

Cours d'Automatique de la licence professionnelle “Technologies avancées appliquées aux véhicules”

Olivier Bachelier

E-mail : Olivier.Bachelier@esip.univ-poitiers.fr

Tel : 05-49-45-36-79 ; Fax : 05-49-45-40-34

Sensibilisation à des concepts de l'Automatique

Résumé

Ce cours, initialement dispensé au sein du Département de Génie Electrique et Informatique Industrielle de l'IUT de Poitiers, s'adresse à l'origine aux étudiants de la licence professionnelle **Technologies avancées appliquées aux véhicules**. Ces derniers ne se destinant pas à une étude approfondie des concepts de l'Automatique, le présent document aborde rapidement les bases de la représentation fréquentielle, l'analyse et la commande des systèmes linéaires. L'élève intéressé par plus ample information est invité à consulter quelques ouvrages [2, 4, 6, 10, 11, 3, 13, 12, 1, 5, 7]. Certaines parties de ce document sont inspirées de [8, 9], voire franchement empruntées. Ce cours correspond à un volume horaire d'environ huit heures, c'est pourquoi certains points classiques ne sont pas abordés. Les notions fondamentales sont étudiées brièvement et quelques approfondissements, justifications ou calculs sont renvoyés en annexe à l'adresse de l'étudiant motivé par la discipline.

Connaissances préalables souhaitées : intégrales, équations différentielles, calcul complexe.

SENSIBILISATION À DES CONCEPTS DE L'AUTOMATIQUE

Table des matières

1	Introduction à l'Automatique	4
1.1	Définition	4
1.2	Notion de système	4
1.3	Notion de boucle	5
1.4	Quelques exemples concernant la boucle	6
1.4.1	Douches collectives	6
1.4.2	Douche personnelle	6
1.4.3	Mitigeur thermostatique	7
1.4.4	Rétroviseur à réglage de position électronique	7
1.5	Cadre de travail	8
1.6	Nécessité d'une régulation étudiée	9
1.7	Méthodologie	10
2	Modélisation... de l'équation différentielle à la fonction de transfert	10
2.1	Présentation du système	10
2.2	Obtention de l'équation différentielle	11
2.3	Transformée de Laplace	12
2.4	Fonction de transfert	13
2.5	Notion de causalité	16
2.6	Association de fonctions de transfert	16
2.7	Fonctions de transfert en boucle fermée	16
3	Réponses des systèmes linéaires	17
3.1	Définition de la réponse d'un système	17
3.2	Réponse impulsionnelle	18
3.3	Réponse indicielle	18
3.3.1	Réponse indicielle d'un système canonique de premier ordre	18
3.3.2	Réponse indicielle d'un système canonique de deuxième ordre	20
3.3.3	Remarque sur les pôles des systèmes	21
3.3.4	Remarque sur les zéros	22
3.3.5	Remarque sur les modèles d'ordre élevé	22
3.4	Les réponses fréquentielles ou harmoniques	22
3.4.1	Définition	22
3.4.2	Lien avec la fonction de transfert	22
3.4.3	Diagramme de Bode	23
3.4.4	Lieu de Black ou de Nichols	25
3.4.5	Lieu de Nyquist	26
4	Stabilité des systèmes linéaires continus	26
4.1	Définition générale et intuitive de la stabilité d'un état d'équilibre ou d'un système	27
4.2	Influence sur le comportement entrée/sortie	27
4.3	Critère des racines	28
4.4	Critère du revers pour la stabilité d'un système bouclé	28

5	Réglage des systèmes bouclés	29
5.1	Principe de la commande par retour unitaire	29
5.2	Régulation proportionnelle	30
5.2.1	Influence de A sur la stabilité	30
5.2.2	Influence de A sur la rapidité	30
5.2.3	Influence de A sur la précision	31
5.2.4	Influence de A et des intégrateurs sur une erreur due à une perturbation	32
5.3	Régulateur PID	32
6	Conclusion	34
	Annexes	35
A	Point de fonctionnement et caractéristique statique	35
B	Principe de superposition	37
C	A propos de la transformée de Laplace	37
C.1	Quelques transformées	37
C.2	Remarques sur la transformée de Laplace inverse	40
D	Démonstration de la formule de Black	40
E	Expression du gain statique	40
F	Influence des pôles sur la réponse d'un système	41
F.1	Pôles distincts	41
F.2	Pôles multiples	43
G	Fonction de transfert et réponse harmonique	43
H	A propos du diagramme de Bode	45
H.1	Quelques règles simples de construction	45
H.2	Construction du diagramme de Bode associé au modèle complet du moteur	49
I	Perturbation en $1/p^q$ et position des intégrateurs	49
J	Calcul d'un régulateur par compensation de pôle	50
J.1	Régulateur PI	50
J.2	Régulateur PD	52
J.3	Régulateur PID	52
K	Méthodes de Ziegler-Nichols	52
K.1	Méthode de la réponse indicielle	53
K.2	Méthode de la juste oscillation	53
K.3	Commentaires sur les deux méthodes	54
L	Filtrage de l'effet dérivé	55
	Références bibliographiques	56
	Index	56

1 Introduction à l'Automatique

Cette partie resitue un peu le cadre de ce cours, propose les définitions préliminaires à l'étude et met en évidence les points qui seront abordés par la suite.

1.1 Définition

La définition de l'Automatique que propose le "Petit Robert" est assez explicite sur ce que peut être l'Automatique même si sa simple lecture ne suffit pas pour analyser les grandes tendances de cette vaste discipline. La voici :

Automatique : ensemble des disciplines scientifiques¹ et des techniques utilisées pour la conception et l'emploi des dispositifs² qui fonctionnent sans l'intervention d'un opérateur humain³.

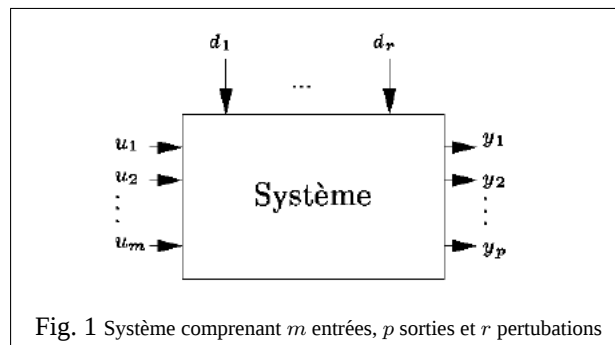
On peut revenir sur les trois expressions soulignées de cette définition.

1. *disciplines scientifiques* : ceci suggère que l'Automatique requiert quelques activités théoriques afin de réaliser :
 - une modélisation mathématique d'un dispositif.
 - une analyse de ses propriétés sur la base du modèle .
 - la conception d'une loi de commande toujours sur la base du modèle.
2. *conception et emploi de dispositifs* : ceci relève en fait de la mise en oeuvre pouvant faire intervenir des disciplines telles que l'électronique, l'informatique...
3. *sans l'intervention d'un opérateur humain* : cette dernière expression fait apparaître la notion de systèmes automatisés qui permettent :
 - d'améliorer les performances d'un dispositif, son confort (exemples : climatisation, direction assistée).
 - d'améliorer la sécurité (exemples : pilote automatique, freinage ABS).

Ne sont généralement abordés dans un cours d'Automatique que les aspects 1 et 3. Le point 2 est généralement spécifique au dispositif étudié et ne nécessite souvent pas l'expertise réelle d'un automaticien.

1.2 Notion de système

En Automatique, la notion de système est incontournable. La définition qu'en donne l'automaticien se rapproche de celle classique empruntée à la physique. Généralement, le système est un dispositif qui fonctionne en interaction avec son environnement générant un ensemble de phénomènes. Certaines grandeurs physiques de l'environnement agissent sur le système. Elles sont appelées entrées. D'autres émanent du système et agissent sur l'extérieur. Elles sont appelées sorties. Les signaux associés aux entrées sont généralement notés par la lettre u et les signaux associés aux sorties par la lettre y . Les entrées d'un système peuvent *a priori* être modifiées. Il peut également exister des entrées qui échappent au contrôle et qui ne peuvent être modifiées. Elles sont appelées perturbations et sont notées d . La figure 1 symbolise ce formalisme.



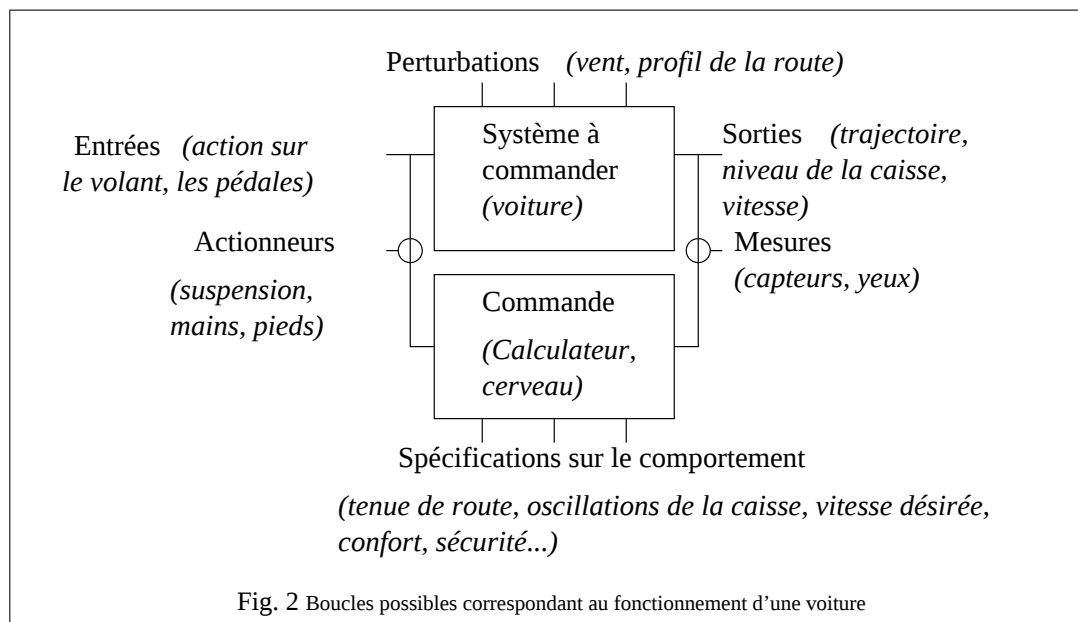
Dans la pratique, un système peut correspondre à un dispositif mécanique, électronique, chimique... et il est facile de le différencier de l'extérieur de même que de choisir quelles sont les entrées (exemples : une force ou un couple en mécanique, une tension ou un courant en électronique, la concentration d'un produit initial en chimie) ou les sorties (une vitesse ou un couple en mécanique, une tension ou un courant en électronique, une concentration d'un produit final en chimie). Comme exemples de perturbations, on peut citer une force liée aux frottements avec l'air, des tensions parasites, des concentrations de produits négligés ou d'impuretés...

Il existe des systèmes qui ne sont pas physiques tels que des systèmes économiques et financiers et pour lesquels ce formalisme peut paraître moins évident. De tels systèmes, même s'ils peuvent exister dans l'industrie automobile, ne se rencontrent pas sur un véhicule.

1.3 Notion de boucle

Une notion fondamentale en Automatique est la notion de boucle que les électroniciens (qui sont les premiers à avoir formalisé cette notion) appellent contre-réaction. Le principe en est d'acquérir une information présente sur les sorties et de l'utiliser judicieusement pour modifier les entrées. Le but de cette rétro-action est d'obtenir un comportement souhaité du système, c'est-à-dire, des signaux de sortie satisfaisants. L'utilisation de la boucle résulte du fait que les automaticiens ont constaté que la modification convenable des sorties par une action sur les entrées, sans tenir compte des sorties, était insuffisante.

Pour mieux se rendre compte de l'intérêt de la boucle, on peut prendre l'exemple d'une automobile (voir figure 2) qui lors d'un trajet, fait apparaître des bouclages manuels (c'est le conducteur qui assure ces rétro-actions lui-même) ou automatiques (il est assisté par des dispositifs de sécurité ou de confort).



Lorsqu'un automobiliste est au volant, la voiture, en interaction avec son environnement (dont le conducteur), peut constituer un système avec de nombreuses boucles. Ainsi, lorsqu'un défaut de la route ou un coup de vent entraîne un déplacement ponctuel latéral du véhicule (le système réagit à une perturbation), alors l'oeil de l'automobiliste (entre autres) lui permet de prendre conscience du déplacement latéral et il pourra agir en conséquence sur le volant pour rétablir la trajectoire. Il s'agit là d'une boucle manuelle. De même, si un trou génère une oscillation violente sur l'altitude de la caisse, une suspension active peut réduire cet inconfort en agissant sur l'amortisseur. Ceci est une boucle automatique. Cette dernière suit la plupart du temps un modèle mathématique plus ou moins compliqué qui est appelé loi de commande. L'on dit aussi que le système fonctionne en boucle fermée.

A la vue de cet exemple, on peut comprendre l'importance de la boucle. Elle peut permettre d'assurer deux activités essentielles en Automatique :

- **l'asservissement** qui consiste à faire en sorte que les sorties se comportent comme des références données (tout du moins autant que faire ce peut).
- **la régulation** qui consiste à tenter de réduire l'effet des perturbations sur les sorties.

Dans les deux cas, certaines performances sont souvent requises telles que :

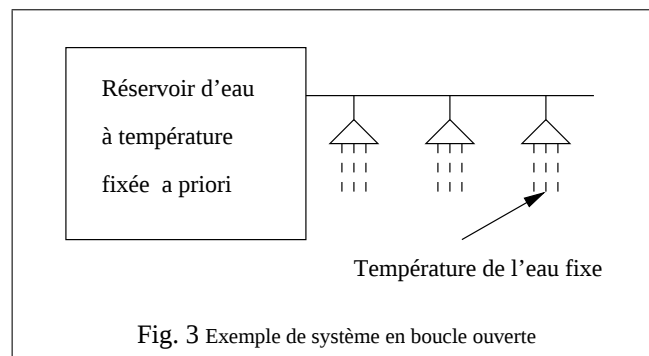
- **la stabilité**
- **le temps de réponse**
- **l'absence d'oscillations des sorties**
- **la précision**

Ces propriétés seront mieux explicitées au cours des divers chapitres.

1.4 Quelques exemples concernant la boucle

1.4.1 Douches collectives

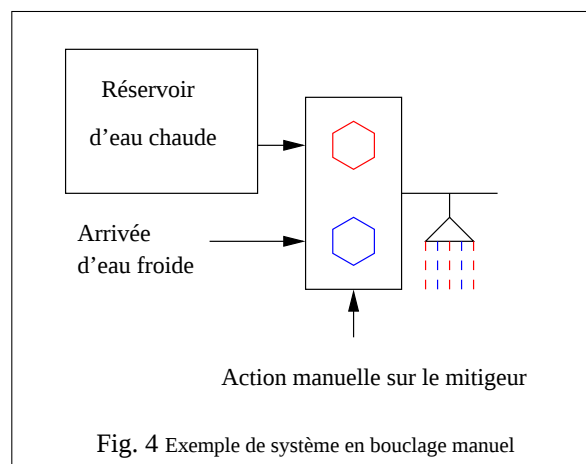
Une douche collective est schématisée par la figure 3.



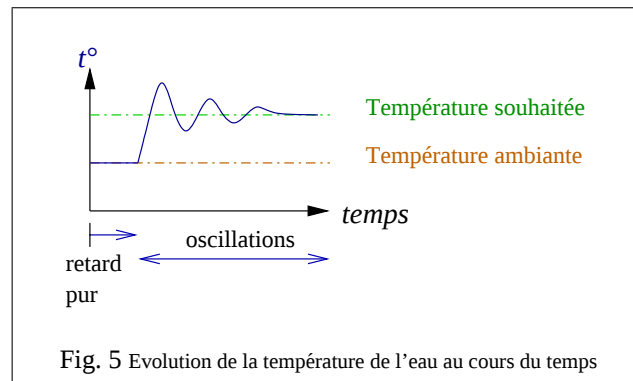
L'entrée du système est la température de l'eau du réservoir. L'eau s'écoule dans le système et sort des pommes à une température (c'est la sortie) qui n'est pas modifiable. Aucune information sur cette température de sortie n'est utilisée au niveau du réservoir. Il s'agit donc là d'un système en boucle ouverte c'est-à-dire sans boucle.

1.4.2 Douche personnelle

Le fonctionnement d'une douche manuelle est lui représenté sur la figure 4 .



La personne prenant sa douche peut cette fois-ci jouer sur le mitigeur pour améliorer la température de l'eau. En fonction de sa sensation, elle actionne les robinets jusqu'au confort souhaité. Cette boucle est donc manuelle et non automatique. La réponse en température d'un tel système, c'est-à-dire l'évolution de la température de sortie au cours du temps, est généralement de la forme donnée par la figure 5.



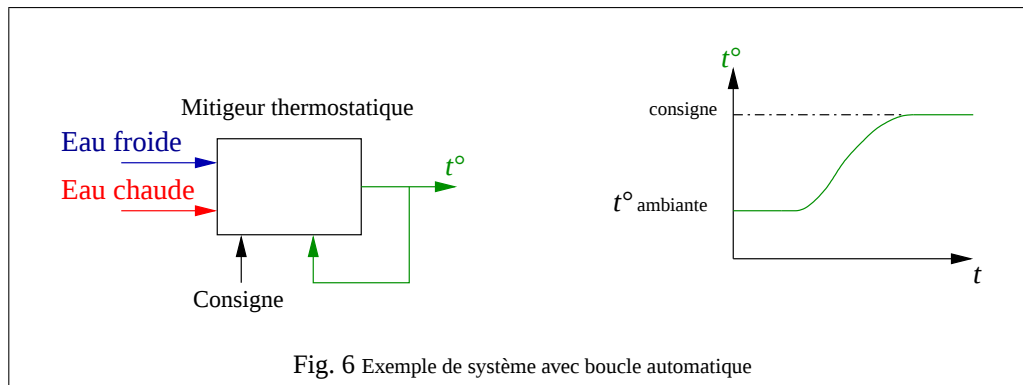
La température n'évolue pas dans un premier temps car les tuyaux sont remplis d'eau à température ambiante. On parle de retard pur du système.

Puis, en raison des manoeuvres successives de la personne sur les robinets, l'eau devient alternativement chaude et froide jusqu'à ce que la personne trouve un compromis satisfaisant. La durée des oscillations est d'autant plus longue que la personne réagit vivement et est maladroite.

Remarque 1 : en Ecosse, la stratégie pour éliminer le retard pur et les oscillations consiste à fixer la température souhaitée à la valeur de la température ambiante, ce qui a aussi l'avantage de satisfaire des critères économiques.

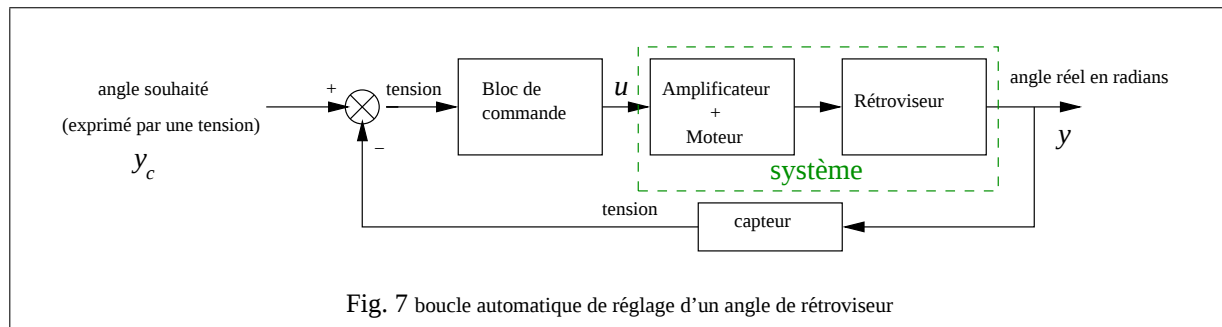
1.4.3 Mitigeur thermostatique

Pour plus de confort, le particulier peut aujourd'hui installer, au niveau de sa douche, un mitigeur thermostatique qui réalise un asservissement en température. Ce dispositif correspond à une boucle automatique qui permet à la fois de diminuer le temps de réglage (en évitant les oscillations) et de faire des économies d'eau (voir figure 6).



1.4.4 Rétroviseur à réglage de position électronique

Supposons que deux personnes utilisent le même véhicule et que l'ordinateur de bord de ce dernier propose à chacun de mémoriser une position pour le rétroviseur. Cette position est caractérisée par deux angles et chacun de ces deux angles doit être à la bonne valeur lorsque le conducteur demande sa position préférée. La rotation du rétroviseur est assurée grâce à deux petits moteurs à courant continu (un pour chaque angle). Le principe de réglage d'un angle en fonction de la position souhaitée est donné par la figure 7.



On note qu'il convient de ramener la sortie sur l'entrée et de modifier l'excitation du moteur en fonction de l'écart entre l'angle souhaité et celui obtenu. Pour calculer cet écart, il faut spécifier la valeur souhaitée par une tension et convertir l'angle effectif en tension, ce qui est le rôle du capteur. Lorsque l'angle effectif est celui escompté, l'écart s'annule et le moteur assurant la rotation n'est plus commandé. On verra plus tard que peuvent se cacher des blocs assez complexes derrière ce schéma de principe.

Il faut noter que dans le cas d'un système bouclé, on distingue les entrées du système en boucle fermée qui sont appelées consignes et généralement notées $y_c(t)$ (ici, la tension correspondant à l'angle souhaité) des entrées du système en boucle ouverte (c'est-à-dire le procédé composé ici de l'amplificateur, du moteur et du rétroviseur) qui sont appelées commandes et restent notées $u(t)$ (ici, la tension d'induit du moteur).

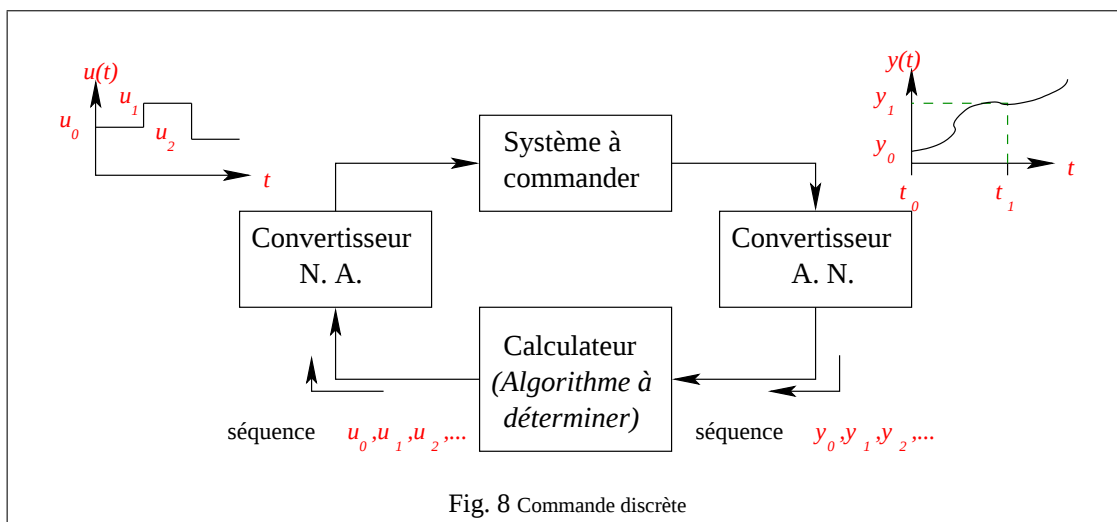
On retrouve ce style de problème dans le cas de l'asservissement de l'inclinaison d'une antenne parabolique.

1.5 Cadre de travail

On vient de voir que l'étude des systèmes conduisait à s'intéresser à des signaux décrivant l'évolution de grandeurs physiques (les entrées et les sorties notamment). On distingue plusieurs automatiques selon la nature des signaux et des modèles utilisés.

◇ Ainsi les signaux continus peuvent prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné alors que d'autres signaux sont susceptibles de prendre uniquement certaines valeurs bien déterminées. Sur la base de cette différence, on distingue l'Automatique des systèmes à événements (ou états) continus de l'Automatique des systèmes à événements (ou états) discrets. Seul le cas des événements continus sera envisagé dans ce cours.

◇ Une autre distinction tout aussi fondamentale se fait sur le temps. En effet, les signaux peuvent être définis à tout instant du temps ou simplement connus à des instants donnés (on parle de signaux discrets, discretisés, ou échantillonnés comme sur la figure 8).



Les signaux de sortie sont échantillonnés, c'est-à-dire mesurés et donc connus uniquement à certains instants, et la séquence des échantillons est obtenue sous forme numérique en sortie d'un convertisseur analogique numérique (CAN). Elle est transmise à un ordinateur qui en déduit une séquence de signaux de commande. Celle-ci est transformée par un convertisseur numérique analogique (CNA) qui restitue un signal à temps continu sur l'entrée du système. Pour le calculateur, l'ensemble constitué du système et des convertisseurs est vu comme un système à temps discret (ou "système discret"). Dans ce cours, ne sera considérée que l'Automatique des systèmes à temps continu (ou simplement des "systèmes continus") par opposition à l'Automatique des systèmes à temps discret.

◇ Il existe d'autres distinctions qui reposent sur le modèle mathématique utilisé pour décrire le comportement du système. Ce modèle est obtenu soit par identification (on fait correspondre un modèle avec une structure donnée au comportement entrées/sorties du système) ou, et ce sera le cas ici, par une utilisation judicieuse des équations correspondant aux lois de la physique régissant le comportement du système. L'on parle alors de modélisation du système. La plupart de ces équations sont différentielles et non linéaires. Cependant, il est souvent recommandé de travailler dans une gamme de valeurs autour d'un point de fonctionnement de telle sorte que les équations sont raisonnablement remplaçables par des équations différentielles dites linéaires à coefficients constants. Cette approximation permet donc de passer d'un modèle non linéaire à un modèle linéaire. Bien que moins fidèle à la réalité, ce dernier facilite l'étude et la commande du système, notamment grâce à un principe fondamental, celui de superposition (ou de séparation), résumé sur la figure 9.

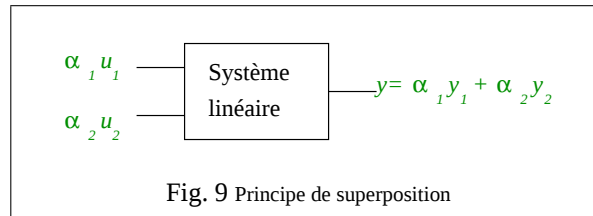


Fig. 9 Principe de superposition

Si l'entrée u_1 entraîne la sortie y_1 et si l'entrée u_2 entraîne la sortie y_2 alors deux entrées $\alpha_1 u_1$ et $\alpha_2 u_2$ agissant simultanément entraînent une sortie $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ (voir justification en annexe B). Ce cours est restreint à l'étude des systèmes linéaires.

◇ Enfin, une dernière distinction est essentielle pour ce cours. Les systèmes sont soit monovariables (une seule entrée, une seule sortie) soit multivariables (plusieurs entrées, plusieurs sorties). Seuls les systèmes monovariables seront étudiés.

En résumé, ce cours concerne les systèmes linéaires monovariables continus.

1.6 Nécessité d'une régulation étudiée

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'une régulation simple, un bouclage simple, ne sont pas toujours suffisants pour commander un système. On suppose que l'on souhaite réguler, ou plutôt asservir, la vitesse d'un ventilateur destiné à refroidir un système électronique à l'intérieur du véhicule. Le procédé est constitué tout simplement d'un petit moteur excité par une tension u et entraînant la rotation du ventilateur comme le montre la figure 10.

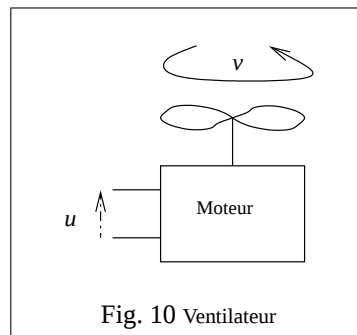


Fig. 10 Ventilateur

On souhaite que v , la vitesse angulaire du ventilateur, soit égale à une consigne donnée v_c . Pour ce faire, on adopte une commande correspondant au schéma de la figure 11.

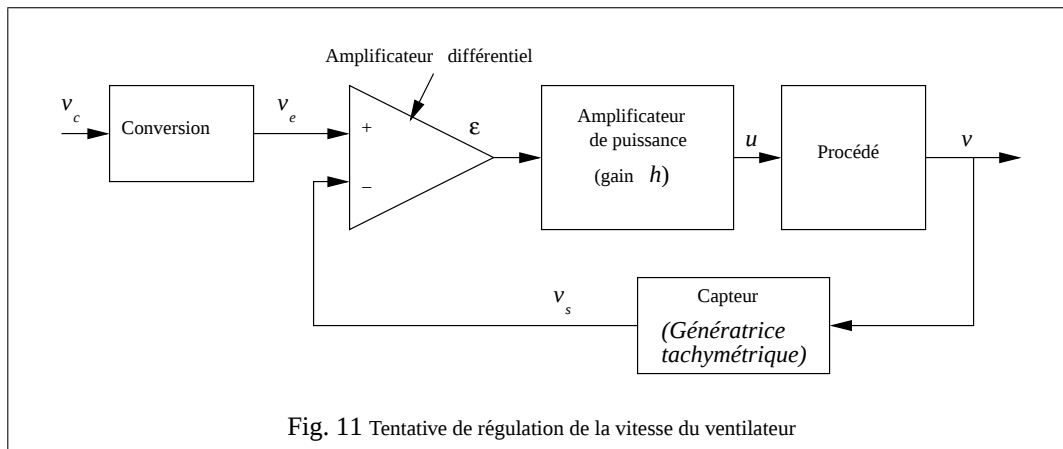


Fig. 11 Tentative de régulation de la vitesse du ventilateur

La question est la suivante : peut-on obtenir $v = v_c$, c'est-à-dire, au niveau des tensions, $v_e = v_s$? Si l'on suppose que c'est effectivement le cas, alors, à la sortie de l'amplificateur différentiel, la tension est $\epsilon = v_e - v_s = v_c - v = 0$. De ce fait, à la sortie de l'amplificateur de puissance, aucun signal n'est délivré ($u = h\epsilon = 0$) et le ventilateur ne tourne pas. Cette égalité n'est donc obtenue qu'à l'arrêt et l'on comprend qu'il est nécessaire d'envisager une boucle plus sophistiquée. C'est tout le but de l'Automatique.

1.7 Méthodologie

En Automatique, la méthodologie utilisée peut se diviser en plusieurs étapes qui sont les suivantes :

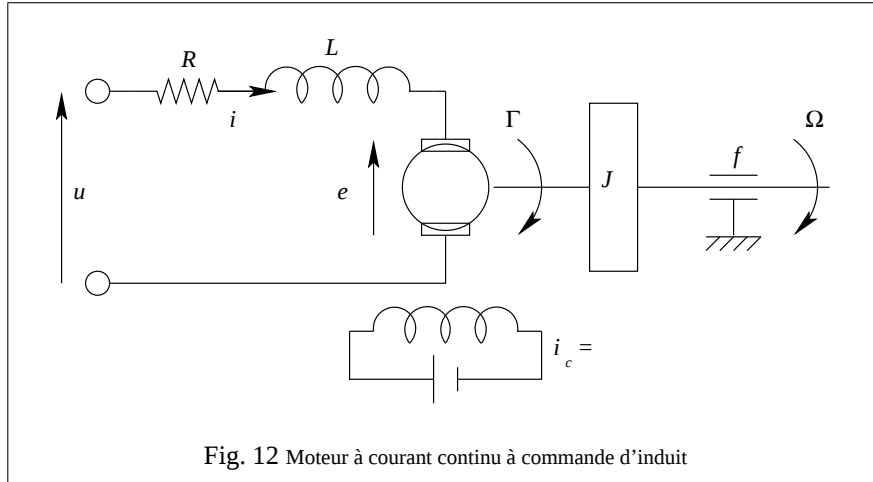
1. **Cahier des charges** : l'automaticien doit prendre connaissance du problème et des diverses spécifications. Il doit, à cette occasion, clairement définir le système (avec ses entrées et ses sorties) et les performances attendues pour ce dernier.
2. **Modélisation** : l'automaticien doit décrire le comportement du procédé (c'est-à-dire le système en boucle ouverte) grâce aux lois de la physique et obtenir un ensemble d'équations algébriques et différentielles. Ensuite, il doit reformuler celles-ci de manière à obtenir un modèle classique en Automatique (une **fonction de transfert** par exemple).
3. **Analyse** : il convient dans cette phase d'utiliser des techniques de l'Automatique pour juger des performances du système (**stabilité**, **temps de réponse**, **oscillations**, **précision**...) à partir du modèle.
4. **Synthèse** : la dernière phase consiste à concevoir une loi de commande c'est-à-dire une boucle "intelligente" qui confère au système ainsi bouclé les performances souhaitées si cela est possible.

2 Modélisation... de l'équation différentielle à la fonction de transfert

Cette partie s'articule autour d'un exemple qui permettra de comprendre la démarche à suivre pour parvenir à obtenir un modèle du système usuel en Automatique, à savoir la **fonction de transfert**.

2.1 Présentation du système

Il s'agit d'un moteur électrique à courant continu qui est dit "à commande d'induit". Le schéma d'un tel procédé est donné par la figure 12.



Les lois de la physique régissant le comportement de ce procédé électromécanique conduisent aux équations suivantes :

- Equation électrique au niveau de l'induit :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + e = u \quad (1)$$

u est la commande d'induit, i le courant d'induit, R et L sont respectivement la résistance et l'inductance d'induit. e est une force électromotrice.

- Couple moteur Γ :

$$\Gamma = K_1 \Psi i = Ki \quad (2)$$

car Ψ est le flux inducteur constant donné par :

$$\Psi = K_c i_c = \text{Cte} \quad (3)$$

- La force électromotrice e est donnée par :

$$e = K\Omega \quad (4)$$

où Ω est la vitesse de l'arbre du moteur.

- Enfin, la relation fondamentale de la dynamique conduit à écrire :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma - f\Omega \quad (5)$$

où J est le moment d'inertie et f un coefficient relatif aux forces de frottement générant un couple résistant $C_r = f\Omega$.

Il convient maintenant de se fixer une entrée et une sortie. La commande d'induit u est choisie comme entrée et la sortie sera la vitesse angulaire du moteur $y = \Omega$. On peut en effet souhaiter réaliser un asservissement de vitesse.

2.2 Obtention de l'équation différentielle

On utilise maintenant les équations précédentes pour résumer le modèle du système par une seule équation différentielle reliant y à u . On note que les grandeurs physiques sont fonctions du temps mais que cette dépendance n'apparaît pas explicitement dans les notations. A partir de maintenant, on note par un point au dessus de la lettre la dérivée du signal associé par rapport au temps et par deux points au-dessus de la lettre la dérivée seconde par rapport au temps.

Les relations (5) et (2) conduisent à écrire :

$$J\ddot{y} + f\dot{y} = Ki$$

ce qui, après dérivation par rapport au temps, compte tenu des équations (1) et (4), s'écrit :

$$J\ddot{y} + f\dot{y} = K\dot{i} = \frac{K}{L}(u - Ri - Ky)$$

$$\Leftrightarrow J\ddot{y} + f\dot{y} + K^2y = Ku - RKi$$

Or $Ki = \Gamma$ et on peut à nouveau utiliser (5) pour aboutir à :

$$J\ddot{y} + (RJ + fL)\dot{y} + (fR + K^2)y = Ku \quad (6)$$

On obtient donc une équation différentielle en y dans laquelle les seules grandeurs physiques variables sont u et y . Cette équation différentielle constitue un modèle de comportement entrée/sortie pour le procédé. Elle pourrait être résolue pour déterminer la **réponse** du procédé (c'est-à-dire l'évolution de $y(t)$ au cours du temps) en fonction d'une excitation donnée sur u et de conditions initiales. Toutefois cette démarche est peu courante en Automatique car un peu lourde et l'on préfère adopter d'autres modèles plus facilement manipulables tels que la **fonction de transfert** présentée ultérieurement.

En supposant que l'inductance L est très petite, on peut envisager un modèle plus simple où elle est négligée ($L \simeq 0$). L'équation (6) peut alors se réécrire :

$$RJ\dot{y} + (Rf + K^2)y = K_1u \quad (7)$$

On comprend sur cet exemple que plusieurs modèles plus ou moins fidèles peuvent décrire le même système.

Remarque 2 : pour cet exemple, le modèle était déjà linéaire. En effet, l'équation différentielle dépend linéairement de l'entrée, de la sortie et de leurs dérivées successives. Ce n'est pas toujours le cas. Lorsque ce n'est pas le cas, il convient de recourir à quelque approximation pour que les éléments non linéaires soient remplacés par des éléments linéaires. Ces approximations ne sont généralement justifiées que dans une gamme de valeurs correspondant à de petites variations autour d'un point de fonctionnement au voisinage duquel le comportement du système correspond à peu près à un modèle linéaire. L'annexe A est consacrée aux notions de caractéristique statique et de point de fonctionnement.

2.3 Transformée de Laplace

Ce paragraphe a pour but de rappeler ce qu'est la transformée de Laplace ¹, outil mathématique nécessaire pour obtenir une fonction de transfert d'un système.

Chaque grandeur physique est décrite par un signal temporel c'est-à-dire une fonction du temps. Seuls les fonctions du temps dites **causales**, c'est-à-dire pour lesquelles $f(t) = 0, \forall t < 0$, sont considérées. Toute fonction causale $f(t)$ peut subir une transformation dite de "Laplace", notée $\mathcal{L}$ et ainsi définie :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

$F(p)$, si elle existe, c'est-à-dire si l'intégrale est calculable, est appelée transformée de Laplace de $f(t)$ et la variable complexe $p = \alpha + j\beta$ (notée s dans les ouvrages de langue anglo-saxonne) est connue sous le nom de variable de Laplace. Cet opérateur possède les propriétés suivantes :

1. linéarité :

$$f_1(t) + kf_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(p) + kF_2(p)$$

¹Marquis Pierre Simon de Laplace (1749-1827) : mathématicien et physicien français, auteur de travaux se rapportant à la mécanique céleste et au calcul des probabilités.

2. théorème de la dérivation :

- $\dot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0)$
- $\ddot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p^2F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$
- $\frac{d^l f(t)}{dt^l} \xrightarrow{\mathcal{L}} p^l F(p) - p^{l-1}f(0) - p^{l-2}\dot{f}(0) - \dots - \frac{df^{l-1}(0)}{dt^{l-1}}$

p correspond donc, en présence de conditions initiales nulles, à une dérivation dans le domaine de Laplace.

3. théorème de l'intégration :

- $\int_0^{t \geq 0} f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(p)}{p}$

$1/p$ est donc l'opérateur d'intégration dans le domaine de Laplace.

4. théorème du retard :

- $f(t - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-\theta p} F(p)$

5. théorème du décalage fréquentiel :

- $f(t)e^{\omega t} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p + \omega)$

6. théorème de la valeur initiale :

- $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$

(sous réserve d'existence des deux limites)

7. théorème de la valeur finale :

- $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$

(sous réserve d'existence des deux limites)

Comme il est parfois fastidieux de calculer la transformée de Laplace d'une fonction temporelle compliquée (de même que la transformée inverse notée $\mathcal{L}^{-1}$), en pratique, les automaticiens disposent de tableaux de transformées (Voir tableau 1). Quelques lignes de ce tableau sont justifiées en annexe C.1. Il en existe des versions bien plus complètes dans certains ouvrages, notamment dans [7].

Ce tableau peut être utilisé pour passer du domaine de Laplace au domaine temporel. Ceci évite d'utiliser la transformation $\mathcal{L}^{-1}$ qui est définie en annexe C.2

2.4 Fonction de transfert

La fonction de transfert (parfois appelée transmittance) est le modèle le plus usuel en Automatique. Elle s'obtient en appliquant la transformation de Laplace sur l'équation différentielle. On reprend l'exemple du moteur à courant continu. Pour simplifier le développement, les paramètres prendront les valeurs simples (mais peu réalistes) suivantes :

- $J = 1 \text{ kg.m}^2$
- $f = 1 \text{ N.m.s}$
- $R = 1 \Omega$

Original $f(t)$, $t \geq 0$	Transformée de Laplace $F(p)$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Echelon d'amplitude E i.e. $E\Gamma(t)$	$\frac{E}{p}$
Rampe de pente b i.e. bt	$\frac{b}{p^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^q e^{-at}$	$\frac{q!}{(p+a)^{q+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
Retard pur i.e. $f(t - \theta)$	$e^{-\theta p} F(p)$

TAB. 1 – Table de transformées de Laplace

- $L = 10mH$
- $K = 1N.m/A = 1V.s$

Compte tenu de ces valeurs numériques, l'équation (6) s'écrit :

$$10^{-2}\ddot{y} + 1,01\dot{y} + 2y = u$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} + 101\dot{y} + 200y = 100u$$

En appliquant $\mathcal{L}$, il vient :

$$p^2 Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 101pY(p) - 101y(0) + 200Y(p) = 100U(p) \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{(p^2 + 101p + 200)}_{D(p)} Y(p) = \underbrace{100}_{N(p)} U(p) + \underbrace{(p + 101)y(0) + y'(0)}_{I(p)} \Leftrightarrow$$

$$Y(p) = \underbrace{\frac{N(p)}{D(p)}}_{G(p)} U(p) + \frac{I(p)}{D(p)}$$

Le second terme de $Y(p)$ dépend des conditions initiales (à l'instant 0). Il peut être nul si le système est initialement au repos. Il ne traduit pas des propriétés constantes du comportement entrée/sortie. En revanche, $G(p)$ est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes en p . Elle est indépendante des conditions initiales. $G(p)$ est appelée fonction de transfert et peut s'écrire :

$$G(p) = \frac{100}{p^2 + 101p + 200} = \frac{100}{(p + p_1)(p + p_2)} \quad \text{avec } p_1 \simeq -2 \text{ et } p_2 \simeq -98$$

p_1 et p_2 , les racines de $D(p)$, sont appelés pôles du système. Ils ont une grande influence sur le comportement de ce dernier. Lorsqu'il existe des racines au numérateur, elles sont appelées zéros du système et peuvent également influencer son comportement.

Mais $G(p)$ peut aussi s'écrire :

$$G(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \quad \text{avec } \tau_1 = -\frac{1}{p_1} \simeq 0,5, \tau_2 = -\frac{1}{p_2} \simeq 0,01 \text{ et } K \simeq 0,5$$

τ_1 et τ_2 , que l'on ne peut faire apparaître que lorsque les pôles sont réels, sont appelées constantes de temps du système. On note ici que τ_1 est beaucoup plus élevée et correspond approximativement à la dynamique des phénomènes mécaniques alors que τ_2 est davantage liée aux phénomènes électriques.

Si L est négligée, on peut appliquer la transformation de Laplace à l'équation différentielle (7) et l'on obtient en éliminant les termes liés aux conditions initiales :

$$G(p) = \frac{1}{p + 2} = \frac{0,5}{1 + 0,5p}$$

Dans ce modèle simplifié, il ne reste qu'un pôle égal à -2 ou une seule constante de temps égale à $0,5$. Ceci revient à ne prendre en compte que la dynamique des phénomènes mécaniques.

De manière générale, il s'agit d'obtenir pour tout système, éventuellement par approximation, une équation différentielle à coefficients constants et dont chaque membre est linéaire par rapport à l'entrée, à la sortie ainsi qu'à leurs dérivées successives (si elles sont non nulles) :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Pour des conditions initiales nulles et puisque p est l'opérateur de dérivation dans le domaine de Laplace, on obtient la forme générale de la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad (8)$$

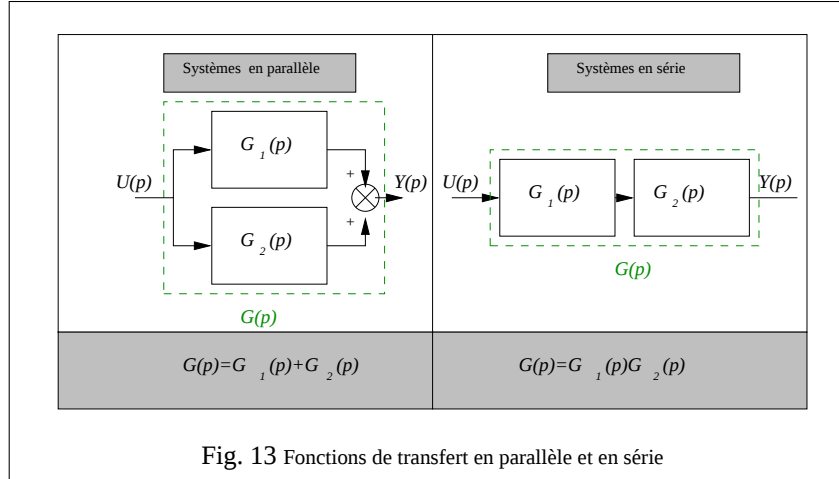
Le degré du numérateur $N(p)$ est m et celui du dénominateur $D(p)$ est n . n est également appelé **ordre du système**. Les **pôles** du système sont donc les racines de l'équation caractéristique $D(p) = 0$ alors que les **zéros** du système sont les racines de $N(p) = 0$. $D(p)$ est parfois appelé polynôme caractéristique.

2.5 Notion de causalité

Soit la **fonction de transfert** d'un système telle que celle donnée en (8) (forme générale). Physiquement, il est difficilement concevable que m soit strictement supérieur à n . L'on peut toujours imaginer un modèle mathématique correspondant à ce cas ou même tenter une conception pratique mais ceci signifie que la sortie du système à un instant donné dépend de la valeur de l'entrée à un instant ultérieur. C'est pourquoi l'on suppose plutôt, pour un procédé, que $m \leq n$. Un tel système est dit causal et la fonction de transfert est dite propre (même strictement propre si $m < n$). Lorsque l'on cherche à construire un système, il est important de prendre en compte cette causalité. La plupart des modèles physiques sont strictement propres.

2.6 Association de fonctions de transfert

On a déjà un peu utilisé les schéma-blocs pour expliquer le principe de la **boucle** (rétro-action). On peut également s'en servir pour illustrer deux règles essentielles pour comprendre l'intérêt de la **fonction de transfert** lorsque plusieurs systèmes sont associés pour en constituer un seul. Ainsi, on envisage deux cas d'association de deux systèmes : en parallèle et en série. La figure 13 montre, dans ces deux cas, la fonction de transfert globale correspondante. Ces règles peuvent servir pour des systèmes plus complexes.



2.7 Fonctions de transfert en boucle fermée

On se sert à nouveau des schéma-blocs pour résumer le passage de la boucle ouverte à la boucle fermée. Deux cas seront envisagés : celui du retour unitaire et celui d'un retour dynamique quelconque (voir figure 14).

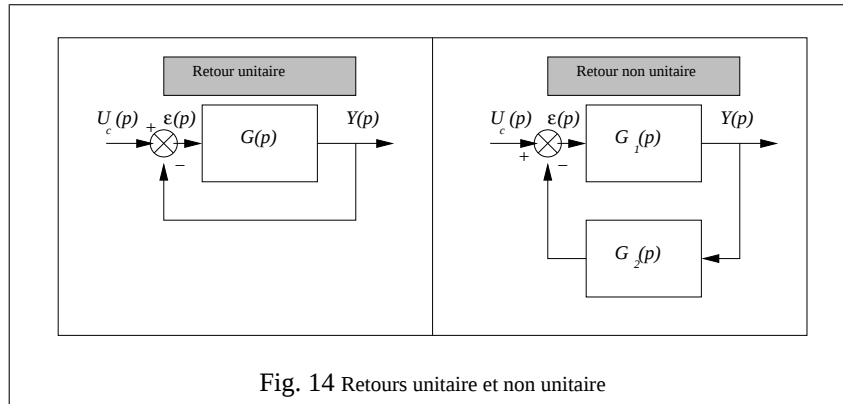


Fig. 14 Retours unitaire et non unitaire

$G_2(p)$ peut être par exemple associé à un capteur.

On peut définir la **fonction de transfert** de la boucle, $F(p)$, couramment appelée “gain de boucle” et correspondant à la fonction de transfert de l’ensemble de la boucle ouverte, ensemble lui-même appelé chaîne directe.

- **Retour unitaire :**

$$F(p) = G(p)$$

- **Retour non unitaire :**

$$F(p) = G_1(p)G_2(p)$$

Dans ce second cas, on distingue $G_1(p)$, la fonction de transfert du procédé, de $F(p)$, celle de la chaîne directe. On peut aussi, selon une formule attribuée parfois à Black², calculer la fonction de transfert en boucle fermée.

- **Retour unitaire :**

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U_c(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

- **Retour non unitaire :**

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U_c(p)} = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)}$$

Cette formule est démontrée dans l’annexe A.

3 Réponses des systèmes linéaires

3.1 Définition de la réponse d’un système

La réponse d’un système de **fonction de transfert** $G(p)$ correspond à la forme du signal de sortie $y(t)$ lorsque le système est excité par un signal d’entrée connu $u(t)$. On distingue plusieurs types de réponse selon le signal d’entrée. Certaines réponses sont très couramment étudiées pour comprendre le fonctionnement d’un système. En toute logique, la réponse d’un système dépend de la valeur de la sortie à l’instant initial considéré. Cependant, à des fins de simplification de ce cours, nous ne nous intéresserons qu’à des réponses pour lesquelles les conditions initiales sont nulles.

²Harold Stephen Black (1898-1983) : ingénieur électronique américain dont les travaux sur la contre-réaction vers 1934 ont ouvert des voies à l’Automatique.

3.2 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est la réponse à une impulsion unitaire de Dirac³. On l'étudiera peu dans ce cours. Cependant, on rappelle que si $u(t) = \delta(t)$, alors sa transformée de Laplace est $U(p) = 1$ (voir tableau 1 et annexe C.1). Celle de $y(t)$ est donc :

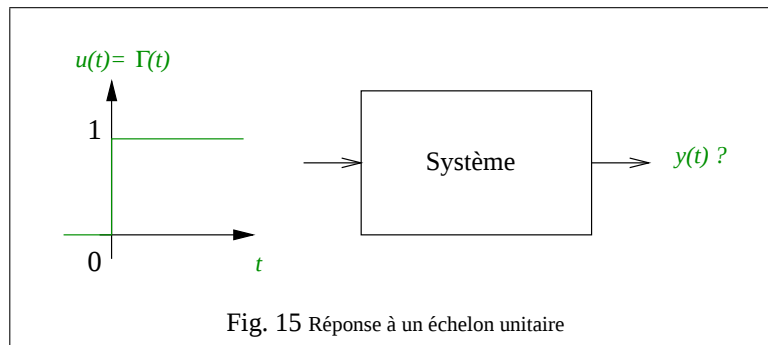
$$Y(p) = G(p)$$

Le signal temporel $y(t)$ recherché est donc tout simplement la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p))$$

3.3 Réponse indicielle

La réponse indicielle d'un système est sa réponse à un échelon unitaire $u(t) = \Gamma(t)$, également appelé fonction de Heaviside⁴. Cette fonction est représentée sur la figure 15.



3.3.1 Réponse indicielle d'un système canonique de premier ordre

On rappelle que la fonction de transfert d'un système canonique (numérateur constant) de premier ordre est de la forme :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

K est appelé gain statique et τ est appelé constante de temps. Cette fonction de transfert correspond, en appliquant la transformation inverse de celle de Laplace, à l'équation différentielle :

$$y(t) + \tau \dot{y}(t) = K u(t), \quad t \geq 0$$

◇ On peut déterminer la réponse à partir de cette équation. En effet, la solution d'une telle équation, compte tenu que $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$, est donnée par (cf. cours de mathématiques) :

$$y(t) = \underbrace{C e^{-t/\tau}}_{\text{Solution de l'équation homogène associée}} + \underbrace{K}_{\text{solution particulière}}$$

où C est une constante à déterminer. En considérant que $y(0) = 0$, on déduit que $C = -K$. Il vient donc

$$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau})$$

◇ On peut retrouver ce résultat directement à partir de la fonction de transfert puisque l'on ne considère pas de conditions initiales. On note d'abord que $U(p) = \mathcal{L}(u(t)) = 1/p$ ce qui conduit à écrire :

³Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) : mathématicien et physicien britannique d'origine suisse ayant participé à la création de la Mécanique Quantique. Prix Nobel de Physique en 1933.

⁴Oliver Heaviside (1850-1925) : physicien britannique à l'origine, entre autres, de la notion d'impédance et du calcul opérationnel. Il découvrit l'ionosphère

$$Y(p) = G(p)U(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)}$$

La décomposition en éléments simples aboutit à :

$$Y(p) = \frac{\frac{K}{\tau}}{p(p + \frac{1}{\tau})} = \frac{K}{p} - \frac{K}{p + \frac{1}{\tau}}$$

En appliquant $\mathcal{L}^{-1}$, il vient (cf. tableau 1) :

$$y(t) = K\Gamma(t) - Ke^{-t/\tau}$$

et l'on retrouve, par factorisation, le résultat précédent.

Dans le cas du **moteur électrique** étudié dans la partie précédente, on a $K = 0,5$ et $\tau = 0,5s$ (**modèle simplifié**). La réponse d'un tel système est donnée par la figure 16.

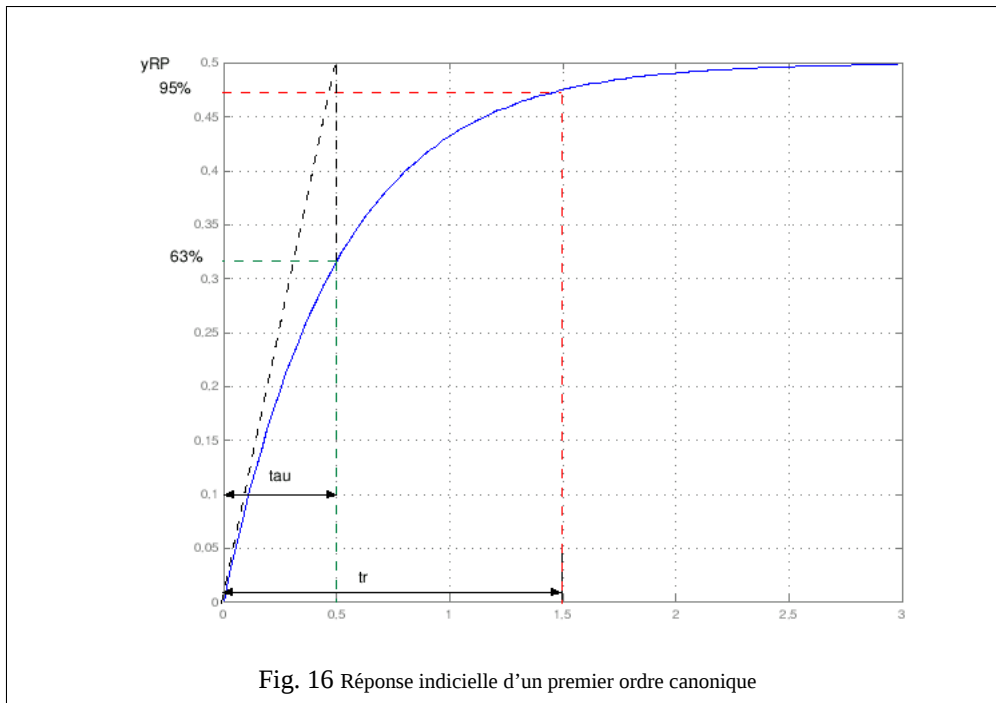


Fig. 16 Réponse indicielle d'un premier ordre canonique

A partir de cette réponse, on peut définir plusieurs notions sur les réponses des systèmes en général et des systèmes de premier ordre en particulier. On note d'abord que le signal de sortie tend asymptotiquement vers une valeur (ici 0,5) sans jamais l'atteindre mathématiquement. Cette convergence asymptotique est toujours vérifiée pour les modèles linéaires qui sont dits stables (cette propriété sera étudiée ultérieurement). C'est pourquoi, dans la réponse, on distingue deux phases :

- le régime transitoire qui correspond à l'évolution du signal de sortie dans les premiers instants de la réponse et qui dure un temps t_r appelé temps de réponse.
- Au delà de ce temps, le signal passe en régime permanent, c'est à dire que le signal de sortie reste entre 95% et 105% de sa valeur finale y_{RP} (correspondant à l'asymptote).

Sur cette courbe, on constate que le temps de réponse correspond à l'instant où le signal atteint 0,475, soit $t_r = 1,5s$.

Par ailleurs, on peut définir $\Delta Y = y_{RP} - y(0)$, la variation totale du signal de sortie (ici $\Delta Y = 0,5 - 0 = 0,5$ puisque la condition initiale est nulle). De même, on peut définir ΔU , la variation du signal d'entrée (ici $\Delta U = 1 - 0 = 1$ puisqu'il s'agit d'un échelon unitaire). Il est facile (voir annexe E) de démontrer que

$$K = \frac{\Delta Y}{\Delta U} = G(0)$$

On peut donc retrouver le **gain statique du système**. Cette définition reste valable pour tout système, même d'ordre plus élevé. On note que dans le cas présent, $K = 0,5$, ce qui signifie que $y(t) \simeq 0,5u(t)$ en régime permanent.

Néanmoins, certaines propriétés sont spécifiques aux systèmes canoniques de premier ordre. Ainsi, un tel système ne comportant qu'une seule **constante de temps**, on peut la retrouver, à l'instar du gain statique, sur la réponse du système. En effet, pour un tel système, il existe trois façons simples de la déterminer :

- à partir du **temps de réponse** car $t_r = 3\tau$.
- τ correspond au temps que met le signal de sortie pour varier de 63% de ΔY .
- la tangente à la courbe au niveau du point initial $(0; y(0))$ coupe l'asymptote du régime permanent à $t = \tau$.

La constante de temps traduit la rapidité de la réponse du système. Moins elle est, plus rapide est cette réponse.

3.3.2 Réponse indicielle d'un système canonique de deuxième ordre

Un système canonique de deuxième ordre a pour **fonction de transfert**

$$G(p) = \frac{K}{1 + 2\frac{m}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2} = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2m\omega_n p + \omega_n^2}$$

K est toujours le **gain statique** du système. Il conserve la même définition. m est appelé coefficient d'amortissement et ω_n est appelé pulsation propre non amortie. De ces deux paramètres dépend la forme de la réponse, en particulier de la valeur de m .

On note λ_1 et λ_2 les racines du dénominateur de $G(p)$. Pour simplifier, on considère $K = 1$ ce qui ne change rien à la forme des courbes. On distingue 5 cas :

- $m > 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -m\omega_n \pm \omega_n\sqrt{m^2 - 1}$ sont réels et

$$y(t) = 1 - (\lambda_2 e^{-\lambda_1 \omega_n t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \omega_n t}) / (\lambda_2 - \lambda_1)$$

La réponse est dite apériodique c'est à dire sans oscillation.

- $m = 1 \Rightarrow$ on a un pôle double $\lambda_1 = \lambda_2 = -m\omega$ et

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$

La réponse reste apériodique.

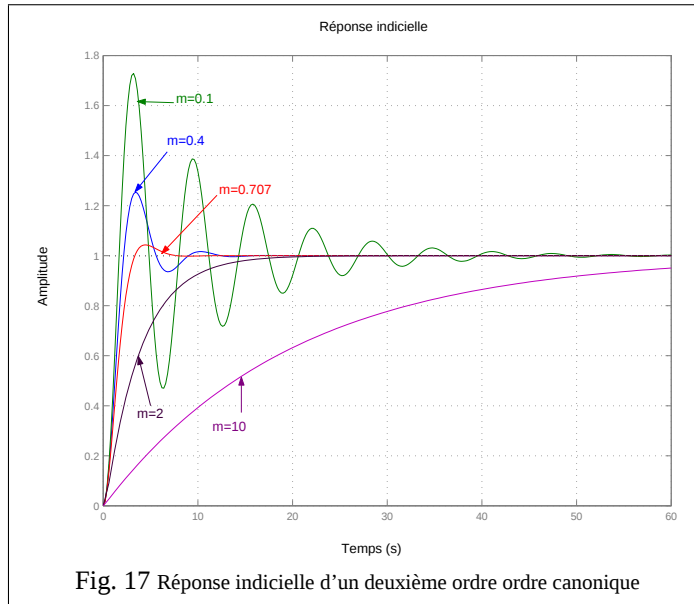
- $0 < m < 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -m\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - m^2}$ sont complexes et

$$y(t) = 1 - (e^{-m\omega_n t} / \sqrt{1 - m^2}) \sin(\omega_p t + \Psi)$$

avec $\sin \Psi = \sqrt{1 - m^2}$, $\cos \Psi = m$ et $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - m^2}$.

La réponse est oscillatoire amortie avec une pulsation ω_p . Elle est dite pseudo-périodique. Les oscillations sont d'autant plus marquées que m est moindre. C'est seulement lorsque $m < 0.707$ que les oscillations sont vraiment apparentes ; au delà, seul un dépassement peut être perceptible.

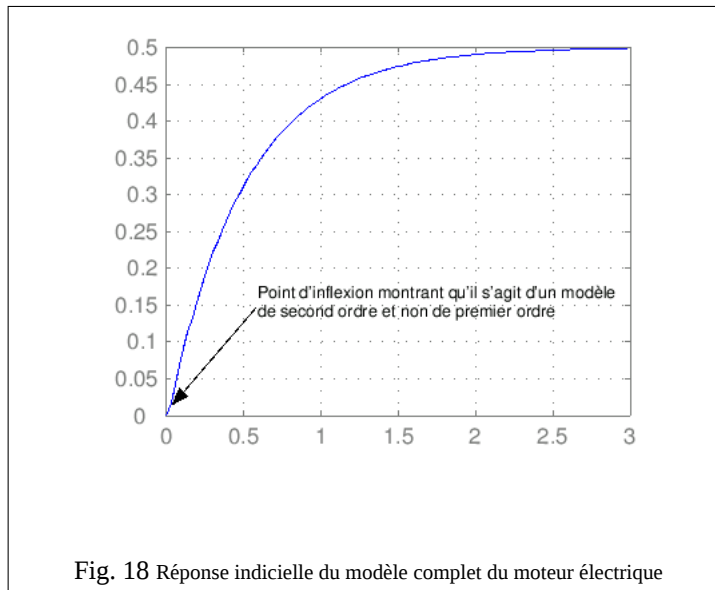
- $m = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j\omega_n$. La réponse est tout simplement sinusoïdale de pulsation ω_n . Le système est un oscillateur.
- $m < 0 \Rightarrow$ la réponse est oscillatoire non amortie et diverge. Ceci correspond à un système instable (voir Partie 4).
Voici plusieurs réponses indicielles de ce système canonique de deuxième ordre, correspondant à $K = 1$, pour $\omega_n = 1$ et pour diverses valeurs de $m > 0$ (figure 17).



Dans le cas du modèle du **moteur à courant continu**, on a :

$$G(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \quad \text{avec } \tau_1 = -\frac{1}{p_1} \simeq 0,5, \quad \tau_2 = -\frac{1}{p_2} \simeq 0,01 \text{ et } K \simeq 0,5$$

ce qui signifie, puisque deux **constantes de temps** apparaissent, que les **pôles** sont réels, c'est-à-dire $m > 1$. La réponse de ce modèle est donnée par la figure 18 où l'on voit que, τ_2 étant nettement moindre que τ_1 , la dynamique électrique n'apparaît presque pas sur la réponse qui ressemble à une réponse de premier ordre.



3.3.3 Remarque sur les pôles des systèmes

De manière générale, quel que soit l'ordre du système, des **pôles** complexes engendrent une réponse oscillatoire. **Plus la partie imaginaire est grande devant la partie réelle, plus les oscillations sont marquées.** En revanche, des pôles réels n'engendrent pas de transitoire oscillant. Alors, que se passe-t-il lorsqu'il y a des pôles réels et complexes dans le même modèle ? Il faut distinguer les pôles dominants (partie réelle faiblement négative) correspondant aux dynamiques lentes (la dynamique mécanique dans le cas du **moteur**) des pôles rapides (partie réelle fortement négative) correspondant aux dynamiques rapides (la dynamique électrique dans le cas du **moteur**). **Ce sont les pôles dominants qui ont la plus grosse**

influence sur le régime transitoire.

Par ailleurs, le cas des pôles à partie réelle positive sera traitée ultérieurement dans le cadre de la [stabilité](#) des systèmes.

3.3.4 Remarque sur les zéros

Il n'est traité dans cette partie que des systèmes canoniques c'est-à-dire ne comportant pas de [zéro](#). La présence de zéros peut entraîner des dépassements inattendus dans la réponse mais leur influence est beaucoup plus difficile à analyser que celle des [pôles](#).

3.3.5 Remarque sur les modèles d'ordre élevé

Pour étudier la forme de la réponse d'un système d'ordre supérieur, il peut être astucieux de trouver un modèle d'ordre 2 qui soit une bonne approximation de son comportement, par exemple en négligeant certaines dynamiques rapides (en ne considérant que les [pôles dominants](#)).

Toutefois, la méthode générale pour obtenir la forme de la sortie $y(t)$ d'un système décrit par (8) est d'exprimer $Y(p) = G(p)/p$, de décomposer cette [transformée de Laplace](#) en éléments simples et d'essayer d'appliquer $\mathcal{L}^{-1}$ sur chaque élément simple en utilisant le tableau 1. Cette démarche est détaillée en annexe F afin de montrer, entre autres, l'influence des [pôles](#) sur la réponse.

Remarque 3 : Il est souvent plus facile de décomposer $pY(p)$ en éléments simples et de rediviser le résultat par p avant d'utiliser $\mathcal{L}^{-1}$.

3.4 Les réponses fréquentielles ou harmoniques

3.4.1 Définition

La réponse fréquentielle (encore appelée harmonique) est la réponse en régime permanent (c'est-à-dire pour $t \rightarrow \infty$) à une entrée sinusoïdale. En effet, si l'on considère que tout signal d'entrée peut être décomposé en une somme (finie ou infinie) de signaux sinusoïdaux de diverses fréquences, il est important de savoir comment un système réagit à des excitations selon la fréquence f (ou la pulsation ω : on rappelle que $\omega = 2\pi f$).

La réponse dépend donc de la pulsation ω aussi parle-t-on de réponse fréquentielle. Elle est particulièrement prisée des automaticiens comme on le verra par la suite.

3.4.2 Lien avec la fonction de transfert

Il faut avant tout savoir que lorsqu'un système de modèle linéaire est excité par une entrée sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(\omega t)$, il répond de telle sorte qu'en régime permanent (c'est-à-dire après un certain temps de transition), la sortie est décrite par :

$$y(t) = A(\omega)U_m \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

La réponse est donc sinusoïdale de même fréquence mais déphasée par rapport à l'entrée. Cette assertion est démontrée dans l'annexe G. L'amplitude de la sortie et son déphasage (couramment appelé phase) dépendent tous deux de ω .

On peut démontrer que le gain harmonique $A(\omega)$ vérifie :

$$A(\omega) = |G(j\omega)|$$

En outre, on peut aussi montrer que le déphasage est tel que :

$$\phi(\omega) = \text{Arg}(G(j\omega))$$

Ainsi, si l'on connaît la [fonction de transfert](#) $G(p)$ du système, on peut déduire le nombre complexe $G(j\omega)$ et disposer des informations nécessaires pour établir la réponse harmonique (voir annexe G).

Toutefois, l'information est plus exploitable lorsqu'elle est présentée sous forme graphique comme ci-dessous.

3.4.3 Diagramme de Bode

Dans le diagramme de Bode ⁵, l'information est présentée en deux parties. Une première courbe représente le **gain** du système en fonction de la pulsation. La seconde montre le **déphasage** en fonction de cette même pulsation. Pour que ces graphes puissent être construits efficacement, il faut toutefois satisfaire quelques règles :

- La pulsation est graduée en échelle logarithmique.
- L'amplification n'est pas donnée directement mais on porte en ordonnée ce qu'on appelle le gain en décibels soit $T(\omega) = 20\log(|G(j\omega)|)$, l'échelle restant alors linéaire.
- Le déphasage est gradué en degrés ou en radians en utilisant une échelle linéaire

L'avantage d'un tel diagramme est que les courbes suivent des asymptotes. De ce fait, on peut tracer un diagramme asymptotique de Bode qui aide à la construction du diagramme réel.

a. Diagramme de Bode d'un modèle canonique de premier ordre

Prenons par exemple le modèle de premier ordre du **moteur électrique** :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \text{avec} \quad K = 0,5 \quad \text{et} \quad \tau = 0,5$$

Le diagramme de Bode de ce modèle est donné par la figure 19.

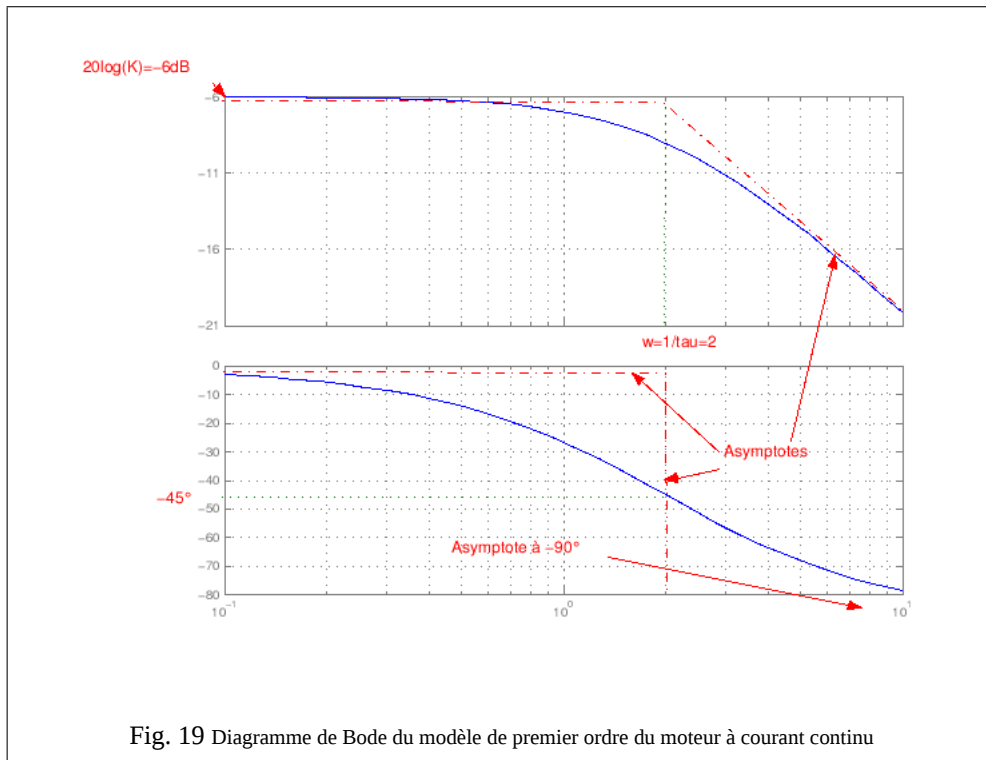


Fig. 19 Diagramme de Bode du modèle de premier ordre du moteur à courant continu

Il peut être fastidieux de construire point par point un tel diagramme. Cependant, on peut avoir une idée de sa forme en réalisant un tracé asymptotique. En effet, il s'agit de tracer d'abord $T(\omega) = 20\log(|G(j\omega)|)$. Ainsi, pour des basses fréquences, on a une asymptote horizontale à $T_0 = 20\log(K)$ ce qui est normal puisque les basses fréquences correspondent au comportement statique. Pour les hautes fréquences, le système tend vers une amplification nulle ($-\infty$ en dB). Sans entrer dans la technique de construction des asymptotes, on montre que l'asymptote en hautes fréquences doit avoir une pente de -20dB par décade et couper l'horizontale à $\omega = 1/\tau$. Par ailleurs, au niveau de cette même pulsation, la courbe réelle se situe à -3dB au dessous des asymptotes ce qui signifie que le carré de l'amplification a diminué de moitié par rapport au comportement statique (signal de sortie deux fois moins énergétique).

⁵Hendrik W. Bode : ingénieur américain dont les travaux essentiels remontent aux années 1940-1945.

On définit la bande passante d'un tel système par la gamme de pulsations (ou de fréquences) pour lesquelles le gain T se situe entre $T_0 - 3$ et T_0 , c'est-à-dire l'intervalle de pulsations $[0; 1/\tau]$. $\omega_c = 1/\tau$ est appelée pulsation de cassure ou de coupure.

Pour ce qui est du déphasage, il est facile de voir qu'en statique, il est nul (l'argument d'un nombre réel positif étant nul) et pour de très hautes fréquences, $G(j\omega)$ tend vers un nombre imaginaire pur à partie imaginaire négative donc son argument est de -90° . Ceci permet de tracer deux asymptotes. On peut aussi montrer, pour aider au tracé de cette courbe de phase, qu'à $\omega = 1/\tau$, on a $\phi = -45^\circ$.

Ce tracé est mieux justifié en annexe H.1.

b. Diagramme de Bode d'un modèle canonique de deuxième ordre

Pour un système de second ordre, le tracé est plus délicat et l'on ne pourra dans ce cours entrer dans les détails de construction. On peut toutefois donner quelques exemples correspondant au modèle canonique avec $K = 1$ et $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$, pour différentes valeurs de $m > 0$: voir figure 20.

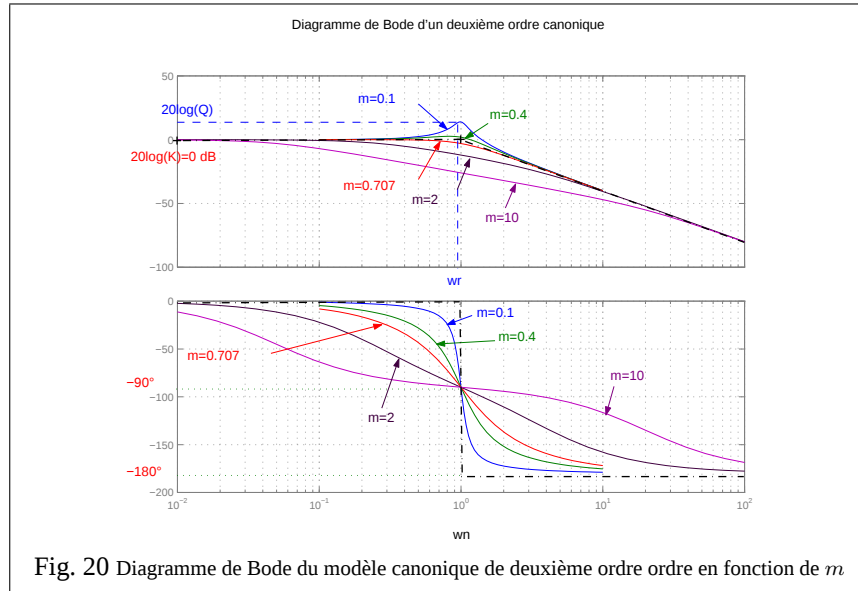


Fig. 20 Diagramme de Bode du modèle canonique de deuxième ordre en fonction de m

On constate que pour des valeurs suffisamment élevées de m , le système se comporte comme un filtre passe-bas assez classique. En revanche pour des valeurs faibles de m , il présente une résonance à la pulsation $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - m^2}$. Moins est m , plus forte est cette résonance. On peut la quantifier en calculant le coefficient de surtension Q , défini par :

$$Q = \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(0)|} = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$$

Le maximum du gain en décibels, correspondant à la pulsation de résonance ω_R , est de $T_0 + 20\log(Q)$ avec $T_0 = 20\log(K)$. Dans le cas de la figure 20, on a $T_0 = 20\log(K) = 0 \text{ dB}$ donc le maximum est à $20\log(Q)$.

On peut remarquer que cette résonance n'apparaît pas exactement à ω_n sauf si $m = 0$. En effet, la pulsation propre non amortie ω_n correspond, comme son nom l'indique, à la pulsation propre d'un système qui n'est pas amorti donc pour lequel le coefficient d'amortissement est nul. Dans ce cas, Q tend vers l'infini.

Au niveau des asymptotes, on retrouve une asymptote horizontale à $T_0 = 20\log(K)$ et une asymptote en hautes fréquences coupant l'asymptote horizontale en ω_n et de pente -40 dB par décade.

La bande passante du système se définit cette fois-ci par la gamme de fréquences ou de pulsations pour laquelle $T(\omega) \geq$

$T_0 - 3$.

Pour ce qui est de la [phase](#), elle évolue d'une asymptote horizontale à 0° en statique jusqu'à une autre à -180° en hautes fréquences. Si m est assez élevé, elle peut suivre une autre asymptote horizontale à -90° autour de ω_n et l'on peut par ailleurs montrer que $\phi(\omega_n) = -90^\circ$.

Remarque 4 : on peut préférer parler de fréquence f (mesurée en Herz (Hz)) plutôt que d'utiliser la pulsation ω (mesurée en radians par seconde (rad/s)). Le diagramme de Bode se construit de la même manière mais l'abscisse est graduée en Hz. On rappelle que $\omega = 2\pi f$.

c. Diagramme de Bode associé à une chaîne directe

Il arrive très souvent que l'automaticien soit amené à tracer le diagramme de Bode d'une [chaîne directe](#) avec comme connaissance préalable, la [fonction de transfert](#) des différents blocs composant cette chaîne directe. Un cas particulièrement courant est celui où la chaîne directe est composée de deux blocs en série comme au paragraphe 2.6. La fonction de transfert de la chaîne directe est alors donnée par le produit

$$F(p) = G_1(p)G_2(p)$$

$G_1(p)$ peut par exemple correspondre à la fonction de transfert d'un [régulateur](#) (alors notée $R(p)$) et $G_2(p)$ à celle du procédé.

Si l'on suppose que les diagrammes de Bode associés à ces deux blocs sont facilement traçables, alors il est facile de voir que la réponse harmonique de toute la chaîne directe de modèle $F(p)$ est la somme géométrique des deux diagrammes respectivement associés aux blocs $G_1(p)$ et $G_2(p)$.

En effet, concernant le [gain en décibels](#), on a :

$$T = 20\log|F(j\omega)| = 20\log|G_1(j\omega)G_2(j\omega)| = 20(\log|G_1(j\omega)| + \log|G_2(j\omega)|) = T_1 + T_2$$

Ainsi, les deux courbes de gain (asymptotiques ou réelles) doivent être géométriquement ajoutées dans le plan de Bode.

De même, pour le [déphasage](#), il faut remarquer que l'argument du produit de deux nombres complexes est égal à la somme des arguments des facteurs et il vient :

$$\text{Arg}(F(j\omega)) = \text{Arg}(G_1(j\omega)G_2(j\omega)) = \text{Arg}(G_1(j\omega)) + \text{Arg}(G_2(j\omega))$$

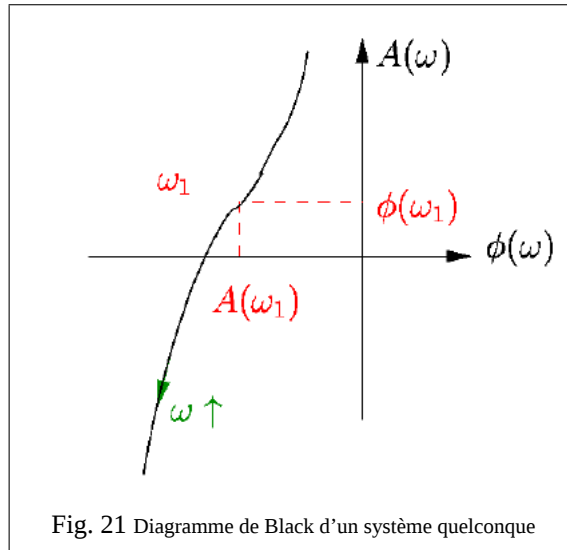
Ceci montre que les deux courbes de phase (asymptotiques ou réelles) doivent également être géométriquement ajoutées dans le plan de Bode. Une illustration de ce qui précède est fournie en [Annexe B](#).

Remarque 5 : cette propriété est valable pour un nombre de blocs supérieur à 2. Par conséquent, elle peut être efficacement utilisée pour connaître la réponse harmonique de $G(p)$ si l'expression de $G(p)$ est compliquée. On peut écrire $G(p)$ comme le produit de plusieurs facteurs ayant une réponse fréquentielle simple puis tracer la somme de toutes les courbes pour obtenir le diagramme de Bode final. Certaines règles de construction de facteurs du premier ordre sont données en annexe [H.1](#).

Il existe d'autres représentations fréquentielles qui sont présentées très brièvement ci-dessous.

3.4.4 Lieu de Black ou de Nichols

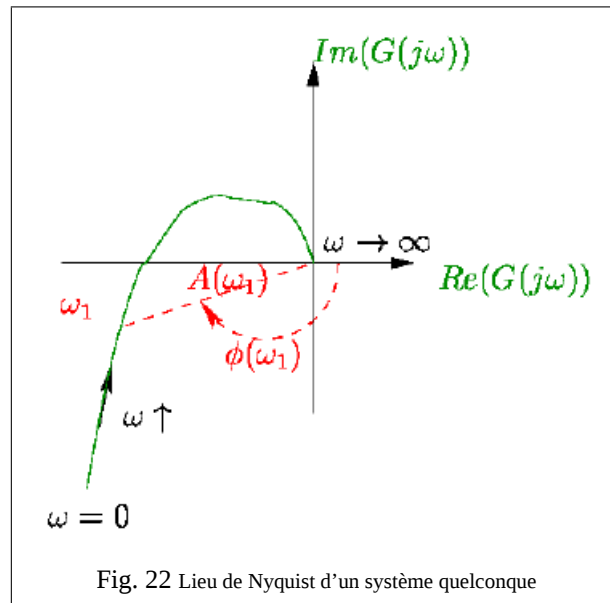
On représente l'information que constitue $G(j\omega)$ de la façon suivante : en abscisse on porte $\phi(\omega)$ et en ordonnée on porte $A(\omega)$. On obtient une courbe paramétrée par ω (exemple sur la figure [21](#)).



La construction d'un tel diagramme est fastidieuse à la main. Soit l'on passe par le [diagramme de Bode](#), soit l'on utilise un ordinateur. Ce lieu permet de développer des outils en Automatique. Il ne sera cependant pas étudié dans ce cours.

3.4.5 Lieu de Nyquist

Le lieu de Nyquist⁶ est une autre manière de présenter la même information. Cette fois-ci, l'abscisse du repère est la partie réelle de $G(j\omega)$ et l'ordonnée est sa partie imaginaire (Voir figure 22).



Ce lieu est très utile aux automaticiens pour établir les propriétés des systèmes ou développer des outils d'analyse et de commande. Dans la pratique quotidienne, on lui préfère généralement le [diagramme de Bode](#).

4 Stabilité des systèmes linéaires continus

Dans cette partie, une idée assez superficielle de la stabilité des systèmes linéaires à temps continu est présentée.

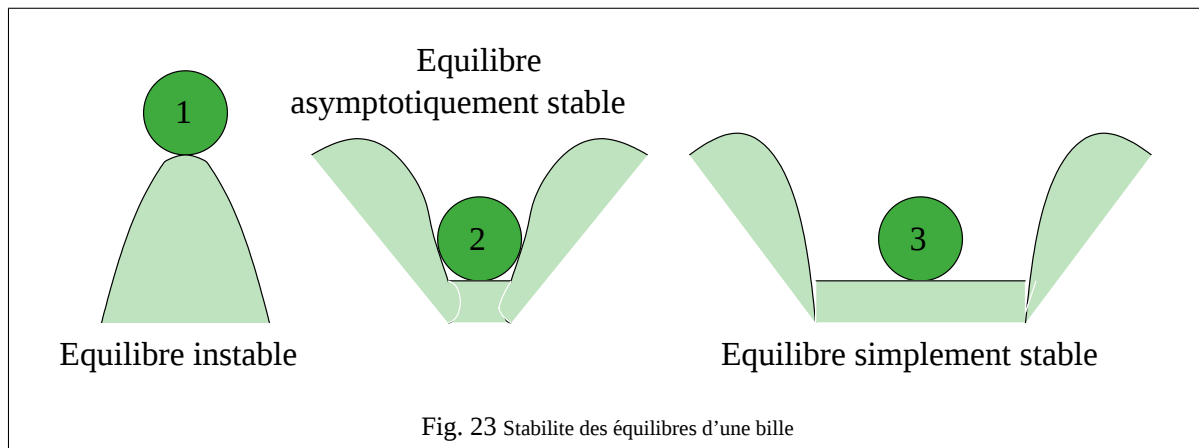
⁶Harry Nyquist : ingénieur américain dont la publication principale datant de 1932 concerne le [critère de stabilité](#) du même nom.

4.1 Définition générale et intuitive de la stabilité d'un état d'équilibre ou d'un système

Un état d'équilibre d'un système est un état **non modifié** lorsque le système est livré à lui-même (ni **entrée**, ni **perturbation**). On dit que le système est autonome.

Par exemple, si l'on considère le **moteur à courant continu** et que l'on suppose que l'induit de ce dernier ne reçoit aucune tension, alors il ne tourne pas. On peut dire qu'il s'agit d'un état d'équilibre. En l'absence d'entrée, la sortie n'évolue pas.

On s'intéresse maintenant à la stabilité d'un **état d'équilibre**. Pour mieux comprendre ce concept, on procède par une analogie mécanique matérialisée sur la figure 23 où 3 billes sont en équilibre.



La bille 1 est en état d'équilibre mais cet équilibre est précaire puisqu'à peine la pousse-t-on un peu, elle s'éloigne irrémédiablement de sa position d'équilibre. C'est pourquoi l'on dit qu'un tel équilibre est instable. Au contraire, la bille 2 est encastrée dans un creux et une petite poussée ne peut la déloger. Elle conservera sa position. On parle alors d'équilibre asymptotiquement stable. Enfin, la bille 3 est dans une situation intermédiaire. En effet, une petite poussée la déplacera mais même si sa position change, elle sera voisine de la position initiale et la bille ne s'éloignera pas à l'infini. En fait, la bille adopte une autre position d'équilibre. On dit alors que l'équilibre initial est simplement stable.

Dans la commande des systèmes linéaires, la stabilité asymptotique est une propriété impérative à satisfaire. On peut en donner la définition formelle suivante :

Un système autonome (sans **entrée) est dans un **état d'équilibre** asymptotiquement stable quand, écarté de cet état sous l'effet d'une perturbation, il revient à cet état** (au bout d'un temps éventuellement infini, c'est d'ailleurs le cas mathématiquement avec les systèmes linéaires).

Dans le cadre de la modélisation linéaire, on peut montrer que lorsqu'un système autonome est **asymptotiquement stable**, il n'a qu'un seul **état d'équilibre**. On dit alors que c'est le système lui-même qui est asymptotiquement stable (ou stable par concision).

4.2 Influence sur le comportement entrée/sortie

Pour bien comprendre l'importance de la **stabilité asymptotique** sur le comportement d'un système, il faut se préoccuper de ce qu'il advient lorsque le système est excité par un signal d'entrée. En réalité, si le système est asymptotiquement stable, cela signifie que pour toute entrée bornée (c'est-à-dire ne tendant pas vers l'infini), la sortie est elle-même bornée (elle ne diverge pas). Au contraire, si le système est **instable**, le moindre petit signal d'entrée peut entraîner une sortie divergeant vers l'infini ce qui en pratique peut causer des dommages matériels mais aussi humains (On peut se convaincre de ceci en consultant l'annexe F après avoir lu l'intégralité de cette partie sur la stabilité). On considère, pour simplifier, que la **stabilité simple** est un stade intermédiaire entre la stabilité asymptotique et l'instabilité.

Compte tenu de cette remarque, il paraît évident que la sécurité à bord d'un véhicule implique l'implantation de **lois de commande** rendant les divers systèmes stables.

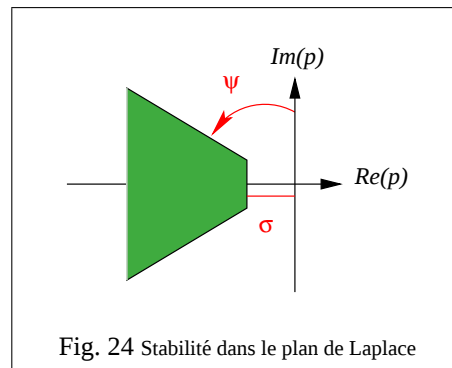
Il existe plusieurs critères pour attester ou non de la stabilité d'un système linéaire. Il est inutile de les voir tous mais certains sont présentés dans ce qui suit.

4.3 Critère des racines

Un modèle linéaire est **asymptotiquement stable** si et seulement si ses **pôles** sont tous à **partie réelle strictement négative**. On rappelle que les pôles sont les racines du dénominateur de la **fonction de transfert**. Un seul pôle ayant une partie réelle positive conduit irrémédiablement à des phénomènes d'instabilité.

Il a déjà été vu que les **pôles** peuvent avoir une influence sur le temps de réponse et sur les oscillations. On voit ici qu'ils revêtent une importance encore plus grande.

On peut résumer tout ceci en faisant apparaître des marges de stabilité dans le plan de Laplace où l'on peut localiser les racines de $D(p)$ (figure 24). Si l'on suppose que tous les pôles sont situés dans la zone colorée, alors on peut définir σ , une marge de stabilité absolue qui traduit la rapidité du système. De même, on peut montrer que le **coefficient d'amortissement** d'un système est $m = \sin(\psi)$ où ψ est l'angle indiqué sur la figure 24. Si ψ diminue, alors m diminue jusqu'à l'instabilité c'est-à-dire $m < 0$ (**réponse indicielle** avec oscillations d'amplitude croissante).



L'influence des pôles est détaillée dans le paragraphe F des annexes.

4.4 Critère du revers pour la stabilité d'un système bouclé

Il existe un critère établi sur la base de la réponse fréquentielle des systèmes. Il est appelé critère du revers. Historiquement, il fut énoncé dans le **plan de Nyquist**. Il découle d'une forme plus complète dite "critère de Nyquist" et est à l'origine de nombreux développements en Automatique. N'étant pas toujours facilement exploitable pour un non-initié, une interprétation simplifiée en est présentée dans le **plan de Bode**.

⚠ Attention ! Ce critère a été établi pour attester ou non de la stabilité d'un **système bouclé par un retour unitaire simple**. Cependant il s'applique en regardant la réponse, dans le **plan de Bode**, du **système en boucle ouverte**, c'est-à-dire, puisque le **retour est unitaire**, de **la chaîne directe**. **⚠**

Critère du revers : un système bouclé unitairement est stable quand, sur le diagramme de Bode correspondant à la boucle ouverte, à la pulsation pour laquelle on a un gain $T = 0dB$, la courbe correspondant au déphasage est encore au-dessus de -180° ou quand, réciproquement, à pulsation pour laquelle le déphasage atteint -180° , le gain en décibels est déjà inférieur à $0dB$.

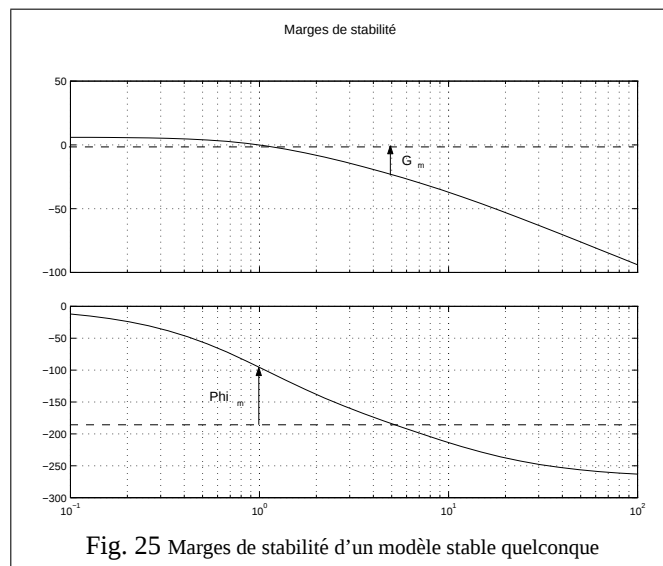
Ce critère exprimé ainsi atteste de manière booléenne de la stabilité. On peut toutefois quantifier de façon plus précise la stabilité en définissant les marges de stabilité d'un système. En effet, on appelle **marge de phase** (notée Φ_m) l'opposé du **déphasage** à la pulsation ω_g pour laquelle $T(\omega_g) = 0dB$. Cette même pulsation ω_g est appelée **pulsation critique**.

De la même manière, on définit G_m , la **marge de gain**, comme l'opposé du gain $T(\omega_\phi)$, appelé **gain critique** où ω_ϕ désigne la pulsation à laquelle le déphasage est de -180° .

Ces marges sont représentées sur la figure 25 dans le cas d'un système stable.

Il est évident que ces marges doivent être positives pour que le système soit stable. Elles donnent un degré de la stabilité du système bouclé. Plus elles sont élevées, plus le système bouclé est stable. Un système bouclé en limite de stabilité est un système pour lequel, sur le diagramme de Bode de la chaîne directe, $\Phi_m = G_m = 0$ et $\omega_\phi = \omega_g$. Par ailleurs, il peut arriver que les marges ne puissent être définies si les horizontales $T = 0dB$ et $\phi = -180^\circ$ ne sont pas coupées par le diagramme. Les marges sont alors considérées comme infinies.

 **Attention !** La plus grosse erreur de raisonnement serait de tracer le **diagramme de Bode** du système en boucle fermée pour en déduire ses marges de stabilité. Il faut tracer la réponse de la boucle ouverte pour conclure quant à la stabilité de la boucle fermée. 

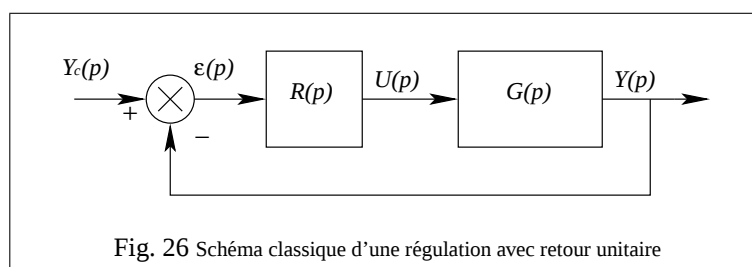


5 Réglage des systèmes bouclés

Dans cette dernière partie, les problèmes de commande sont abordés même si ce cours se contentera d'évoquer une technique sans l'approfondir.

5.1 Principe de la commande par retour unitaire

On se contente d'envisager des commandes du type de celle schématisée sur la figure 26 où un régulateur de **fonction de transfert** $R(p)$ est placé devant le système de fonction de transfert $G(p)$. La sortie est rebouclée unitairement sur l'entrée du régulateur et l'on distingue l'entrée du système en boucle fermée y_c , appelée **consigne** ou **référence** de l'entrée du système en boucle ouverte u , dite **commande**, générée par le régulateur à partir de l'**erreur** ϵ entre la consigne y_c et la sortie du système y . Tout l'art de la commande consiste à concevoir un régulateur, à partir du modèle du système en boucle ouverte, qui puisse conférer au système en boucle fermée des propriétés satisfaisantes parmi lesquelles la **stabilité**, la **rapidité**, la présence plus ou moins marquée d'**oscillations**, la **précision**, le rejet de **perturbation**...



5.2 Régulation proportionnelle

On commence par considérer le **régulateur** le plus simple à savoir le régulateur dit proportionnel : $R(p) = A$. On dit que ce régulateur est statique car il ne dépend pas de p .

5.2.1 Influence de A sur la stabilité

On remarque d'abord que si $A = 1$, ceci revient à une absence de régulateur. Pour comprendre l'influence de A sur la **stabilité** du système bouclé, on peut se référer au critère du revers et plus précisément, voir ce que deviennent les marges de stabilité définies dans Bode. Pour attester de la stabilité du système bouclé, il convient, comme on l'a vu de tracer le **diagramme de Bode** de la **chaîne directe**, à savoir $AG(p)$. Ainsi, si l'on regarde la figure 25, on comprend que si A augmente, le lieu du **déphasage** n'est pas modifié; en revanche, la courbe de **gain** remonte puisque $T = 20\log(|AG(j\omega)|) = 20\log(|G(j\omega)|) + 20\log(A)$, ce qui a pour effet de déplacer la **pulsation critique** ω_g vers la droite, là où le déphasage se réduit. Ainsi, la **marge de phase** diminue et peut même s'annuler (pour certains systèmes) et changer de signe. D'où l'on conclut que l'augmentation du gain proportionnel A est préjudiciable à la stabilité du système bouclé. Ceci est vrai pour la plupart des systèmes.

5.2.2 Influence de A sur la rapidité

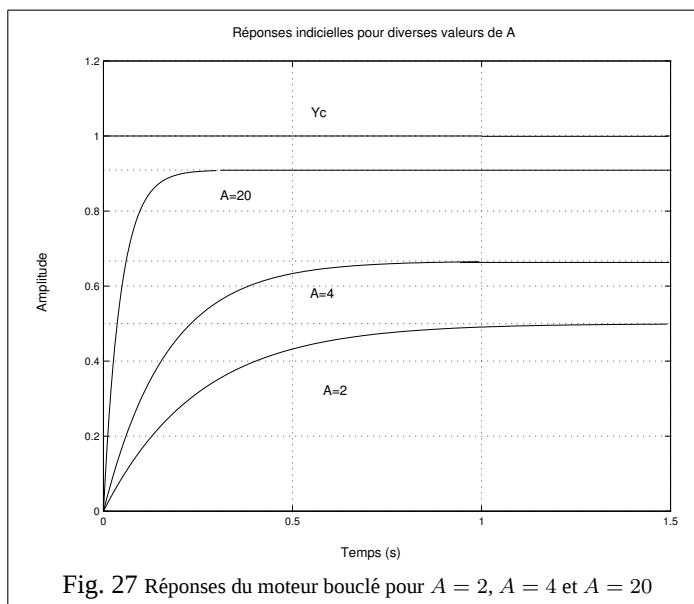
Pour comprendre l'influence de A sur la **rapidité**, on peut raisonner sur un premier ordre comme le modèle simplifié du **moteur à courant continu** pour lequel on a une **fonction de transfert** de la forme (A peut inclure le gain du **régulateur** et le **gain statique** du système) :

$$AG(p) = \frac{0,5A}{1 + 0,5p}$$

La **formule de Black** conduit à la **fonction de transfert** en boucle fermée (après mise sous **forme canonique**) :

$$H(p) = \frac{\frac{0,5A}{0,5A + 1}}{1 + \frac{0,5}{0,5A + 1}p}$$

Si A augmente, on constate que le **gain statique** en boucle fermée ($A/(A + 1)$) a tendance à se rapprocher de 1, ce qui est bien et la **constante de temps** en boucle fermée ($0,5/(A + 1)$) diminue. On comprend donc que A peut permettre d'accélérer le système. C'est un effet classique du gain proportionnel. On dit qu'il assure une certaine **raideur** au système (rapidité). Pour illustrer ces propos, la figure 27 montre la **réponse indicielle** du modèle bouclé pour $A = 2$, $A = 4$ et $A = 20$.



Type de $G(p)$ → $Y_c(p)$ ↓	0	1	2	Nom de l'erreur
$\frac{E}{p}$	$\frac{E}{1 + AK}$	0	0	ϵ_p : erreur statique ou de position
$\frac{b}{p^2}$	∞	$\frac{b}{AK}$	0	ϵ_v : erreur de vitesse

TAB. 2 – Précision des systèmes

5.2.3 Influence de A sur la précision

Dans ce paragraphe, on revient sur la notion de précision de manière plus explicite. On dit qu'un système est précis lorsqu'en **régime permanent**, la sortie est égale à la **consigne** (ce qui revient à obtenir un gain statique de 1). La précision se mesure en regardant l'**erreur** ϵ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\epsilon(p) = \frac{pY_c(p)}{1 + AG(p)} \quad (9)$$

On constate avec cette formule que la précision dépend de trois choses :

- la **consigne**.
- la **fonction de transfert** du système $G(p)$.
- le gain A dont on veut apprécier l'influence.

L'on distinguera deux types d'entrée, les échelons $Y_c(p) = E/p$ et les rampes $Y_c(p) = b/p^2$.

L'on distinguera aussi les systèmes (en boucle ouverte) selon leur type. Le type (ou la classe) d'un système est le nombre α d'intégrateurs (un **intégrateur** est modélisé par $1/p$) que comprend sa fonction de transfert. Ainsi, les systèmes de type $\alpha = 0, 1$ ou 2 peuvent s'écrire :

$$\alpha = 0 : G(p) = K \times \frac{1 + a_1 p + \dots}{1 + b_1 p + \dots}$$

$$\alpha = 1 : G(p) = \frac{K}{p} \times \frac{1 + a_1 p + \dots}{1 + b_1 p + \dots}$$

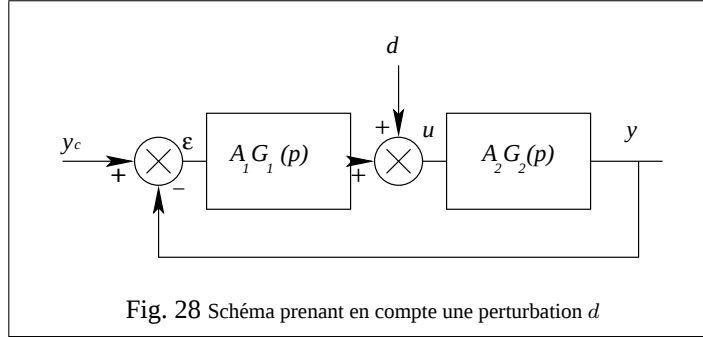
$$\alpha = 2 : G(p) = \frac{K}{p^2} \times \frac{1 + a_1 p + \dots}{1 + b_1 p + \dots}$$

Compte tenu de la formule (9), on peut facilement déduire le tableau 2 où l'on s'aperçoit que le gain A est propice à une amélioration de la précision. On s'aperçoit également que la présence d'intégrateurs dans la **chaîne directe** peut conduire à obtenir la précision souhaitée ce qui conduit souvent à dire qu'"un intégrateur correspond à un gain infini". Du reste, la figure 27 montre qu'une valeur infinie de A impliquerait $\epsilon_p = 0$.

En résumé, pour prétendre avoir une bonne précision, on peut augmenter A mais il y a un risque d'instabilité. De même, on peut introduire un intégrateur dans le régulateur pour augmenter le type de la **chaîne directe** mais tout intégrateur ajoute un **déphasage** de -90° ce qui peut conduire à une trop forte diminution de la **marge de phase**. Il existe donc un **compromis entre la précision, la stabilité et la rapidité**.

5.2.4 Influence de A et des intégrateurs sur une erreur due à une perturbation

Il est possible que l'erreur soit due à un signal de **perturbation** d agissant sur le système. Cette perturbation peut apparaître n'importe où dans la **chaîne directe**. Dans le cas général, on peut supposer qu'elle agit à un endroit tel que la **fonction de transfert** de la chaîne directe peut être considérée comme le produit de deux facteurs, l'un correspondant au transfert en amont de la perturbation, l'autre correspondant au transfert en aval. Ceci est schématisé sur la figure 28.



Il peut être montré que pour réduire ou annuler l'effet de d sur ϵ en **régime permanent**, il convient d'agir en jouant sur A_1 ou sur le type de $G_1(p)$, c'est-à-dire d'agir en amont de la perturbation. Toute action en aval est inefficace. Voir l'exemple proposé dans l'annexe I.

Remarque 6 : Ces commentaires sur le rejet de perturbation sont valides pour des perturbations en échelon, en rampe, ... ou toute perturbation en $1/p^q$. Ils sont caduques pour certaines perturbations plus compliquées, entre autres pour des perturbations en sinus (intégrer un sinus génère un cosinus). La régulation nécessite donc parfois des solutions plus sophistiquées qui sortent largement du cadre de ce cours.

5.3 Régulateur PID

On vient de voir qu'une simple régulation proportionnelle pouvait permettre d'accélérer un système. Toutefois, elle peut aussi générer des phénomènes d'**instabilité**. Par ailleurs, la **précision** peut être obtenue à l'aide d'une commande comportant un intégrateur mais là encore, le risque d'une telle commande est l'instabilité du système bouclé. On peut également envisager un **régulateur** comportant une action intégrale et une action proportionnelle (on parle de régulateur PI). Le risque d'instabilité est double mais sur certains systèmes (notamment les systèmes de premier ordre), cette solution est envisageable. Il reste à vérifier, avec une telle commande, que les marges de stabilité sont suffisantes (on regardera plus spontanément la **marge de phase**). Il existe en particulier une technique de calcul des régulateurs PI dite "par compensation de pôle" qui consiste à compenser un **pôle** de la **chaîne directe** par un **zéro** du **régulateur**. Cette technique sera éventuellement étudiée en Travaux Dirigés et est fournie en **annexe C**. De manière générale, il faut vérifier que le **diagramme de Bode** de la chaîne directe, comprenant le régulateur PI, conserve une bonne marge de phase (ce qui revient pour des systèmes d'ordre strictement supérieur à 1, à conserver un bon **amortissement**).

Ce n'est pas toujours le cas. C'est pourquoi il convient souvent d'introduire un troisième terme dans la commande qui a pour but de compenser les effets indésirables du gain proportionnel et de l'intégrateur. Il permet de ramener de la phase là où elle peut être utile c'est-à-dire dans la gamme de fréquences où l'on mesure la marge de phase. Ce troisième effet est un effet dérivé. Il conduit à la conception d'un **régulateur PID** (Proportionnel Intégral Dérivé) dont la description temporelle correspond à l'équation suivante :

$$u(t) = k \left(\epsilon(t) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t \epsilon(\theta) d\theta + \tau_d \frac{d\epsilon(t)}{dt} \right)$$

et où l'on voit clairement apparaître les trois effets. La **fonction de transfert** d'un tel régulateur est :

$$R(p) = \frac{U(p)}{\epsilon(p)} = k + \frac{k}{\tau_i p} + k \tau_d p \quad (10)$$

L'expression ci-dessus est appelée **forme parallèle** du régulateur PID et sert notamment à l'implantation physique d'un tel régulateur. En réduisant $R(p)$ au même dénominateur, on constate que ce régulateur est de **type 1**. On peut aussi exprimer la fonction de transfert d'un PID sous une forme dite **série** :

$$R(p) = A(1 + \frac{1}{T_i p})(1 + T_d p) \quad (11)$$

L'on retrouve, en développant cette expression, les trois termes : proportionnel, intégral et dérivé. Cette forme est particulièrement utile pour construire le **diagramme de Bode** du régulateur donc pour la conception de la loi de commande. Ce diagramme est donné sur la figure 29.

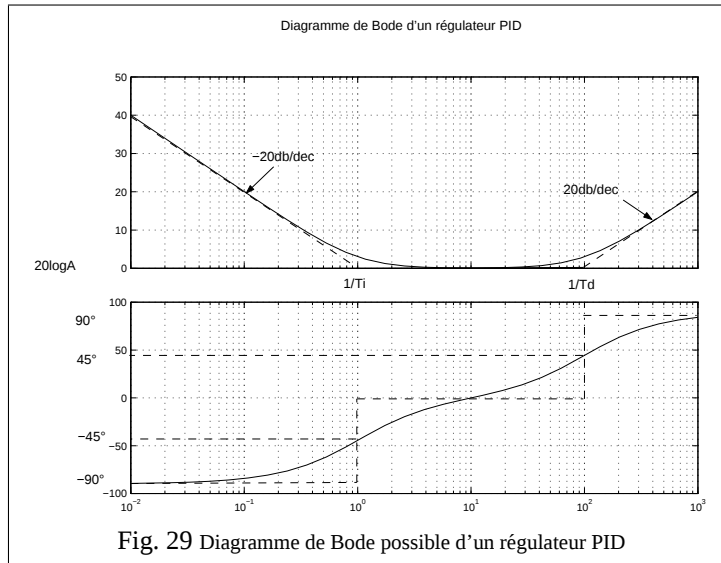


Fig. 29 Diagramme de Bode possible d'un régulateur PID

Sur cette figure, on remarque que l'on a un comportement de type grand gain en statique (basses fréquences) ce qui est propice à la **précision** du système. Cette propriété, comme on l'a vu, est due aux effets proportionnel et intégral. Par ailleurs, le terme dérivé (que l'on repère ici en hautes fréquences) a pour effet d'augmenter la **phase** (au sens algébrique). Encore faut-il que cet apport de phase intervienne dans la gamme de pulsations où l'on va mesurer la **marge de phase**. En conséquence, il convient de choisir avec discernement les valeurs A , T_i et T_d sachant que ce diagramme viendra s'ajouter géométriquement dans le plan de Bode à celui du système en boucle ouverte modifiant ainsi le transfert de la chaîne directe. Généralement, on recherche une marge de phase de l'ordre de 40° à 50° . En effet, en raison des incertitudes qui peuvent être liées à la connaissance du modèle qui ne traduit qu'approximativement le comportement du système, il serait très dangereux de vouloir laisser une faible marge. La moindre méconnaissance d'un paramètre dans le modèle ou sa moindre variation pourrait conduire à l'instabilité. Le terme de marge prend ici tout son sens. En outre, il faut noter que cette marge classique que l'on cherche à atteindre correspond, sur un système de deuxième ordre, à un **coefficient d'amortissement** m d'environ 0.7 permettant une réponse rapide en autorisant un léger dépassement.

Les techniques de calcul des coefficients d'un régulateur PID sont nombreuses et dépendent des performances escomptées. Cependant, il n'existe pas de panacée dans ce domaine. On s'attachera plutôt à décrire, lors des Travaux Dirigés, des méthodes s'appuyant sur le modelage du diagramme de Bode de la chaîne directe (comme il vient d'être en partie expliquée et en utilisant les propriétés énoncées dans la partie 3.4.3). Une technique basée sur la compensation de pôle est par ailleurs proposée en **annexe**. D'autres techniques, telles les méthodes de Ziegler-Nichols présentées dans l'annexe K, s'affranchissent du diagramme de Bode. Néanmoins, le concepteur d'un PID doit garder présents à l'esprit les trois effets de ce régulateur :

- effet proportionnel :
 - + assure la **raideur** du système.
 - risque d'entraîner des **oscillations** voire l'**instabilité**.
- effet intégral :
 - + assure la **précision** ($\epsilon_p = 0$).
 - entraîne un ralentissement du **transitoire** et peut générer des **oscillations** allant jusqu'à l'**instabilité**.
- effet dérivé :

- + anticipe la réaction du système car utilise la variation de l'**erreur**. Ceci évite des **oscillations** et a un effet **stabilisateur**. En fait, cet effet ajoute de l'amortissement en augmentant la **marge de phase** ce qui permet d'accroître le gain proportionnel.
- ne peut être utilisé seul car génère des accoups dans la commande. Il accentue la sollicitation des actionneurs et peut répercuter l'effet des **perturbations** de hautes fréquences, en particulier celles apparaissant sur la mesure des sorties. A ce propos, il faut noter qu'en pratique, on préfère implanter un effet dérivé filtré plutôt qu'une dérivée pure (voir annexe L).

Une fois une première synthèse d'un PID effectuée, il convient d'affiner les réglages en considérant ces faits. On peut trouver des régulateurs P, PD, PI, et même PID avec des sophistications diverses. Il existe également d'autres types de **régulateurs** qui ne sont pas envisagés ici mais qui peuvent être tout aussi efficaces. Le PID reste le plus célèbre, le plus couramment utilisé, et il résout une bonne part des problèmes d'**asservissement** et de **régulation** rencontrés dans l'industrie, ceci de manière assez satisfaisante.

6 Conclusion

Ce cours s'est voulu assez simple et les développements mathématiques ont été évités autant que possible. Quelques uns sont proposés en annexe. Il donne une vue de ce que peut être l'Automatique mais toute personne amenée à exercer des activités d'automaticien est invitée à consolider ses connaissances. Les occasions d'appliquer les concepts de l'Automatique pour améliorer les performances, le confort ou la sécurité d'un véhicule sont nombreuses. On peut citer les applications les plus connues : la suspension active, l'injection électronique (notamment pour réduire la pollution), la direction assistée, l'ABS, les tentatives de concevoir des véhicules auto-pilotés, ...

ANNEXES

Dans ces annexes figurent quelques remarques, justifications, calculs et autres précisions qui ne sont pas abordés en cours mais qui peuvent aider l'étudiant curieux à approfondir ses connaissances et sa compréhension de l'Automatique. Certains paragraphes ont été volontairement dissociés du cours, soit en raison du faible volume horaire, soit parce qu'ils abordent des notions débordant un peu du cadre habituel de l'enseignement en Automatique.

A Point de fonctionnement et caractéristique statique

La plupart du temps, lorsque l'on écrit les équations algébriques ou différentielles correspondant aux lois physiques qui régissent le comportement du système, elles ne sont pas linéaires en les grandeurs qui nous intéressent et leur dérivées successives. Ainsi une grandeur physique z peut dépendre d'une autre grandeur physique x selon une loi $z = f(x)$ où $f(\cdot)$ n'est pas linéaire en x . La technique habituelle consiste alors à considérer uniquement de petites variations autour d'une valeur de x et à chercher un modèle linéaire valable uniquement dans cette plage de variations. Le point de fonctionnement est noté $(\bar{x}; \bar{z})$. x doit donc être proche de $\bar{x}$ et z proche de $\bar{z}$. Si c'est le cas, on désigne les variations de x et z autour du point de fonctionnement par :

$$\delta x = x - \bar{x} \quad ; \quad \delta z = z - \bar{z}$$

et un développement de Taylor au premier ordre de f autour de $\bar{x}$ permet d'écrire :

$$\delta z \simeq k \delta x \quad \text{avec} \quad k = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}}$$

Ceci montre que δz suit approximativement une loi linéaire par rapport à δx et donc ce genre d'hypothèse permet d'obtenir un modèle linéaire autour d'un point de fonctionnement, modèle valable pour de petites variations autour de ce point. Les grandeurs physiques en jeu sont donc *a priori* δx et δy . Néanmoins, on a :

$$z \simeq \bar{z} - k\bar{x} + z$$

et comme $\bar{z} - k\bar{x}$ est constant, z suit une loi affine par rapport à x autour de $\bar{x}$. Ainsi, on peut raisonner soit en x et z , soit en δx et δz indifféremment dès l'instant où l'on ne s'éloigne pas du point de fonctionnement.

Un exemple connu en Electronique se rencontre dans l'étude du transistor à effet de champ (voir cours d'Electronique). L'intensité du courant Drain-Source I_{DS} , lorsque la tension Drain-Source V_{DS} est constante, s'exprime en fonction de la tension Grille-Source V_{GS} selon une loi parabolique :

$$I_{DS} = I_{DSS} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_{GSoff}} \right)^2$$

où V_{GSoff} , la tension de blocage, et I_{DSS} , l'intensité du courant Drain-Source de saturation, sont des paramètres constants du transistor (Cette relation est valide pour $V_{DS} \geq V_{GS} - V_{GSoff}$). La courbe $I_{DS} = f(V_{GS})$ peut être tracée ou même obtenue expérimentalement. On l'appelle caractéristique de transfert statique ou simplement caractéristique statique. Elle est donnée par la figure 30.

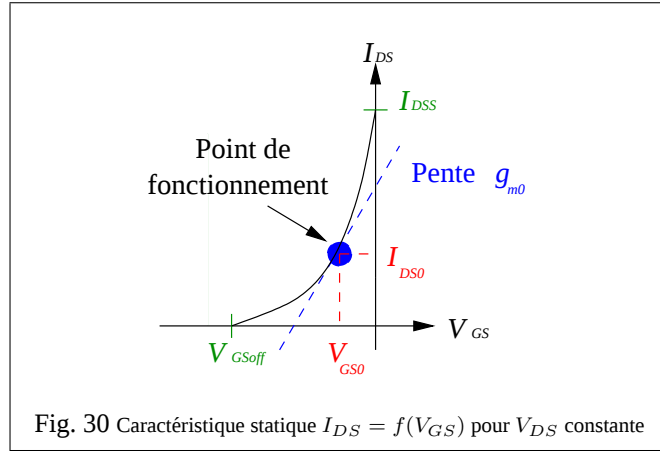


Fig. 30 Caractéristique statique $I_{DS} = f(V_{GS})$ pour V_{DS} constante

On constate sur cette figure que si l'on considère un point de fonctionnement (V_{GS0} ; I_{DS0}) appelé point de polarisation en Electronique, alors des petites variations v_{gs} autour de V_{GS0} entraîneront de petites variations i_{ds} autour de I_{DS0} telles que :

$$i_{ds} \simeq g_{m0} v_{gs}$$

où g_{m0} , appelé transconductance, est le coefficient directeur de la tangente à l'arc de parabole au point de polarisation. Cette transconductance s'exprime ainsi :

$$g_{m0} = \left. \frac{dI_{DS}}{dV_{GS}} \right|_{V_{GS}=V_{GS0}} = -\frac{2I_{DSS}}{V_{GSoff}} \left(1 - \frac{V_{GS0}}{V_{GSoff}} \right)$$

Ceci revient à utiliser le développement de Taylor au premier ordre.

Or, en Electronique, la tension Grille-Source est en réalité de la forme

$$v_{GS}(t) = V_{GS0} + v_{gs}(t)$$

où $v_{gs}(t)$ est une excitation sinusoïdale de faible amplitude. Le courant Drain-Source est alors d'intensité :

$$i_{DS}(t) = I_{DS0} + i_{ds}(t) \quad \text{avec} \quad i_{ds}(t) = g_{m0} v_{gs}(t)$$

Les signaux continus n'interviennent que pour polariser le transistor. Les signaux utiles v_{gs} et i_{ds} sont les petites variations sinusoïdales autour du point de fonctionnement. L'approximation présentée permet de considérer que i_{ds} est linéaire par rapport à v_{gs} .

Cette notion de caractéristique statique est très importante en Automatique. On peut en donner un autre exemple en supposant que le [moteur](#) à courant continu déjà étudié dans la partie [2](#) est en plus soumis à deux non-linéarités. D'une part, de trop fortes valeurs de la tension d'induit u font saturer la vitesse angulaire $y = \Omega$; d'autre part, le moteur est sujet à des frottements secs dans sa liaison avec la charge qui font qu'une très faible valeur de u n'entraîne aucune rotation. La caractéristique statique $Y = f(U)$ est obtenue en traçant la courbe de Y , valeur en régime permanent de y , en fonction des différentes valeurs continues U de u (voir figure [31](#)).

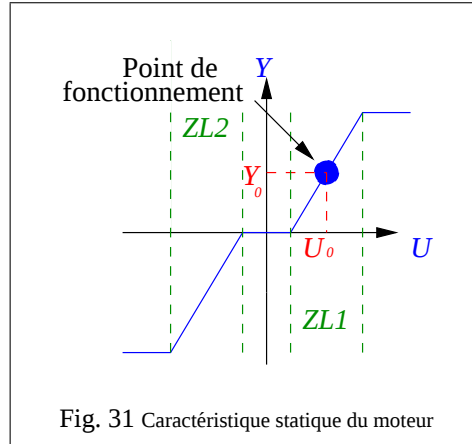


Fig. 31 Caractéristique statique du moteur

Sur cette courbe, on reconnaît aisément les deux palliers de saturation et la zone morte liée aux frottements secs. On s'aperçoit qu'il existe deux zones désignées par ZL1 et ZL2 pour lesquelles y varie de façon affine en fonction de u . Par abus de langage, l'Automaticien parle de variation linéaire. Dans l'une ou l'autre de ces deux zones, on peut définir un point de fonctionnement $(U_0; Y_0)$. δy , la variation de y autour de Y_0 , suit alors une loi véritablement linéaire en δu , la variation de u autour de U_0 . Que l'on considère δu et δy ou u et y , on peut chercher un modèle linéaire dès lors que les signaux u et y restent dans la zone "linéaire" choisie (ZL1 ou ZL2).

L'établissement d'une caractéristique statique et d'un point de fonctionnement (ou d'une zone "linéaire") est souvent une étape préliminaire à l'obtention d'un modèle. On parle de linéarisation ou d'approximation linéaire.

B Principe de superposition

On déjà vu au paragraphe 1.5, qu'une des caractéristiques des systèmes dits linéaires est que l'on peut leur appliquer le [principe de superposition](#) résumé par la figure 9. Ce principe est ici justifié.

Les modèles linéaires sont des modèles d'entrée/sortie. Si u est l'entrée et y la sortie, ces modèles sont des équations différentielles de la forme (cf. partie 2, en particulier paragraphe 2.4) :

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j u}{dt^j}$$

où les a_i et b_j sont des coefficients constants. Si l'on suppose qu'un choix u_1 de u entraîne une solution y_1 en y et qu'un choix u_2 entraîne une solution y_2 , il est facile de vérifier que pour un choix $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j u}{dt^j} &= \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)}{dt^j} = \alpha_1 \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j u_1}{dt^j} + \alpha_2 \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j u_2}{dt^j} = \\ &\alpha_1 \sum_{i=1}^m a_i \frac{d^i y_1}{dt^i} + \alpha_2 \sum_{i=1}^m a_i \frac{d^i y_2}{dt^i} = \sum_{i=1}^m a_i \frac{d^i (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)}{dt^i} \end{aligned}$$

ce qui signifie que la solution est la sortie $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$.

C A propos de la transformée de Laplace

C.1 Quelques transformées

Cette partie propose de justifier quelques lignes du tableau 1 concernant la [transformée de Laplace](#) $\mathcal{L}$. De même que le paragraphe C.2, elle présente un caractère quelque peu mathématique aussi l'étudiant peu enclin à l'abstraction peut se dispenser de les étudier sans pour autant perdre l'idée générale de ce cours.

• **Fonction de Heaviside** $f(t) = \Gamma(t)$

La forme d'une telle fonction est donnée par la figure 15. On a en fait $f(t) = 1 \forall t \geq 0$ donc on peut déduire :

$$F(p) = \mathcal{L}(\Gamma(t)) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} d\tau = \left[-\frac{e^{-p\tau}}{p} \right]_0^{\infty} \Leftrightarrow$$

$$F(p) = \frac{1}{p}$$

On note ici que la convergence de l'intégrale n'est en réalité assurée que si $\alpha = \text{Re}(p) > 0$, sinon la borne infinie n'a pas de limite. Cette valeur limite est appelée abscisse de sommabilité définissant un domaine de sommabilité dans le plan de Laplace. On peut se poser la question de savoir ce que cette supposition impose à l'automaticien. Les mathématiques viennent à nouveau à son secours. En effet, la théorie de la variable complexe et en particulier le théorème d'extension analytique (voir cours de mathématiques) permet d'affirmer que ce résultat reste valable pour toute valeur de p . Seule la valeur $p = 0$ pose problème puisqu'en effet, $F(p)$ n'est clairement pas définie pour cette valeur là.

• **Retard pur** θ i.e. $g(t) = f(t - \theta)$

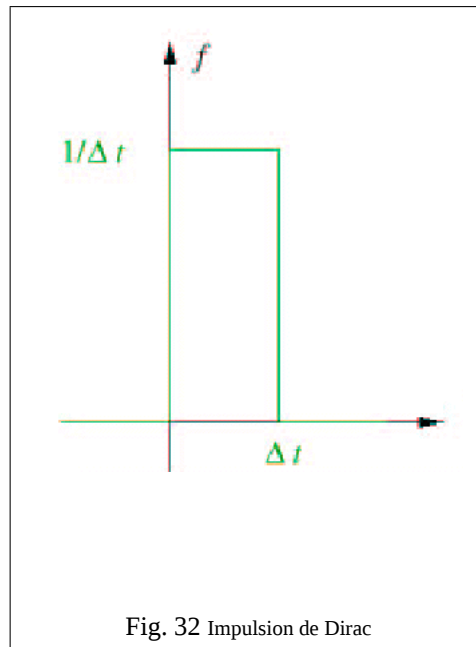
On a :

$$G(p) = \mathcal{L}(g(t)) = \int_0^{\infty} e^{-p(\tau-\theta)} d\tau = e^{-\theta p} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} d\tau \Leftrightarrow$$

$$G(p) = e^{-\theta p} F(p)$$

• **Impulsion de Dirac** $f(t) = \delta t$

L'impulsion de Dirac $\delta(t)$ est difficile à représenter. On a $\delta(t) = 0 \forall t \neq 0$ et $\delta(0)$ prend une valeur infinie telle que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$. Telle est la définition d'une telle impulsion qui est donc la dérivée de la fonction de Heaviside. Elle peut être approximativement représentée sur la figure 32.



En réalité, une vraie impulsion de Dirac est telle que Δt tend vers 0.

Pour calculer la transformée de Laplace de cette impulsion, il faudrait en toute rigueur utiliser la théorie des distributions

car $\delta(t)$ n'est pas une fonction mais une distribution. Cependant, on propose ici un calcul un peu moins rigoureux qui s'appuie sur un raisonnement aux limites. On a :

$$F(p) = \mathcal{L}(\delta(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} \left(\frac{1}{\Delta t} e^{-p\tau} d\tau \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1 - e^{-p\Delta t}}{p} \right) \right)$$

Or, un développement limité de e^{pt} autour de $t = 0$ (ce qui correspond bien à $\Delta t \rightarrow 0$), ceci à l'ordre 1, conduit à écrire :

$$\begin{aligned} e^{-p\Delta t} &= 1 - p\Delta t \Rightarrow \\ F(p) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1 - (1 - p\Delta t)}{p} \right) \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \Delta t \Leftrightarrow \\ F(p) &= 1 \end{aligned}$$

On peut toutefois proposer une démonstration alternative. En remarquant que l'impulsion de Dirac peut s'exprimer :

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} (\Gamma(t) - \Gamma(t - \Delta t)) \right)$$

Compte tenu des résultats relatifs à $\mathcal{L}(\Gamma(t))$ et $\mathcal{L}(f(t - \theta))$, il vient :

$$F(p) = \mathcal{L}(\delta(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-\Delta t p}}{p} \right)$$

Or, en introduisant le développement limité déjà utilisé [ci-dessus](#), on déduit :

$$\begin{aligned} F(p) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1 - 1 + \Delta t p}{p} \right) \Leftrightarrow \\ F(p) &= 1 \end{aligned}$$

• **Fonction** $f(t) = e^{-at}$

Il vient :

$$\begin{aligned} F(p) = \mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-a\tau} e^{-p\tau} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)\tau} d\tau = \left[-\frac{e^{-(p+a)\tau}}{p+a} \right]_0^{\infty} \Leftrightarrow \\ F(p) &= \frac{1}{p+a} \end{aligned}$$

Ici, l'[abscisse de sommabilité](#) est $-\alpha$.

• **fonction** $f(t) = \sin(\omega t)$

On peut écrire $f(t) = \sin(\omega t)$ de la façon suivante :

$$f(t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

A partir de cette autre écriture, il est plus facile de calculer $F(p)$:

$$\begin{aligned} F(p) = \mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{2j} e^{-p\tau} d\tau = \int_0^{\infty} \frac{e^{(j\omega-p)\tau} - e^{-(j\omega+p)\tau}}{2j} d\tau = \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{e^{(j\omega-p)\tau}}{j\omega-p} + \frac{e^{-(j\omega+p)\tau}}{p+j\omega} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) \Leftrightarrow \\ F(p) &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Une fois de plus, l'existence de cette transformée, si l'on se réfère à ce calcul, conduit à restreindre le plan de Laplace à $\alpha > 0$. L'[abscisse de sommabilité](#) est donc nulle.

C.2 Remarques sur la transformée de Laplace inverse

On a vu qu'on pouvait souvent retrouver un signal temporel causal à partir d'une fonction en p grâce à une utilisation judicieuse du tableau 1. Cependant, compte tenu du problème lié au domaine de [sommabilité](#), on peut se poser la question de savoir ce qu'il advient si les résultats du tableau 1 sont obtenus en restreignant le domaine de Laplace. Par exemple, en affirmant

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{p+a} \right) = e^{at}$$

(voir paragraphe [ci-dessus](#)), on peut se demander ce qu'entraîne la restriction $p \neq -a$. La réponse n'est pas simple mais elle réside dans l'expression mathématique de $\mathcal{L}^{-1}$ donnée par l'intégrale suivante :

$$F(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_0 - j\infty}^{\alpha_0 + j\infty} F(q) e^{qt} dq$$

où α_0 , l'abscisse de sommabilité, est supérieure aux parties réelles de toutes les valeurs de p qui rendent $F(p)$ non définie. Pour l'exemple donné, $\alpha_0 > -a$. Une fois de plus, la théorie de la variable complexe et en particulier le théorème des résidus (non détaillé ici) permet de conclure que l'on peut, malgré cette hypothèse restrictive sur le domaine de sommabilité, calculer $\mathcal{L}^{-1}$. En d'autres termes, même si cela est difficile à démontrer, le fait que $F(p)$ ne soit pas définie en $-a$ n'empêche pas d'utiliser le tableau 1. L'Automaticien n'a donc pas à se préoccuper de ces considérations mathématiques lorsqu'il utilise ce tableau.

D Démonstration de la formule de Black

La [formule de Black](#) est en réalité très simple à démontrer. On s'intéresse ici au cas du retour non unitaire (voir figure 14). Il vient :

$$\begin{aligned} Y(p) &= G_1(p)\epsilon(p) = G_1(p)(Y_c(p) - Y(p)) = G_1(p)(Y_c(p) - G_2(p)\epsilon(p)) \Leftrightarrow \\ Y(p)(1 + G_1(p)G_2(p)) &= G_1(p)Y_c(p) \Leftrightarrow \\ H(p) &= \frac{Y(p)}{Y_c(p)} = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)} \end{aligned}$$

Le cas du retour unitaire se déduit de ce qui précède en prenant $G_2(p) = 1$.

E Expression du gain statique

Au paragraphe 3.3.1, il est affirmé que le [gain statique](#) K d'une [fonction de transfert](#) $G(p)$ est :

$$K = G(0)$$

ce qui sous-entend que $p = 0$ revient à considérer le comportement statique c'est-à-dire en régime permanent. Ceci peut être aisément montré en utilisant le théorème de la valeur finale (voir propriétés de la [transformation de Laplace](#)).

En effet, on a vu que le gain statique K correspondait au rapport constant entre l'entrée constante U_0 (ce qui revient à dire que l'entrée $u(t)$ est de la forme [échelon](#) $u(t) = U_0\Gamma(t)$) et la sortie en régime permanent Y_∞ , également constante si le modèle est [asymptotiquement stable](#). Donc, on a :

$$Y(p) = G(p) \frac{U_0}{p}$$

Le théorème de la valeur finale conduit à écrire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = \lim_{p \rightarrow 0} G(p)U_0$$

Donc, il vient bien :

$$K = \frac{Y_\infty}{U_0} = \lim_{p \rightarrow 0} G(p)$$

Pour un système asymptotiquement stable, $G(p)$ est calculable en 0 donc $K = G(0)$.



Attention ! On vient de voir que pour un système asymptotiquement stable, le gain statique est $K = G(0)$.

Cependant, pour un système instable, il se peut que l'on puisse aussi calculer $G(0)$. Ceci ne signifie pas que $G(0)$ est le gain statique. En effet, soit le système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)}$$

Ce système est clairement instable selon le critère des racines puisque ses deux pôles, $p_1 = 1$ et $p_2 = 2$ sont réels positifs.

Sa réponse indicielle est franchement divergente. Pourtant $G(0) = 1/2$.



F Influence des pôles sur la réponse d'un système

Le but de cette partie est d'analyser plus en détails l'influence des pôles (voire des zéros) du système sur la réponse de ce dernier. L'étude est faite surtout sur la réponse impulsionnelle définie au paragraphe 3.2.

On rappelle que la forme générale de la fonction de transfert d'un système linéaire est :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

et que la réponse impulsionnelle correspondante est la transformée de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}$ de cette transmittance. On a vu au paragraphe C.2 qu'il était difficile d'utiliser l'expression de $\mathcal{L}^{-1}$ mais qu'il valait mieux, comme indiqué au paragraphe 3.3.5, décomposer $G(p)$ (dans le cas de la réponse impulsionnelle) ou $G(p)/p$ (dans le cas de la réponse indicielle) et appliquer ensuite sur chaque élément simple les résultats connus et fournis par le tableau 1.

Par ailleurs, compte tenu de la définition des pôles et des zéros d'un système, on peut écrire $G(p)$ ainsi :

$$G(p) = K \frac{(p - z_1) \dots (p - z_m)}{(p - p_1) \dots (p - p_n)}$$

où K est le gain statique, $z_1, z_2, \dots, z_m$ sont les zéros et $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont les pôles. Il faut alors distinguer deux cas :

- le cas où les pôles sont tous distincts qui sera traité de manière générale.
- le cas où certains pôles sont multiples qui fera l'objet d'un exemple à part.

Remarque 7 : Comme les réponses sont étudiées grâce à la fonction de transfert, ceci sous-entend que les conditions initiales sont supposées nulles.

F.1 Pôles distincts

Dans le cas où la fonction de transfert est strictement propre, on peut décomposer $G(p)$ en éléments simples et l'écrire ainsi :

$$G(p) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{p - p_i}$$

où les numérateurs R_i sont appelés résidus. En réalité, ces résidus sont étroitement liés aux zéros.

Lorsque p_i est réel, alors R_i est réel. De plus, si p_i est complexe alors son conjugué $\bar{p}_i$ est aussi un pôle du système.

Leurs résidus respectifs R_i et $\bar{R}_i$ sont également conjugués. Si cette conjugaison n'était pas respectée, les numérateur et dénominateur de $G(p)$ ne seraient pas des polynômes à coefficients réels ce qui n'est pas réaliste.

Le tableau 1 permet de déduire que la réponse impulsionnelle est :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p)) = \sum_{i=1}^n R_i e^{p_i t} \Gamma(t)$$

(l'apparition de l'échelon $\Gamma(t)$ marque simplement le fait que les termes sont des fonctions causales (nulles pour $t < 0$)). On s'aperçoit avec cette formule que :

- chaque pôle engendre un comportement exponentiel réel ou complexe dans la réponse.
- les résidus (donc indirectement les zéros) vont “répartir” l'influence de ses divers comportements sur la réponse globale.

On doit maintenant essayer de comprendre ce qui se cache derrière chaque comportement exponentiel, c'est-à-dire derrière chaque pôle. Il faut à nouveau considérer deux cas.

- ◇ p_i est un pôle réel donc, dans la réponse impulsionnelle, il engendrera un terme de décroissance exponentielle si $p_i < 0$ ou un terme de croissance exponentielle dangereuse caractéristique d'un système instable si $p_i > 0$. Cette constatation est conforme au [critère des racines](#).
- ◇ p_i et son conjugué $\bar{p}_i$ sont complexes. On peut alors écrire $R_i = \rho e^{j\theta}$ et $p_i = \alpha + \beta j$. On a alors :

$$(R_i e^{p_i t} + \bar{R}_i e^{\bar{p}_i t}) \Gamma(t) = (\rho e^{j\theta} e^{\alpha t + j\beta t} + \rho e^{-j\theta} e^{\alpha t - j\beta t}) \Gamma(t) = \rho e^{\alpha t} (e^{j(\beta t + \theta)} + e^{-j(\beta t + \theta)}) \Gamma(t) = 2\rho e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \Gamma(t)$$

Ceci signifie que chaque paire de pôles complexes engendre un terme sinusoïdal de pulsation β dont l'amplitude suit une loi de croissance ou de décroissance exponentielle selon le signe de α . Si $\alpha > 0$, ce terme est d'amplitude croissante et le système est instable. Si $\alpha < 0$, ce terme est d'amplitude décroissante correspondant à un comportement [asymptotiquement stable](#). Ces constatations sont conformes au [critère des racines](#).

En résumé, un système est asymptotiquement stable lorsque tous ces pôles sont à partie réelle négative. En outre, ce sont les pôles complexes qui engendrent les oscillations de la réponse impulsionnelle et ces oscillations sont d'autant plus marquées que la partie imaginaire des pôles est importante devant la partie réelle. Ceci constitue un début de preuve du [critère des racines](#). Ces effets sont résumés sur la figure 33.

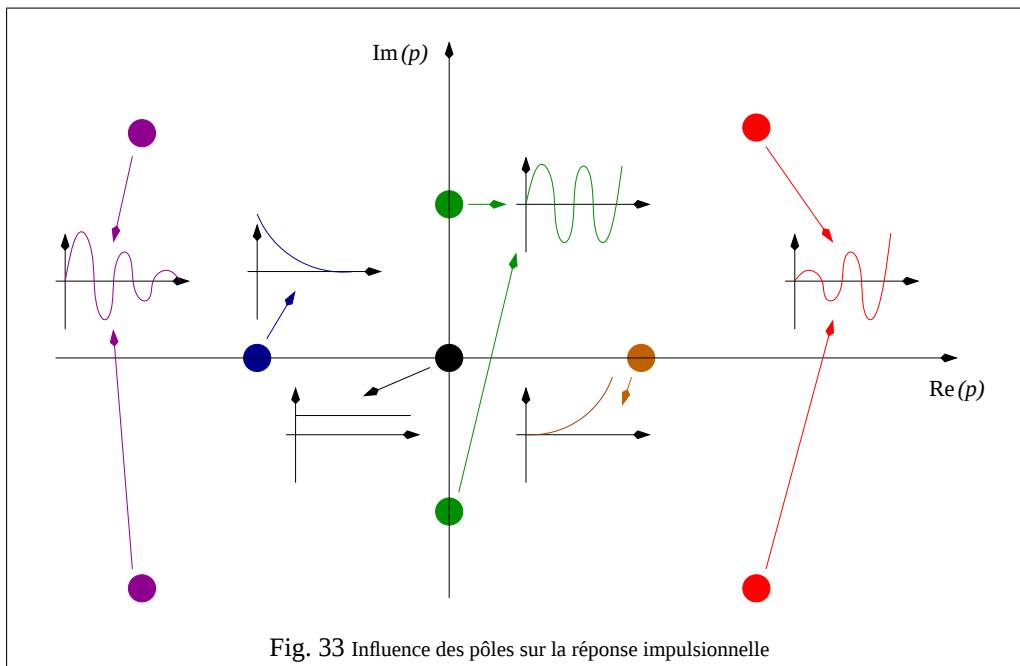


Fig. 33 Influence des pôles sur la réponse impulsionnelle

La réponse est une combinaison des comportements de chaque pôle. Ainsi tout pôle à droite de l'axe imaginaire rend le système instable. Si tous les pôles sont à gauche de cet axe, le système est asymptotiquement stable. Parmi ces pôles, les **pôles dominants** ou lents sont *a priori* les plus influents sur la réponse. Cependant, les résidus viennent tempérer ce raisonnement "simpliste" à savoir qu'ils pondèrent l'influence de chaque pôle. Cette influence des résidus (indirectement celle des zéros) est beaucoup plus délicate à analyser. Il est très difficile de traduire, par exemple, cette influence en termes de localisation des zéros dans le plan de Laplace.

Enfin, il faut noter que ces comportements vont se retrouver dans la réponse indicielle. En effet, il s'agit alors de décomposer $G(p)/p$ plutôt que $G(p)$. On retrouve alors les mêmes racines au dénominateur (c'est-à-dire les pôles) plus une racine nulle liée à l'échelon. Les résidus sont eux différents. On obtient :

$$\frac{G(p)}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{R'_i}{p - p_i} + \frac{K}{p}$$

La réponse est alors :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(p)}{p} \right) = \left(K + \sum_{i=1}^n R'_i e^{p_i t} \right) \Gamma(t)$$

On retrouve donc bien l'influence des pôles dans cette réponse indicielle.

F.2 Pôles multiples

Dans le cas où les **pôles** ne sont pas distincts, la décomposition en éléments simples n'est plus aussi facile. Si l'on prend l'exemple d'ordre 3 proposé dans [7]

$$G(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{(p + 1)^3},$$

le pôle -1 est de multiplicité 3 et la décomposition en éléments simples est la suivante :

$$G(p) = \frac{2}{(p + 1)^3} + \frac{1}{p + 1}$$

(voir le cours de mathématiques pour les techniques de décomposition en éléments simples). Il vient alors, en utilisant le tableau 1, la réponse impulsionnelle :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p)) = (t^2 + 1)e^{-t}\Gamma(t)$$

On voit sur cet exemple que si les comportements exponentiels interviennent toujours, ce n'est plus de manière aussi évidente et des termes en $t^q e^{p_i t}$ apparaissent, ce qui ne change rien au **critère des racines** puisque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (t^q e^{p_i t}) = 0 \quad \text{si} \quad \text{Re}(p_i) < 0.$$

Ce cas n'est pas traité de manière générale. On peut toutefois mentionner qu'il existe des outils numériques permettant de faire la décomposition en éléments simples d'expressions non triviales.

G Fonction de transfert et réponse harmonique

Dans cette partie, on revient sur les assertions du paragraphe 3.4.2. Il y est dit que la réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale est, en régime permanent (pour $t \rightarrow \infty$), une sinusoïde. En réalité, ceci n'est vrai que si le système est **asymptotiquement stable** ce qui sera supposé ici. Il est également affirmé que la **fonction de transfert** permet de reconstituer cette sortie. En voici les justifications.

Le signal d'entrée est sinusoïdal :

$$u(t) = U_m \sin(\omega t)$$

D'après le tableau 1, sa transformée de Laplace est :

$$U(p) = \frac{U_m \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Soit $G(p)$, la fonction de transfert du système que l'on supposera de manière réaliste **strictement propre**. La transformée de Laplace de la sortie $y(t)$ est :

$$Y(p) = G(p) \frac{U_m \omega}{p^2 + \omega^2} \quad (12)$$

Comme $G(p)$ est strictement propre, $Y(p)$ est décomposable en éléments simples. Par souci de simplicité, on suppose, dans les calculs, que les pôles du système sont distincts. La décomposition conduit à :

$$Y(p) = \frac{a}{p + j\omega} + \frac{\bar{a}}{p - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{p - p_i} \quad (13)$$

Les valeurs p_i correspondent aux n pôles du système et les S_i sont les résidus associés à ces pôles dans cette décomposition. a et $\bar{a}$ sont les résidus associés à l'entrée sinusoïdale qui génère deux racines imaginaires pures conjuguées $j\omega$ et $-j\omega$ au dénominateur de $Y(p)$.

Si on applique $\mathcal{L}^{-1}$ à $Y(p)$, on obtient :

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n S_i e^{-p_i t}$$

Comme le système est supposé asymptotiquement stable, la partie réelle de ses pôles est strictement négative et chaque terme $e^{-p_i t}$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini. Donc, après un certain temps de régime transitoire, ce sont les deux premiers termes qui vont déterminer la réponse en régime permanent.

Dans le cas des pôles multiples, les expressions sont un peu plus compliquées à écrire et en appliquant $\mathcal{L}^{-1}$, des termes en $t^q e^{-p_i t}$ apparaissent mais ils tendent eux aussi vers 0 quand t tend vers l'infini. Il reste donc en régime permanent :

$$y_\infty(t) = y(t \rightarrow \infty) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} \quad (14)$$

expression dans laquelle il convient de déterminer a et $\bar{a}$. L'identification des deux expressions de $Y(p)$ données par les équations (12) et (13) permet, en multipliant ces deux expressions par $(p + j\omega)$ et en posant $p = -j\omega$ de déduire :

$$a = -\frac{U_m}{2j} G(-j\omega)$$

Le même raisonnement mais en multipliant par $(p - j\omega)$ et en posant $p = j\omega$ conduit à :

$$\bar{a} = \frac{U_m}{2j} G(j\omega)$$

$G(j\omega)$ est un nombre complexe paramétré par ω . Son module peut être noté $A(\omega)$ et son argument $\phi(\omega)$. $G(p)$ étant une fraction de deux polynômes en p , à coefficients réels, il est facile de voir que $G(-j\omega)$ est de même module $A(\omega)$. En revanche, on a $\text{Arg}(G(-j\omega)) = -\phi(\omega)$. On peut donc écrire $G(j\omega)$ et $G(-j\omega)$ ainsi :

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad ; \quad G(-j\omega) = A(\omega)e^{-j\phi(\omega)}$$

On reprend l'équation (14) avec ces valeurs de résidus et il vient :

$$y(t) = A(\omega)U_m \frac{e^{j(\omega t + \phi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \phi(\omega))}}{2j} \Leftrightarrow$$

$$y(t) = A(\omega)U_m \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

La fonction de transfert calculée en $p = j\omega$ permet donc de retrouver la **réponse harmonique** du système. On comprend ici pourquoi poser $p = j\omega$ revient à supposer que l'excitation d'entrée est sinusoïdale. En électronique où les circuits linéaires sont souvent plus considérés comme des filtres, les excitations sont très souvent sinusoïdales et les fonctions de transfert s'expriment en fonction de $j\omega$. En fait, les électroniciens utilisent la transformation de Fourier⁷, notée $\mathcal{F}$, qui est définie de manière assez similaire à celle de Laplace :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{F}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\beta\tau} d\tau$$

$\mathcal{F}$ est une restriction de la **transformée de Laplace** dite “bilatérale” c'est-à-dire quand l'intégration se fait entre $-\infty$ et ∞ . Dans le cas “Laplace bilatérale”, p est complexe quelconque ; dans le cas de $\mathcal{F}$, $p = j\beta$ est imaginaire pur.

Enfin, on note que si $\omega = 0$ (fréquence nulle correspondant à une entrée continue type **échelon**), on retrouve, **en régime permanent**, $G(0) = K$, le **gain statique**. Ceci-dit, la démonstration de ce dernier point proposée en annexe E est plus appropriée.

H A propos du diagramme de Bode

Dans cette partie, quelques notions supplémentaires relatives à la construction des **diagrammes de Bode** sont proposées. La **réponse fréquentielle** d'éléments simples de premier ordre est d'abord présentée et justifiée, puis, le diagramme de Bode du **moteur à courant continu** étudié dans le cours est construit.

H.1 Quelques règles simples de construction

Lorsque l'on s'intéresse à la **réponse harmonique** d'un système, on considère sa **fonction de transfert** pour $p = j\omega$, à savoir $G(j\omega)$, ω étant la pulsation du signal sinusoïdal censé exciter le système. Par ailleurs, si le **diagramme de Bode** est choisi pour représenter graphiquement cette réponse, il a été vu au paragraphe 3.4.3 (sous-paragraphe c), que si la fonction de transfert du système s'écrit

$$G(p) = \prod_{k=1}^r G_k(p),$$

alors le **gain en décibels** total s'écrit :

$$T(\omega) = 20\log(|G(j\omega)|) = \sum_{k=1}^r T_k(\omega)$$

où chaque $T_k(\omega)$ est défini par $T_k(\omega) = 20\log(|G_k(j\omega)|)$.

De même, le **déphasage** global s'exprime ainsi :

$$\phi(\omega) = \text{Arg}(G(j\omega)) = \sum_{k=1}^r \phi_k(\omega)$$

où chaque $\phi_k(\omega)$ est défini par $\phi_k(\omega) = \text{Arg}(G_k(j\omega))$.

De cette constatation, il convient de tirer la conclusion suivante : il faut exprimer la fonction de transfert comme un produit de facteurs simples dont le diagramme de Bode est aisé à tracer. Une fois chaque diagramme asymptotique ou réel tracé, le diagramme global est la somme géométrique de tous les sous-diagrammes dans le plan de Bode.

Quelques diagrammes simples sont maintenant proposés. Ils peuvent souvent servir au tracé de diagrammes plus complexes.

- $G(p) = \frac{p}{\omega_0}$. Il s'agit là du dérivateur. Le gain en décibels est :

⁷Baron Joseph Fourier (1768-1830) : mathématicien français contemporain de Laplace

$$T(\omega) = 20\log \left(\left| j \frac{\omega}{\omega_0} \right| \right) = 20\log \left(\left| \frac{\omega}{\omega_0} \right| \right) = 20\log(\omega) - 20\log\omega_0$$

Il est facile de voir que $T(\omega)$ croît avec ω et s'annule pour $\omega = \omega_0$. En outre, si l'on calcule le gain en décibels pour 10ω , on obtient :

$$T(10\omega) = 20\log(10\omega) - 20\log\omega_0 = 20\log(\omega) - 20\log\omega_0 + 20 = T(\omega) + 20$$

On en déduit que pour chaque changement de décade, le gain en décibels croît de $20dB$, ce qui signifie que géométriquement, dans le plan de Bode, en raison de l'échelle logarithmique en abscisse, ce dérivateur produit une droite de pente $20dB$ par décade passant par $0dB$ en ω_0 .

Concernant le déphasage, ce dernier est constant puisque :

$$\phi(\omega) = \text{Arg} \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right) = 90^\circ$$

Ces résultats sont résumés par la figure 34.

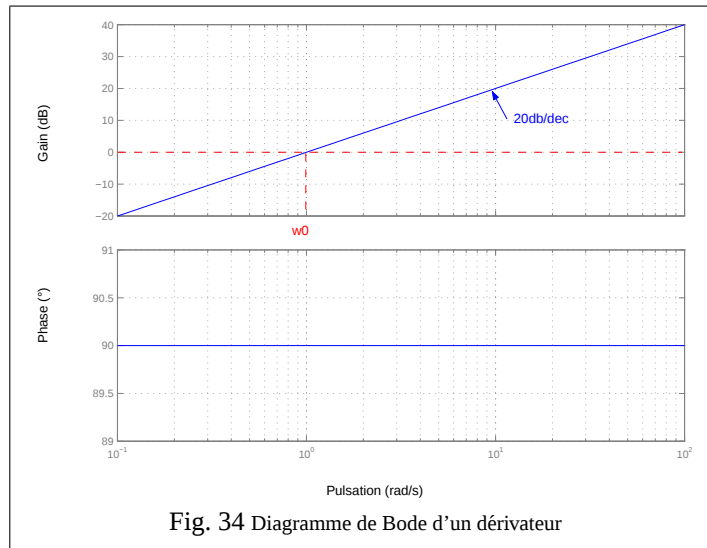


Fig. 34 Diagramme de Bode d'un dérivateur

- $G(p) = \frac{\omega_0}{p}$. Il s'agit là d'un intégrateur. Son gain en décibels s'exprime :

$$T(\omega) = 20\log \left(\left| \frac{\omega_0}{j\omega} \right| \right) = 20\log \left(\left| \frac{j}{j \frac{\omega}{\omega_0}} \right| \right) = -20\log \left(\left| j \frac{\omega}{\omega_0} \right| \right) = -20\log(\omega) + 20\log(\omega_0)$$

On peut faire les mêmes constatations qu'avec le dérivateur si ce n'est qu'en raison du signe moins, la pente est de $-20dB$ par décade. On a toujours $T(\omega_0) = 0$.

Pour le déphasage, il vient :

$$\phi(\omega) = \text{Arg} \left(\frac{\omega_0}{j\omega} \right) = -90^\circ$$

La réponse fréquentielle de cet intégrateur est donné par la figure 35.

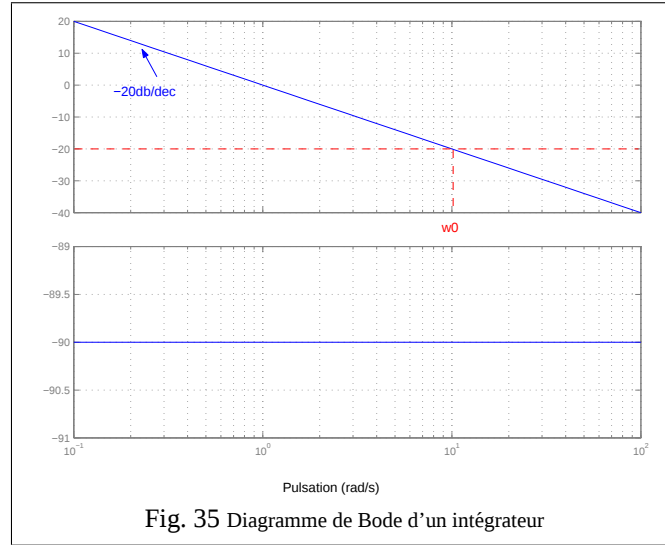


Fig. 35 Diagramme de Bode d'un intégrateur

• $G(p) = 1 + \frac{p}{w_0}$. Il s'agit là d'un pseudo-dérivateur. Il se comporte comme un dérivateur en hautes fréquences et comme un simple gain unitaire en basses fréquences. On distingue justement ces deux comportements extrêmes pour réaliser un tracé asymptotique.

Lorsque ω tend vers l'infini, le terme 1 est négligeable et $G(j\omega)$ se comporte comme un dérivateur avec, pour le gain, une pente de $20dB$ par décade et un déphasage constant de 90° . Ceci permet de tracer une première asymptote pour le gain et pour la phase.

En basses fréquences, $G(j\omega)$ tend vers 1 (soit un gain en décibels de 0 et un déphasage nul). Ceci permet de tracer une seconde asymptote pour le gain et pour la phase.

La limite entre ces deux zones de pulsations est ω_0 , appelée pulsation de cassure. En effet, pour $\omega = \omega_0$, les deux termes de la fonction de transfert sont aussi influents l'un que l'autre puisque parties réelle et imaginaire sont égales. On a :

$$T(\omega_0) = 20\log(|1 + j|) = 20\log(\sqrt{2}) = 3dB \quad ; \quad \phi(\omega_0) = \text{Arg}(1 + j) = \text{Arctan}(1) = 45^\circ$$

A la pulsation de cassure, la courbe de gain réelle se situe donc $3dB$ au dessus de l'intersection des asymptotes. Le déphasage à cette pulsation est de 45° . De plus, on a :

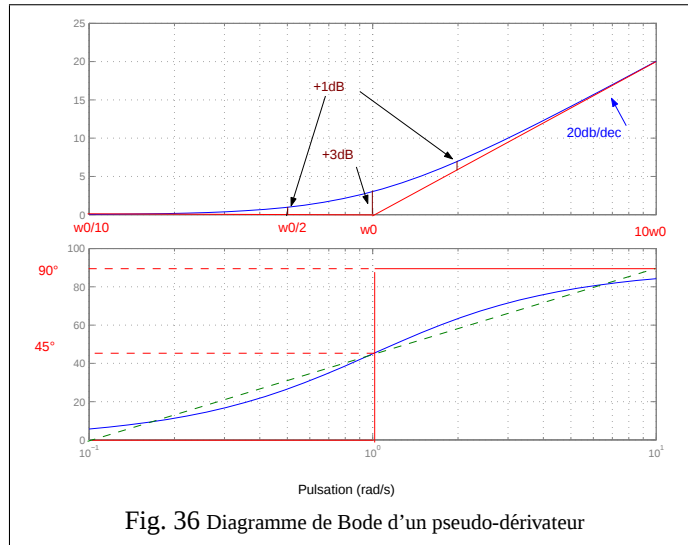
$$\begin{cases} T\left(\frac{\omega_0}{2}\right) = 20\log\left(\left|1 + j\frac{1}{2}\right|\right) = 20\log\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right) \simeq 1dB \\ T(2\omega_0) = 20\log(|1 + 2j|) = 20\log(\sqrt{5}) \simeq 7dB \\ \log(|2j|) = 20\log(\sqrt{4}) \simeq 6dB \end{cases}$$

La première équation montre que pour $\omega = \omega_0/2$, la courbe de gain réelle se situe $1dB$ au dessus de l'asymptote horizontale. La deuxième et la troisième montrent que pour $\omega = 2\omega_0$, la courbe réelle se trouve à nouveau à $1dB$ au dessus de l'asymptote oblique. Ces constatations aident à tracer la courbe réelle une fois les asymptotes en place.

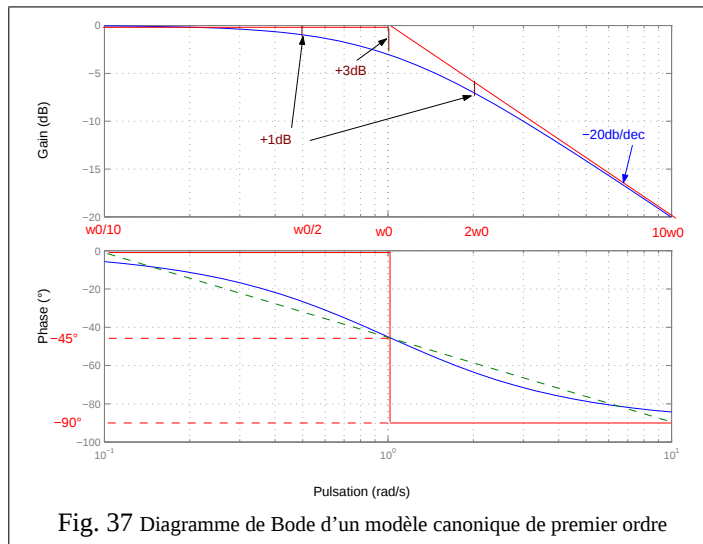
En outre, on a :

$$\begin{cases} \phi\left(\frac{\omega_0}{10}\right) = \text{Arg}\left(1 + j\frac{1}{10}\right) = \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right) \simeq 5,7^\circ \\ \phi(10\omega_0) = \text{Arg}(1 + 10j) = \text{Arctan}(10) \simeq 84,3^\circ \end{cases}$$

Ces deux équations permettent de tracer un segment de droite oblique sur la courbe des phases qui donne une idée approximative du déphasage dans les fréquences intermédiaires. Tout ceci est résumé sur la figure 36.



- $G(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_0}}$. Il s'agit là d'un filtre passe bas de premier ordre que l'on a étudié sous le nom de **système canonique de premier ordre**. Sans entrer dans tous les détails de construction qui sont similaires à ce qui a été vu pour le pseudo-dérivateur, on voit bien qu'en basses fréquences, le système se comporte comme un gain unitaire ($T_0 = 0dB$, $\phi(0) = 0^\circ$) et qu'en hautes fréquences, c'est-à-dire grossièrement au-delà de ω_0 , la pulsation de cassure, l'amplification diminue. Ce comportement est expliqué sur la figure 37.



- Enfin, quelle que soit la **fonction de transfert** $G(p)$, il faut garder présent à l'esprit que si l'on souhaite tracer le **diagramme de Bode** de $AG(p)$ où A est un gain, on a $\text{Arg}(AG(j\omega)) = \text{Arg}(G(j\omega))$ donc le déphasage reste inchangé par le gain A et on a :

$$20\log(|AG(j\omega)|) = 20\log(A) + 20\log(|G(j\omega)|)$$

Ainsi, si l'on fait précéder un système de fonction de transfert $G(p)$ d'un gain A , la phase n'est pas altérée et la courbe de gain est translatée vers le haut de $20\log(A)$. Si $A > 1$, alors $20\log(A) > 0dB$ et c'est une translation effective vers le haut. Si $A < 1$, alors $20\log(A) < 0dB$ et c'est en fait une translation vers le bas. On remarque à ce propos qu'un gain supérieur à $0dB$ correspond à une vraie amplification alors qu'un gain inférieur correspond à une atténuation.

H.2 Construction du diagramme de Bode associé au modèle complet du moteur

Dans cette annexe, on cherche à illustrer l'utilité de la propriété vue au paragraphe 3.4.3 (sous paragraphe c) ainsi qu'au paragraphe précédent. Le modèle d'ordre 2 du **moteur à courant continu** est le suivant :

$$G(p) = \frac{0,5}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

avec $\tau_1 = 0,5$, une **constante de temps** essentiellement liée aux phénomènes mécaniques et $\tau_2 = 0,01$, une constante de temps essentiellement liée aux phénomènes électriques. On peut écrire $G(p)$ ainsi :

$$G(p) = G_1(p)G_2(p) \quad \text{avec :}$$

$$G_1(p) = \frac{0,5}{1 + \tau_1 p} \quad \text{et} \quad G_2(p) = \frac{1}{1 + \tau_2 p}$$

Au paragraphe 3.4.3 (sous paragraphe c) ainsi qu'au paragraphe H.1, il est expliqué que la réponse harmonique dans le **plan de Bode** de $G(p)$ est la somme géométrique des réponses respectives de $G_1(p)$ et $G_2(p)$.

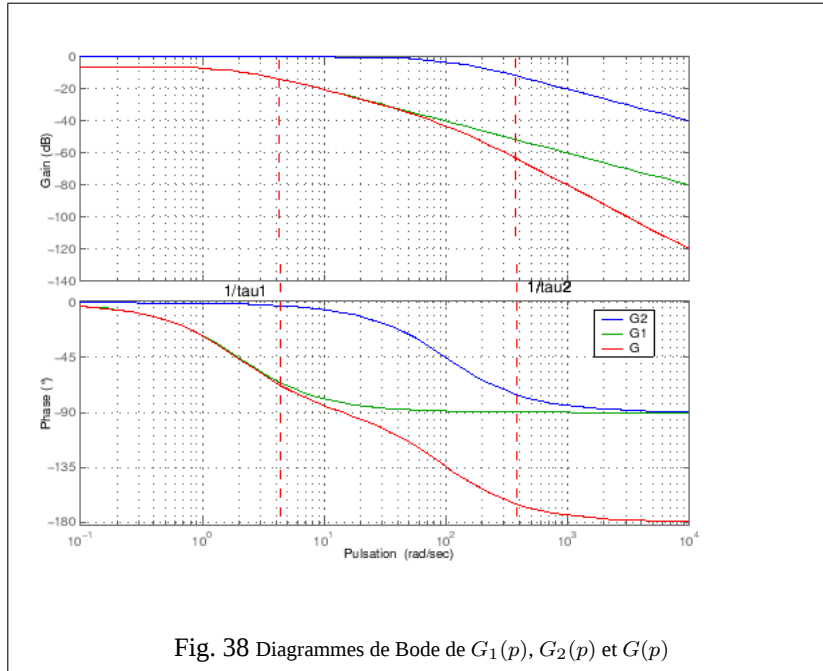


Fig. 38 Diagrammes de Bode de $G_1(p)$, $G_2(p)$ et $G(p)$

Sur la figure 38, on voit qu'une fois les diagrammes associés à $G_1(p)$ et $G_2(p)$ tracés (ce sont des réponses fréquentielles de modèles **canoniques** de premier ordre), ajouter les deux dans le plan de Bode permet d'obtenir le diagramme de Bode de $G(p)$. On constate aussi que pour des basses fréquences correspondant plutôt à la dynamique mécanique, la réponse de $G_1(p)$ est une bonne approximation de celle de $G(p)$. En revanche, en hautes fréquences où la dynamique électrique intervient, $G_1(p)$ n'est plus assez précis. On voit bien aussi que négliger les phénomènes électriques dans le moteur revient à négliger les hautes fréquences.

I Perturbation en $1/p^q$ et position des intégrateurs

Cette partie illustre le fait que l'action destinée à réduire l'effet d'une perturbation de type D_0/p^q doit être exercée en amont de cette perturbation comme affirmé au paragraphe 5.2.4. On se réfère à la figure 28 pour le justifier. On suppose que la consigne y_c et la perturbation d sont toutes deux de type échelon, c'est-à-dire que leurs **transformées de Laplace** sont :

$$Y_c(p) = \frac{Y_{c0}}{p} \quad ; \quad D(p) = \frac{D_0}{p}$$

On suppose que $G_1(p)$ et $G_2(p)$ sont les **fonctions de transfert** de systèmes de gains statiques respectifs K_1 et K_2 . La transformée de Laplace de l'erreur ϵ est :

$$\begin{aligned}\epsilon(p) &= Y_c(p) - Y(p) = Y_c(p) - A_2 G_2(p) D(p) - A_1 A_2 G_1(p) G_2(p) \epsilon(p) \Leftrightarrow \\ \epsilon(p)(1 + A_1 A_2 G_1(p) G_2(p)) &= Y_c(p) - A_2 G_2(p) D(p) \Leftrightarrow \\ \epsilon(p) &= \frac{Y_c(p)}{1 + A_1 A_2 G_1(p) G_2(p)} - \frac{A_2 G_2(p) D(p)}{1 + A_1 A_2 G_1(p) G_2(p)}\end{aligned}$$

On souhaite annuler l'influence de d sur ϵ en **régime permanent** (pour $t \rightarrow \infty$) par l'adjonction d'un intégrateur. On envisage deux cas :

1. $G_1(p)$ est de **type 0** et $G_2(p)$ est de **type 1** (l'intégrateur se situe dans $G_2(p)$).
2. $G_1(p)$ est de **type 1** et $G_2(p)$ est de **type 0** (l'intégrateur se situe dans $G_1(p)$).

• **Cas 1** : en calculant l'erreur en régime permanent, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\epsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \epsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{Y_{c0} p}{p}}{1 + \frac{A_1 A_2 K_1 K_1}{p}} - \frac{\frac{D_0 A_2 K_2 p}{p} \times \frac{1}{p}}{1 + \frac{A_1 A_2 K_1 K_1}{p}} \right) = -\frac{D_0}{A_1 K_1}$$

L'erreur en régime permanent n'est donc pas nulle.

• **Cas 2** : il vient maintenant :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\epsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \epsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{Y_{c0} p}{p}}{1 + \frac{A_1 A_2 K_1 K_1}{p}} - \frac{\frac{D_0 A_2 K_2 p}{p}}{1 + \frac{A_1 A_2 K_1 K_1}{p}} \right) = 0$$

Cette fois-ci, l'erreur statique s'annule et l'on voit bien que l'action doit être exercée en amont de la perturbation.

J Calcul d'un régulateur par compensation de pôle

Soit un procédé de **fonction de transfert** $G(p)$ tel que $G(p)$ fait apparaître une **constante de temps** dominante τ , c'est-à-dire un **pôle** $\lambda = -1/\tau$ dominant :

$$G(p) = \frac{N(p)}{(1 + \tau p) D'(p)}$$

$N(p)$ est un polynôme qui est supposé non factorisable par p . $D'(p)$ est un polynôme quelconque. Selon le principe de la **commande par retour unitaire**, on peut commander le système grâce un régulateur $R(p)$.

J.1 Régulateur PI

La technique de compensation de pôle consiste à choisir un **régulateur PI** d'une forme particulière :

$$R(p) = \frac{A}{p}(1 + \tau p) = A\tau + \frac{A}{p} \quad (15)$$

On voit clairement qu'un terme est un simple gain (effet proportionnel) alors que l'autre est en $1/p$ (effet intégral). La constante de temps τ apparaît dans cette fonction de transfert. Celle de la **chaîne directe** est :

$$F(p) = \frac{A N(p)}{p D'(p)}$$

La **formule de Black** conduit à la fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{\frac{AN(p)}{pD'(p)}}{1 + \frac{AN(p)}{pD'(p)}} = \frac{1}{1 + \frac{pD'(p)}{AN(p)}}$$

On constate que quel que soit le **type** α de $G(p)$ (voir paragraphe 5.2.3), le **gain statique** en boucle fermée est égal à :

$$\lim_{p \rightarrow 0} F(p) = 1$$

Ceci correspond à un système précis ayant une erreur de position nulle (voir à nouveau le paragraphe 5.2.3). Ainsi, ce correcteur, comme tout régulateur PI, permet d'augmenter le **type** de $F(p)$ donc de rendre le système en boucle fermée plus précis. En outre, la dynamique liée à la constante de temps τ est compensée par le régulateur et n'apparaît plus sur la réponse du système en boucle fermée (sous réserve que le modèle soit suffisamment fidèle et donc que τ soit connue avec exactitude). De plus, A peut permettre d'**accélérer ou de ralentir** un peu la réponse en boucle fermée.

Cette technique est souvent utilisée sur des modèles **canoniques de premier ordre** pour lesquels on a :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Un régulateur de modèle donné par (15) conduit à une chaîne directe et une boucle fermée dont les fonctions de transfert respectives sont données par :

$$F(p) = \frac{AK}{p} \quad ; \quad H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{AK}} = \frac{K_{bf}}{1 + \tau_{bf}p} \quad (16)$$

On retrouve un modèle canonique de premier ordre. Par ailleurs, on constate que le gain statique en boucle fermée est unitaire ($K_{bf} = 1$) (donc le système devient précis) et la constante de temps en boucle fermée dépend de A (car $\tau_{bf} = 1/AK$). Comme attendu, plus grand est A , plus rapide est le système bouclé. On a donc, dans ce cas très précis, un seul paramètre pour gérer la **raideur** tout en assurant la **précision**.

Dans le cas du modèle simplifié du **moteur à courant continu**, le modèle en boucle ouverte est le suivant :

$$G(p) = \frac{0,5}{1 + 0,5p}$$

Ce modèle n'est pas précis puisque $K = 0,5$. Si on cherche à accélérer sa **réponse indicielle** par une **régulation proportionnelle** ($R(p) = A$), on s'aperçoit que la précision est variable (cf paragraphe 5.2.2). On peut bien sûr tenter de réduire l'erreur de position par un grand gain A (cf. figure 27) mais ceci risque de conduire à de trop fortes valeurs du signal de commande $u(t)$ donc à une saturation des actionneurs. C'est pourquoi, il vaut mieux utiliser un régulateur PI tel que celui présenté en (15). On obtient la fonction de transfert en boucle fermée donnée par (16), soit :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{0,5A}}$$

On choisit donc la constante de temps en boucle fermée grâce à A tout en conservant la précision. Il faut toutefois toujours veiller à ce que les actionneurs ne soient pas saturés (le signal de commande $u(t)$ ne doit pas prendre des valeurs excessives).

Remarque 8 : dans le cas du **moteur**, une forte augmentation de A peut conduire à l'apparition d'une oscillation en boucle fermée. En réalité, ce phénomène est dû au fait que la constante de temps électrique est négligée dans le modèle simplifié. Si on la prend en compte, la **marge de phase** mesurée sur le **diagramme de Bode** de la **chaîne directe** s'en trouve diminuée ce qui réduit le **coefficient d'amortissement**. En effet, lorsque A augmente, la courbe de gain est **décalée vers le haut** et la **pulsation critique** à laquelle cette marge est mesurée se déplace vers la droite, c'est-à-dire vers des fréquences où les phénomènes électriques ne sont plus négligeables. Sur la figure 38, les marges de stabilité sont infinies. Toutefois, on voit que si un gain $A > 2$ venait multiplier le transfert de la chaîne directe, on pourrait alors mesurer une marge de phase. Plus A serait grand, plus la courbe de **gain** monterait (puisqu'il faut ajouter $20\log A$ à cette dernière) et la pulsation critique se déplacerait vers les fréquences où le **déphasage** diminue en raison de la constante de temps électrique.

J.2 Régulateur PD

Il faut également remarquer que cette compensation de pôle peut être effectuée avec d'autres types de régulateurs. Ainsi, si l'on choisit, comme sortie du [moteur](#), la position angulaire, plutôt que sa vitesse angulaire, la fonction de transfert du procédé devient :

$$G(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)}$$

Le [type](#) de $G(p)$ passe à 1 car la position est l'intégrale de la vitesse et de ce fait, un intégrateur apparaît maintenant dans $G(p)$. On note d'ailleurs que ce modèle en boucle ouverte n'est pas [asymptotiquement stable](#) puisqu'il comporte un [pôle](#) nul. En effet, si on perturbe le moteur au repos, il se peut que la position de son arbre change et donc la sortie ne reviendra pas à sa position initiale. Le type étant déjà de 1, il est inutile, pour obtenir une [erreur de position](#) nulle en boucle fermée, d'ajouter un intégrateur dans la chaîne directe. On peut utiliser par exemple un [régulateur PD](#) en supprimant l'intégrateur du régulateur donné par (15) ce qui conduit à :

$$R(p) = A(1 + \tau p) = A + A\tau p$$

On voit clairement apparaître un terme constant (effet proportionnel) et un terme en p (effet dérivé). La fonction de transfert en boucle fermée est la même dans le cas de l'asservissement de vitesse donc le système en boucle fermée est précis et A détermine la raideur.

J.3 Régulateur PID

On peut encore s'inspirer de la technique de la compensation de pôle pour concevoir un régulateur PID, donc faire intervenir les trois effets. Pour cela, on considère un régulateur de la forme :

$$R(p) = \frac{A}{p}(1 + \tau p)(1 + T_d p)$$

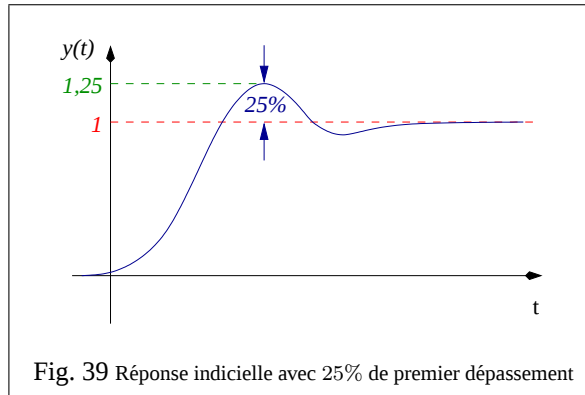
Il s'agit donc d'un régulateur de forme série. La partie PI, à savoir $(A/p)(1 + \tau p)$, est obtenue en utilisant une compensation de pôle comme détaillée au paragraphe J.1 mais il se peut alors que la [marge de phase](#) soit insuffisante aussi décide-t-on d'apporter de la phase grâce à l'effet dérivé contenu dans le facteur $(1 + T_d p)$. T_d est la constante de temps du facteur dérivatif. L'expérience des tracés des [diagrammes de Bode](#) des [chaînes directes](#) conduit à utiliser la méthode suivante pour choisir T_d :

1. Tracer la réponse harmonique de $(A/p)(1 + \tau p)G(p)$ dans le plan de [Bode](#).
2. Déterminer la pulsation ω' pour laquelle le [gain en décibels](#) est $T = T_0 - 20dB$.
3. Opter pour le choix $T_d = 10/\omega'$.
4. Toujours sur le diagramme de Bode tracé en 2, lire, à la pulsation ω' , l'écart $\Delta\phi$ entre le [déphasage](#) et -180° .
5. Si la [marge de phase](#) voulue (généralement autour de 45 ou 50°) est supérieure à $\Delta\phi + 90^\circ$, diminuer T_d , sinon, l'augmenter.

Il faut garder présent à l'esprit que cette méthode peut ne pas aboutir à un régulateur tout-à-fait satisfaisant. On peut l'affiner en tenant compte des [effets](#) des trois termes de la commande.

K Méthodes de Ziegler-Nichols

Dans cette partie, deux méthodes de réglage des [régulateurs PID](#) sous forme [parallèle](#) (équation (10)) sont présentées. Elles sont dites méthodes de [Ziegler Nichols](#) et ont un caractère presque empirique. Elles ont pour but *a priori* d'obtenir une réponse indicielle avec un dépassement de 25% comme le montre la figure 39.

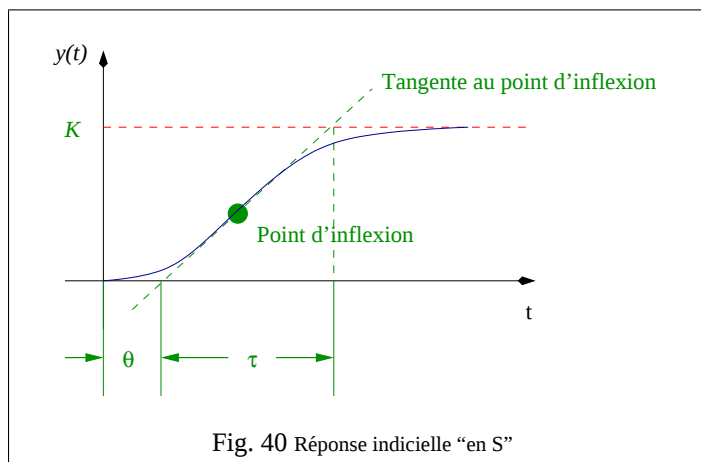


Il existe deux méthodes de Ziegler-Nichols :

- la première est dite “méthode de la réponse indicielle” ;
- la seconde est dite “méthode de la juste oscillation”.

K.1 Méthode de la réponse indicielle

Cette méthode n’est valable que pour des procédés stables dont la fonction de transfert ne comporte ni intégrateur, ni pôle dominant complexe. De tels procédés ont une réponse indicielle qui peut se rapprocher de la réponse dite “en S” donnée par la figure 40.



Cette forme de courbe peut être approchée par un modèle canonique de premier ordre de gain statique K et de constante de temps τ auquel on ajoute un retard pur θ ce qui amène la fonction de transfert approximative :

$$G(p) = \frac{K^{-\theta p}}{1 + \tau p}$$

(On note que le retard pur est une non-linéarité).

Ziegler et Nichols, sur la base de leur expérience, proposent d’affecter aux paramètres du régulateur P, PI, ou PID de forme parallèle (équation (10)), les valeurs données par le tableau 3

K.2 Méthode de la juste oscillation

Dans cette seconde méthode, on suppose que le système est stabilisable par un régulateur proportionnel. Cette méthode est utilisée pour des systèmes dont on ne veut pas tracer la réponse indicielle en boucle ouverte (parce qu’il est instable par exemple). On cherche alors quel est le gain proportionnel critique A_{cr} tel que le système en boucle fermée est en limite de stabilité, c’est-à-dire se comporte comme un oscillateur dont la réponse indicielle est une sinusoïde d’amplitude

Régulateur	k	τ_i	τ_d
P	$\frac{\tau}{\theta}$	∞	0
PI	$0,9\frac{\tau}{\theta}$	$\frac{\theta}{0,3}$	0
PID	$1,2\frac{\tau}{\theta}$	2θ	$0,5\theta$

TAB. 3 – Règles de Ziegler-Nichols (méthode “de la réponse indicielle”)

Régulateur	k	τ_i	τ_d
P	$0,5A_{cr}$	∞	0
PI	$0,45A_{cr}$	$\frac{1}{1,2}T_{cr}$	0
PID	$0,6A_{cr}$	$0,5T_{cr}$	$0,125T_{cr}$

TAB. 4 – Règles de Ziegler-Nichols (méthode “de la juste oscillation”)

constante. Ceci explique le nom de la méthode. On relève alors T_{cr} , la période, dite aussi critique, de cette oscillation. Toujours sur la base de leur expérience, Ziegler et Nichols proposent d'utiliser le tableau 4 pour affecter des valeurs à k , τ_i et τ_d .

K.3 Commentaires sur les deux méthodes

Ces deux méthodes ont permis de résoudre nombre de problèmes de régulation et d'asservissement. La [première](#) suppose que le modèle du procédé est [stable](#) et ne comporte aucun intégrateur. Elle suppose aussi que sa réponse en boucle ouverte n'oscille pas ou peu. La [seconde](#) suppose que le système est stabilisable par un régulateur [proportionnel](#). Certains procédés peuvent ne satisfaire aucune de ces contraintes et une autre méthode doit alors être utilisée.

En outre, il faut noter qu'en pratique, l'application de ces méthodes engendre des dépassements indiciels allant de 10% à 60%, ce qui peut donc être bien supérieur aux 25% annoncés par Ziegler et Nichols. En réalité ce pourcentage n'est qu'une valeur moyenne c'est pourquoi il faut toujours se souvenir des [effets](#) de chacun des termes de la commande.

Enfin, pour des systèmes de modèles connus avec précision, on peut s'interroger sur l'intérêt de telles méthodes et sans doute leur préférer des méthodes basées sur le [diagramme de Bode](#) de la [chaîne directe](#) et/ou sur la [compensation de pôle](#) même si dans ce cas, A_{cr} et T_{cr} peuvent être calculés. En revanche, lorsque la dynamique du procédé reste énigmatique mais qu'elle semble satisfaire aux contraintes imposées par l'une ou l'autre des méthodes, alors ces dernières peuvent s'avérer un bon moyen de trouver un “premier” régulateur PID satisfaisant qui peut être amélioré en jouant sur les trois

effets.

L Filtrage de l'effet dérivé

Dans la partie du cours concernant le **régulateur PID**, il est spécifié qu'en pratique, il est imprudent d'utiliser un **effet dérivé** pur. En effet, ce dernier présente une fâcheuse tendance à répercuter les dynamiques de hautes fréquences sur la commande, sollicitant ainsi énormément les actionneurs. Parmi ces dynamiques de hautes fréquences, on peut citer les bruits liés aux capteurs de mesure de la sortie.

Par ailleurs, en reprenant la logique du retour unitaire présentée sur la figure 14, on se rend mieux compte du danger d'une dérivation pure. Si la **consigne** y_c évolue en échelon à un instant t , il est impossible que la sortie la suive instantanément. De ce fait, l'**erreur** e subit elle aussi un échelon à ce même instant t . Sa dérivée est donc infinie et la commande u subira par conséquent un accoup très violent qu'il convient de limiter. La solution consiste à filtrer l'effet dérivé. En supposant que le régulateur initialement calculé comporte un facteur dérivatif pur, la **fonction de transfert** sous forme série de ce régulateur est :

$$R(p) = A(1 + \frac{1}{T_i p})(1 + T_d p)$$

où T_d est la constante de temps du facteur dérivatif. On multiplie cette fonction de transfert par un filtre passe-bas de premier ordre afin d'obtenir :

$$R(p) = A(1 + \frac{1}{T_i p}) \frac{(1 + T_d p)}{(1 + T_f p)}$$

T_f est une constante de temps de filtrage qui est généralement prise nettement inférieure à T_d . On filtre ainsi les fréquences supérieures à $1/T_f$ et on limite les accoups dans la commande.

On peut aussi appliquer ce principe à une forme parallèle de régulateur PID et l'on obtient

$$R(p) = k + \frac{k}{\tau_i p} + \frac{k \tau_d p}{1 + \tau_d p}$$

où τ_d est alors la constante de temps du filtrage.

Références bibliographiques

- [1] Ch. Burgat. *Problèmes résolus d'Automatique*. Editions Ellipses (Technosup), 2001.
- [2] P. Clerc. *Automatique continue, échantillonnée : IUT Génie Electrique-Informatique Industrielle, BTS Electronique-Mécanique-Informatique*. Editions Masson (198p), 1997.
- [3] Ph. de Larminat. *Automatique*. Editions Hermes, 2000.
- [4] P. Codron et S. Leballois. *Automatique : systèmes linéaires continus*. Editions Dunod (289p), 1998.
- [5] C. Foulard, J.-M. Flaus, et M. Jacomino. *Automatique pour les Classes Préparatoires : cours et exercices corrigés*. Editions Hermes (379p), 1997.
- [6] Y. Granjon. *Automatique : Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état*. Editions Dunod (381p), 2001.
- [7] K. Ogata. *Modern control engineering - Fourth edition*. Prentice Hall International Editions (997p), 2001.
- [8] B. Pradin. *Cours d'Automatique*. INSA de Toulouse, 3ème année spécialité GII.
- [9] B. Pradin. *Polycopié de cours d'Automatique*. INSA de Toulouse, 3ème année spécialité AEI.
- [10] M. Rivoire et J.-L. Ferrier. *Cours d'Automatique, tome 1 : traitement du signal, systèmes*. Editions Eyrolles (248p), 1992.
- [11] M. Rivoire et J.-L. Ferrier. *Cours d'Automatique, tome 2 : asservissement, régulation, commande analogique*. Editions Eyrolles (172p), 1996.
- [12] Y. Thomas. *Signaux et systèmes linéaires : exercices corrigés*. Editions Masson (194p), 1993.
- [13] Y. Thomas. *Signaux et systèmes linéaires*. Editions Masson (354p), 1994.

Index

- Abscisse de sommabilité, 38
- Actionneur, 5
- Analyse, 10
- Antenne parabolique, 8
- Approximation linéaire, 37
- Asservissement, 6
 - de position, 52
 - de vitesse, 11
- Bande passante, 23, 24
- Black
 - (Formule de), 17, 41
 - (Harold Stephen), 17
 - (Lieu de), 25
- Bode
 - (Construction du diagramme de), 46
 - (Diagramme asymptotique de), 23
 - (Diagramme de (...) de l'intégrateur), 47
 - (Diagramme de (...) du dérivateur), 46
 - (Diagramme de (...) du moteur), 49
 - (Diagramme de), 23, 28, 30, 46
 - (Hendrik W.), 23
 - (Plan de), 28
- Boucle, 5, 6
 - automatique, 5, 7
 - fermée, 5
 - manuelle, 5, 6
 - ouverte, 6, 17, 28
- Cahier des charges, 10
- Calculateur, 5, 9
- CAN : convertisseur analogique numérique, 9
- Canonique (Modèle), 18
- Capteur, 5, 8, 17, 55
- Caractéristique statique, 12, 35
- Causal (Système), 16
- Chaîne directe, 17, 25, 28, 30
- Classe
 - d'un modèle, 31
 - d'un système, 31
- CNA : convertisseur numérique analogique, 9
- Coefficient
 - d'amortissement, 20, 28
 - de surtension, 24
- Commande, 8, 29
 - (Loi de), 4, 5, 10
 - par retour unitaire, 29
- Compensation de pôle, 32, 51–53
- Comportement exponentiel, 42
- Conditions initiales, 15
- Consigne, 8, 29, 31
- Constante de temps, 15, 51
 - du filtrage, 56
 - du modèle, 18
- Continu
 - (Événement), 8
 - (Système), 9
 - (Temps), 9
- Contre-réaction, 5
- Critère
 - de Nyquist, 28
 - des racines, 28, 43
 - du revers, 28, 30
- Décalage fréquentiel (Théorème du), 13
- Décroissance exponentielle, 43
- Dépassement, 22, 55
- Déphasage, 22
- Dérivée
 - filtrée, 55
 - première, 11
 - seconde, 11
- Dérivateur, 46
 - (Pseudo-), 47
- Dérivation, 13, 55
 - (Opérateur de), 15
 - (Théorème de la), 13
 - pure, 55
- Dirac
 - (Impulsion de), 13, 18, 38
 - (Paul Adrien Maurice), 18
- Discret
 - (Événement), 8
 - (Signal), 8
 - (Système), 9
 - (Temps), 9
- Domaine de sommabilité, 38
- Douche
 - collective, 6
 - personnelle, 6
- Echantillonné
 - (Signal), 8
- Echantillons, 9
- Echelle logarithmique, 23
- Echelon, 31
 - d'amplitude E, 13
 - unitaire, 18
- Effet
 - dérivé, 34
 - intégral, 34
 - proportionnel, 34
- Éléments simples (Décomposition en), 19, 22, 42, 44
- Entrée, 4, 5

- Equation
 - algébrique, 10
 - caractéristique, 16
 - différentielle, 9–12, 15
 - différentielle linéaire, 9
 - différentielle non linéaire, 9
 - homogène associée, 18
- Equilibre (Etat d'), 27
- Erreur, 29, 31, 50
 - de position, 31
 - de vitesse, 31
 - statique, 31, 51
- Etat d'équilibre, 27
 - asymptotiquement stable, 27
- Filtrage de la dérivée, 55
- Filtre
 - passe-bas, 24, 48
- Fonction causale, 12
- Fonction de transfert, 10, 13, 22, 44
 - en boucle fermée, 17
- Fonction du temps, 12
- Fonctions de transfert
 - (Association de), 16
 - en parallèle, 16
 - en série, 16, 25
- Gain
 - critique, 28, 54
 - en décibels, 23
 - harmonique, 22
 - infini, 31
 - proportionnel, 30
 - statique, 18, 20, 41, 51
- Heaviside
 - (Fonction de), 18, 38
 - (Oliver), 18
- Identification, 9
- Instabilité, 27, 28
- Intégrateur, 32, 47, 50
- Intégration, 13
 - (Théorème de l'), 13
- Juste oscillation (Méthode de la), 53, 54
- Laplace
 - (Domaine de), 13
 - (Pierre Simon de), 12
 - (Plan de), 28, 38
 - (Tableau de transformées de), 13
 - (Transformée Inverse de), 13
 - (Transformée de), 12
 - (Transformée inverse de), 40
 - (Transfromée de), 37
 - (Variable de), 12
- Linéaire
 - (Approximation), 37
 - (Equation différentielle), 9
 - (Loi), 35
 - (Modèle), 12, 35
 - (Zone), 37
- Linéarisation, 37
- Linéarité, 12
- Marge
 - de gain, 28
 - de phase, 28, 52
 - de stabilité, 28, 52
 - de stabilité absolue, 28
- Mitigeur thermostatique, 7
- Modélisation, 10
- Modèle, 4
 - canonique, 18, 48
 - canonique de deuxième ordre, 20
 - canonique de premier ordre, 48, 51
 - de deuxième ordre, 20
 - de premier ordre, 18, 23, 24
 - linéaire, 12, 35
 - non linéaire, 9, 35
- Monovariante (Système), 9
- Moteur
 - électrique, 10, 19, 23
 - à commande d'induit, 10
 - à courant continu, 10, 13, 27, 49, 52
- Multivariable (Système), 9
- Nichols
 - (Lieu de), 25
- Non linéaire
 - (Elément), 12
 - (Equation différentielle), 9
- Nyquist
 - (Harry), 26
 - (Lieu de), 26
- Ordre du système, 16
- Oscillations, 6, 7, 10, 20, 21, 28, 43
- Période critique, 54
- Pôle
 - (Compensation de), 32, 51–53
 - complexe, 21, 43
 - distinct, 42
 - dominant, 21, 43
 - du système, 15, 21, 28, 42, 43
 - lent, 43
 - multiple, 42, 44
 - réel, 21, 43
- Parallèle

- (Régulateur PID sous forme), 32
- Performances, 10
- Perturbation, 4, 5, 27, 32, 50
 - (Rejet de), 32, 50
- Phase, 22
- Point
 - de fonctionnement, 9, 12, 35
 - de polarisation, 36
- Polynôme caractéristique, 16
- Précision, 6, 10, 31, 52
- Principe de superposition, 9, 37
- Procédé, 10
- Propre
 - (Fonction de transfert strictement), 16
 - (Fonction de transfert), 16
- Pseudo-dérivateur, 47
- Pulsation
 - critique, 28
 - de cassure, 23
 - de coupure, 23
 - de résonance, 24
 - propre non amortie, 20
- Référence, 29
- Régime
 - permanent, 41
- Régime permanent, 19
- Régime transitoire, 19
- Réglage, 10
- Réglage des systèmes bouclés, 29
- Régulateur, 29
 - PD, 52
 - PI, 32, 51
 - PID, 32, 53, 55
- Régulateur proportionnel, 30
- Régulation, 6
 - proportionnelle, 30
- Réponse
 - apériodique, 20
 - d'un système, 17
 - fréquentielle, 22, 28, 46
 - harmonique, 22, 44, 46
 - impulsionnelle, 18, 42
 - indicielle, 18, 43
 - (Méthode de la), 53
 - pseudo-périodique, 20
- Résidu, 42
- Rétro-action, 5
- Rétroviser, 7
- Racines (Critère des), 28
- Raideur, 30
- Rampe, 13, 31
- Rapidité, 28, 30
 - d'un système, 51

- Rejet de perturbation, 50
- Retard
 - (Théorème du), 13
 - pur, 7, 13, 38, 54
- Retour
 - dynamique, 16
 - non unitaire, 17
 - unitaire, 16, 17, 29
- Revers
 - (Critère du), 28
- Revers (Critère du), 30
- Série
 - (Régulateur PID sous forme), 32
- Saturation, 37
- Schéma-bloc, 16
- Sommabilité
 - (Abscisse de), 38, 40
 - (Domaine de), 38, 40
- Sortie, 4, 5
- Stabilité, 6, 10, 22, 26, 28, 30, 43
 - (Marge de), 28
 - asymptotique, 27, 28
 - asymptotique d'un état d'équilibre, 27
 - asymptotique d'un système, 27
 - d'un état d'équilibre, 27
 - simple, 27
- Superposition (Principe de), 9, 37
- Synthèse, 10
- Système, 4
 - linéaire, 9
 - autonome, 27
 - causal, 16
 - de deuxième ordre, 20
 - de premier ordre, 18, 23, 24
 - monovariable, 9
 - multivariable, 9
 - précis, 31
- Temps de réponse, 6, 10, 19
- Théorème
 - de l'intégration, 13
 - de la dérivation, 13
 - de la valeur finale, 13, 41
 - de la valeur initiale, 13
 - du décalage fréquentiel, 13
 - du retard, 13
- Transistor à effet de champ, 35
- Transmittance, 13
- Type, 32
 - d'un modèle, 31, 50, 51
 - d'un système, 31, 50
- Valeur finale
 - (Théorème de la), 41

Valeur finale (Théorème de la), [13](#)
Valeur initiale (Théorème de la), [13](#)
Ventilateur, [9](#)
Voiture, [5](#)

Zéro
 du système, [43](#)
Zéro du système, [15](#), [22](#), [42](#)
Ziegler-Nichols, [55](#)
 (Méthodes de), [53](#)
 (Première méthode de), [53](#)
 (Seconde méthode de), [53](#), [54](#)