

NOTIONS DE BASE POUR UNE INITIATION À LA SYNTHÈSE
ROBUSTE DE CORRECTEURS PAR APPROCHE \mathcal{LMI}

Olivier BACHELIER

NOTIONS DE BASE POUR UNE INITIATION À LA SYNTHÈSE ROBUSTE DE CORRECTEURS PAR APPROCHE \mathcal{LMI}

Olivier BACHELIER

E-mail : Olivier.Bachelier@univ-poitiers.fr

Tel : 05-49-45-36-79 ; Fax : 05-49-45-40-34

Dernière version : 3 mars 2008

Résumé

Ces notes de cours ont simplement pour but d'introduire les Inégalités Matricelles Linéaires (\mathcal{LMI} en anglais) dans le cadre de l'initiation des étudiants de Master STIC-RCA (seconde année) aux techniques de synthèse (éventuellement robuste) de correcteurs \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_2 . Cette partie du cours fait suite à celle traitant de la résolution des problèmes de commande en performances \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_2 via l'utilisation d'équations de Riccati. Ces notes exposent des résultats sans apporter les démonstrations correspondantes. Elles font référence aux ouvrages [5, 2, 7, 1], aux photocopiés [4, 8], ainsi qu'aux articles [9, 6, 3].

Table des matières

Notations	3
1 Rappels mathématiques et préliminaires	3
1.1 Valeurs propres d'une matrice	3
1.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres	3
1.1.2 Trace d'une matrice	4
1.1.3 Pôles d'un modèle linéaire de système	4
1.2 Notions sur les normes vectorielles et matricielles	4
1.2.1 Propriétés d'une norme	4
1.2.2 La norme vectorielle euclidienne	5
1.2.3 Normes d'une fonction vectorielle	5
1.2.4 Valeurs singulières d'une matrice	7
1.3 Normes d'une matrice de transfert	8
1.3.1 Valeurs singulières et matrice de transfert	8
1.3.2 Norme \mathcal{H}_∞ d'une matrice de transfert	8
1.3.3 Lien avec le gain \mathcal{L}_2 et interprétation énergétique de norme \mathcal{H}_∞	9

1.3.4	Norme \mathcal{H}_2 d'une matrice de transfert	9
1.3.5	Interprétation énergétique de la norme \mathcal{H}_2	9
1.3.6	Interprétation stochastique de la norme \mathcal{H}_2	10
1.3.7	Interprétation de la norme \mathcal{H}_2 en termes de gain	10
1.3.8	Lien entre la norme \mathcal{H}_2 et les grammiens	10
1.4	Inégalités matricielles	10
1.4.1	Matrices carrées définies en signe : la relation d'ordre partiel de Loëwner	11
1.4.2	Les \mathcal{LMI}	12
1.4.3	Les \mathcal{BMI}	12
1.4.4	Un outil utile : le complément de Schur	13
1.5	Produit matriciel de Kronecker	13
2	Problèmes de commande \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_2	14
2.1	Le procédé	14
2.2	Le correcteur	16
2.2.1	Retour dynamique	16
2.2.2	Retour statique d'état	16
2.3	Le système bouclé	16
2.3.1	Cas du retour dynamique	16
2.3.2	Cas du retour statique d'état	17
2.4	Formulation du problème \mathcal{H}_\bullet standard	17
2.5	Comparaison entre les normes \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_2	17
3	Résolution du problème \mathcal{H}_\bullet standard	17
3.1	Résolution du problème \mathcal{H}_∞ standard par retour dynamique de sortie	17
3.1.1	Propriété du système bouclé : le Lemme Borné Réel	17
3.1.2	Condition d'existence d'une solution au problème	18
3.1.3	Reconstruction du correcteur	19
3.1.4	Exercice	19
3.1.5	Particularités de l'approche \mathcal{LMI}	21
3.2	Résolution du problème \mathcal{H}_2 standard par retour statique d'état	21
3.2.1	Propriété du système bouclé	21
3.2.2	Détermination d'un retour statique d'état	22
4	Le cas particulier du retour statique d'état	22
4.1	Le problème \mathcal{H}_∞	22
4.2	Contraintes de placement de pôles	23
4.2.1	Les régions \mathcal{LMI}	23
4.2.2	\mathcal{D} -stabilité d'une matrice	24
4.3	Synthèse mixte avec contraintes de placement de pôles	24
5	Introduction à la commande robuste	25
5.1	Incertitude polytopique	25
5.2	Synthèse mixte \mathcal{D} -stabilisante robuste par retour statique d'état	26
6	Conclusion	27
	Références	27

Notations

\mathbb{R}	Corps des nombres réels
\mathbb{R}^+	Ensemble des réels positifs.
\mathbb{C}	Corps des nombres complexes
\mathbf{i}	Unité imaginaire ($\mathbf{i} = \sqrt{-1}$)
\mathbb{R}^n	Espace des vecteurs réels de dimension n
\mathbb{C}^n	Espace des vecteurs complexes de dimension n
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Espace des matrices réelles comptant m lignes et n colonnes
$\mathbb{C}^{m \times n}$	Espace des matrices complexes comportant m lignes et n colonnes
M^T	Transposée de la matrice M
M^*	Transposée conjuguée de la matrice M
\mathbb{I}_n	Matrice Identité de dimension n
\mathbb{O}	Matrice nulle de dimension appropriée
$\ \cdot\ _\bullet$	norme \bullet de l'argument \cdot (vecteur, fonction vectorielle, matrice, ou matrice de transfert)

1 Rappels mathématiques et préliminaires

Il est nécessaire de rappeler quelques concepts mathématiques concernant particulièrement les normes et les inégalités matricielles pour suivre le reste du cours.

1.1 Valeurs propres d'une matrice

1.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

$\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si et seulement si

$$\boxed{\det(\lambda \mathbb{I}_n - A) = 0.} \quad (1)$$

Une matrice de dimension n a nécessairement n valeurs propres $\lambda_i, i = 1, \dots, n$. Pour simplifier, l'on supposera que celles-ci sont distinctes. Lorsque A est réelle, les valeurs propres constituent un ensemble auto-conjugué. Autrement dit, si λ est valeur propre de A , sa quantité conjuguée l'est aussi.

Il existe n vecteurs $v_i \in \mathbb{C}^n, i = 1, \dots, n$ non nuls, appelés vecteurs propres à droite, tels que

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2)$$

Ces vecteurs propres sont tous définis à un facteur près.

Si l'on définit V , matrice modale, par

$$V = [v_1, \dots, v_n], \quad (3)$$

alors, il vient la relation :

$$\Lambda = V^{-1}AV \quad (4)$$

où Λ est une matrice diagonale définie par

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}. \quad (5)$$

La détermination de Λ passe par celle de V . On parle de diagonalisation de matrice. Cette diagonalisation n'est pas toujours possible lorsque les valeurs propres ne sont pas distinctes. Des formes canoniques de Jordan peuvent néanmoins être calculées mais ceci n'est pas explicité ici.

1.1.2 Trace d'une matrice

On définit la trace d'une matrice carrée $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ par

$$\boxed{\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}} \quad (6)$$

où la notation a_{ij} correspond à la composante de A située en $i^{\text{ème}}$ ligne et en $j^{\text{ème}}$ colonne. La trace de A est donc la somme de ses éléments diagonaux. On peut par ailleurs montrer que c'est la somme de ses valeurs propres *i.e.*

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (7)$$

De ce fait, toutes les matrices semblables ont la même trace. La trace est un scalaire complexe, également réel si A est réelle ou si A est complexe mais Hermitienne¹.

En outre, sous réserve de compatibilité des dimensions, on a :

$$\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA) \quad (8)$$

$$\text{trace}(A + B) = \text{trace}(B + A) = \text{trace}(A) + \text{trace}(B) \quad (9)$$

1.1.3 Pôles d'un modèle linéaire de système

Soit le modèle d'état (minimal) LTI d'ordre n

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (10)$$

où $t \in \mathbb{R}^+$ désigne le temps, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur des entrées et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur des sorties. On rappelle que la matrice de transfert $G(s) \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ (unique) correspondant à ce système est

$$\boxed{G(s) = C(s\mathbb{I}_n - A)^{-1}B + D = \frac{N(s)}{D(s)}} \quad (11)$$

s est la variable de Laplace. $N(s) \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ est une matrice de "numérateurs" alors que $D(s) \in \mathbb{C}$ est un polynôme "dénominateur commun" aux différents transferts et appelé polynôme caractéristique.

Les pôles du modèle sont les racines de $D(s)$. Ce sont aussi les valeurs propres de A . Leur localisation dans le plan complexe est essentielle :

- ils doivent être à partie réelle strictement négative pour assurer la stabilité asymptotique du système ;
- la rapidité de la réponse dépend de leur partie réelle ;
- l'amortissement de la réponse et son comportement plus ou moins oscillatoire dépend de la partie imaginaire (\pm grande devant la partie réelle).

Le comportement du système est surtout lié aux pôles dominants (ou lents) c'est-à-dire ceux ayant la plus grande partie réelle au sens algébrique.

1.2 Notions sur les normes vectorielles et matricielles

1.2.1 Propriétés d'une norme

La norme est un opérateur qui permet de quantifier un scalaire, un vecteur, une fonction vectorielle (ex : un vecteur de signaux temporels), une matrice, une matrice de transfert... Elle permet d'ordonner les éléments d'un ensemble qui n'est *a priori* pas muni d'une relation d'ordre. Une norme est généralement notée $\|u\|_{\bullet}$ où u est

¹Une matrice Hermitienne est égale à sa transposée conjuguée

l'élément dont on calcule la norme et \bullet désigne la nature de la norme considérée. Plusieurs normes différentes peuvent donc être utilisées mais elles doivent toutes vérifier les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} \quad \|u\|_{\bullet} \geq 0 \\
 & \text{(ii)} \quad \|u\|_{\bullet} = 0 \Leftrightarrow u = 0 \\
 & \text{(iii)} \quad \|au\|_{\bullet} = |a| \cdot \|u\|_{\bullet}, \quad \forall a \in \mathbb{C} \\
 & \text{(iv)} \quad \|u+v\|_{\bullet} \leq \|u\|_{\bullet} + \|v\|_{\bullet}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Concernant la propriété (ii), si u est une fonction (de t par exemple), alors la propriété reste vraie quel que soit t , *i.e.* $\|u\|_{\bullet} = 0 \Leftrightarrow u = 0 \forall t$.

La propriété (iii) fait apparaître la valeur absolue $|\cdot|$ sur le corps des complexes.

La propriété (iv) est connue sous le nom d'inégalité triangulaire.

1.2.2 La norme vectorielle euclidienne

Soit \mathbb{C}^n , l'espace des vecteurs de dimension n à composantes complexes. Soit un couple de vecteurs $\{x; y\} \in \{\mathbb{C}^n\}^2$. Le produit scalaire de x et y le plus classiquement utilisé est défini par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i = x^* y \tag{13}$$

où la notation x_i désigne la $i^{\text{ème}}$ composante de x .

À partir de ce produit scalaire, on peut définir, entre autres normes, la plus classique d'entre toutes, à savoir la norme euclidienne ou norme-2 ou encore norme \mathcal{L}_2 . Celle de x est définie par

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x^* x}. \tag{14}$$

Il est facile de vérifier que cet opérateur vérifie toutes les propriétés d'une norme sur \mathbb{C}^n . Il est même à l'origine de la spécification de ces propriétés.

Dans le plan ou l'espace géométrique ordinaire muni d'un repère cartésien, la norme euclidienne exprime la distance d'un point à l'origine du repère.

1.2.3 Normes d'une fonction vectorielle

Dans ce paragraphe, des normes sont définies sur des ensembles de fonctions vectorielles à variable complexe ou réelle. En pratique, en Automatique, la variable réelle est le temps et la variable complexe est celle de Laplace ; la fonction vectorielle est un vecteur de signaux temporels causaux ou sa transformée de Laplace.

a. Normes \mathcal{L}_2 et \mathcal{H}_2

Soit l'ensemble \mathcal{L}_2^n des fonctions vectorielles $X(s)$ de dimension n , à composantes complexes, à variable s complexe, et de carré intégrable sur l'axe imaginaire, c'est-à-dire vérifiant

$$\|X\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega)^* X(i\omega) d\omega \right)^{1/2} < \infty. \tag{15}$$

La quantité $\|X\|_2$ est appelée norme \mathcal{L}_2 de X .

On peut montrer que \mathcal{L}_2^n est un espace de Hilbert².

On note \mathcal{H}_2^n le sous-espace de \mathcal{L}_2^n correspondant à la restriction aux fonctions analytiques³ dans \mathbb{C}^+ (on parle

²Un espace de Hilbert est un espace vectoriel préhilbertien (*i.e.* qui peut être muni d'un produit scalaire), de Banach (muni d'une norme et complet (*i.e.* dans lequel toute suite de Cauchy est convergente)) - voir cours de mathématiques.

³Une fonction analytique sur un domaine \mathcal{S} admet un développement de Taylor en chaque point de ce domaine (elle donc infiniment dérivable sur \mathcal{S})

alors de norme \mathcal{H}_2^4 .

À supposer que $X(s) \in \mathcal{H}_2^n$ soit la transformée de Laplace d'une fonction vectorielle $x(t)$ de même dimension, à variable dans \mathbb{R}^+ (telle une fonction temporelle causale), le théorème de Parseval nous permet de redéfinir la norme dans l'espace des fonctions à variable réelle positive :

$$\|X\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega)^* X(i\omega) d\omega \right)^{1/2} = \left(\int_0^{\infty} x(t)^* x(t) dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^{\infty} \|x(t)\|_2^2 dt \right)^{1/2} = \|x\|_2. \quad (16)$$

La norme $\|X\|_2$ peut par exemple servir à exprimer la norme de l'énergie d'un signal temporel décrit par $x(t)$.

Remarque 1 Pour des raisons évidentes, si l'on se réfère à l'équation ci-dessus, il convient de distinguer $\|x(t)\|_2$, qui est la norme euclidienne du vecteur correspondant à l'instance de x pour t , de $\|x\|_2$ qui est la norme \mathcal{H}_2 de la fonction vectorielle $x(t)$. Plus précisément, $\|x(t)\|_2$ traduit une énergie instantanée alors que $\|x\|_2$ traduit une énergie sur un horizon de temps infini. Ainsi la norme $\|x\|_2$ définie en (16) n'est pas la même que celle définie en (14) puisqu'en (14), x est un vecteur alors qu'en (16), c'est une fonction vectorielle.

Par abus de notation, lorsqu'une fonction $x(t)$ admet une transformée de Laplace $X(s)$ appartenant à \mathcal{L}_2^n , on dit aussi que $x(t)$ appartient à \mathcal{L}_2^n . Idem pour \mathcal{H}_2^n .

b. Normes \mathcal{L}_∞ et \mathcal{H}_∞

Soit l'ensemble \mathcal{L}_∞^n des fonctions vectorielles $X(s)$ de dimension n , à composantes complexes, à variable s complexe, et bornées sur l'axe imaginaire, c'est-à-dire vérifiant

$$\|X\|_\infty = \sup_{\omega} \|X(i\omega)\|_2 < +\infty. \quad (17)$$

La quantité $\|X\|_\infty$ est appelée norme \mathcal{L}_∞ de la fonction $X(s)$. Contrairement à \mathcal{L}_2^n , \mathcal{L}_∞^n n'est pas un espace de Hilbert et l'on ne peut y définir un produit scalaire.

On note \mathcal{H}_∞^n le sous-espace de \mathcal{L}_∞^n correspondant à la restriction aux fonctions analytiques dans \mathbb{C}^+ (on parle alors de norme \mathcal{H}_∞^5).

c. Notion de gain \mathcal{L}_2

Pour les cas pratiques rencontrés en Automatique, la norme \mathcal{L}_2 (ou plutôt la norme \mathcal{H}_2) est une norme sur l'énergie d'un signal. Ainsi, si l'on suppose que $e(t) \in \mathcal{H}_2^{n_e}$ est l'image de $w(t) \in \mathcal{H}_2^{n_w}$ par un opérateur \mathcal{R} défini sur $\mathcal{H}_2^{n_w}$, alors on peut définir le gain \mathcal{L}_2 de \mathcal{R} par :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{L}_2}(\mathcal{R}) = \sup_{w \in \mathcal{H}_2^{n_w}} \frac{\|e\|_2}{\|w\|_2} \quad (18)$$

Le gain $\mathcal{G}_{\mathcal{L}_2}(\mathcal{R})$ est en fait le plus grand gain en énergie associé à l'opérateur \mathcal{R} .

⁴La lettre \mathcal{H} vient du fait que l'ensemble est un espace de Hardy dont la définition rigoureuse est la suivante : si $0 < p$, alors l'espace de Hardy $\mathcal{H}_p(\mathbf{D})$ est l'ensemble des fonctions holomorphiques (i.e. analytiques) définies sur le disque \mathbf{D} et satisfaisant la condition

$$\|f\|_{\mathcal{H}_p} = \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

La norme $\|f\|_{\mathcal{H}_p}$ est dite norme de Hardy.

⁵le \mathcal{H} vient toujours de Hardy

1.2.4 Valeurs singulières d'une matrice

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à une norme de matrice, à savoir la norme-2, ou norme euclidienne induite ou encore valeur singulière maximale.

Toute matrice $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$ admet une décomposition en valeurs singulières :

$$M = U\Sigma W^*. \quad (19)$$

$U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ et $W \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sont deux matrices unitaires, c'est-à-dire telles que

$$UU^* = \mathbb{I}_m \quad \text{et} \quad WW^* = \mathbb{I}_n, \quad (20)$$

et Σ , lorsque $q = \min\{m, n\}$, est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma = \left[\begin{array}{cccc|c} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_q & 0 \end{array} \right] \quad \text{si } q = m, \\ \\ \Sigma = \left[\begin{array}{cccc} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_q \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \quad \text{si } q = n, \\ \\ \Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_q\} \quad \text{si } q = m = n. \end{array} \right. \quad (21)$$

Les scalaires σ_i sont appelés valeurs singulières de M . Ces valeurs sont réelles, positives ou nulles, et l'on peut déterminer U et W de telle sorte que

$$\bar{\sigma}(M) = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_q = \underline{\sigma}(M) \geq 0. \quad (22)$$

On définit $\text{rang}(M)$, le rang de la matrice M , par le nombre de ses valeurs singulières non-nulles. C'est aussi le nombre maximal de ses lignes ou de ses colonnes linéairement indépendantes. Toute matrice M telle que $\text{rang}(M) < \min\{m, n\}$ est dite déficiente en rang et présente des lignes ou des colonnes colinéaires. Il faut noter que toute matrice carrée de dimension n singulière (c'est-à-dire non inversible) est de rang non plein $r < n$. Elle présente donc $n - r$ valeurs singulières nulles et ses valeurs propres nulles totalisent une multiplicité géométrique $n - r$.

Les valeurs singulières sont égales aux racines carrées des valeurs propres de MM^* (si $m \leq n$) ou celles de M^*M (si $n \leq m$). Si M est Hermitienne, alors ses valeurs singulières sont égales aux valeurs absolues de ses valeurs propres (qui sont elles-mêmes réelles).

La valeur singulière maximale est aussi appelée norme-2, norme \mathcal{L}_2 ou norme spectrale. En effet, elle est telle que

$$\bar{\sigma}(M) = \|M\|_2 = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \left(\frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2} \right) = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \sqrt{\frac{x^* M^* M x}{x^* x}}. \quad (23)$$

Cette dernière équation nous montre que la valeur singulière maximale est une norme matricielle (avec les propriétés de toute norme) induite par la norme vectorielle euclidienne. On a aussi :

$$\underline{\sigma}(M) \leq \frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2} \leq \bar{\sigma}(M). \quad (24)$$

En d'autres termes, l'"amplification" entre la norme euclidienne de x et celle de Mx est au minimum de $\underline{\sigma}(M)$ et au maximum de $\bar{\sigma}(M)$.

1.3 Normes d'une matrice de transfert

Dans cette partie, les notions de normes \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_2 d'une matrice de transfert sont introduites.

1.3.1 Valeurs singulières et matrice de transfert

Soit $G(s) \in \mathbb{C}^{n_e \times n_w}$, une matrice de transfert entre un vecteur de signaux w et un autre vecteur de signaux e . Dans la terminologie fréquentielle, si w est un vecteur de signaux harmoniques, alors e l'est aussi et le transfert de l'un à l'autre est tel que

$$\underline{\sigma}(G(\mathbf{i}\omega)) \leq \frac{\|e(\mathbf{i}\omega)\|_2}{\|w(\mathbf{i}\omega)\|_2} = \frac{\|G(\mathbf{i}\omega)w(\mathbf{i}\omega)\|_2}{\|w(\mathbf{i}\omega)\|_2} \leq \bar{\sigma}(G(\mathbf{i}\omega)). \quad (25)$$

Nous sommes ici dans le cas multivariable. L'amplification entre la norme de $w(\mathbf{i}\omega)$ et celle de $e(\mathbf{i}\omega)$ est comprise entre $\underline{\sigma}(G(\mathbf{i}\omega))$ et $\bar{\sigma}(G(\mathbf{i}\omega))$. Si l'on veut généraliser le tracé de la courbe de gain du diagramme de Bode, on peut tracer deux courbes montrant les évolutions respectives de ces deux valeurs singulières en fonction de la pulsation ω . Le transfert réel se situe quelque part entre les deux courbes.

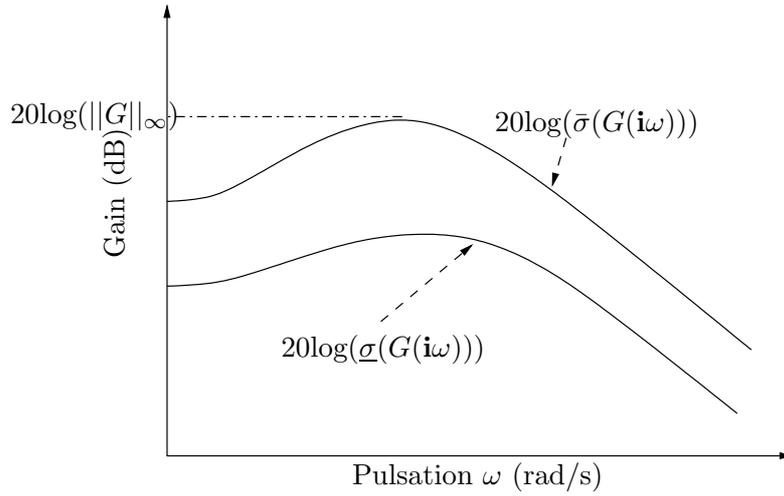


FIG. 1 – Diagramme de Bode multivariable : courbes des gains

1.3.2 Norme \mathcal{H}_∞ d'une matrice de transfert

La norme \mathcal{H}_∞ d'une matrice de transfert est une généralisation de la notion de norme \mathcal{L}_∞ (ou \mathcal{H}_∞) d'une fonction vectorielle à variable complexe. Rigoureusement, il convient de définir $\mathcal{RL}_\infty^{n_e \times n_w}$, l'espace des matrices de transfert $n_e \times n_w$ propres $G(s)$ (*i.e.* de transmission directe finie) et sans pôle sur l'axe imaginaire \mathcal{I} . De même, on définit le sous-espace $\mathcal{RH}_\infty^{n_e \times n_w}$ en restreignant $\mathcal{RL}_\infty^{n_e \times n_w}$ aux matrices n'ayant pas de pôle dans $\mathbb{C}^+ \cup \mathcal{I}$. Sur ces espaces, la norme \mathcal{L}_∞ ou \mathcal{H}_∞ de $G(s)$ est définie de manière cohérente avec la norme d'une fonction vectorielle par

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \|G(\mathbf{i}\omega)\|_2. \quad (26)$$

Nous pouvons envisager cette définition de manière moins rigoureuse. Nous venons de voir au paragraphe précédent, que le transfert (stable) entre deux vecteurs de signaux peut se caractériser par les valeurs singulières minimale et maximale de la matrice de transfert. Ces valeurs dépendent de la pulsation ω . Si l'on veut connaître

le plus grand transfert possible, il faut donc connaître la valeur singulière maximale de la matrice de transfert pour la pulsation optimale. C'est justement la norme \mathcal{H}_∞ :

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(\mathbf{i}\omega)). \quad (27)$$

Les deux définitions sont bien sûr cohérentes puisque la valeur singulière maximale est la norme-2.

Il n'existe pas de calcul analytique de la norme \mathcal{H}_∞ .

1.3.3 Lien avec le gain \mathcal{L}_2 et interprétation énergétique de norme \mathcal{H}_∞

Même si la norme \mathcal{H}_∞ de la matrice de transfert $G(s)$ est une extension immédiate de la norme \mathcal{L}_∞ au cas matriciel comme nous venons de le voir, elle est en "en quelque sorte" induite par la norme \mathcal{L}_2 et l'on peut montrer que si un système S , d'entrée $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, de sortie $e \in \mathbb{R}^{n_e}$ et asymptotiquement stable, a pour fonction de transfert $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{n_e \times n_w}$ alors

$$\|G\|_\infty = \mathcal{G}_{\mathcal{L}_2}(S) = \sup_{w \in \mathcal{H}_2(t)^{n_w}} \frac{\|e\|_2}{\|w\|_2}.$$

La norme \mathcal{H}_∞ d'une matrice de transfert correspond donc au gain \mathcal{L}_2 du système. C'est donc le plus grand gain possible entre l'énergie en entrée et l'énergie en sortie.

1.3.4 Norme \mathcal{H}_2 d'une matrice de transfert

De manière analogue au cas \mathcal{H}_∞ , on définit les espaces $\mathcal{RL}_2^{n_e \times n_w}$ (resp. $\mathcal{RH}_2^{n_e \times n_w}$) par l'ensemble des matrices de transfert $G(s)$ de dimension $n_e \times n_w$, strictement propres ($G(\infty) \rightarrow 0 \Leftrightarrow D = \mathbb{O}$) et sans pôle sur \mathcal{I} (resp. sans pôle dans $\mathbb{C}^+ \cup \mathcal{I}$). Pour de telles matrices, la définition de la norme \mathcal{L}_2 (ou \mathcal{H}_2) est donnée, de manière cohérente avec la norme \mathcal{L}_2 d'un signal, par

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}(G^*(\mathbf{i}\omega)G(\mathbf{i}\omega))d\omega \right)^{1/2}. \quad (28)$$

On peut montrer que

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^q (\sigma_i(G(\mathbf{i}\omega)))^2 d\omega \right)^{1/2} \quad \text{où } q = \min\{n_w; n_e\}. \quad (29)$$

1.3.5 Interprétation énergétique de la norme \mathcal{H}_2

Si l'on suppose que $w(t)$ est composé d'impulsions de Dirac (sans utiliser rigoureusement la théorie des distributions) :

$$w_i(t) = \delta(t)\mathbb{I}_{:,1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n_w\} \quad (30)$$

où $\mathbb{I}_{:,1}$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base orthonormée de \mathbb{R}^{n_w} . À conditions initiales nulles, la sortie correspondante, notée $\hat{e}_i(t)$, appartient à $\mathcal{L}_2^{n_e}$. On peut montrer que

$$\sum_{i=1}^{n_w} \|\hat{e}_i\|_2^2 = \|G\|_2^2. \quad (31)$$

Autrement dit, si le système est soumis, à conditions initiales nulles, à des impulsions de Dirac sur chaque entrée, alors, la somme des carrés des normes énergétiques des sorties générées par chaque impulsion est égale au carré de la norme \mathcal{H}_2 de la matrice de transfert. Dans le cas monovariante ($n_w = n_e = 1$), cette norme \mathcal{H}_2 correspond à l'énergie de la réponse impulsionnelle à conditions initiales nulles. La norme \mathcal{H}_2 correspond bien à

une quantification de l'énergie d'un transfert. Du reste, dans le domaine temporel, on peut écrire la norme \mathcal{H}_2 ainsi :

$$\|G\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \text{trace}(e(t)e(t)^*)dt}. \quad (32)$$

1.3.6 Interprétation stochastique de la norme \mathcal{H}_2

Si les entrées w_i du système sont des bruits blancs (de telle sorte que $W(\mathbf{i}\omega)W(\mathbf{i}\omega)^* = \mathbb{I}_{n_w}$) alors l'espérance \mathcal{E} de la norme du bruit généré en sortie est telle que

$$\sum_{i=1}^{n_e} \mathcal{E}(e_i^*(t)e_i(t)) = \|G\|_2^2. \quad (33)$$

Pour cette raison, le problème LQG peut-être interprété en termes de minimisation d'une norme \mathcal{H}_2 mais cette relation théorique n'est pas détaillée dans ce cours.

1.3.7 Interprétation de la norme \mathcal{H}_2 en termes de gain

Elle est plus difficile à interpréter en ce sens que la norme \mathcal{H}_∞ . On peut toutefois montrer que

$$\|G\|_2 = \sup_{W(s) \in \mathcal{H}_\infty^{n_w}} \frac{\|E\|_2}{\|W\|_\infty}. \quad (34)$$

1.3.8 Lien entre la norme \mathcal{H}_2 et les grammians

Supposons que S est un système sans transmission directe et asymptotiquement stable associé à la représentation (A, B, C, \mathbb{O}) . On définit W_c , le grammien de commandabilité et W_o , celui d'observabilité, par

$$W_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad ; \quad W_o = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt. \quad (35)$$

Ce sont des matrices symétriques vérifiant les deux équations de Lyapunov suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} A W_c + W_c A^T = -B B^T, \\ A^T W_o + W_o A = -C^T C. \end{cases}} \quad (36)$$

Le système S est commandable et observable si toutes les valeurs propres de W_c (resp. W_o) sont strictement positives (sachant qu'elles seront réelles puisque W_c et W_o sont symétriques).

La norme \mathcal{H}_2 de la matrice de transfert $G(s)$ associée au système S s'exprime en fonction des grammians de la façon suivante :

$$\boxed{\|G\|_2^2 = \text{trace}(B^T W_o B) = \text{trace}(C W_c C^T)}. \quad (37)$$

On peut donc calculer analytiquement la norme \mathcal{H}_2 de $G(s)$ en déterminant W_c et W_o . Quoi qu'il en soit, ces grammians sont particulièrement utiles pour spécifier des contraintes sur la norme \mathcal{H}_2 d'une matrice de transfert lors de la résolution d'un problème de commande; nous y reviendrons.

1.4 Inégalités matricielles

Dans cette section, par souci de simplicité, seules des matrices réelles sont considérées; aussi, l'opérateur de transposition et de conjugaison $((\bullet)^*)$ sera toujours remplacé par l'opérateur de transposition simple (sans conjugaison : $(\bullet)^T$)

1.4.1 Matrices carrées définies en signe : la relation d'ordre partiel de Loëwner

Soit une matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. M est définie positive (respectivement semi-définie positive) si et seulement si

$$\boxed{x^T M x > 0 \text{ (resp. } \geq 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ non nul.}} \quad (38)$$

De même, on dit que M est définie négative (respectivement semi-définie négative) si et seulement si $-M$ est définie positive (resp. semi-définie positive). On note :

$$M > (\geq) 0 \quad \text{et} \quad M < (\leq) 0. \quad (39)$$

Il existe différents tests pour savoir si une matrice est définie en signe, notamment basés sur les calculs des mineurs de la matrice. Toutefois, nous n'aurons à manipuler que des matrices symétriques dont les valeurs propres sont réelles. Pour ces matrices, on a

$$\boxed{\begin{cases} M < (\leq) 0 \Leftrightarrow \lambda_{\max}(M) < (\leq) 0 \\ M > (\geq) 0 \Leftrightarrow \lambda_{\min}(M) > (\geq) 0 \end{cases}} \quad (40)$$

Ainsi toute matrice semi-définie en signe est déficiente en rang.

Par ailleurs, de manière naturelle, pour un couple de matrices $\{M; N\} \in \{\mathbb{R}^{n \times n}\}^2$, on définit :

$$M > (\geq) N \Leftrightarrow M - N > (\geq) 0 \quad \text{ou} \quad M < (\leq) N \Leftrightarrow M - N < (\leq) 0. \quad (41)$$

Il existe une relation d'ordre partiel entre les matrices de même dimension, partiel simplement car, par exemple, une matrice symétrique peut ne pas être définie en signe (c'est-à-dire avoir des valeurs propres négatives et positives). On parle parfois de la relation d'ordre partiel de Löwner.

Une matrice symétrique définie en signe peut s'exprimer elle-même en fonction d'autres matrices qui représentent des éléments inconnus de l'expression. On parle alors d'inéquations matricielles, ou, de manière plus habituelle mais quelque peu impropre, d'inégalités matricielles.

Exemple :

$$M = M^T = AX^3 + (X^3)^T A^T + e^B Y Y^T (e^B)^T < 0$$

où A et B sont connues et X et Y sont inconnues, est une inégalité matricielle.

Ces inégalités sont généralement impossibles à résoudre. Toutefois, deux cas particuliers vont nous intéresser : les \mathcal{LMI} et les \mathcal{BMI} .

Il est par ailleurs utile de constater les propriétés suivantes :

– Si M_1 et M_2 sont deux matrices définies négatives, on a

$$\begin{bmatrix} M_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (42)$$

De ce fait, les inégalités $M_1 < 0$ et $M_2 < 0$ constituent ce qu'on appelle un système d'inégalités matricielles ou tout simplement une autre inégalité matricielle.

– Si la matrice $M = M^T \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$, définie négative, est ainsi composée :

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (43)$$

alors $M_1 = M_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $M_3 = M_3^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont aussi définies négatives. En effet, l'inégalité scalaire $x^T M x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n+m}$ peut être instanciée en :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}^n \quad \& \quad x = \begin{bmatrix} \mathbb{O} \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}^m \quad (44)$$

ce qui conduit à $x_1^T M_1 x_1 < 0 \forall x_1 \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow M_1 < 0$ et $x_3^T M_3 x_3 < 0 \forall x_3 \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow M_3 < 0$.

1.4.2 Les \mathcal{LMI}

Il s'agit d'inégalités matricielles dans lesquelles les deux membres ont une expression affine par rapport aux inconnues. On appelle ces inégalités \mathcal{LMI} , acronyme de Linear Matrix Inequality⁶.

Les techniques d'optimisation dites "de point intérieur" permettent aujourd'hui d'obtenir numériquement une solution à la \mathcal{LMI} (c'est-à-dire un jeu de variables qui vérifie la \mathcal{LMI}), si elle existe. Des logiciels et boîtes à outils, utilisant par exemple le noyau de MATLAB, permettent d'envisager ce type de problèmes.

Exemple connu de \mathcal{LMI} : seconde méthode de Lyapunov appliquée au cas des systèmes linéaires invariants dans le temps.

Théorème 1 : Soit le système autonome :

- à temps continu :

$$\dot{x} = Ax \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^n, \quad (45)$$

- respectivement à temps discret :

$$x_{k+1} = Ax_k \quad \text{où } x_k \in \mathbb{R}^n. \quad (46)$$

Ce système est asymptotiquement stable si et seulement si il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant l'inégalité :

$$\boxed{A^T P + PA < 0}, \quad (47)$$

respectivement :

$$\boxed{-P + A^T P A < 0}. \quad (48)$$

Ces inéquations sont appelées inégalités de Lyapunov. Dans le cas continu, c'est une \mathcal{LMI} en A ou en P . Dans le cas discret, c'est une \mathcal{LMI} en P mais non en A .

On peut inclure la contrainte $P > 0$ dans le système \mathcal{LMI} en remplaçant les inégalités précédentes par

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -P \end{bmatrix} < 0 \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -P + A^T P A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (49)$$

1.4.3 Les \mathcal{BMI}

Ces inégalités correspondent au cas où les expressions sont bilinéaires (\mathcal{B} pour Bilinear) par rapport aux variables comme dans

$$AX + X^T A^T + XBY + Y^T B^T X^T > 0$$

où X et Y sont les variables.

Elles sont difficiles à résoudre même numériquement. On note que si l'on parvient à figer une des deux variables (X ou Y) à une valeur, l'inégalité devient linéaire. C'est donc une \mathcal{LMI} .

L'on peut aussi noter que l'inéquation de Lyapunov (48) est une \mathcal{BMI} en A .

⁶Certains auteurs font preuve de plus de rigueur et les appellent des \mathcal{AMI} (\mathcal{A} pour affine) mais ce terme reste anecdotique aussi conserverons-nous le terme \mathcal{LMI}

1.4.4 Un outil utile : le complément de Schur

Ce résultat, très souvent utilisé dans le contexte \mathcal{LMI} , peut s'exprimer ainsi : soient trois matrices Q , R et S (Q et R étant symétriques), on a

$$\boxed{\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R < 0 \\ Q - SR^{-1}S^T < 0 \end{cases}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R > 0 \\ Q - SR^{-1}S^T > 0. \end{cases}} \quad (50)$$

En l'appliquant, on peut réécrire l'inégalité de Lyapunov relative au cas discret (compte-tenu du fait que $P > 0$) en une \mathcal{LMI} en P ou en A :

$$\begin{bmatrix} -P + A^T P A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -P \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -P & A^T P \\ P A & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (51)$$

1.5 Produit matriciel de Kronecker

Définition 1 : Le produit de Kronecker (noté \otimes) de deux matrices A et B est ainsi défini :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Le produit de Kronecker n'est pas commutatif mais ses propriétés sont, entre autres (considérant que les diverses matrices ont des dimensions appropriées et que $\alpha \in \mathbb{C}$) :

- Multiplication par un scalaire :

$$\alpha(A \otimes B) = (\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B). \quad (53)$$

- Transposition conjugaison :

$$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*. \quad (54)$$

- Associativité :

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C). \quad (55)$$

- Distributivité à droite et à gauche sur l'addition :

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C \quad \text{et} \quad A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C. \quad (56)$$

- Distributivité sur le produit matriciel :

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD. \quad (57)$$

- Ainsi, si A et B admettent pour décompositions en valeurs singulières

$$\begin{cases} A = U_A \Sigma_A W_A^* & \text{Valeurs singulières : } \sigma_i(A), \\ B = U_B \Sigma_B W_B^* & \text{Valeurs singulières : } \sigma_j(B). \end{cases} \quad (58)$$

il vient

$$(U_A \otimes U_B)(\Sigma_A \otimes \Sigma_B)(W_A \otimes W_B)^* = A \otimes B. \quad (59)$$

Compte tenu de la structure de $(\Sigma_A \otimes \Sigma_B)$, on constate que

$$\sigma_l(A \otimes B) = \sigma_i(A)\sigma_j(B) \quad (60)$$

Pour cette raison, $A \otimes B$ et $B \otimes A$ ont les mêmes valeurs singulières et l'on a

$$\|A \otimes B\|_2 = \bar{\sigma}(A \otimes B) = \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B) = \|A\|_2\|B\|_2 \quad (61)$$

• Si A et B sont des matrices carrées d'ordres respectifs m et n , alors :

- ◊ $\det(A \otimes B) = \det(B \otimes A) = \det(A)^m \det(B)^n$.
- ◊ $\text{trace}(A \otimes B) = \text{trace}(B \otimes A) = \text{trace}(A)\text{trace}(B)$.
- ◊ $A \otimes B$ normale $\Rightarrow B \otimes A$ normale⁷.
- ◊ A et B normales $\Rightarrow B \otimes A$ normale.
- ◊ A et B (semi-)définies positives (négatives) $\Rightarrow A \otimes B$ (semi-)définie positive (négative).
- ◊ A et B Hermitiennes $\Rightarrow A \otimes B$ Hermitienne.
- ◊ $A \otimes B$ unitaire $\Rightarrow B \otimes A$ unitaire⁸.
- ◊ Inversion (si les matrices sont de rang plein) :

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}. \quad (62)$$

◊ Propriété de similarité : s'il existe deux matrices de rang plein T et S telles que $A = T^{-1}MT$ et $B = S^{-1}NS$, alors

$$(A \otimes B) = (T \otimes S)^{-1}(M \otimes N)(T \otimes S). \quad (63)$$

◊ Ainsi, si A et B sont jordanisables par des matrices de passage respectives V_A et V_B , il vient

$$(A \otimes B) = (V_A \otimes V_B)(J_A \otimes J_B)(V_A \otimes V_B)^{-1}. \quad (64)$$

où J_A et J_B sont des formes de Jordan associées respectivement aux valeurs propres de A , $\lambda_i(A)$, $i = 1, \dots, n$, et à celles de B , $\lambda_j(B)$, $j = 1, \dots, m$. La diagonale de $(J_A \otimes J_B)$ nous montre que

$$\lambda_i(A \otimes B) = \lambda_i(A)\lambda_j(B). \quad (65)$$

Donc, $A \otimes B$ et $B \otimes A$ ont les mêmes valeurs propres.

◊ Condition de commutation (lorsque A et B ont les mêmes dimensions) :

$$A \otimes B = B \otimes A \quad \Rightarrow \quad A = \alpha B \quad \text{ou} \quad B = \alpha A. \quad (66)$$

2 Problèmes de commande \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_2

On s'intéresse à la commande d'un procédé selon le schéma de la figure 2 :

2.1 Le procédé

Nous souhaitons commander un procédé de matrice de transfert $P(s)$ comportant deux types d'entrées :

- u : vecteur des signaux de commande par lequel on peut agir sur le comportement du système par rétro-action.
- w : vecteur des signaux d'entrée exogènes pouvant comporter aussi bien les signaux de référence que des perturbations d'origine extérieure dont on souhaite minimiser l'effet.

ainsi que deux types de sortie :

- y : vecteur des signaux de sortie mesurés permettant d'élaborer la commande.
- e : vecteur des signaux de sorties à contrôler et caractérisant le plus ou moins bon fonctionnement du système.

⁷Une matrice M est dite normale si $MM^* - M^*M = \mathbb{O}$

⁸Il est rappelé qu'une matrice U est dite unitaire si sa transposée conjuguée est aussi son inverse *i.e.* $U^*U = UU^* = \mathbb{I}$

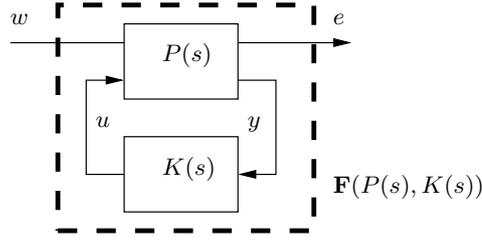


FIG. 2 – Schéma du système bouclé : procédé et correcteur

Il est important de noter que ces différents vecteurs peuvent avoir des composantes communes.

Le comportement du système peut être décrit, dans le domaine fréquentiel, par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} E(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix}, \quad (67)$$

où la matrice de transfert $P(s)$ peut être ainsi partitionnée :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{ew}(s) & P_{eu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Les vecteurs $E(s)$, $Y(s)$, $W(s)$ et $U(s)$ sont les transformées de Laplace respectives des vecteurs de signaux temporels $e(t)$, $y(t)$, $w(t)$, et $u(t)$.

Dans le cadre d'une étude des systèmes dans l'espace d'état, on peut associer à $P(s)$ une réalisation minimale, c'est-à-dire un quartet de matrices (A, B, C, D) vérifiant

$$P(s) = D + C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B, \quad (69)$$

avec, compte tenu de la partition

$$B = \begin{bmatrix} B_w & B_u \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} C_e \\ C_y \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} D_{ew} & D_{eu} \\ D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Autrement dit, l'on peut décrire le comportement du procédé par une représentation d'état :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ e(t) = C_e x(t) + D_{ew} w(t) + D_{eu} u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases}} \quad (71)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $e(t) \in \mathbb{R}^{n_e}$ et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$.

Nous faisons deux hypothèses sur ce modèle :

assum :

H1 : Les paires de matrices $(A; B_u)$ et $(A; C_y)$ sont respectivement stabilisable et détectable.

H2 : $D_{yu} = \mathbb{O}_{n_y, n_u}$.

H3 : $D_{ew} = \mathbb{O}_{n_e, n_w}$ (uniquement pour le problème \mathcal{H}_2). assum

L'hypothèse **H2** n'est pas restrictive car si elle n'est pas satisfaite, on considère une mesure fictive \hat{y} correspondant à ce cas et une fois le correcteur obtenu, il suffira de poser le changement de variable $\hat{y} = y - D_{yu}u$. Cette hypothèse n'a donc pour but que de simplifier la présentation des résultats ainsi que leur obtention qui n'est pas détaillée ici.

L'hypothèse **H1** est classique et nécessaire pour qu'un correcteur stabilisant existe. On ne peut donc s'en affranchir. On note cependant que l'approche \mathcal{LMI} induit moins de restrictions que l'approche utilisant des équations de Riccati (cf. 1^{ère} partie du cours, hors document).

L'hypothèse **H3** permet, pour le cas du problème \mathcal{H}_2 , de considérer la norme \mathcal{H}_2 d'une matrice de transfert

appartenant à $\mathcal{RH}_2^{n_e \times n_w}$, de manière à ce que cette norme soit effectivement définie. Là encore, l'on peut se ramener à ce cas là.

2.2 Le correcteur

2.2.1 Retour dynamique

Le correcteur $K(s)$ peut lui aussi admettre une représentation d'état (pas forcément minimale) :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{cases}} \quad (72)$$

où $x_c(t) \in \mathbb{R}^n$. L'ordre du correcteur est donc ici le même que celui du procédé même si l'approche \mathcal{LMI} offre parfois des outils d'investigation pour la synthèse de correcteurs d'ordre réduit.

La matrice de transfert associée au correcteur s'écrit donc

$$K(s) = D_c + C_c(s\mathbb{I}_n - A_c)^{-1}B_c. \quad (73)$$

Ce correcteur sera, dans ce cours, utilisé pour la commande \mathcal{H}_∞ . Dans le cas du problème \mathcal{H}_2 , il conviendrait de considérer un correcteur strictement propre *i.e.* $D_c = \mathbb{O}_{n_u, n_y}$ (cas non étudié dans ce cours).

2.2.2 Retour statique d'état

Il arrive que l'on soit capable de mesurer l'intégralité du vecteur $x(t)$. Dans ce cas, on peut envisager d'appliquer la loi de commande

$$\boxed{u = Kx}, \quad (74)$$

où $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ est une matrice constante. On parle alors de retour statique d'état. Le correcteur K est donc indépendant de s . Il sera utilisé, dans ce cours, entre autres, pour la commande \mathcal{H}_2 .

Pour ce cas particulier de retour statique, on peut réduire le modèle du système en boucle ouverte à

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ e(t) = C_e x(t) + D_{ew} w(t) + D_{eu} u(t). \end{cases}} \quad (75)$$

2.3 Le système bouclé

2.3.1 Cas du retour dynamique

Le système bouclé, que l'on peut noter $\mathbf{F}(P(s), K(s))$, si l'on s'intéresse au transfert entre w et e , admet donc, comme représentation d'état possible,

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \\ w \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_u D_c C_y & B_u C_c & B_w + B_u D_c D_{yw} \\ B_c C_y & A_c & B_c D_{yw} \\ \hline C_e + D_{eu} D_c C_y & D_{eu} C_c & D_{ew} + D_{eu} D_c D_{yw} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ x_c \\ w \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Il est rappelé que $D_{ew} = \mathbb{O}_{n_e, n_w}$ (selon l'hypothèse **H3**) lorsqu'il est question de traiter le problème \mathcal{H}_2 , de même que $D_c = \mathbb{O}_{n_u, n_y}$. Le correcteur s'en trouve donc simplifié. Néanmoins, nous ne traitons pas le problème " \mathcal{H}_2 dynamique" dans ce cours.

2.3.2 Cas du retour statique d'état

Dans le cas d'un retour statique d'état $u = Kx$, le modèle en boucle fermée se réduit à

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_u K & B_w \\ C_e + D_{eu} K & D_{ew} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}. \quad (77)}$$

Dans le problème \mathcal{H}_2 , il vient, par l'hypothèse **H3**, $D_f = D_{ew} = \mathbb{O}_{n_e, n_w}$.

2.4 Formulation du problème \mathcal{H}_\bullet standard

Problème 1 : $P(s)$ et $\gamma_\bullet > 0$ étant donnés (avec les hypothèses **H1** et **H2**), déterminer un correcteur $K(s)$ (sous forme de modèle d'état) stabilisant le système bouclé $\mathbf{F}(P(s), K(s))$ et tel que $\|\mathbf{F}(P(s), K(s))\|_\bullet < \gamma_\bullet$.

Dans le problème ci-dessus, \bullet peut-être remplacé par ∞ ou par 2 selon que l'on cherche à minimiser une norme \mathcal{H}_∞ ou une norme \mathcal{H}_2 . Ce problème standard est donc un problème de rejet de perturbation en termes de norme \mathcal{H}_∞ ou de norme \mathcal{H}_2 .

Dans le cas \mathcal{H}_2 , ce cours ne considérera que le retour statique d'état, c'est-à-dire le cas où K est une matrice réelle $n_u \times n$ indépendante de s . Ce problème nécessite l'ajout de l'hypothèse **H3**.

2.5 Comparaison entre les normes \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_2

La norme \mathcal{H}_∞ ou le gain \mathcal{L}_2 correspond au maximum du gain entrées/sorties à la fréquence optimale. Autrement dit, cette norme privilégie la pulsation pour laquelle le gain est maximal. Si l'on cherche à minimiser une telle norme, cela signifie que l'on s'intéresse à la fréquence la plus défavorable. L'effort de minimisation porte donc sur cette fréquence "la pire" et le niveau de performance qui en découle est ensuite *a fortiori* garanti pour les autres fréquences.

Pour la norme \mathcal{H}_2 , il en est tout autrement. Elle ne privilégie aucune fréquence mais traduit plutôt une énergie des sorties répartie sur toutes les fréquences. La minimiser signifie porter l'effort de minimisation sur l'ensemble des fréquences. Cette norme est en réalité celle qui est minimisée lors de la résolution d'un problème LQG.

3 Résolution du problème \mathcal{H}_\bullet standard

Dans cette section, une solution au problème de commande \mathcal{H}_\bullet standard est proposée en termes de \mathcal{LMI} .

3.1 Résolution du problème \mathcal{H}_∞ standard par retour dynamique de sortie

Pour ce problème de commande \mathcal{H}_∞ , un correcteur dynamique est considéré. Une solution au problème est ici donnée en termes \mathcal{LMI} .

3.1.1 Propriété du système bouclé : le Lemme Borné Réel

Comme vu précédemment, la norme \mathcal{H}_∞ ne peut être calculée analytiquement. Cependant, un correcteur stabilisant assurant une telle norme \mathcal{H}_∞ doit conduire le système bouclé à vérifier une condition nécessaire et suffisante qui nous est donnée par un lemme appelé "Lemme Borné Réel" :

Lemme 1 : La norme \mathcal{H}_∞ du transfert associé au système bouclé (76) est strictement inférieure à γ_∞ si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive X_∞ vérifiant

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_f^T X_\infty + X_\infty A_f & X_\infty B_f & C_f^T \\ B_f^T X_\infty & -\gamma_\infty \mathbb{I}_{n_w} & D_f^T \\ C_f & D_f & -\gamma_\infty \mathbb{I}_{n_e} \end{bmatrix} < 0. \quad (78)}$$

Une solution équivalente est l'existence d'une matrice $\tilde{X}_\infty = \tilde{X}_\infty^T > 0$ vérifiant

$$\begin{bmatrix} A_f^T \tilde{X}_\infty + \tilde{X}_\infty A_f & \tilde{X}_\infty B_f & C_f^T \\ B_f^T \tilde{X}_\infty & -\gamma_\infty^2 \mathbb{I}_{n_w} & D_f^T \\ C_f & D_f & -\mathbb{I}_{n_e} \end{bmatrix} < 0. \quad (79)$$

Par double application du complément de Schur, cette dernière inégalité est équivalente à

$$A_f^T \tilde{X}_\infty + \tilde{X}_\infty A_f + C_f^T C_f + (\tilde{X}_\infty B_f + C_f^T D_f)(\gamma_\infty^2 \mathbb{I}_{n_w} - D_f^T D_f)^{-1} (B_f^T \tilde{X}_\infty + D_f^T C_f) < 0. \quad (80)$$

Si l'on suppose que les hypothèses dites de normalisation⁹ sont respectées et que le correcteur est strictement propre¹⁰, alors l'inégalité (80) devient

$$A_f^T \tilde{X}_\infty + \tilde{X}_\infty A_f + C_f^T C_f + \gamma_\infty^{-2} \tilde{X}_\infty B_f B_f^T \tilde{X}_\infty < 0. \quad (81)$$

L'inégalité (81) signifie qu'il existe une matrice $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, définie positive, telle que l'équation

$$A_f^T \tilde{X}_\infty + \tilde{X}_\infty A_f + C_f^T C_f + \gamma_\infty^{-2} \tilde{X}_\infty B_f B_f^T \tilde{X}_\infty = -\tilde{Q} \quad (82)$$

admet une solution $\tilde{X}_\infty = \tilde{X}_\infty^T > 0$. L'équation (82) est très proche de l'équation de Riccati associée au problème \mathcal{H}_∞ (cf. 1^{ère} partie du cours, hors document).

L'expression (78) correspond à une inégalité matricielle bilinéaire (\mathcal{BML}) en X_∞ , A_c , B_c , C_c et D_c . Néanmoins, elle devient linéaire si X_∞ est figée. On a alors une \mathcal{LM} . On peut alors pour X_∞ donnée, déterminer A_c , B_c , C_c et D_c .

Remarque 2 : notez que le premier bloc du terme de gauche de l'inégalité (78) est défini négatif. Ceci correspond à l'inégalité de Lyapunov prouvant la stabilité asymptotique du système bouclé.

Remarque 3 : il existe une forme duale à l'expression (78), totalement équivalente, qui nous sera utile par la suite :

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_f X_\infty + X_\infty A_f^T & B_f & X_\infty C_f^T \\ B_f^T & -\gamma_\infty \mathbb{I}_{n_w} & D_f^T \\ C_f X_\infty & D_f & -\gamma_\infty \mathbb{I}_{n_e} \end{bmatrix} < 0.} \quad (83)$$

3.1.2 Condition d'existence d'une solution au problème

Trouver une solution au problème standard revient à trouver X_∞ dont une condition d'existence est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2 : *Sous les hypothèses **H1** et **H2**, le problème \mathcal{H}_∞ standard admet une solution si et seulement si il existe deux matrices symétriques R et S telles que le système \mathcal{LM} suivant est satisfait :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} N_R & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}_{n_w} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{ccc} AR + RA^T & RC_e^T & B_w \\ C_e R & -\gamma_\infty \mathbb{I}_{n_e} & D_{ew} \\ B_w^T & D_{ew}^T & -\gamma_\infty \mathbb{I}_{n_w} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} N_R & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}_{n_w} \end{array} \right] < 0 \\ \left[\begin{array}{cc} N_S & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}_{n_e} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{ccc} A^T S + SA & SB_w & C_e^T \\ B_w^T S & -\gamma_\infty \mathbb{I}_{n_w} & D_{ew}^T \\ C_e & D_{ew} & -\gamma_\infty \mathbb{I}_{n_e} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} N_S & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}_{n_e} \end{array} \right] < 0 \\ \left[\begin{array}{cc} R & \mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & S \end{array} \right] \geq 0 \end{array} \right. \quad (84)$$

⁹Hypothèses de normalisation : $D_{ew} = \mathbb{O}$, $D_{eu}^T D_{eu} = \mathbb{I}_{n_u}$, $D_{eu}^T C_e = \mathbb{O}$, $D_{yw}^T D_{yw} = \mathbb{I}_{n_w}$ et $D_{uw}^T B_w = \mathbb{O}$. On peut toujours se ramener à de telles hypothèses par une transformation de similarité sur la réalisation initiale.

¹⁰Un correcteur strictement propre est tel que $D_c = \mathbb{O}$. Dans l'approche utilisant les équations de Riccati, le correcteur appelé central, s'il existe, est strictement propre (voir des ouvrages plus approfondis sur la question pour en savoir plus).

où les colonnes de N_R et celles de N_S constituent respectivement des bases pour les noyaux de $[B_u^T \ D_{eu}^T]$ et de $[C_y \ D_{yw}]$. De plus, un correcteur d'ordre n existe si et seulement si

$$\boxed{\text{rang}(\mathbb{I}_n - RS) = n.} \quad (85)$$

On peut aussi utiliser les outils \mathcal{LMI} pour résoudre directement

$$\boxed{\min_{R=R^T; S=S^T} \gamma_\infty \quad \text{sous les contraintes (84).}} \quad (86)$$

Un tel problème de minimisation reste en effet convexe.

3.1.3 Reconstruction du correcteur

Il faut avant tout construire X_∞ . On effectue la décomposition en valeurs singulières de $(\mathbb{I}_n - RS)$ de manière à déduire un couple de matrices de rang plein $\{M; N\} \in \{\mathbb{R}^{n \times n}\}^2$ telles que :

$$MN^T = \mathbb{I}_n - RS \quad (87)$$

On peut démontrer que la matrice X_∞ , vérifiant

$$\boxed{X_\infty = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & -M^{-1}RN \end{bmatrix}} \quad (88)$$

satisfait la condition (78) donnée par le Lemme Borné Réel. Une fois la matrice X_∞ connue, (78) devient une \mathcal{LMI} en A_c, B_c, C_c qui, résolue, et D_c , donne le modèle d'état du correcteur.

3.1.4 Exercice

On prend l'exemple de la figure 3.

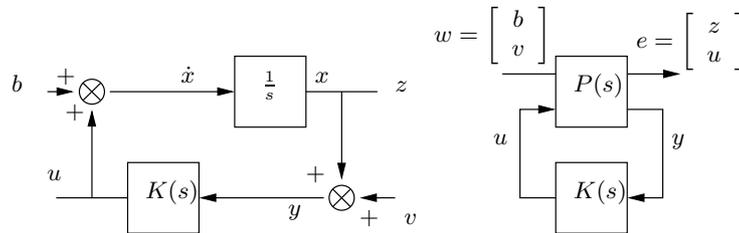


FIG. 3 – Schéma correspondant à l'exemple étudié

Questions :

1. Donner le modèle d'état du système.
2. Ecrire les \mathcal{LMI} permettant de résoudre le problème standard et les simplifier.
3. Déduire la valeur optimale de γ_∞ .
4. Expliquer comment obtenir $K(s)$

Solutions :

1/ Le modèle d'état est rappelé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = [0]x + [1 \ 0] \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ v \end{bmatrix}}_w + [1]u \\ \underbrace{\begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}}_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ v \end{bmatrix}}_w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y = [1]x + [0 \ 1] \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ v \end{bmatrix}}_w + [0]u. \end{array} \right. \quad (89)$$

On répertorie les matrices du modèle :

$$\begin{aligned} A &= 0 & B_w &= [1 \ 0] & B_u &= 1 \\ C_e &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & D_{ew} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & D_{eu} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_y &= 1 & D_{yw} &= [0 \ 1] & D_{yu} &= 0. \end{aligned} \quad (90)$$

Tout d'abord, l'hypothèse **H1** est vérifiée puisque la paire $(A; B_u)$ est commandable et que la paire (A, C_y) est observable. De même, **H2** est vraie car $D_{yu} = 0$.

2/ On a $[B_u^T \ D_{eu}^T] = [1 \ 0 \ 1]$ d'où l'on peut choisir, par exemple,

$$N_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De la même manière, on a $[C_y \ D_{yw}] = [1 \ 0 \ 1]$, et ainsi $N_S = N_R$.
 A est scalaire donc R et S le sont aussi.

Compte tenu du modèle, la première inégalité du théorème 2 est

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & R & 0 & 1 & 0 \\ \hline R & -\gamma_\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_\infty & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -\gamma_\infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_\infty \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] < 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma_\infty & -R & -1 & 0 \\ -R & \gamma_\infty & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \gamma_\infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_\infty \end{bmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Par application de la technique du complément de Schur, cette inégalité est équivalente à

$$\boxed{\begin{cases} \gamma_\infty > 0, \\ \gamma_\infty^2 - 1 - R^2 > 0. \end{cases}}$$

Comme $N_S = N_R$, il vient, de manière analogue, en traitant la deuxième inégalité du théorème 2,

$$\boxed{\gamma_\infty^2 - 1 - S^2 > 0.}$$

Enfin, la dernière \mathcal{LMI} du théorème 2 correspond ici à :

$$\begin{bmatrix} R & 1 \\ 1 & S \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} R \geq 0 \\ RS - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \geq 0 \\ RS - 1 \geq 0. \end{cases}}$$

3/ Les contraintes du théorème 2 sur γ_∞ nous amènent à déduire que

$$\gamma_\infty^2 - 1 > \min_{R,S} (\max\{R^2; S^2\}).$$

La dernière contrainte nous montre que ce minimum vaut 1 et est atteint pour $R = S = 1$. Ceci conduit à

$$\boxed{\gamma_\infty > \sqrt{2}.}$$

4/ Dans le cas $RS = 1$ (cas optimal entre autres), il est impossible de calculer un correcteur d'ordre $n = 1$ car la condition de rang (85) du théorème 2 n'est pas satisfaite dans ce cas.

Pour $RS \neq 1$ (γ_∞ sous-optimal), on peut choisir

$$M = -N = \sqrt{RS - 1},$$

ce qui conduit à :

$$\boxed{X_\infty = \begin{bmatrix} S & -\sqrt{RS - 1} \\ -\sqrt{RS - 1} & R \end{bmatrix}.}$$

Enfin, la résolution de la \mathcal{LMI} du lemme borné réel permet d'obtenir $K(s)$.

3.1.5 Particularités de l'approche \mathcal{LMI}

Il faut d'abord noter que l'approche \mathcal{LMI} est *numérique* contrairement à l'approche Riccati qui peut être qualifiée d'analytique. Elle permet, tout comme l'approche Riccati, d'envisager des problèmes plus sophistiqués que le problème standard en utilisant des matrices de pondération. Même si la solution \mathcal{LMI} semble plus complexe, elle autorise notamment à étendre les problèmes traités à la stabilisation quadratique, la synthèse d'un correcteur \mathcal{H}_2 -optimal sous contraintes \mathcal{H}_∞ , l'introduction de spécification sur les pôles du système bouclé, la minimisation directe de γ_∞ , la recherche éventuelle de correcteur d'ordre réduit ...etc... Nous y reviendrons par la suite.

3.2 Résolution du problème \mathcal{H}_2 standard par retour statique d'état

3.2.1 Propriété du système bouclé

La norme \mathcal{H}_2 est reliée aux grammians de commandabilité W_c et d'observabilité W_o comme nous l'avons vu. Le calcul de cette norme peut se faire de manière analytique par résolution des équations de Lyapunov associées à ces deux grammians. Toutefois, si l'on cherche à traduire ce calcul en termes de \mathcal{LMI} , il vient le lemme suivant :

Lemme 2 *La norme \mathcal{H}_2 du système bouclé ($\gamma\gamma$), sous les hypothèses **H1**, **H2** et **H3**, est inférieure à $\gamma_2 > 0$ si et seulement s'il existe deux matrices $\{X_2; T\} \in \{\mathbb{R}^{n \times n}\}^2$, symétriques définies positives telles que (versions primale et duale)*

$$\left\{ \begin{array}{l} B_f^T X_2 B_f < T, \\ \left[\begin{array}{cc} A_f^T X_2 + X_2 A_f & C_f^T \\ C_f & -\mathbb{I}_{n_e} \end{array} \right] < 0, \\ \text{trace}(T) = \gamma_2, \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} C_f X_2 C_f^T < T, \\ \left[\begin{array}{cc} A_f X_2 + X_2 A_f^T & B_f \\ B_f^T & -\mathbb{I}_{n_w} \end{array} \right] < 0, \\ \text{trace}(T) = \gamma_2. \end{array} \right. \quad (91)$$

La trace de la matrice T définit une borne supérieure γ_2 sur la norme \mathcal{H}_2 du système bouclé. La matrice X_2 est, dans la version primale, une borne supérieure du grammien d'observabilité (*i.e.* $W_o < X_2$), et, dans la version duale, une borne supérieure du grammien de commandabilité (*i.e.* $W_c < X_2$). Les inégalités relatives aux grammien sont des inégalités de Lyapunov et, à ce titre, elles assurent la stabilité asymptotique du système (77).

Avec les outils \mathcal{LMI} , on peut directement résoudre le problème d'optimisation convexe consistant à minimiser γ_2 et ainsi calculer la norme \mathcal{H}_2 du système bouclé.

3.2.2 Détermination d'un retour statique d'état

Dans un problème de synthèse, le modèle (77) n'est évidemment pas connu et il s'agit de déterminer la matrice associée au retour statique d'état satisfaisant les propriétés du lemme 2. Il est plus approprié d'exploiter ce lemme dans sa forme duale. Il vient alors le théorème suivant :

Théorème 3 *Soit le modèle en boucle ouverte (75). Il existe une loi de commande par retour statique d'état $u = Kx$, $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ tel que le système bouclé (76) a une norme \mathcal{H}_2 inférieure ou égale à γ_2 si et seulement s'il existe deux matrices symétriques définies positives $\{X_2; T\} \in \{\mathbb{R}^{n \times n}\}^2$ ainsi qu'une matrice $L \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ telles que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} AX_2 + B_u L + X_2 A^T + L^T B_u^T & B_w \\ B_w^T & -\mathbb{I}_{n_w} \end{array} \right] < 0, \\ \left[\begin{array}{cc} -T & C_e X_2 + D_{eu} L \\ X_2 C_e^T + L^T D_{eu}^T & -X_2 \end{array} \right] < 0, \\ \text{trace}(T) = \gamma_2. \end{array} \right. \quad (92)$$

Par ailleurs, la matrice de retour est donnée par

$$K = LX_2^{-1}. \quad (93)$$

On note que l'équation (93) ne pose *a priori* pas de problème en ce sens que l'inversion de X_2 est possible puisque X_2 est strictement définie positive.

Il est en réalité plus facile, avec les outils numériques à disposition aujourd'hui, de calculer K en minimisant directement la norme \mathcal{H}_2 du système bouclé, c'est-à-dire en minimisant $\text{trace}(T)$ sous les deux premières contraintes du théorème 3.

Remarque 4 *Pour ce qui est du retour dynamique de sortie, il existe également une solution, comme dans le problème standard \mathcal{H}_∞ , mais cette dernière n'est pas donnée dans ce cours. Elle correspond en réalité à la résolution d'un problème LQG.*

4 Le cas particulier du retour statique d'état

4.1 Le problème \mathcal{H}_∞

On suppose maintenant, comme dans le problème \mathcal{H}_2 envisagé au paragraphe précédent, que l'on est capable de mesurer l'intégralité du vecteur d'état. Ainsi, $y = x$.

On cherche une commande statique c'est-à-dire que le correcteur se réduit à une matrice $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$.

Si les objectifs de performances restent les mêmes, la recherche d'une matrice de retour d'état K est un cas particulier du problème \mathcal{H}_∞ standard.

Le modèle d'état du système en boucle ouverte devient celui donné en (75) et le modèle du système bouclé est donné par (77). Si l'on reporte l'expression (77) dans l'inégalité duale de celle proposée par le lemme borné réel, le système bouclé est stable si et seulement s'il existe $X_\infty = X_\infty^T > 0$ vérifiant

$$\begin{bmatrix} AX_\infty + B_u K X_\infty + X_\infty A^T + X_\infty K^T B_u^T & B_w & X_\infty C_e^T + X_\infty K^T D_{eu}^T \\ B_w^T & -\gamma_\infty \mathbb{I}_{n_w} & D_{ew}^T \\ C_e X_\infty + D_{eu} K X_\infty & D_{ew} & -\gamma_\infty \mathbb{I}_{n_e} \end{bmatrix} < 0. \quad (94)$$

En posant $L = K X_\infty$, on obtient une \mathcal{LMI} en X_∞ et L :

$$\boxed{\begin{bmatrix} AX_\infty + B_u L + X_\infty A^T + L^T B_u^T & B_w & X_\infty C_e^T + L^T D_{eu}^T \\ B_u^T & -\gamma_\infty \mathbb{I}_{n_w} & D_{ew}^T \\ C_e X_\infty + D_{eu} L & D_{ew} & -\gamma_\infty \mathbb{I}_{n_e} \end{bmatrix} < 0.} \quad (95)$$

Il suffit de résoudre cette \mathcal{LMI} et de reconstruire la matrice de retour :

$$\boxed{K = L X_\infty^{-1},} \quad (96)$$

sachant que X_∞ étant définie positive, elle est toujours inversible.

On note que, dans ce cas, le Lemme Borné Réel est directement exploitable.

4.2 Contraintes de placement de pôles

On désire maintenant que les pôles du système ainsi bouclé restent dans des régions du plan complexe pour assurer certaines performances sur la réponse transitoire (amortissement, temps de réponse...). Ceci nécessite d'introduire les notions de régions \mathcal{LMI} et de \mathcal{D} -stabilité

4.2.1 Les régions \mathcal{LMI}

On définit une classe de régions : les régions \mathcal{LMI} .

Définition 2 : Toute région \mathcal{D} du plan complexe qui peut se décrire par

$$\boxed{\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha + \beta z + \beta^T \bar{z} < 0\}} \quad (97)$$

où $\alpha = \alpha^T \in \mathbb{R}^{l \times l}$ et $\beta \in \mathbb{R}^{l \times l}$ est appelée région \mathcal{LMI} d'ordre l .

Les régions \mathcal{LMI} sont convexes et symétriques par rapport à l'axe réel. Parmi elles, on peut citer les disques, les secteurs, les bandes verticales ou horizontales, les ellipses...

Toute intersection de sous-régions \mathcal{LMI} est elle-même une région \mathcal{LMI} . Un exemple de ces intersections est dessiné sur la figure 4.

Exemple de formulation \mathcal{LMI} : Le disque \mathcal{D} de centre ρ (sur l'axe réel) et de rayon r est décrit par

$$\begin{aligned} |z - \rho| &< r \\ \Leftrightarrow (z - \rho)(\bar{z} - \rho) - r^2 &< 0 \\ \Leftrightarrow -r + (z - \rho) \frac{1}{r} (\bar{z} - \rho) &< 0. \end{aligned}$$

Par application du complément de Schur, il vient

$$\begin{bmatrix} -r & z - \rho \\ \bar{z} - \rho & -r \end{bmatrix} < 0,$$

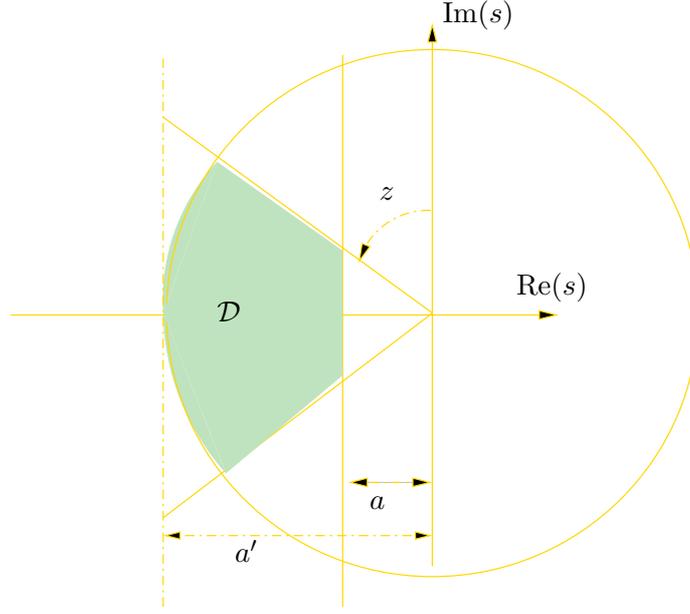


FIG. 4 – Exemple de région \mathcal{LMI} : intersection de trois sous-régions \mathcal{LMI}

ce qui correspond à la formulation (97) pour le choix

$$\alpha = \begin{bmatrix} -r & -\rho \\ -\rho & -r \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

À partir d'une formulation classique des régions usuelles, le complément de Schur permet souvent d'obtenir une formulation \mathcal{LMI} .

4.2.2 \mathcal{D} -stabilité d'une matrice

On dit d'une matrice A qu'elle est \mathcal{D} -stable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont contenues dans la région \mathcal{D} .

Théorème 4 : Soit une région \mathcal{LMI} définie par (97), une matrice A est \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe une matrice $X_{\mathcal{D}} = X_{\mathcal{D}}^T > 0$ telle que

$$\boxed{M_{\mathcal{D}}(A, X_{\mathcal{D}}) = \alpha \otimes X_{\mathcal{D}} + \beta \otimes (AX_{\mathcal{D}}) + \beta^T \otimes (X_{\mathcal{D}}A^T) < 0.} \quad (98)$$

4.3 Synthèse mixte avec contraintes de placement de pôles

Le système bouclé est dit \mathcal{D} -stable si et seulement si sa matrice d'état $A_f = A + B_u K$ est \mathcal{D} -stable. K est donc un correcteur \mathcal{D} -stabilisant et assurant les contraintes $\|\mathbf{F}(P(s), K)\|_{\infty} < \gamma_{\infty}$ et $\|\mathbf{F}(P(s), K)\|_2 < \gamma_2$ si et seulement s'il existe une matrice $X_{\infty} = X_{\infty}^T > 0$ vérifiant le Lemme Borné Réel (par exemple (94)), une matrice $X_2 = X_2^T > 0$ et une matrice $T = T^T$ vérifiant le lemme 2 ainsi qu'une matrice $X_{\mathcal{D}} = X_{\mathcal{D}}^T > 0$ satisfaisant $M_{\mathcal{D}}(A + B_u K, X_{\mathcal{D}}) < 0$.

Malheureusement le problème de synthèse posé en ces termes est difficile à résoudre aussi doit on se contenter d'une condition suffisante d'existence d'une solution, donnée par le théorème suivant :

Théorème 5 : Le procédé $P(s)$ est \mathcal{D} -stabilisable par un retour statique d'état K assurant $\|\mathbf{F}(P(s), K)\|_{\bullet} < \gamma_{\bullet}$, $\forall \bullet \in \{\infty; 2\}$ s'il existe une matrice $X = X^T > 0$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice $T = T^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $L \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ telles que le système \mathcal{LMI} suivant est satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{Z}_\infty(P(s), X, L, \gamma_\infty) = \begin{bmatrix} AX + B_u L + X A^T + L^T B_u^T & B_w & X C_e^T + L^T D_{eu}^T \\ B_w^T & -\gamma_\infty \mathbb{I}_{n_w} & D_{ew}^T \\ C_e X + D_{eu} L & D_{ew} & -\gamma_\infty \mathbb{I}_{n_e} \end{bmatrix} < 0, \\
\mathcal{Z}_{2_1}(P(s), X, L) = \begin{bmatrix} AX_2 + B_u L + X_2 A' + L' B_u' & B_w \\ B_w^T & -\mathbb{I}_{n_w} \end{bmatrix} < 0, \\
\mathcal{Z}_{2_2}(P(s), X, L, T) = \begin{bmatrix} -T & C_e X_2 + D_{eu} L \\ X_2 C_e^T + L^T D_{eu}^T & -\mathbb{I}_n \end{bmatrix} < 0, \\
\text{trace}(T) < \gamma_2, \\
M_{\mathcal{D}}(A, B_u, X, L) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^T \otimes (X A^T) + \beta \otimes (B_u L) + \beta^T \otimes (L^T B_u^T) < 0,
\end{array} \right. \quad (99)$$

et le correcteur K est alors donné par

$$\boxed{K = L X^{-1}}. \quad (100)$$

La condition suffisante consiste tout simplement à prendre $X_{\mathcal{D}} = X_2 = X_\infty = X$. Elle permet alors de reconstruire K . Dans l'hypothèse où l'un des indices (γ_∞ ou γ_2) est minimisé, elle conduit donc à un correcteur (ici un simple retour statique) sous-optimal. Cette contrainte est connue dans la littérature scientifique de langue anglaise sous le nom de ‘‘Lyapunov Shaping Paradigm’’.

5 Introduction à la commande robuste

La commande robuste est la discipline consistant à établir une loi de commande qui puisse être implantée sur un système dont le modèle est entâché d'une incertitude. La loi de commande doit garantir un niveau de performance malgré l'incertitude. Nous abordons ce problème dans un cadre assez simple : celui de la synthèse par retour statique d'état.

5.1 Incertitude polytopique

Il existe de nombreuses façons de formuler l'incertitude associée à un modèle d'état. La formulation choisie peut correspondre à divers phénomènes (approximation due à la linéarisation, négligence de certaines dynamiques plus rapides, imprécision sur la connaissance de paramètres physiques intervenant dans le modèle...). Nous étudions ici l'incertitude dite ‘‘polytopique’’ correspondant surtout à une incertitude sur les paramètres. Le modèle d'état de $P(s)$ se résume à une matrice M regroupant les six matrices décrivant le comportement du procédé de la manière suivante :

$$M = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_e & D_{ew} & D_{eu} \end{bmatrix}. \quad (101)$$

Mais cette matrice est en réalité la combinaison convexe d'un ensemble de matrices extrêmes M_j , connues avec précision :

$$\boxed{M = M(\tau) = \begin{bmatrix} A(\tau) & B_w(\tau) & B_u(\tau) \\ C_e(\tau) & D_{ew}(\tau) & D_{eu}(\tau) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^N (\tau_j M_j)}. \quad (102)$$

Le vecteur $\tau = [\tau_1, \dots, \tau_N]^T$ contient les coefficients de la combinaison convexe, c'est-à-dire les scalaires τ_j , qui sont appelés coordonnées barycentriques et vérifient

$$\boxed{\begin{cases} \tau_j \geq 0 & \forall j \in \{1, \dots, N\}. \\ \sum_{j=1}^N (\tau_j) = 1 \end{cases}} \quad (103)$$

M est donc une matrice constante mais qu'on ne connaît pas avec précision. Celle-ci se situe quelque part à l'intérieur du polytope de matrices dont les sommets sont les matrices M_j ainsi partitionnées :

$$M_j = \begin{bmatrix} A_j & B_{j_w} & B_{j_u} \\ C_{j_e} & D_{j_{ew}} & D_{j_{eu}} \end{bmatrix}. \quad (104)$$

Ces matrices M_j sont associées à des matrices de transfert extrêmes $P_j(s)$.

En pratique, cette formulation englobe le cas où M est de la forme

$$M = M_0 + \sum_{i=1}^p (\delta_i N_i), \quad (105)$$

où M_0 est une matrice nominale, où les matrices N_i sont connues et où les $\delta_i \in \mathbb{R}$, inconnus, correspondent à une incertitude sur des paramètres physiques (exemple : une imprécision sur une résistance dans un système électrique) du type :

$$\delta_{i_{min}} \leq \delta_i \leq \delta_{i_{max}} \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}. \quad (106)$$

Lorsque les δ_i décrivent les intervalles auxquels ils appartiennent, M décrit un polytope \mathcal{M} comportant $N = 2^p$ sommets.

Exemple :

$$M = \begin{bmatrix} -1 + \delta_1 & \delta_2 & 3 \\ 1 & -2 + 2\delta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} |\delta_1| \leq 0,5 \\ |\delta_2| \leq 0,2. \end{cases} \quad (107)$$

Ce modèle répond à la formulation (105) avec

$$M_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}; N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}; N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (108)$$

ou encore à la formulation (102) avec :

$$M_1 = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; M_2 = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; M_3 = \begin{bmatrix} -1,5 & 0,2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}; M_4 = \begin{bmatrix} -1,5 & -0,2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (109)$$

Ainsi M se trouve quelque part dans \mathcal{M} . Tout dépend des coordonnées barycentriques qui sont inconnues.

5.2 Synthèse mixte \mathcal{D} -stabilisante robuste par retour statique d'état

On utilise à nouveau la forme duale du lemme borné réel pour déduire ce théorème :

Théorème 6 : *Soit un procédé $P(s)$ de modèle incertain décrit par (101-102-103) et une région \mathcal{LMI} définie en (97). Il existe une matrice de retour statique d'état K \mathcal{D} -stabilisante et assurant $\|\mathbf{F}(P(s), K)\|_{\bullet} < \gamma, \forall \bullet \in \{\infty; 2\}$ s'il existe une matrice $X = X^T > 0, X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice $T = T^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $L \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ telles que le système \mathcal{LMI} suivant est satisfait :*

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{Z}_{\infty_j} = \mathcal{Z}(P_j(s), K, \gamma_{\infty}) < 0 \\ \mathcal{Z}_{2_{1_j}} = \mathcal{Z}(\mathbf{F}(P_j(s), K)) < 0 \\ \mathcal{Z}_{2_{2_j}} = \mathcal{Z}(\mathbf{F}(P_j(s), K, T)) < 0 \\ \text{trace}(T) < \gamma_2 \\ M_{j_{\mathcal{D}}} = M_{\mathcal{D}}(A_j + B_{j_u}, X, L) < 0 \end{cases} \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},} \quad (110)$$

et le correcteur K est alors donné par

$$\boxed{K = LX^{-1}.} \quad (111)$$

Démonstration : on définit les combinaisons convexes suivantes (qui sont nécessairement définies négatives) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Z}_{\infty}(\tau) = \sum_{j=1}^N (\tau_j \mathcal{Z}_{\infty_j}) < 0 \\ \mathcal{Z}_{2_1}(\tau) = \sum_{j=1}^N (\tau_j \mathcal{Z}_{2_{1_j}}) < 0 \\ \mathcal{Z}_{2_2}(\tau) = \sum_{j=1}^N (\tau_j \mathcal{Z}_{2_{2_j}}) < 0 \\ M_{\mathcal{D}}(\tau) = \sum_{j=1}^N (\tau_j M_{j_{\mathcal{D}}}) < 0 \end{array} \right. \quad \forall \tau. \quad (112)$$

En appliquant les propriétés des produits matriciels classique et de Kronecker, il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Z}_{\infty}(P(s), K, L, \gamma_{\infty}) < 0 \\ \mathcal{Z}_{2_1}(P(s), K, L) < 0 \\ \mathcal{Z}_{2_2}(P(s), K, L) < 0 \\ \text{trace}(T) < \gamma_2 \\ M_{\mathcal{D}}(A(\tau) + B_u(\tau), X, L) < 0 \end{array} \right. \quad \forall \tau. \quad (113)$$

En posant $L = KX$, la forme duale du Lemme Borné Réel est satisfaite ainsi que celle du lemme 2 et la condition de \mathcal{D} -stabilité, ceci partout à l'intérieur du polytope. \square

On peut minimiser, grâce aux logiciels \mathcal{LMI} , l'une ou l'autre des grandeurs γ_{∞} et γ_2 , voire un critère pondéré des deux variables, tout en conservant la convexité du problème d'optimisation inhérent à la résolution du système \mathcal{LMI} .

Il y a deux sources de pessimisme dans la condition suffisante présentée dans le théorème précédent : d'une part, la matrice X vérifiant la condition de \mathcal{D} -stabilité, le Lemme Borné Réel dual et le lemme 2 dans sa version duale est la même (c'est le "Lyapunov Shaping Paradigm" comme dans la commande nominale); d'autre part, cette même matrice assure ces trois propriétés sur l'ensemble du polytope. Autrement dit, X ne varie pas avec τ ce qui limite les possibilités de trouver K même s'il existe. Ces deux sources de conservatisme, dans le cas d'une minimisation d'un critère, conduisent un retour statique d'état sous-optimal.

6 Conclusion

Ce cours a balayé quelques notions basiques sur la commande \mathcal{H}_{∞} et \mathcal{H}_2 par approche \mathcal{LMI} . Les extensions de ces résultats sont nombreuses en particulier en ce qui concerne les techniques de commande robuste. Pour des raisons de simplicité, le cas du retour statique d'état a été détaillé. Toutefois, les résultats précédents existent dans le cas du retour dynamique. L'étudiant intéressé pourra se référer aux ouvrages et articles mentionnés en introduction.

Références

- [1] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit, and G. Ferreres. *Robustesse et Commande Optimale - SUPAERO*. Cépaduès Editions, 1999.
- [2] S. Boyd, L. El. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in system and control theory*. Volume 15 of SIAM Studies in Applied Mathematics, USA, 1994.
- [3] M. Chilali and P. Gahinet. H_∞ design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :358–367, Mars 1996.
- [4] G. Duc. Robustesse des systèmes linéaires multivariables. Technical Report 03317/..^a1994, Ecole Supérieure d'électricité, 1994.
- [5] G. Duc and S. Font. *Commande H_∞ et μ -analyse : des outils pour la robustesse*. Editions Hermes.
- [6] P. Gahinet and P. Apkarian. A LMI approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Non-linear Control*, 4 :421–448, 1994.
- [7] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Topics in matrix analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- [8] C. Scherer and S. Weiland. Lectures Notes DISC Course on Linear Matrix Inequalities in Control. Polycopié téléchargé sur internet, 1999.
- [9] C. Stéphanos. Sur une extension du calcul des substitutions linéaires. *Journal des Mathématiques Pures Appliquées*, 6 :73–128, 1900.