaillée ici) que les résidus r_i , qui sont dépendants de la valeur des zéros z_i , sont étroitement liés mais de manière non triviale, aux vecteurs propres v_i et u_i . À ce titre, ils ont donc une importance sur le comportement transitoire du système. De même par comparaison avec (B.5).

Mais il est assez difficile et souvent peu rigoureux d'apprécier correctement l'effet d'un zéro sur le régime transitoire. Pour résumer très grossièrement cet effet :

- les zéros compensés par des pôles non commandables et non observables n'ont aucun effet sur le régime transitoire d'une réponse sur la sortie y ;
- les zéros proches d'un pôle dans le plan complexe sont faiblement influents ;

- les zéros instables ont tendance à générer un dépassement de la réponse indicielle vers le bas alors que les zéros stables contribuent à l'éventuel dépassement vers le haut.

Annexe C

Formule d'Ackermann pour le placement de pôles par retour d'état

L'on se propose, dans cette annexe, de résoudre le problème du placement de pôles par retour d'état en utilisant la formule dite « d'Ackermann ». Cette formule est justifiée par le raisonnement ci-dessous.

C.1 Rappel du problème

Soit le système différentiel linéaire de premier ordre :

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}. \quad (\text{C.1})$$

L'on rappelle que le problème du placement de pôles consiste à trouver un vecteur K , associée à la loi de commande $u = Kx$, de sorte que

$$\det(pI - A_f) = D_d(p) = \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i).$$

La matrice $A_f = A + BK$ est la matrice dynamique du système bouclé

$$\dot{x} = A_f x. \quad (\text{C.2})$$

Le polynôme $D_d(p)$ est le polynôme caractéristique désiré pour ce système bouclé. Les scalaires $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, sont les racines de ce polynôme, c'est-à-dire les pôles désirés. La paire de matrices (A, B) est supposée commandable.

C.2 Résolution selon Ackermann

L'on peut écrire le polynôme $D_d(p)$ de la façon suivante :

$$D_d(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0.$$

Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, toute matrice carrée vérifie son propre polynôme caractéristique et l'on a

$$D_d(A_f) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Les différentes puissances de A_f jusqu'à l'ordre n peuvent être ainsi exprimées :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_f^0 = I \\ A_f^1 = A + BK \\ A_f^2 = A_f^1(A + BK) = A^2 + ABK + BKA_f \\ A_f^3 = A_f^2(A + BK) = A^3 + A^2BK + ABKA_f + BKA_f \\ A_f^4 = A_f^3(A + BK) = A^4 + A^3BK + A^2BKA_f + ABKA_f^2 + BKA_f^3 \\ \vdots \\ A_f^n = A_f^{n-1}(A + BK) = A^n + A^{n-1}BK + A^{n-2}BKA_f + \dots + ABKA_f^{n-2} + BKA_f^{n-1} \end{array} \right.$$

L'équation (C.3) peut alors se récrire

$$\begin{aligned} D_d(A_f) &= \alpha_0 I + \alpha_1 A_f^1 + \alpha_2 A_f^2 + \dots + \alpha_{n-1} A_f^{n-1} + \alpha_n A_f^n = 0. \\ \Leftrightarrow D_d(A_f) &= \alpha_0 I + \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \alpha_n A^n \\ &\quad + B(\alpha_1 K + \alpha_2 K A_f + \alpha_3 K A_f^2 + \dots + K A_f^{n-1}) \\ &\quad + AB(\alpha_2 K + \alpha_3 K A_f + \alpha_4 K A_f^2 + \dots + K A_f^{n-2}) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + A^{n-1} B K \qquad \qquad \qquad = 0 \\ \Leftrightarrow D_d(A) + [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1} B] &\begin{bmatrix} \alpha_1 K + \alpha_2 K A_f + \alpha_3 K A_f^2 + \dots + K A_f^{n-1} \\ \alpha_2 K + \alpha_3 K A_f + \alpha_4 K A_f^2 + \dots + K A_f^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

L'on reconnaît, dans l'égalité ci-dessus, la matrice de commandabilité de Kalman

$$Q_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1} B]$$

qui est inversible puisque la paire (A, B) est supposée commandable. Ainsi, par inversion de Q_c , l'on obtient

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 K + \alpha_2 K A_f + \alpha_3 K A_f^2 + \dots + K A_f^{n-1} \\ \alpha_2 K + \alpha_3 K A_f + \alpha_4 K A_f^2 + \dots + K A_f^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = -Q_c^{-1} D_d(A).$$

Pour obtenir K , il suffit d'extraire la dernière ligne de cette équation :

$$K = - [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] Q_c^{-1} D_d(A). \quad (C.4)$$

Cette formule est appelée formule d'Ackermann.

Annexe D

À propos de \mathcal{Z}

D.1 Propriétés de \mathcal{Z}

- Linéarité

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{i=1}^n (\alpha_i \{f_k\}_i)\right] = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \mathcal{Z}[\{f_k\}])$$

- Multiplication par α^k

$$\mathcal{Z}[\alpha^k \{f_k\}] = F(\alpha^{-1}z)$$

- Multiplication par $e^{-\alpha kT}$

$$\mathcal{Z}[e^{-\alpha kT} \{f_k\}] = F(ze^{\alpha T})$$

(Ici, T désigne la période d'échantillonnage si elle est définie).

- Produit de convolution

$$\mathcal{Z}[\{f * g\}_k] = F(z)G(z)$$

où l'opérateur $*$ symbolise le produit de convolution $\{f\}_k * \{g\}_k = \{h_k\}$ défini par

$$h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l g_{k-l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{k-l} g_l \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

- Théorème du retard

$$\mathcal{Z}[\{f_{k-l}\}] = z^{-l} \mathcal{Z}[\{f_k\}] = z^{-l} F(z)$$

- Théorème de l'avance

$$\mathcal{Z}[\{f_{k+l}\}] = z^l \left(\mathcal{Z}[\{f_k\}] - \sum_{i=0}^{l-1} f_i z^{-i} \right) = z^l \left(F(z) - \sum_{i=0}^{l-1} f_i z^{-i} \right)$$

- Théorème de la valeur initiale

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

- Théorème de la valeur finale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} ((1 - z^{-1})F(z)),$$

sous réserve que les pôles de $(1 - z^{-1})F(z)$ soient dans le disque unitaire.

D.2 Tableau de transformées

Voici quelques transformées pour des signaux usuels :

Signal continu $f(t), t \geq 0$	Transformée de Laplace $F(p)$	Signal échantillonné $f_k, k \in \mathbf{N}$	Transformée en z $F(z)$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1	$f_0 = 1, f_k = 0, \forall k \neq 0$	1
Échelon d'amplitude E c.-à-d. $E\Gamma(t)$	$\frac{E}{p}$	$f_k = E$	$\frac{Ez}{z-1}$
Rampe de pente b c.-à-d. bt	$\frac{b}{p^2}$	$f_k = bT$	$\frac{bTz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$f_k = e^{-akT}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$f_k = kTe^{-akT}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$		$\frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$		$\frac{z(z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
$1 - e^{-aT}$	$\frac{a}{p(p+a)}$		$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
		a^k	$\frac{z}{z-a}$
Retard pur c.-à-d. $g(t - hT)$	$e^{-hTp}G(p)$	$f_k = g_{k-h}$	$z^{-h}G(z)$

De nombreux ouvrages permettent de compléter ce tableau.

Annexe E

Lyapunov et les systèmes linéaires

Cette annexe a pour but de montrer que les inégalités de Lyapunov peuvent être obtenues indépendamment de la seconde méthode et de son théorème fondamental.

E.1 Le cas continu

Théorème. La matrice A est stable au sens de Hurwitz si et seulement s'il existe une matrice P symétrique définie positive (dite matrice de Lyapunov), solution de

$$M_c = A'P + PA < 0. \quad (\text{E.1})$$

La démonstration (simplifiée) est en fait assez aisée.

Suffisance : (E.1) est supposée vérifiée. Pour toute valeur propre λ_i de A , il existe un vecteur non nul v_i tel que $Av_i = \lambda_i v_i$. Ainsi,

$$v_i' M_c v_i = (\lambda_i' + \lambda_i) v_i' P v_i < 0.$$

Puisque $P > 0$, alors $v_i' P v_i > 0$, ce qui implique

$$\lambda_i' + \lambda_i < 0,$$

qui n'est autre que l'équation d'appartenance de λ_i au demi-plan gauche ouvert.

Nécessité : pour simplifier, l'on suppose que A a des valeurs propres distinctes mais ce raisonnement peut s'adapter au cas des valeurs propres multiples. Si ces valeurs propres sont supposées dans le demi-plan gauche ouvert, l'on a

$$\begin{aligned} \lambda_i' + \lambda_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \Leftrightarrow M_\Lambda = \Lambda' + \Lambda < 0, \end{aligned}$$

où

$$\Lambda = \text{diag}_{i=1, \dots, n} \{\lambda_i\}. \quad (\text{E.2})$$

Soit V la matrice modale de A telle que $\Lambda = V^{-1}AV$, il vient

$$\begin{aligned} M_\Lambda &= (V^{-1})' A' V' + V A V^{-1} < 0 \\ \Rightarrow V' M_\Lambda V &= A' V' V + V' V A < 0, \end{aligned}$$

qui n'est autre que (E.1) avec le choix $P = V'V$. QED

E.2 Le cas discret

Théorème. La matrice A est stable au sens de Schur si et seulement s'il existe une matrice P symétrique définie positive (dite matrice de Lyapunov), solution de

$$M_d = -P + A'PA < 0. \quad (\text{E.3})$$

La démonstration (simplifiée) est là encore assez aisée.

Suffisance : (E.3) est supposée vérifiée. Pour toute valeur propre λ_i de A , il existe un vecteur non nul v_i tel que $Av_i = \lambda_i v_i$. Ainsi,

$$v_i' M_d v_i = (-1 + \lambda_i' \lambda_i) v_i' P v_i < 0.$$

Puisque $P > 0$, alors $v_i' P v_i > 0$, ce qui implique

$$-1 + \lambda_i' \lambda_i < 0,$$

qui n'est autre que l'équation d'appartenance de λ_i au disque unitaire ouvert.

Nécessité : pour simplifier, l'on suppose que A a des valeurs propres distinctes mais ce raisonnement peut s'adapter au cas des valeurs propres multiples. Si ces valeurs propres sont supposées dans le disque unitaire ouvert, l'on a

$$-1 + \lambda_i' \lambda_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Leftrightarrow M_\Lambda = -I_n + \Lambda' + \Lambda < 0,$$

avec (E.2). Soit V la matrice modale de A , il vient

$$M_\Lambda = -I_n + (V^{-1})' A' V' V A V^{-1} < 0$$

$$\Rightarrow V' M_\Lambda V = -V' V + A' V' V A < 0,$$

qui n'est autre que (E.3) avec le choix $P = V' V$. QED

E.3 Le cas échantillonné

Ici, il est montré que toute matrice de Lyapunov d'un modèle linéaire continu est aussi matrice de Lyapunov du modèle échantillonné associé (*la réciproque est fautive*!).

Soit $P = P' > 0$, la matrice de Lyapunov assurant de la stabilité au sens de Hurwitz de A_c . Il vient donc

$$M_c = A_c' P + P A_c < 0, \quad (\text{E.4})$$

et par conséquent, si l'on considère la fonction de Lyapunov quadratique $V(x(t)) = x'(t) P x(t)$, sa dérivée temporelle $\dot{V}(x(t)) = x'(t) (A_c' P + P A_c) x(t)$ est strictement négative. Ainsi, $V(x(t))$ est strictement décroissante par rapport au temps et l'on a donc, pour deux instants d'échantillonnage successifs kT et $(k+1)T$ (où T est la période d'échantillonnage),

$$V(x(k+1)T) < V(x(kT)),$$

qui se récrit

$$x'((k+1)T) P x((k+1)T) = x(kT) e^{A_c' T} P e^{A_c T} x(kT) < x'(kT) P x(kT).$$

Puisque $A = e^{A_c T}$, de cette dernière inégalité l'on déduit

$$M_d = -P + A'PA < 0, \quad (\text{E.5})$$

qui amène la conclusion suivante :

Toute matrice de Lyapunov du modèle linéaire continu d'un procédé est aussi matrice de Lyapunov du modèle discret linéaire du système échantillonné associé.

Remarque E.1 *Pour démontrer que l'on peut choisir arbitrairement $Q < 0$ telle que $M_c = Q$ (respectivement $M_d = Q$) admette une solution unique $P > 0$, la technique consiste à montrer que résoudre cette équation revient à résoudre un système linéaire d'équations scalaires possédant une unique solution. Cet aspect n'est cependant pas détaillé ici car toute la subtilité est de montrer que le système est bien posé.*

Annexe F

À propos des grammien

Dans cette annexe, quelques explications sur l'interprétation des grammien et leur propriétés sont apportées.

F.1 Signification des grammien

Après avoir défini les grammien au paragraphe 6.4, l'on se propose ici de s'étendre sur le sujet en donnant une signification physique aux grammien dans le cadre des systèmes discrets. L'on procède ensuite brièvement par analogie pour traiter le cas des systèmes continus.

Soit le système discret suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

L'on atteste ou non de la commandabilité de ce système selon le rang de la matrice de commandabilité (voir §9.6.2) :

$$Q_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

L'on rappelle que l'état final souhaité peut être atteint en n coups ou plus (cf. Remarque 9.5). Il faut aussi noter que, partant de l'origine :

$$x_f = A^{n-1}Bu_0 + A^{n-2}Bu_1 + \dots + ABu_{n-2} + Bu_{n-1}$$

⇒

$$x_f = Q_c U_n$$

où

$$U_n' = [u_{n-1}' \ , \ \dots \ , \ u_0'].$$

La solution U_n de la commande nécessaire pour atteindre l'état x_f , du point de vue de la norme minimale est (résolution d'un problème d'optimisation classique) :

$$U_n = Q_c'(Q_c Q_c')^{-1} x_f.$$

Ceci veut dire que, pour atteindre l'état final x_f à partir de $x_0 = 0$, il faut une énergie minimale de commande :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k' u_k = x_f'(Q_c Q_c')^{-1} x_f$$

On appelle grammien transitoire de commandabilité la matrice :

$$W_c(n) = Q_c Q_c^T = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B B^T (A^k)^T. \quad (\text{F.1})$$

$W_c(n)$ est une matrice définie positive, donc il existe une transformation de matrice U unitaire telle que

$$W_c(n) = U \mathcal{D} U'$$

avec la matrice diagonale ordonnée $\mathcal{D} = \text{diag} (d_i)$ où $d_i \geq 0, \forall i \{1, \dots, n\}$.

Soit la transformation $\bar{x}_k = U x_k$ (qui préserve la norme de x). Dans la nouvelle base, l'énergie minimale de commande nécessaire pour atteindre $e_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]'$ est donnée par d_i^{-1} . Si d_i est nul, la $i^{\text{ème}}$ composante de l'état n'est pas commandable (énergie infinie) en n coups. \mathcal{D} apparaît donc, dans la nouvelle base, comme la matrice de pondération d'un critère d'énergie de commande (en partant de zéro).

Si l'on ne s'intéresse pas à la commande en n coups mais en un nombre infini de coups, l'on peut définir :

$$W_c = \lim_{n \rightarrow \infty} W_c(n) \quad (\text{F.2})$$

qui est dit grammien de commandabilité.

Or,

$$W_c(n+1) = A W_c(n) A' + B B',$$

ce qui donne, à l'infini, l'équation de Lyapunov :

$$W_c = A W_c A' + B B'$$

Dans le cas des systèmes continus, l'on ne peut donner de signification physique aussi claire à la matrice de commandabilité mais $W_c(n)$ a pour équivalent le grammien transitoire de commandabilité sur un horizon τ :

$$W_c(\tau) = \int_0^\tau e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

Sur un horizon de temps infini, l'on obtient le grammien de commandabilité W_c (6.8) vérifiant (6.10).

Remarque F.1 Rappel : pour traiter le grammien d'observabilité, l'on raisonne par dualité.

F.2 Invariance des valeurs propres de $W_c W_o$

L'on donne ici, dans le cas discret, la démonstration de l'assertion formulée à la remarque 6.2 selon laquelle les valeurs propres de $W_c W_o$, le produit des deux grammien, sont invariante par changement de base.

Soit une réalisation $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$ soumise au changement de variable $z = T^{-1}x$, alors :

$$\mathcal{R} = \{A, B, C\} \xrightarrow{T^{-1}} \mathcal{R}_T = \{T^{-1}AT, T^{-1}B, CT\}$$

et, si l'on définit respectivement Q_{c_∞} et Q_{o_∞} comme les matrices de commandabilité et d'observabilité sur un horizon de temps ou d'échantillons infini, c.-à-d.,

$$\begin{cases} Q_{c_\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} [B & AB & \dots & A^{k-1}B] \\ Q_{o_\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} [C' & A'C' & \dots & (A')^{k-1}C']', \end{cases}$$

alors il vient

$$Q_{c_\infty} \xrightarrow{T^{-1}} T^{-1}Q_{c_\infty} \quad \text{et} \quad Q_{o_\infty} \xrightarrow{T^{-1}} Q_{o_\infty}T.$$

Par suite, compte tenu de (F.1) et (F.2), et par dualité :

$$W_c \xrightarrow{T^{-1}} T^{-1}W_c T^{-T}$$

$$W_o \xrightarrow{T^{-1}} T^T W_o T.$$

Finalement :

$$W_c W_o \xrightarrow{T^{-1}} (T^{-1}W_c T^{-T})(T^T W_o T)$$

$$W_c W_o \xrightarrow{T^{-1}} T^{-1}W_c W_o T$$

Le produit des grammiens est transformé en une matrice semblable, donc ses valeurs propres sont conservées. QED.

La démonstration dans le cas continu est quelque peu différente. Soit toujours la matrice de changement de base T . Il vient :

$$W_c \xrightarrow{T^{-1}} \int_0^\infty T^{-1}e^{A\tau} T T^{-1} B B' (T')^{-1} T' e^{A'\tau} (T')^{-1} d\tau = T^{-1}W_c (T')^{-1}.$$

et

$$W_o \xrightarrow{T^{-1}} \int_0^\infty T' e^{A'\tau} (T')^{-1} T' C' C T T^{-1} e^{A\tau} T d\tau = T' W_o T.$$

La fin de la démonstration est alors identique à celle du cas discret. QED

Annexe G

MATLAB et la représentation d'état

Le logiciel MATLAB de la société THE MATH WORKS INC. est originellement un logiciel de calcul matriciel. Il s'est spécialisé dans différentes disciplines au cours des années en fonction de la clientèle intéressée. Comme de nombreux automaticiens utilisaient MATLAB, il s'est étoffé, entre autres, en fonctions dédiées à l'automatique, tant pour l'approche fréquentielle que pour l'approche temporelle. Outre le logiciel de base, l'on peut faire l'acquisition de quelques boîtes-à-outils et certaines d'entre elles sont spécifiques aux problèmes d'Automatique, en particulier la « CONTROL TOOLBOX »..

Initialement plutôt utilisé par des chercheurs, MATLAB est aujourd'hui très répandu dans le monde universitaire mais aussi dans le monde industriel.

Il s'agit ici de présenter quelques fonctions du logiciel accessibles dans la version de base ou dans la boîte-à-outils CONTROL. Ne sont données que des fonctions basiques ou liées à la représentation d'état, reprenant quelques notions de ce cours. Le logiciel est exposé dans sa version 6 .

G.1 Fonctions mathématiques de base

Comme MATLAB est un logiciel de calcul matriciel, l'entité de base est une matrice. Aussi, les vecteurs et les scalaires ne sont vus que comme des matrices particulières. Dans ce qui suit, l'on considère uniquement des instructions tapées directement dans l'environnement de travail de MATLAB.

Ainsi l'on peut définir, par exemple, un vecteur ligne v de trois composantes de la façon suivante :

```
>> v=[1 2 3]
```

```
v =
```

```
1      2      3
```

Le première ligne avec le prompt “>>” correspond à l'instruction et les autres correspondent au résultat affiché par MATLAB. La variables v est alors enregistrée dans l'environnement et disponible à tout moment. La liste des variables actives est donnée par l'instruction `who`.

Un vecteur colonne peut être généré de deux façons :

```
>> v=[1;2;3]
```

```
v =
```

```
1  
2  
3
```

```
>> v=[1 2 3]';
```

La première instruction fait apparaître un point virgule entre les composantes pour indiquer un changement de ligne dans une matrice. L'autre utilise l'opérateur de transposition conjugaison sur lequel l'on reviendra plus loin. Le second résultat (identique au premier) n'est pas affiché par MATLAB comme le stipule le point virgule en fin d'instruction.

Les composantes d'un vecteur ou d'une matrices peuvent être complexes. Ainsi les variables `i` ou `j` sont-elles prédéfinies dans MATLAB et égales à l'unité imaginaire. Il importe donc de ne pas les écraser en redéfinissant des variables avec le même identificateur. L'on dispose d'un opérateur de conjugaison

```
>> v=[1 1+i];
>> conj(v)
```

```
ans =
```

```
1.0000          1.0000 - 1.0000i
```

et de l'opérateur de transposition conjugaison

```
>> v'
```

```
ans =
```

```
1.0000
1.0000 - 1.0000i
```

Le caractère `'` entraîne donc la conjugaison des éventuelles composantes complexes et une simple transposition doit se faire en associant `conj` et `'`. Pour les matrices réelles, il n'y a pas de différence entre l'opérateur `'` et la transposition simple. Voici comment saisir une matrice réelle et la transposer :

```
>> M=[1 2;3 4]
```

```
M =
```

```
1    2
3    4
```

```
>> M'
```

```
ans =
```

```
1    3
2    4
```

Certaines matrices particulières peuvent être saisies par des fonctions spéciale telles que

```
>> I2=eye(2)
```

```
I2 =
```

```
1    0
0    1
```

```
>> zeros(3,2)
```

```
ans =
```

```
    0    0    0
    0    0    0
```

```
>> ones(3,2)
```

```
ans =
```

```
    1    1    1
    1    1    1
```

`eye` permet de construire une matrice identité, `zeros` une matrice nulle et `ones` une matrice emplie de composantes unitaires.

De même, il est facile d'extraire des sous-matrices :

```
>> I2(:,2)
```

```
ans =
```

```
    0
    1
```

```
>> I2(2,2)
```

```
ans =
```

```
    1
```

```
>> M(1:2,2)
```

```
ans =
```

```
    2
    4
```

Entre parenthèses apparaissent les lignes et les colonnes conservées. Les deux points seuls indiquent que toutes les lignes ou toutes les colonnes de la matrice sont prises en compte. `x:y` correspond aux lignes ou colonnes de `x` à `y`.

MATLAB propose évidemment quantité de fonctions d'analyse matricielle parmi lesquelles `rank` et `det` qui permettent de calculer le rang ou le déterminant d'une matrice :

```
>> rank(M)
```

```
ans =
```

```
    2
```

```
>> det(M)
```

```
ans =
```

```
   -2
```

L'on peut bien sûr calculer la somme de deux matrices (ou plus) ou même le produit :

```
>> M+M
```

```
ans =
```

```
     2     4
     6     8
```

```
>> M*M
```

```
ans =
```

```
     7     10
    15     22
```

ce qui conduit à la possibilité de définir les puissances de matrices :

```
>> M=M^2
```

```
ans =
```

```
     7     10
    15     22
```

L'exposant qui suit l'opérateur \wedge peut être non entier de sorte que $\wedge(1/2)$ correspond à la racine carrée matricielle. Il existe aussi la fonction `exp` qui calcule l'exponentielle d'une matrice.

Pour calculer l'inverse d'une matrice, l'on utilise la fonction `inv` :

```
>> inv(M)
```

```
ans =
```

```
 -2.0000    1.0000
  1.5000   -0.5000
```

Les valeurs propres sont disponibles ainsi :

```
>> L=eig(M)
```

```
L =
```

```
 -0.3723
  5.3723
```

Mais l'on peut aussi obtenir une matrice modale :

```
>> [V,L]=eig(M)
```

```
V =
```

```
-0.8246   -0.4160
 0.5658   -0.9094
```

L =

```
-0.3723     0
         0   5.3723
```

Enfin, pour tester la définition en signe d'une matrice Hermitienne, l'on peut tester le signe de ses valeurs propres :

```
>> Z=M'*M;
>> eig(Z)
```

ans =

```
 0.1339
29.8661
```

Dans le cas de Z, elles sont positives donc la matrice est définie positive, ce qui est évident étant donnée la manière dont Z est construite.

Remarque G.1 À toute fonction MATLAB est associée une aide en ligne obtenue grâce à l'instruction `help`.
Exemple :

```
>> help lsim
```

G.2 Fonctions liées au modèle d'état

Dans cette partie, quelques fonctions MATLAB relatives à l'utilisation du modèle d'état sont présentées.

L'on constitue d'abord un système :

```
>> A=[-9 -10;5 5];
>> B=[1;1];
>> C=[1 0];
>> D=0;
```

Le spectre de la matrice d'état de ce modèle d'ordre 2 est donné par

```
>> eig(A)
```

ans =

```
-2.0000 + 1.0000i
-2.0000 - 1.0000i
```

L'on peut regrouper des quatre matrices en une seule car MATLAB propose des variables de type « système LTI ».

```
sys=ss(A,B,C,D);
```

La fonction inverse qui permet de récupérer les matrices à partir de la variable `sys` est :

```
[A,B,C,D]=ssdata(sys);
```

Ensuite, l'on peut tout faire à l'aide de cette variable `sys`. Ainsi, l'on peut obtenir la fonction de transfert :

```
>> [Num,Den]=tfdata(sys)
```

```
Num =
```

```
    [1x3 double]
```

```
Den =
```

```
    [1x3 double]
```

Un système étant éventuellement multivariable, il est possible qu'il existe plusieurs numérateurs et dénominateurs pour une ce qui est alors une matrice de transfert. C'est pourquoi MATLAB fournit une « cellule » de numérateurs et une cellule de dénominateurs. Dans le cas monovariable ci-dessus, les cellules ne contiennent qu'un élément que l'on peut extraire.

```
>> Num{1}
```

```
ans =
```

```
    0    1.0000   -15.0000
```

```
>> Den{1}
```

```
ans =
```

```
    1.0000    4.0000    5.0000
```

Les vecteurs obtenus contiennent les coefficients du numérateur $N(p)$ et du dénominateur $D(p)$ de la fonction de transfert $G(p)$ dans l'ordre des puissances décroissantes c'est-à-dire que l'on obtient en fait :

$$G(p) = \frac{p - 15}{p^2 + 4p + 5}.$$

L'on peut aussi appliquer l'instruction

```
>> [Num,Den]=ss2tf(A,B,C,D);
```

si la fonction `sys` n'a pas été utilisée au préalable.

Le passage inverse est possible :

```
>> [A,B,C,D]=tf2ss(N{1},D{1})
```

```
A =
```

```
   -4.0000   -5.0000
    1.0000    0
```

```
B =
```

```
    1
    0
```

C =

```
1.0000 -15.0000
```

D =

```
0
```

et la réalisation fournie est de type compagne. Les instructions

```
>> roots(Num{1})
```

```
ans =
```

```
15.0000
```

```
>> roots(Den{1})
```

```
ans =
```

```
-2.0000 + 1.0000i
```

```
-2.0000 - 1.0000i
```

permettent respectivement de calculer les racines de $N(p)$ et $D(p)$, c'est-à-dire les zéros et les pôles de la fonction de transfert. Le système est donc asymptotiquement stable et l'on peut le vérifier par résolution de l'équation de Lyapunov avec $Q = I_2$:

```
>> Q=eye(2);
```

```
>> P=lyap(A,Q)
```

P =

```
0.7500 -0.5000
```

```
-0.5000 0.5500
```

```
>> eig(P)
```

```
ans =
```

```
0.1401
```

```
1.1599
```

La dernière instruction permet de vérifier que les valeurs propres de la matrice de Lyapunov P sont positives et donc que cette matrice est définie positive.

Les réponses impulsionnelles se tracent grâce aux fonctions `impulse` et `step` :

```
>> impulse(sys)
```

```
>> step(sys)
```

Les résultats sont donnés par les figures [G.1](#) et [G.2](#)

Il est possible d'ajouter une grille à une figure avec la fonction `grid`, de modifier les échelles grâce à la fonction `axis`, de tracer plusieurs courbes sur une même figure grâce à `hold on` et `hold off`. L'éditeur de figures permet de nombreuses modifications de légendes, etc et l'on peut cliquer sur toute courbe pour connaître les coordonnées du point indiqué.

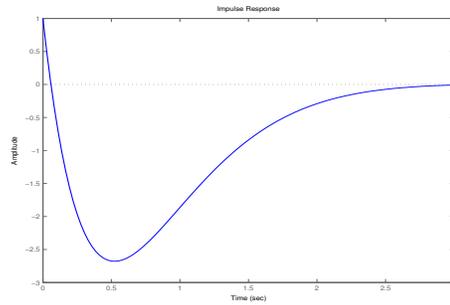


FIGURE G.1 – Réponse impulsionnelle à conditions initiales nulles

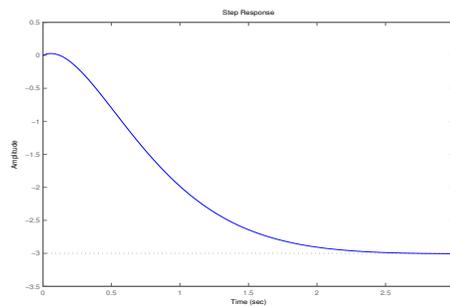


FIGURE G.2 – Réponse indicielles à conditions initiales nulles

Il est également possible de tracer une réponse à une condition initiale (`xinitial`) ou encore la réponse à n'importe quelle entrée construite sous forme de vecteur (`lsim`).

La réponse harmonique est également traçable dans ses représentations graphiques classiques :

```
>> bode(sys)
>> grid
>> nyquist(sys)
>> grid
>> nichols(sys)
>> grid
```

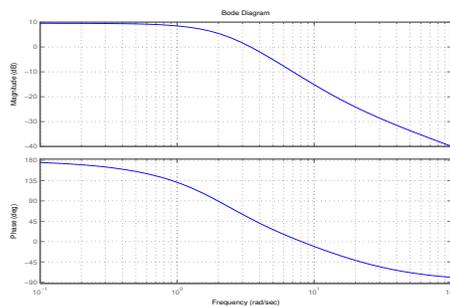


FIGURE G.3 – Diagramme de Bode

L'on note que le diagramme de Black, dont la paternité est parfois aussi attribuée à Nichols est correspond à la fonction `nichols` sous MATLAB.

Il est par ailleurs possible de connaître les marges de gain, de phase, et les pulsations associées :

```
>> [Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(sys)
```

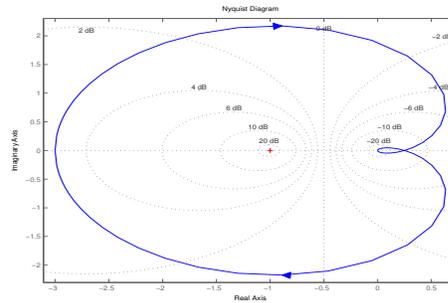


FIGURE G.4 – Lieu de Nyquist

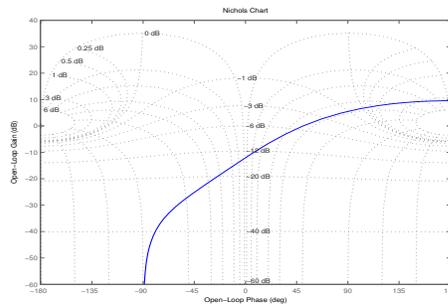


FIGURE G.5 – Diagramme de Black

Warning: The closed-loop system is unstable.

Gm =

0.3333

Pm =

-129.4032

Wcg =

0

Wcp =

3.4438

Dans l'ordre, sont obtenus la marge de gain, celle de phase et les pulsations auxquelles elles peuvent respectivement être mesurées. Des marges infinies ou des systèmes instables en boucle fermée (comme celui-ci) peuvent générer des messages d'avertissement.

Si l'on s'intéresse à la commandabilité et à l'observabilité du système, l'on peut tester ces dernières à l'aide des critères de Kalman :

```
>> Qc=ctrb(sys)
```

```
Qc =  
    1  -19  
    1   10  
  
>> rank(Qc)  
  
ans =  
     2  
  
>> Qo=obsv(sys)  
  
Qo =  
    1    0  
   -9  -10  
  
>> rank(Qo)  
  
ans =  
     2
```

Les matrices de commandabilité et d'observabilité Q_c et Q_o sont construites ci-dessus et l'on vérifie qu'elles sont de rang plein pour attester des propriétés. L'on peut aussi passer par les grammiens de commandabilité W_c et d'observabilité W_o si le système est asymptotiquement stable. Ces derniers sont les solutions d'une équation de Lyapunov mais plutôt que d'utiliser `lyap`, l'on peut utiliser directement la fonction `gram` :

```
>> Wc=gram(sys,'c')  
  
Wc =  
    5.7500   -5.1250  
   -5.1250    5.0250  
  
>> eig(Wc)  
  
ans =  
    0.2497  
   10.5253  
  
>> Wo=gram(sys,'o')  
  
Wo =  
    0.7500    1.2500  
    1.2500    2.5000  
  
>> eig(Wo)  
  
ans =
```

```
0.0992
3.1508
```

Il convient ensuite de vérifier le signe des valeurs propres de ces deux grammians. Ils sont ici définis positifs donc le système est commandable et observable.

Remarque G.2 La fonction `minreal` permet de réduire une réalisation à une forme minimale c'est-à-dire complètement commandable et observable (au cas où elle ne le serait déjà).

Il existe au moins deux possibilités pour placer les pôles du système. La fonction `place` est une fonction écrite pour les systèmes multivariables pour lesquels la solution du problème de placement de pôles n'est pas unique. Elle a des avantages qu'il n'est pas facile d'expliquer ici mais pour le cas monovariante elle présente l'inconvénient de ne placer que des pôles distincts. Ainsi peut-on s'en servir pour placer les pôles -5 et -4 et vérifier *a posteriori* que le placement est effectué :

```
>> K=place(A,B,[-5 -4])
```

```
K =
```

```
5.0000 15.0000
```

```
>> Af=A-B*K;
```

```
>> eig(Af)
```

```
ans =
```

```
-5.0000
-4.0000
```

En revanche la fonction `Acker` qui repose sur la formule d'Ackerman (cf. Annexe C), même si elle ne présente pas les mêmes avantages en multivariante, permet de lever l'hypothèse des pôles distincts.

```
>> K=acker(A,B,[-5 -5])
```

```
K =
```

```
6.0000 20.0000
```

```
>> Af=A-B*K;
```

```
>> eig(Af)
```

```
ans =
```

```
-5
-5
```

Remarque G.3 Attention ! les fonctions `place` et `acker` envisagent une loi de commande $u(t) = -Kx(t)$, c'est pourquoi, dans les instructions ci-avant, l'on vérifie le spectre de $A_f = A - BK$.

Remarque G.4 Il est à noter que MATLAB propose un outil de simulation avec interface graphique appelé SIMULINK qui permet entre autres de construire des schéma-blocs et de simuler le comportement des modèles associés, MATLAB restant le noyau de calcul.

G.3 Fonctions liées aux modèles discrets

Un certain nombre de fonctions MATLAB peuvent s'adapter aussi bien aux modèles d'état discrets qu'aux modèles d'état continus. Cependant, il existe des instructions spécifiques pour manipuler les modèles discrets. Par exemple, la fonction `c2d` permet d'échantillonner un système continu à une fréquence désirée. Si l'on reprend l'exemple du paragraphe 9.3.4.2, l'on peut exécuter la suite d'instructions suivante :

```
>> Ac=[0 1;0 -2];Bc=[0;1];Cc=[1 0];Dc=0;
>> sysc=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
>> sys=c2d(sysc,1,'zoh')
```

```
a =
      x1      x2
x1      1  0.4323
x2      0  0.1353
```

```
b =
      u1
x1  0.2838
x2  0.4323
```

```
c =
      x1  x2
y1  1    0
```

```
d =
      u1
y1  0
```

```
Sampling time: 1
Discrete-time model.
```

La variable `sys` contient les informations sur le système obtenu à partir du système continu `sysc` par échantillonnage à $T = 1s$. L'argument `'zoh'` (*Zero-order hold*) stipule qu'un bloqueur d'ordre zéro est considéré. Par défaut, en l'absence de cet argument, c'est l'option `'zoh'` qui est retenue. Toutefois, il existe d'autres possibilités. Les matrices de la réalisation calculée peuvent être récupérées comme en continu.

```
>> [A,B,C,D]=ssdata(sys)
```

```
A =
  1.0000    0.4323
         0    0.1353
```

```
B =
  0.2838
  0.4323
```

```
C =
```

1 0

D =

0

De plus, il est possible d'utiliser la fonction réciproque `d2c` pour retrouver le modèle continu :

```
>> sysc=d2c(sys)
```

a =

	x1	x2
x1	0	1
x2	0	-2

b =

	u1
x1	0
x2	1

c =

	x1	x2
y1	1	0

d =

	u1
y1	0

En ce qui concerne le tracé des réponses, l'instruction `dimpulse` permet de tracer la réponse impulsionnelle du système discret. Ainsi l'exécution de

```
>> dimpulse(A,B,C,D)
```

conduit, pour le système construit plus haut, à la figure G.6, mais cette même réponse est aussi obtenue par

```
>> impulse(sys)
```

En effet, la variable `sys` contient l'information selon laquelle il s'agit d'un modèle discret.

L'on peut noter que la réponse est « en escalier » mais il est possible de faire apparaître plus clairement les échantillons grâce à (voir figure G.7) :

```
>> impulse(sys, ' . ')
```

De même l'on peut utiliser indifféremment

```
>> dstep(A,B,C,D)
```

ou

```
>> step(sys)
```

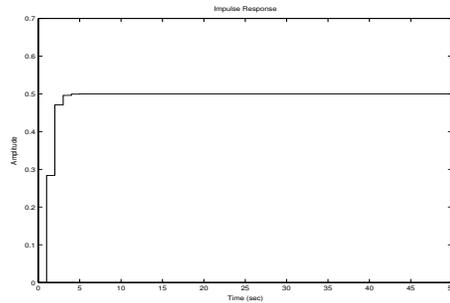


FIGURE G.6 – Réponse impulsionnelle discrète en escalier

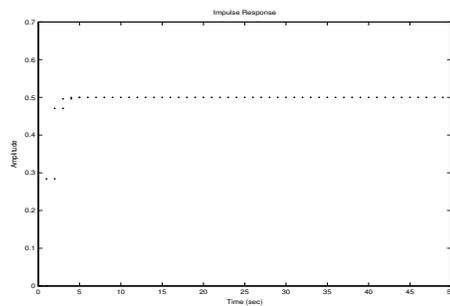


FIGURE G.7 – Réponse impulsionnelle discrète sans effet d'escalier

pour obtenir la réponse indicielle du système (figure G.8).

L'on peut voir que la réponse indicielle diverge puisque le modèle continu contient un intégrateur. Les instructions `dinitial`, `initial`, `dlsim`, `lsim` permettent de tracer des réponses à des conditions initiales ou à des signaux de commande spécifiés par l'utilisateur.

Enfin, il existe les fonctions `dlyap` et `dgram` qui permettent respectivement de résoudre une équation de Lyapunov discrète et de calculer un grammien discret, à l'exemple de ce qui peut se faire en continu.

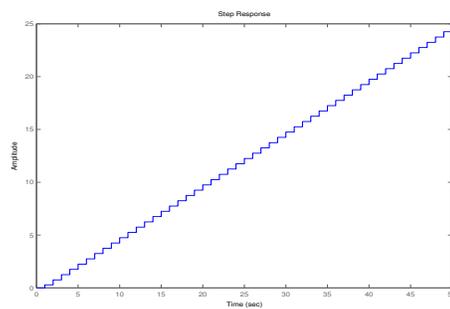


FIGURE G.8 – Réponse indicielle discrète

Annexe H

Biographies

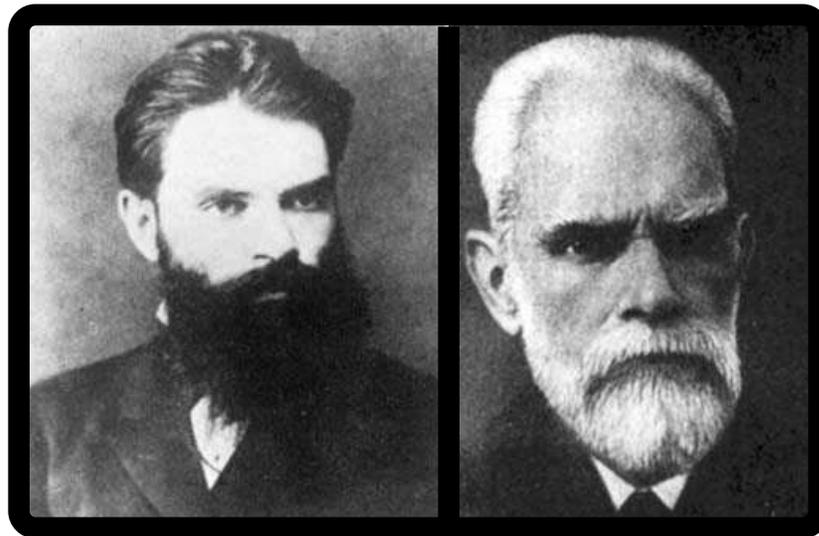
Sont présentées ici de brèves biographies de deux scientifiques dont les travaux apparaissent comme essentiels aux développements de l'approche temporelle de type « espace d'état » en Automatique.

Le premier, Alexandr Lyapunov, n'a pas à proprement parler contribué à l'élaboration des représentations d'état mais son travail à la charnière des XIX^{ème} et XX^{ème} siècles fut un réservoir extra-ordinaire pour les multiples développements dans l'espace d'état. Ce réservoir n'est sans doute pas encore épuisé aujourd'hui.

Le second, Rudolf Kalman, est quant à lui celui qui peut sans doute être considéré comme le père de la représentation d'état linéaire. Il a su non seulement jeté les idées fondamentales mais aussi contribué de manière intensive aux développements relatifs aux systèmes linéaires.

H.1 Alexandr Lyapunov

D'après un article de P. C. Parks, du Royal Military College of Science (Cranfield, Royaume Uni).



Sa vie

Alexandr Mikhaïlovich Lyapunov naît à Iaroslav (Empire russe) le 6 juin 1857 où son père dirige un lycée. Ce dernier décède en 1868 ce qui contraint, en 1870, Madame Lyapunov-Mère, accompagnée de ses trois enfants, à déménager vers Nizhny-Novgorod (anciennement Gorki). C'est dans cette ville qu'Alexandr suit sa scolarité pour obtenir brillamment l'équivalent du baccalauréat (on lui attribue une médaille d'or). Il étudie alors les mathématiques

à l'université de Saint-Petersbourg où il s'imprègne des cours du Professeur P. L. Chebyshev. diplômé en 1880, empochant au passage une nouvelle médaille d'or, il poursuit des études à la faculté de Mécanique. Il y soutient, en 1884, sa thèse sur *la stabilité des formes ellipsoïdales d'états d'équilibre des fluides en rotation* (traduite en Français en 1904).

L'année 1885 est marquée deux événements : il se marie avec sa cousine au premier degré, Natalia Rafailovna Sechenova et est nommé *privat-dozent* au département de Mécanique de l'Université de Kharkov. Si de 1885 à 1888, Lyapunov consacre surtout son temps à l'élaboration de ses enseignements, de 1888 à 1892, il travaille sur son sujet de prédilection : la stabilité du mouvement. Ce travail aboutit en 1892 à sa célèbre thèse¹ : *Problème général de la stabilité du mouvement*. Il défend ainsi, à Moscou, son point de vue en présence de N. E. Joukowski, considéré comme le père de l'aviation russe, ce qui lui vaut un poste de professeur à Kharkov. Cette fameuse thèse fut traduite en Français (en 1907 à Université de Toulouse puis en 1949) mais seulement un siècle plus tard (1992) en Anglais.

Parallèlement à ses activités principales, Lyapunov s'intéresse à la théorie des potentiels, aux probabilités (théorème central-limite de Laplace) et il devient membre de la Société Mathématique de Kharkov.

Suite à la mort de Chebyshev en 1894, Lyapunov lui succède en 1902 en tant qu'« Académicien » à l'Université de Saint-Petersbourg. Il étudie alors le problème des formes d'équilibre *des corps constitués de particules de fluide en rotation sous l'effet d'une attraction gravitationnelle newtonienne mutuelle*. Il démontre par exemple que pour les fluides dits « en forme de poire », les états d'équilibre sont instables, contredisant ainsi une théorie d'astronomie en vogue à l'époque, en particulier un modèle de H. G. Darwin, fils du célèbre naturaliste.

En juin 1917, la famille Lyapunov déménage à Odessa, pour raisons de santé. La femme de Lyapunov est tuberculeuse et lui-même craint la cécité. Le 31 octobre 1918, son épouse décède. Très affecté par ce drame mais aussi par l'incendie, déclenché par les révolutionnaires bolchéviques, qui ravage la bibliothèque familiale que son grand-père puis son père avaient constituée sur les bords de la Volga, Lyapunov, dépressif, se suicide le jour-même à l'aide d'un pistolet. Il ne meurt que le 3 juin 1918.

L'influence de son oeuvre

Parmi les contributions significatives de Lyapunov, l'on retient surtout sa thèse. L'on peut citer trois points importants de ce travail : les exposants de Lyapunov, la première méthode de Lyapunov et la seconde méthode (également dite méthode directe) de Lyapunov. En automatique, c'est surtout la seconde méthode qui tient le haut du pavé. L'application de cette méthode au cas des systèmes linéaires est présentée au paragraphe 5.3.3. C'est à Lyapunov que l'on doit un principe fondamental : un système peut-être instable par rapport à une mesure et stable par rapport à l'autre. Cette idée peut paraître anodine dans le formalisme des modèles LTI monovariables mais elle clarifie beaucoup d'idées à la fin du XIX^{ème} siècle. Parmi les travaux de Lyapunov, l'on peut aussi noter qu'il exprime la stabilité dans le plan de phase (espace d'état) ouvrant ainsi des perspectives à l'approche temporelle, ou encore qu'il reformule des résultats du mathématicien français Liouville (1809-1882) relatifs aux systèmes hamiltoniens.

Comme il a été mentionné ci-avant, le point clef des travaux de Lyapunov pour un automaticien est la seconde méthode. Elle s'inspire des contributions de Laplace, Lagrange, Dirichlet et Liouville ou encore de problèmes d'astronomie (le maintien en orbite consiste ne un système simplement stable). Elle donne une interprétation énergétique de la stabilité en ce sens que la fonction V (cf. paragraphe 5.3.3), dite de Lyapunov, est une énergie (au sens mathématique donc général) qui doit décroître pour assurer la stabilité. Elle permet de comprendre qu'il n'est pas toujours nécessaire, même dans une approche temporelle, de résoudre le système différentiel pour conclure quant à la stabilité.

Les conséquences scientifiques de la seconde méthode sont importantes tant en nombre qu'en qualité scientifique. En URSS, elles interviennent surtout avant 1960. Si Lyapunov ne propose que très peu d'exemple pratiques, I. G. Malkin et N. G. Chetayev comprennent que la seconde méthode peut être appliquée dans un cadre aéronautique et/ou militaire. Ils obtiennent, vers 1930, des résultats leur permettant de stabiliser la position angulaire d'une

1. Il semblerait que cette thèse soit plus à comparer à ce qui était appelé, auparavant en France, une thèse d'état

fusée ou d'un obus, résultats qui ne sont pas sans conséquence. De même, A. I. Lur'e et A. M. Letov montrent, respectivement en 1957 et 1961, l'applicabilité de la méthode directe à certains problèmes de commande des modèles non linéaires.

Comme il a été mentionné dans le paragraphe 3.3, Les Russes parviennent à mettre Sputnik en orbite en 1957, les travaux de Lyapunov, Chetayev, Malkin et autres n'étant pas étrangers à cette réussite (c'est un euphémisme). C'est pourquoi le professeur Solomon Lefschetz décide de créer au USA un groupe de recherche chargé de promouvoir en occident la théorie de Lyapunov, groupe parmi lequel figurent J.-P. La Salle, R. E. Kalman et J. E. Bertram. Dès lors, l'approche temporelle connaît un regain d'intérêt.

En juin 1960, au premier congrès IFAC de Moscou, Kalman et Bertram font sensation et tout le monde (... ou presque) souhaite la bienvenue aux représentations d'état linéaires. Au début, l'on pense qu'elles n'apprennent rien de plus que de simples équations différentielles mais l'utilisation des outils de l'algèbre linéaire va montrer la pertinence de l'outil et engendrer l'« automatique moderne ». C'est à partir de ce moment que l'on s'intéresse à nouveau au plan de phase (espace d'état) donc aux travaux de Lyapunov.

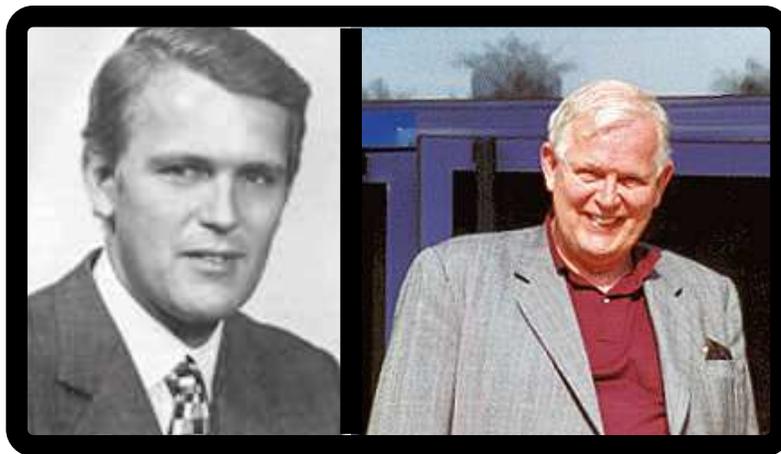
En 1964, P. C. Parks retrouve, dans l'espace d'état, les résultats de Routh-Hurwitz. L'on applique la seconde méthode de Lyapunov aux systèmes linéaires à temps continu donnant naissance à ce que l'on appelle l'équation de Lyapunov ($A'P + PA = -Q$) et son équivalent en temps discret ($-P + A'PA = -Q$) déjà déterminée par Stein en 1952. Elle permet aussi l'établissement de critères de stabilité (même en non linéaire) tels celui de Popov ou celui du cercle (contributions de Popov, Kalman, Brockett).

Les autres développements conséquents de la seconde méthode sont nombreux : étude des systèmes dissipatifs, commande optimale et tous les problèmes de type Riccati (commande H_2 , H_∞ , optimisation mixte), problème d'encloisonnement des pôles (équations de Lyapunov généralisées (A. G. Mazko en 1980, S. Gutman et E. I. Jury en 1979 et 1981), un pan entier de la commande robuste, certaines approches d'étude des systèmes non-linéaires (techniques de mode de glissement), systèmes à paramètres répartis ou réseaux de neurones, etc.

Encore de nos jours, des conférences sont intégralement dédiées aux applications des travaux de Lyapunov (exemple : Irkoutsk, 1995) et susceptibles d'intéresser les mathématiciens, les physiciens, les mécaniciens, les automaticiens et tant d'autres.

H.2 Rudolf Kalman

D'après le Centre Historique de IEEE (Institute of Electrical & Electronics Engineers).



Rudolf E. Kalman est né à Budapest le 19 mai 1930. Il décide de suivre les traces de son père, ingénieur électricien. Il émigre aux USA puis obtient son baccalauréat. Il reçoit du MIT (Massachusetts Institute of Technology) son master en génie électrique en 1954. Il quitte le MIT pour continuer ses études à l'Université de Columbia où il accède au doctorat es sciences en 1957, sous la direction du professeur John R. Ragazzini.

Ses études au MIT et à Colombia démontrent très tôt son intérêt pour la théorie des systèmes et l'Automatique. Ses premières recherches sur la notion de variable d'état sont à la fois très avancées sur le plan mathématique mais également motivées par un vrai souci de résoudre des problèmes pratiques.

En 1957 et 1958, Kalman est employé comme ingénieur dans un laboratoire de recherche d'IBM à Poughkeepsie, état de New York. Pendant cette période, il contribue activement à la recherche dans la conception de lois de commande pour les systèmes échantillonnés, par l'utilisation de critères quadratiques caractérisant les performances de ces derniers. Il exploite aussi la théorie de Lyapunov pour l'analyse et la commande des systèmes en général. Il comprend dès cette époque la pertinence de l'outil numérique pour la commande des systèmes à large échelle.

En 1958, Kalman rejoint le RIAS (Research Institute for Advanced Study), équipe de recherche créée par le professeur Solomon Lefschetz (1884-1972) avec comme but, entre autres, de promouvoir davantage la théorie de Lyapunov en occident. Il y débute en tant que chercheur en mathématiques et est vite promu Directeur Associé de Recherche. C'est durant cette période (1958-1964) qu'il réalise ses contributions les plus significatives pour l'automatique moderne. Ses conférences et publications sont symptomatiques de son incroyable créativité et de sa volonté d'établir une théorie unifiée de l'automatique. L'article co-écrit avec J. E. Bertram ou la représentation d'état linéaire est rigoureusement introduite fait sensation lors de sa présentation au premier congrès IFAC (International Federation of Automatic Control) à Moscou en 1960. Sa recherche concernant des concepts aujourd'hui essentiels tels que la commandabilité et l'observabilité permet de consolider les bases théoriques de l'ingénierie des systèmes. Il unifie les outils d'analyse et de conception de lois commande des systèmes minimisant un critère quadratique et ce, en temps continu comme en temps discret. Il réalise un travail crucial pour l'exploitation des résultats du mathématicien Constantin Carathéodory (1873-1950) en commande optimale, pour la clarification des connexions entre le principe du maximum de Semenovich Pontryagin (1908-1988) et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, de même que pour le calcul variationnel en général. Non seulement sa recherche met l'accent sur les aspects de mathématiques générales mais elle inclut aussi des aspects très pratiques comme la prise en compte d'un ordinateur comme partie intégrante du système pour implanter la loi de commande.

C'est aussi au cours de son séjour au sein du RIAS que Kalman développe ce qui est peut-être sa contribution la plus célèbre, le « filtre de Kalman » (grossièrement, ce filtre permet de reconstruire l'état du système en présence de bruit). Il obtient des résultats relatifs à la version discrète de ce problème vers la fin de 1958 et au début de 1959. Sa solution au problème discret l'amène naturellement à une solution en temps continu qu'il développe en 1960-61 en collaboration avec Richard S. Bucy, inventant ainsi le « filtre de Kalman-Bucy ». Il transpose les travaux fondamentaux en filtrage de Norbert Wiener (1894-1964), Andrey N. Kolmogorov (1903-1987), Hendrick W. Bode (1905-1982), Claude E. Shannon (1916-2001), V. S. Pugachev (?) et bien d'autres dans l'espace d'état.

Le filtre de Kalman et ses extensions aux problèmes non linéaires constituent peut-être l'outil le plus appliqué de l'automatique moderne. Il est en effet utilisé en navigation spatiale (par exemple, sur les engins « Apollo »), sur les radars, pour la commande de divers procédés et même sur des modèles socio-économiques. Sa popularité est due à la prise en compte des aspects numériques tant dans la conception que dans l'implantation elle-même. D'un point de vue strictement théorique, ce filtre établit un lien entre filtrage et commande et met en lumière la dualité des deux problèmes.

En 1964, Kalman vient travailler au Département de Génie Electrique, Mécanique et Recherche Opérationnelle de l'Université de Stanford. Il s'y intéresse à la théorie des réalisations et la théorie algébrique des systèmes. Une fois encore, sa contribution est significative et il ouvre de nouvelles perspectives de recherche.

En 1971, Kalman est nommé *graduate research professor* de l'Université de Floride à Gainesville. Il devient directeur du centre de Théorie Mathématique des Systèmes. Ses activités de recherche et d'enseignement sont liées aux départements de génie électrique, de mathématiques et d'ingénierie pour l'industrie. Il intervient aussi comme consultant en recherche pour l'Ecole des Mines de Paris.

Kalman ne modifie pas seulement la vision scientifique de l'automatique moderne mais il contribue aussi fortement à promouvoir l'application des théories associées. Sa personnalité charismatique et ses nombreux cours, exposés,

tant à l'Université que dans le monde industriel, attirent un nombre incalculable de chercheurs qui sont grandement influencés par sa conception de l'Automatique. Il agit comme un catalyseur pour un échange international d'idées.

Kalman publie plus de cinquante articles techniques en revues de haut niveau. En 1962, il est élu « jeune éminent chercheur » de l'année par l'Académie des Sciences du Maryland. Il devient membre IEEE en 1964 et est par ailleurs membre de plusieurs autres associations professionnelles ou savantes. Il est co-auteur de l'ouvrage *Topic in Mathematical System Theory, Mc Graw-Hill, 1969*. Il reçoit la médaille d'honneur IEEE en 1974 pour ses « travaux pionniers sur les méthodes modernes en théorie des systèmes, incluant les concepts de commandabilité, observabilité, filtrage et structures algébriques ».

Bibliographie

- [1] K. Ogata. *Modern control engineering - Fourth edition*. Prentice Hall International Editions, 2001.
- [2] K. Ogata. *System dynamics - Third edition*. Prentice Hall International Editions, 1994.
- [3] K. Ogata. *Discrete-time control systems- Second edition*. Prentice Hall International Editions, 1995.
- [4] B. Pradin. *Polycopié de cours d'Automatique : « Automatique : Notes de cours - Exercices »*. INSA de Toulouse, 3ème année spécialité AEI. 1992
- [5] B. Pradin. *Polycopié de cours d'Automatique : « Automatique linéaire - Systèmes à temps discret »*. INSA de Toulouse, 4ème année spécialité AEI. Edition 1995.
- [6] B. Pradin. *Polycopié de cours d'Automatique : « Automatique linéaire »*. INSA de Toulouse. Département de Génie Electrique. Edition 2005.
- [7] Ph. de Larminat. *Automatique : Commande des systèmes linéaires*. Editions Hermes, 1993.
- [8] A. Rachid and D. Mehdi. *Réalisation, réduction et commande des systèmes linéaires*. Scientifika, 1993.
- [9] G. F. Franklin, J. D. Powell and A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesly Publishing Company, Inc., New York 1994.
- [10] E. I. Jury et S. M. Ahn. *Remarks on the root-clustering of a polynomial in a certain region in the complex plane*. Quaterly of Applied Mathematics, pages 203-205, juillet 1974.
- [11] J. L. Howland. *Matrix equations and the separation of matrix eigenvalues*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 33, pages 683-691, 1971.
- [12] MATLAB user's guide : Getting started with MATLAB. *The Math Works Inc.*. Version 6.
[http : //www.mathworks.com](http://www.mathworks.com), 2000
- [13] P. C. Parks. *A. M. Lyapunov's stability theory - 100 years on*. IMA journal of Mathematical Control and Information, 1992, vol. 9, p 275-303.
- [14] IEEE Center History - Legacies *Rudolf E. Kalman*.
[http : //www.ieee.org/organizations/history_center/legacies/kalman.html](http://www.ieee.org/organizations/history_center/legacies/kalman.html).