

## Cours

Un premier pas en traitement du signal



Olivier BACHELIER  
Courriel : [Olivier.Bachelier@univ-poitiers.fr](mailto:Olivier.Bachelier@univ-poitiers.fr)  
Tel : 05-49-45-36-79 ; Fax : 05-49-45-40-34

Les commentaires constructifs et les rapports d'erreurs sont les bienvenus !

## Résumé

Ce petit document d'initiation au traitement du signal s'inscrit dans le cadre de la deuxième année de l'**IUT de Poitiers-Châtelleraut-Niort** et s'adresse principalement aux étudiants du département de **Mesures Physiques**, situé sur le site de Châtelleraut. L'IUT de Poitiers-Châtelleraut-Niort est une composante de l'**Université de Poitiers**.

Il ne s'agit pas d'un cours complet ou exhaustif de traitement du signal mais, bien au contraire, d'une première approche qui vise à donner aux étudiants quelques notions de base sur la représentation fréquentielle des signaux, son utilité, sur les notions d'énergie et de puissance d'un signal, sur le filtrage et sur l'échantillonnage. Ce cours correspond à un très faible volume horaire.

D'autres aspects classiques ou notions plus avancées pourront être étudiées dans le cadre d'autres cours ou modules complémentaires (exemple : les techniques de modulation d'un signal).

**Connaissances préalables souhaitées :** Quelques bases de calcul intégral sont nécessaires. Des connaissances sur les fonctions de transfert en  $\omega$ , les diagrammes de Bode, les séries de Fourier, ou la transformation de Laplace sont bienvenues.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Brève introduction au traitement du signal</b>	<b>1</b>
1.1	Quelques définitions . . . . .	1
1.1.1	Qu'est-ce qu'un signal ? . . . . .	1
1.1.2	Qu'est-ce que le traitement du signal ? . . . . .	2
1.1.3	Quelques domaines d'application . . . . .	2
1.2	Une première classification des signaux . . . . .	3
1.2.1	Continuité et discontinuité en temps et en amplitude . . . . .	3
1.2.2	Prédictivité du signal . . . . .	4
1.3	Un signal étrange mais utile : l'impulsion de Dirac . . . . .	7
1.4	Ojectifs et plan du cours . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Puissances et énergies des signaux</b>	<b>11</b>
2.1	Première approche : analogie électrique . . . . .	11
2.2	Moyenne, énergie, et puissance d'un signal . . . . .	12
2.2.1	Moyenne d'un signal . . . . .	12
2.2.1.1	Moyenne sur un intervalle . . . . .	12
2.2.1.2	Moyenne d'un signal périodique . . . . .	12
2.2.1.3	Moyenne d'un signal apériodique . . . . .	12
2.2.2	Énergie d'un signal . . . . .	12
2.2.2.1	Énergie sur un intervalle . . . . .	12
2.2.2.2	Énergie totale . . . . .	13
2.2.3	Puissance d'un signal . . . . .	13
2.2.3.1	Puissance sur un intervalle . . . . .	13
2.2.3.2	Puissance instantanée . . . . .	13
2.2.3.3	Puissance moyenne d'un signal périodique . . . . .	14
2.2.3.4	Puissance moyenne d'un signal apériodique . . . . .	14
2.3	Retour sur la classification des signaux . . . . .	14
2.4	Mesures de puissances en décibels . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Représentation fréquentielle des signaux</b>	<b>17</b>
3.1	Introduction par une approche intuitive . . . . .	17
3.2	Représentation spectrale d'un signal périodique . . . . .	22
3.2.1	Développement en série de Fourier . . . . .	22
3.2.2	Représentation spectrale bilatérale . . . . .	25
3.3	Représentation spectrale d'un signal apériodique . . . . .	27
3.3.1	Transformation de Fourier . . . . .	27
3.3.2	Transformation inverse de Fourier . . . . .	29
3.3.3	Transformée de Fourier et impulsion de Dirac . . . . .	29
3.3.4	Transformation de Fourier et série de Fourier . . . . .	30
3.4	Énergie et représentation spectrale : théorème de Parseval . . . . .	30
3.4.1	Cas général . . . . .	30
3.4.2	Cas périodique . . . . .	31
3.5	Intérêt de la représentation spectrale . . . . .	31

3.6	Retour à la classification . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Filtrage des signaux continus</b>	<b>35</b>
4.1	Motivation . . . . .	35
4.2	Réponse impulsionnelle d'un filtre causal . . . . .	36
4.3	Réponse d'un filtre : produit de convolution . . . . .	37
4.4	Transformation de Fourier et produit de convolution . . . . .	39
4.5	Principe et intérêt du filtrage . . . . .	40
4.5.1	Gabarits des filtres . . . . .	40
4.5.2	Influence des gabarits sur le spectre . . . . .	41
4.5.2.1	Filtrage passe-bas . . . . .	41
4.5.2.2	Filtrage passe-haut . . . . .	42
4.5.2.3	Filtrage passe-bande . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Échantillonnage des signaux continus</b>	<b>47</b>
5.1	Échantillonnage : une notion physique et mathématique . . . . .	47
5.1.1	Échantillonnage impulsionnel . . . . .	47
5.1.2	Échantillonnage impulsionnel idéal et transformation étoile temporelle . . . . .	49
5.2	Qualité de l'échantillonnage . . . . .	50
5.2.1	Échantillonnage dans le domaine fréquentiel . . . . .	50
5.2.2	Repliement de spectre et théorème de Shannon . . . . .	51
5.2.3	Bruit et filtre anti-repliement . . . . .	52
5.3	Échantillonnage en pratique : CAN et CNA . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Conclusions, références et perspectives</b>	<b>55</b>
6.1	En résumé . . . . .	55
6.2	Pour aller plus loin . . . . .	55
6.3	Références bibliographiques . . . . .	56
<b>A</b>	<b>Fourier et sa transformation</b>	<b>59</b>
A.1	Brève biographie de Joseph Fourier . . . . .	59
A.1.1	Sa vie . . . . .	59
A.1.2	Son œuvre . . . . .	59
A.2	Brève biographie de Claude Shannon . . . . .	60
A.3	Table de transformées de Fourier . . . . .	60

# Chapitre 1

## Brève introduction au traitement du signal

Dans ce chapitre, quelques définitions et notions élémentaires sont introduites afin de fixer les objectifs et de situer le cadre de travail.

### Sommaire

---

<b>1.1 Quelques définitions</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1.1 Qu'est-ce qu'un signal? . . . . .	1
1.1.2 Qu'est-ce que le traitement du signal? . . . . .	2
1.1.3 Quelques domaines d'application . . . . .	2
<b>1.2 Une première classification des signaux</b> . . . . .	<b>3</b>
1.2.1 Continuité et discontinuité en temps et en amplitude . . . . .	3
1.2.2 Prédicativité du signal . . . . .	4
<b>1.3 Un signal étrange mais utile : l'impulsion de Dirac</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>1.4 Objectifs et plan du cours</b> . . . . .	<b>9</b>

---

## 1.1 Quelques définitions

### 1.1.1 Qu'est-ce qu'un signal?

Pour faire simple, et en première approche, on peut dire qu'un signal est la manifestation physique d'une information qui est transportée d'une source vers une destination : en pratique, c'est souvent une grandeur physique qui varie au cours du temps. Ceci est en réalité un peu restrictif mais correspond bien à la plupart des cas pratiques. Par exemple, puisqu'en Mesures Physiques, on est intéressé par la mesure et par les capteurs, la tension délivrée par tout capteur est typiquement un signal qui peut faire l'objet des propos qui vont suivre.

Cette interprétation très « physique » du signal peut s'étendre un peu et l'on appelle aussi souvent « signal » la description mathématique de l'évolution de la grandeur physique en question. Par exemple, si l'on dit qu'un capteur délivre une tension sinusoïdale, faisant donc référence à la forme mathématique de la fonction qui décrit la tension, on peut parler de signal sinusoïdal. Ceci se réfère bien à une notion mathématique et non physique. Toutefois, dans les propos qui suivront, ce genre de distinction ne pose généralement pas de problème et relève plus de la nuance.

Le fait d'associer au signal sa description mathématique amène assez naturellement à considérer que les signaux se ramènent à des fonctions du temps. Ceci est quelque peu restrictif comme on le verra en tentant de classifier les signaux, mais, là encore, en première approche, c'est assez vrai. La plupart des signaux vus dans ce cours pourront être considérés comme décrits par des fonctions temporelles.

Souvent, en traitement du signal, on distingue le signal utile, c'est-à-dire celui que l'on veut étudier, dont on

veut extraire une information pertinente, d'un signal inutile qui viendrait parasiter le signal utile, brouiller l'information à transmettre. Le premier est appelé « signal » (d'où une ambiguïté sur ce mot) et le second est appelé « bruit ».

### 1.1.2 Qu'est-ce que le traitement du signal ?

Donner une définition de la discipline est assez risqué et il en existe sans doute autant que de personnes qui se risquent à le faire. On peut dire qu'il s'agit d'une discipline qui vise à l'*élaboration* et l'*analyse* des signaux. Cette discipline s'appuie sur des concepts mathématiques (parfois très sophistiqués mais pas dans ce cours) tout en cherchant à résoudre des problèmes issus de contraintes physiques.

*Élaboration* : il s'agit de construire des signaux, ou de modifier des signaux existants dans le but de :

- mettre en forme une information qui n'existait pas au préalable (le fait de construire la somme de deux signaux en tant qu'information à transmettre, c'est déjà du traitement du signal) ;
- de modifier un signal existant pour en faciliter physiquement la transmission (exemple : modulation telle qu'elle pourra être étudiée dans un autre cours) ;
- de modifier un signal pour dissimuler l'information pertinente à certains récepteurs (cryptographie, stéganographie).

*Analyse* : il s'agit d'étudier et modifier des signaux déjà mis en forme, obtenus physiquement, éventuellement déjà transmis, dans le but de

- les nettoyer en enlevant certaines parties indésirables (les bruits évoqués ci-avant), ce qui conduit souvent à la notion de filtrage ;
- extraire l'information utile (mesure, codes, etc.) ;
- extraire les caractéristiques associées à l'information reçue (fiabilité, qualité de la mesure, etc...) ;
- détecter des phénomènes dont l'existence est indiquée par le signal ;
- ... (la liste n'est sans doute pas exhaustive).

Ce document introduit quelques notions de base qui peuvent servir à résoudre certains problèmes mentionnés ci-avant.

### 1.1.3 Quelques domaines d'application

Dès lors que l'on comprend que toute tension délivrée par un capteur est un signal susceptible de faire l'objet d'un traitement (tous les capteurs n'ont pas le bon goût de fournir une tension qui soit la parfaite image de la grandeur à mesurer), il est facile d'admettre que tous les champs d'application faisant intervenir des capteurs (et ils sont nombreux !) peuvent être des domaines d'application du traitement du signal. La mesure est utile en physique, en chimie, en biologie, en mécanique, en robotique, en hydraulique, etc. et comme toute mesure est entachée de bruit, d'incertitude voire d'erreur, le traitement du signal peut intervenir pour réduire l'effet de ces nuisances. C'est pourquoi, le traitement du signal peut se révéler utile dans tous les secteurs industriels.

Il existe cependant des domaines dans lesquels il tient une place privilégiée. C'est le cas, par exemple, en acoustique, où le signal à étudier est un son, et, en particulier, dans le domaine de l'audiophilie : la qualité du son final peut être liée à la pertinence du traitement qu'il a subi. Est-on parvenu à éliminer les sons parasites, les effets d'un écho désagréable, etc. ? Sans évoquer forcément la musique, de nombreuses études sont menées sur la reconnaissance de sons et celle de la voix. L'objectif est différent mais le son, pour être reconnu, doit subir un traitement. C'est un problème très ouvert, loin d'être résolu.

Comme beaucoup de disciplines scientifiques, hélas, le traitement du signal s'est beaucoup développé en temps de guerre. Ainsi, la volonté de transmettre et d'interpréter convenablement des signaux radar ou sonar a conduit au développement de techniques de traitement du signal, techniques qui peuvent par ailleurs servir hors du cadre militaire.

Pour continuer dans cette liste de domaines applicatifs, il faut comprendre que certains signaux peuvent renseigner sur l'apparition de phénomènes ou de pannes. Ainsi, en électrotechnique, existe-t-il des techniques de traitement du signal qui permettent de détecter voire de prévenir des pannes (une altération des signaux attendus informe

d'une anomalie qui peut parfois être reconnue). En géophysique, on analyse les mouvements des sols pour prédire d'éventuels séismes. En médecine, on peut déceler des anomalies cardiaques en analysant les battements du cœur, etc.

À noter qu'il existe un pan très particulier du traitement du signal qui consiste en quelque sorte à analyser un signal en deux dimensions que constitue une image : c'est le traitement d'image. Corriger les parties floues d'une image, c'est séparer le bruit du signal pertinent. On peut facilement comprendre l'intérêt d'une telle discipline si l'on pense à l'imagerie médicale. On peut aussi cacher ou révéler des informations telles que les droits d'auteur, dans ou à partir d'une image.

Il est important de noter que les capteurs délivrent généralement une tension, ce qui suggère un post traitement électronique, dans lequel le traitement du signal proprement dit peut être intégré. En outre, puisque de transmission d'information il est question, tout lecteur admettra que la communication n'est pas sans lien avec l'électronique et certaines disciplines corrélées. L'audiophilie et l'étude de la HiFi suggèrent entre autres la conception d'appareils capables de transmettre, sous forme électrique, un son de qualité, ce qui veut dire, de constituer un signal électrique, image aussi fidèle que possible du son, de le modifier à des fins de transmission, de le reconstituer « aussi vrai que nature », sous forme acoustique (stéréophonie). On ne sera donc pas surpris de retrouver, en traitement du signal, des notions étudiées, notamment, en électronique (analogique ou numérique).

## 1.2 Une première classification des signaux

Dans ce paragraphe, une tentative est faite pour faire une première classification des signaux qui peuvent être étudiés (ils ne le seront pas tous dans ce cours). Cette classification somme toute assez simpliste, repose sur certaines distinctions. Plus, tard, d'autres distinctions viendront compléter cette classification.

### 1.2.1 Continuité et discontinuité en temps et en amplitude

Un signal peut être vu comme une quantité, notée  $f$ , qui varie dans le temps, de sorte que  $f(t)$  est une fonction ou une *distribution* (un concept peut-être inconnu du lecteur mais ce n'est pas grave) du temps. Plus simplement, un signal se caractérise par une « amplitude »  $f$  (généralement associée à une grandeur physique) qui évolue en fonction du temps  $t$ . On peut distinguer différentes classes de signaux selon les valeurs que peuvent prendre  $f$  et  $t$ .

Ainsi, on peut faire une première distinction sur le temps  $t$  :

- les signaux à temps continu ou simplement « *signaux continus* » : ceux-ci sont tels que l'amplitude  $f$  est définie quel que soit le temps  $t$  (cas (a) et (b) de la figure 1.1) ;
- les signaux à temps discret ou simplement « *signaux discrets* » : ceux-là sont tels que l'amplitude  $f$  est définie à des instants précis du temps (le temps est alors « discrétisé » : cas (c) à (f) de la figure 1.1).

Par ailleurs, on fait une autre distinction sur l'amplitude  $f$  :

- les *signaux non quantifiés* pour lesquels  $f$  peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle continu (cas (a), (c) et (e) de la figure 1.1) ;
- les *signaux quantifiés* pour lesquels  $f$  est un nombre quantique c'est-à-dire qu'il ne peut prendre que des valeurs discrètes bien définies (l'amplitude est alors discrète : cas (b), (d) et (f) de la figure 1.1).

Un signal continu et non quantifié est appelé *analogique* (*analog signal* en anglais), tel celui dessiné sur la figure 1.1, cas (a). Dans les ouvrages sur le sujet, il arrive que l'on ne distingue pas signaux continus et analogiques sans que cela ne soit nécessairement problématique. Toutefois, ces deux vocables ne sont pas synonymes et la classe des signaux analogiques constitue un sous-ensemble des signaux continus.

De même, un signal discret et quantifié est parfois qualifié de *numérique* (*digital signal* en anglais), tels ceux dessinés sur la figure 1.1, cas (d) et (f). Là encore, il arrive très souvent que l'on confonde signal discret et signal numérique bien que les signaux numériques constituent un sous-ensemble des signaux discrets.

Il se peut que pour un signal discret (numérique ou pas), les instants du temps pour lesquels l'amplitude  $f$  est

définie soient régulièrement espacés, faisant apparaître une *période*, comme dans les cas (e) et (f) de la figure 1.1. Cette période n'est pas la période du signal mais simplement celle à laquelle apparaissent des valeurs.

**Remarque 1.1** *En toute rigueur, cette acception du mot « numérique » n'est pas tout à fait conforme au sens habituel que l'on en a. Un signal numérique est plus souvent vu comme un signal certes discret, mais pour lequel les valeurs définies de  $f$  sont régulièrement espacées dans le temps. De plus, son amplitude peut être codée de façon binaire et est alors manipulable par un ordinateur.*

Par ailleurs, on peut noter (vraiment à titre de remarque) qu'un signal quantifié est tel qu'il existe toujours un intervalle minimal entre deux valeurs admissibles de l'amplitude  $f$ . Il est fréquent que tous les intervalles entre deux valeurs admissibles successives soient des multiples de cet intervalle minimal qui est alors appelé *quantum*.

Si les signaux continus sont bien modélisés par des fonctions mathématiques, les signaux discrets le seraient plutôt par ce que l'on appelle des *distributions*. Cependant, il est plus facile de s'affranchir du temps en définissant un signal discret par une suite de valeurs successives que l'on indice. Ainsi les valeurs  $f(t_0)$ ,  $f(t_1)$ , etc., en supposant que  $t_0$  est l'origine du temps, sont notées  $f_0$ ,  $f_1$  et appelées *échantillons* (voir figure 1.1.(e)). La séquence d'échantillons caractérisant le signal discret est notée  $\{f_k\}$ . L'indice  $k$  est alors un entier relatif qui peut, si on le souhaite, faire référence au temps. On retrouve la notion mathématique de *suite numérique*.

**Remarque 1.2** *(subtile!) Un modèle de signal discret sous forme d'une suite d'échantillons est en réalité plus général qu'un modèle de signal à temps discret puisque la référence au temps n'est plus nécessaire. Il est donc possible de faire une nuance entre signaux discrets et signaux à temps discret même si cette nuance ne sera pas vraiment utile dans la suite de ce document.*

### Exemples :

Lorsque l'on plonge une sonde sonde PT 100 (c'est une résistance variant en fonction de la température) dans un milieu, on récupère à ses bornes une tension qui est un signal analogique (continu dans le temps et en amplitude).

L'énergie d'un électron dans un atome ne peut prendre que certaines valeurs données. Cette énergie, est continue mais quantifiée (chaque niveau d'énergie possible est indicé par un nombre (1, 2, 3, ...) qu'on appelle *nombre quantique*).

La concentration d'un produit dans un réacteur chimique évolue de façon continue au cours du temps. Toutefois, il faut plusieurs minutes à un sympathique chimiste pour estimer cette concentration, de sorte qu'il ne peut en donner la valeur que de temps en temps. Les données obtenues constituent un signal discret (mais pas quantifié). Les mesures peuvent être faites à une fréquence donnée (exemple : une fois par heure) de sorte que les *échantillons*, c'est-à-dire les valeurs obtenues, le sont à intervalles réguliers définissant une période dite d'*échantillonnage* (ici égale à une heure). Enfin, le même chimiste s'occupe toutes les 10 minutes de la mesure du pH d'un mélange. Son appareil ne lui propose que des mesures entières de 0 à 14. La mesure de ce pH est donc un signal discret et quantifié, c'est-à-dire numérique.

## 1.2.2 Prédicativité du signal

Une distinction absolument fondamentale pour un traicteur du signal (peut-être un peu moins pour l'étudiant qui suivra ce cours succinct), et ce, que l'on soit à temps continu ou à temps discret, est celle qui sépare :

- les signaux *déterministes* pour lesquels une description mathématique précise permet de prévoir à l'avance quelle sera leur valeur à des instants futurs ;
- les signaux *stochastiques* ou, plus simplement dit, *aléatoires*, pour lesquels la connaissance à un instant  $t$  ne peut pas permettre de déduire la valeur à un instant ultérieur.

Grossièrement, les signaux déterministes sont décrits pas une fonction dans le cas analogique, ou par une suite numérique dans le cas discret. En revanche, pour les signaux stochastiques, cette description mathématique n'existe pas. On peut toutefois donner quelques caractéristiques de ces signaux. Par exemple, certaines valeurs ont plus de

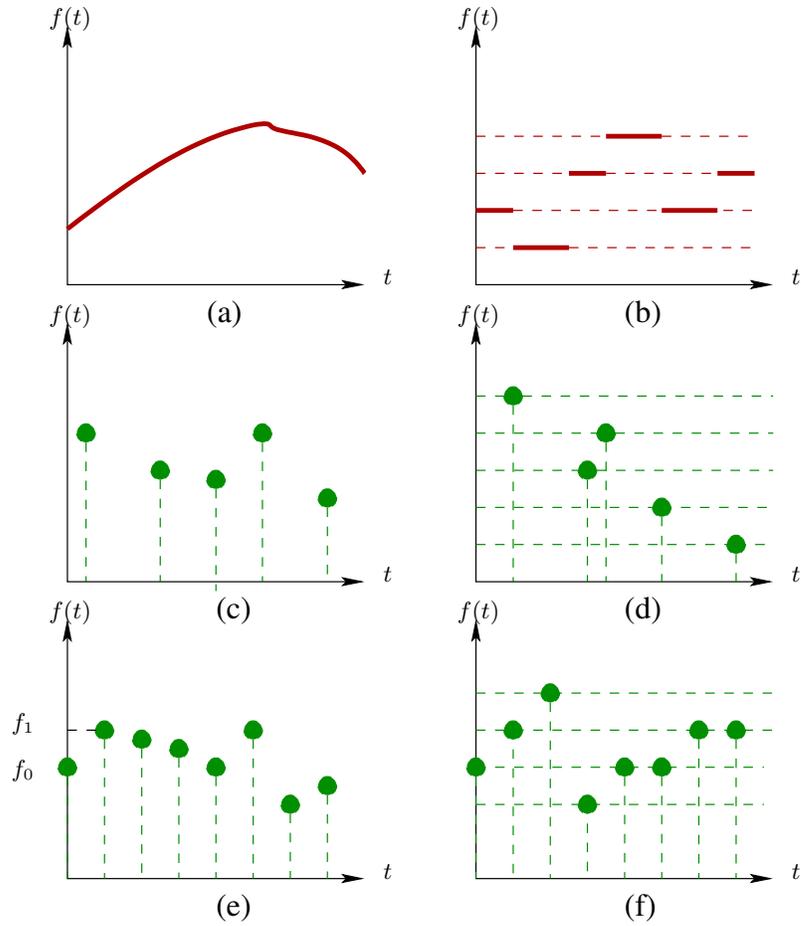


FIGURE 1.1 – Signaux continus et discrets

chances que d'autres d'apparaître, leur moyenne *a priori* peut être connue, etc. La notion de signaux aléatoires est liée à celle de probabilité.

Exemples :

La tension aux bornes de la sonde PT100 évoquée ci-avant est un signal déterministe dans le sens où l'on connaît la règle d'évolution de cette tension qui est affine en fonction de la température  $\theta$ . Elle n'est pas le fruit du hasard. En revanche, une succession de lancés de dés conduit à un signal numérique aléatoire. Le prochain lancé est indépendant des précédents. On peut néanmoins savoir qu'il y a, par exemple, une chance sur six que le '4' soit tiré. C'est une caractéristique du signal.

À leur tour, les signaux déterministes peuvent être divisés en :

- signaux *périodiques* qui se reproduisent à l'identique à intervalles réguliers, faisant donc apparaître une période  $T_0$ ;
- signaux *apériodiques*, c'est-à-dire tous les autres.

Exemples à méditer :

Un exemple typique de signal périodique est bien sûr le signal sinusoïdal, tel que  $s_1(t) = \sin(t)$ , représenté sur la figure 1.2. Ici la période est de  $T_0 = 2\pi$ .

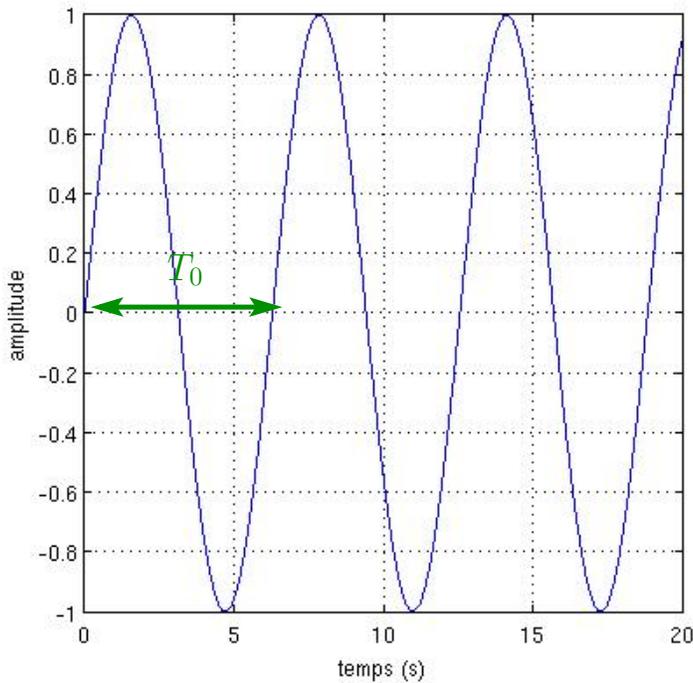


FIGURE 1.2 – Exemple typique de signal périodique : un signal sinusoïdal

Le signal  $s_2(t) = e^{-0,2t}$ , représenté sur la figure 1.3, est lui apériodique.

Parfois, un signal apériodique peut présenter des caractéristiques périodiques. Ainsi, le produit des deux signaux précédents, à savoir  $s(t) = s_1(t)s_2(t) = e^{-0,2t} \sin(t)$ , représenté sur la figure 1.4, n'est pas périodique mais fait apparaître une pseudo-période  $T_p$  qui est en fait, bien entendu, égale à  $T_0$ . Cela signifie que, même si le signal  $s(t)$  n'est pas reproduit à l'identique à une fréquence  $f_0 = \frac{1}{T_0}$ , il contient en quelque sorte cette fréquence en lui. Un

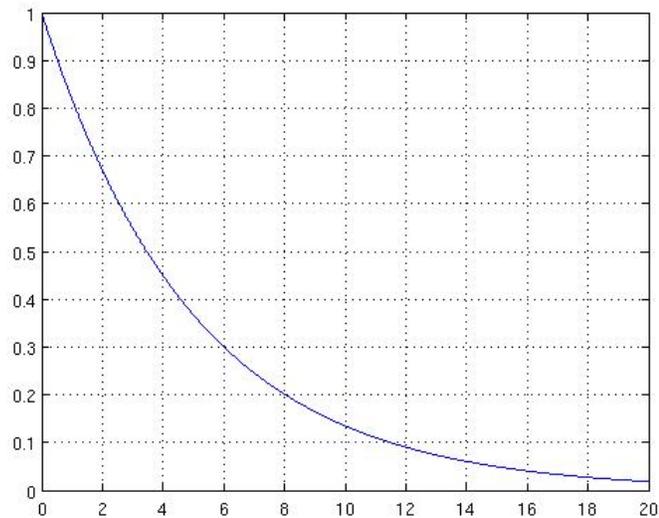


FIGURE 1.3 – Exemple de signal apériodique :  $e^{-0.2t}$

des grands enjeux en traitement du signal est de savoir quelles fréquences sont contenues dans un signal donné (voir chapitre 3).

De façon plus précise, si l'on suppose que l'information pertinente à récupérer est  $f_0$ , elle est facile à extraire si le signal transmis est  $s_1(t)$ . Oui mais voilà, pas de chance, c'est le signal  $s(t)$  qui est transmis, c'est-à-dire que le signal est atténué au cours du temps par une enveloppe en décroissance exponentielle  $s_2(t) = e^{-0.2t}$  qui agit comme un bruit que l'on souhaiterait ne pas récupérer. Si l'on dispose d'une technique ou d'un moyen pratique et efficace pour savoir rapidement que  $f_0$  est bien contenue dans  $s(t)$ , alors on peut dire qu'on sait déjà « un peu » faire du traitement du signal.

Quant aux signaux aléatoires, qui peuvent aussi être vus comme des signaux dépendant à la fois du temps et d'une variable aléatoire, on peut les classer en *stationnaires* et *non stationnaires* (selon qu'il gardent leurs caractéristiques statistiques au cours du temps ou non) ou encore en signaux satisfaisant l'hypothèse d'*ergodicité* ou non (là, cela devient très compliqué compte tenu des connaissances mathématiques de l'étudiant auquel s'adresse ce cours). Tous ces points relatifs aux signaux aléatoires, quoiqu'importants en traitement du signal, ne seront pas abordés. Ceci amène naturellement au plan du cours. Mais auparavant, il est nécessaire d'introduire un signal un peu étrange, un peu fictif, virtuel, mais qui reviendra sans cesse dans la suite du document.

### 1.3 Un signal étrange mais utile : l'impulsion de Dirac

Cette impulsion doit être explicitée quelque peu car il s'agit d'un concept purement mathématique. Elle peut, en première approche, se représenter, comme sur la figure 1.5, par une impulsion rectangulaire définissant une surface (hachurée) égale à 1.

Cependant, pour définir complètement l'impulsion de Dirac, il faut faire tendre  $\Delta t$  vers 0 et donc  $\frac{1}{\Delta t}$  vers l'infini. L'impulsion devient donc infiniment fine, mais aussi infiniment haute et sa surface est toujours de 1. On note une telle impulsion  $\delta(t)$  et on a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

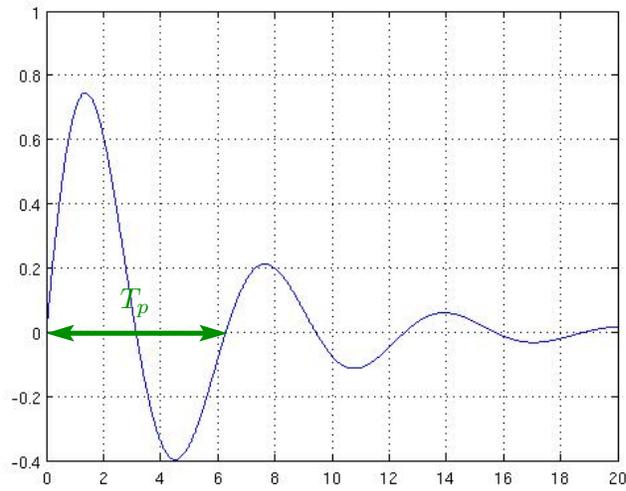


FIGURE 1.4 – Exemple de signal pseudo périodique :  $e^{0,2t} \sin(t)$

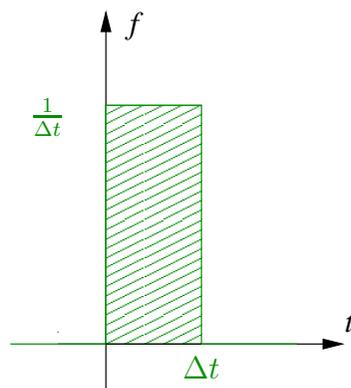


FIGURE 1.5 – Impulsion rectangulaire de surface unitaire

On la représente généralement par une flèche qui indique la *force* c'est-à-dire la valeur de l'intégrale (figure 1.6).

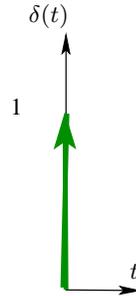


FIGURE 1.6 – Impulsion de Dirac

Il n'est pas possible d'obtenir physiquement un tel signal mais il correspond à une impulsion violente et très brève.

On peut aussi définir l'impulsion de Dirac décalée qui se représente comme sur la figure 1.7.

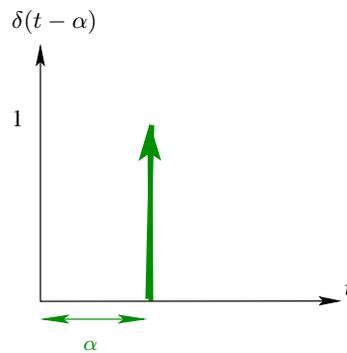


FIGURE 1.7 – Impulsion de Dirac décalée de  $\alpha$ s

Ce signal sera très utile dans la suite du document.

## 1.4 Ojectifs et plan du cours

Dans ce cours, ne seront traités que les signaux déterministes. Dans un premier temps, au chapitre 2, les notions d'énergie et de puissance d'un signal seront introduites. Ces notions, combinées à celles du chapitre 3, conduiront à modifier la classification proposée ci-avant.

Les signaux étudiés seront plutôt (surtout au début) analogiques, souvent périodiques mais pas toujours. On essaiera d'en donner, au chapitre 3, une représentation fréquentielle (ou spectrale), notamment à travers plusieurs notions fondamentales :

- la décomposition en série de Fourier;
- la transformation de Fourier;
- le spectre d'un signal.

Dans le chapitre 4, le point de vue fréquentiel introduit au chapitre 3 sera utilisé pour aborder la transformation

d'un signal en un autre. En particulier, il y sera question d'éliminer certaines parties du signal de manière à modifier ses propriétés. Cette notion est celle de *filtrage*. Elle s'accompagne, mathématiquement des notions suivantes :

- produit de convolution ;
- fonction de transfert en  $\omega$  (la pulsation  $\omega = 2\pi f$ ).

Enfin, dans le chapitre 5, l'échantillonnage d'un signal continu, c'est-à-dire la transformation d'un signal à temps continu en un signal à temps discret, sera présenté et analysé au regard de la représentation spectrale. Certains problèmes seront mis en évidence (le *repliement de spectre*) et des notions fondamentales seront abordées pour y remédier :

- le théorème de Shannon ;
- le filtre anti-repliement.

D'autres notions totalement liées au traitement du signal, plus précisément le traitement d'un signal à transmettre, seront étudiées dans des modules complémentaires (*modulation d'amplitude*, etc.).

## Chapitre 2

# Puissances et énergies des signaux

Dans ce chapitre, quelques notions sur l'énergie et la puissance des signaux sont introduites. C'est aussi l'occasion de peaufiner la classification des signaux proposée au chapitre précédent.

### Sommaire

---

<b>2.1 Première approche : analogie électrique</b>	<b>11</b>
<b>2.2 Moyenne, énergie, et puissance d'un signal</b>	<b>12</b>
2.2.1 Moyenne d'un signal	12
2.2.2 Énergie d'un signal	12
2.2.3 Puissance d'un signal	13
<b>2.3 Retour sur la classification des signaux</b>	<b>14</b>
<b>2.4 Mesures de puissances en décibels</b>	<b>15</b>

---

## 2.1 Première approche : analogie électrique

Dans cette partie, quelques rappels d'électricité sont donnés afin de servir de première approche à la compréhension des notions d'énergie et de puissance d'un signal. En effet, avant de se lancer dans une litanie de définitions, on rappelle que lorsqu'une résistance  $R$  est traversée par un courant  $i(t)$ , la différence de potentiels (tension)  $u(t)$  à ses bornes est donnée par la loi d'Ohm :

$$u(t) = Ri(t).$$

La puissance électrique instantanée dissipée dans cette résistance est

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{u^2(t)}{R}.$$

Si l'on normalise la valeur de la résistance à  $R = 1$ , alors cette puissance instantanée est

$$p(t) = u^2(t),$$

c'est-à-dire que la puissance instantanée est liée au carré de la tension. Enfin, pour connaître l'énergie dissipée par la résistance, il faut intégrer cette puissance sur l'horizon de temps. Mais plutôt que de poursuivre plus avant cette analogie, des définitions plus formelles sont maintenant proposées pour n'importe quels signaux.

## 2.2 Moyenne, énergie, et puissance d'un signal

### 2.2.1 Moyenne d'un signal

#### 2.2.1.1 Moyenne sur un intervalle

Soit un signal  $s(t)$  (périodique ou non). Sa valeur moyenne sur un intervalle  $[t_1; t_2] \subset \mathbf{R}$  est définie par

$$m(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t) dt \quad (2.1)$$

C'est l'extension de la formule de la moyenne au cas d'une valeur définie quel que soit  $t$ .  $m(t_1, t_2)$  est une valeur ne dépendant pas de  $t$ . Sur l'intervalle  $[t_1; t_2]$ , le signal est autant « au dessus » de  $m(t_1, t_2)$  qu'« au dessous ».

#### 2.2.1.2 Moyenne d'un signal périodique

Dans le cas d'un signal  $s(t)$  périodique de période  $T_p$ , pour calculer sa moyenne globale, c'est-à-dire sur tout l'horizon de temps, il suffit de calculer la moyenne sur une période :

$$m = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0 + T_p} s(t) dt, \quad \forall t_0 \in \mathbf{R}. \quad (2.2)$$

Il est classique de considérer  $t_0 = 0$ .

Par exemple, la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal  $s(t) = A_s \sin(\omega_p t)$  est nulle quelles que soient son amplitude  $A_s$  et sa pulsation  $\omega_p$ . Si le signal comporte un *offset*, c'est-à-dire s'il contient une composante continue et s'écrit  $s(t) = S_0 + A_s \sin(\omega_p t)$  alors la moyenne devient évidemment  $S_0$  et il n'est nul besoin de recourir au calcul intégral pour le savoir. Un petit croquis rapide fait l'affaire. Pour d'autres signaux, il faut faire le calcul.

#### 2.2.1.3 Moyenne d'un signal apériodique

Si le signal  $s(t)$  est apériodique, le principe, pour calculer sa moyenne globale, consiste à le considérer comme périodique mais avec une période qui couvre tout l'horizon de temps. Il vient alors

$$m = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) dt \quad (2.3)$$

Comme pour un signal périodique, si l'on ajoute une composante continue  $S_0$  à  $s(t)$ , la moyenne devient  $m + S_0$ .

## 2.2.2 Énergie d'un signal

### 2.2.2.1 Énergie sur un intervalle

Soit un signal  $s(t)$  (périodique ou non). L'énergie de  $s(t)$  sur un intervalle  $[t_1; t_2] \subset \mathbf{R}$  est définie par

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt \quad (2.4)$$

Il s'agit d'une notion mathématique. C'est une valeur constante pour un intervalle donné. Elle peut correspondre à une vraie énergie au sens physique ; elle s'exprime alors en Joules (J), comme toutes les énergies (notamment celle dissipée dans la résistance  $R$  au paragraphe 2.1).

### 2.2.2.2 Énergie totale

Soit un signal  $s(t)$  (périodique ou non). L'énergie totale de  $s(t)$  est définie par

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \quad (2.5)$$

C'est encore une valeur constante qui peut s'exprimer en Joules si elle correspond à une énergie au sens physique. La formule précédente n'est rien d'autre que la généralisation de l'énergie sur un intervalle lorsque cet intervalle s'étend à l'ensemble de l'horizon temporel.

L'expression de l'énergie est indépendante du caractère périodique ou non du signal. Ce n'est pas le cas pour la moyenne, vue précédemment, ni pour la puissance traitée dans la partie suivante.

### 2.2.3 Puissance d'un signal

En physique, la puissance d'un signal s'exprime en Watts (W) et correspond à l'énergie sur une seconde. Autrement dit il est correct d'écrire

$$1\text{W} = \frac{1\text{J}}{1\text{s}},$$

ce qui signifie qu'un Watt est un Joule produit, ou dissipé pendant une seconde. La puissance est donc l'énergie ramenée au temps. En effet, un signal peut posséder une grande énergie parce qu'il « dure » longtemps (il ne s'annule jamais vraiment) et ainsi, à long terme, l'énergie devient grande voire infinie. Toutefois, ce signal n'est pas pour autant très énergétique. On peut imaginer un autre signal qui fournisse un peu moins d'énergie, mais qui le fasse en très peu de temps. La distinction entre puissance et énergie est donc cruciale.

#### 2.2.3.1 Puissance sur un intervalle

Sur ce principe là, la puissance sur un intervalle se définit facilement :

Soit un signal  $s(t)$  (périodique ou non). La puissance de  $s(t)$  sur un intervalle  $[t_1; t_2] \subset \mathbb{R}$  est définie par

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt \quad (2.6)$$

C'est donc la moyenne, sur un intervalle, du carré du signal. On a

$$P(t_1, t_2) = \frac{E(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}. \quad (2.7)$$

Cette notion de puissance moyenne conduit à celle de puissance instantanée.

#### 2.2.3.2 Puissance instantanée

Soit un signal  $s(t)$  (périodique ou non). La puissance instantanée de  $s(t)$  est définie par

$$p(t) = s^2(t). \quad (2.8)$$

Attention la puissance instantanée est une fonction de  $t$ . C'est donc aussi un signal.

Un signal peut être temporairement puissant, sur certains intervalles, et peu puissant le reste du temps. C'est pourquoi il est intéressant de calculer sa puissance moyenne. Du reste, puisque c'est un signal, il est normal de vouloir calculer sa moyenne en s'appuyant sur le paragraphe 2.2.1.

### 2.2.3.3 Puissance moyenne d'un signal périodique

Soit un signal périodique  $s(t)$ . La puissance moyenne de  $s(t)$  est définie par

$$P = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} s^2(t) dt \quad (2.9)$$

Il s'agit d'une valeur constante. Elle peut aussi s'exprimer

$$P = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} s^2(t) dt = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s^2(t) dt, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Il s'agit en fait de la puissance sur un intervalle qui n'est autre que la période  $T_p$  du signal  $s(t)$ .

**Remarque 2.1** On parle parfois de valeur efficace  $S_{eff}$  pour désigner la racine carrée de la puissance moyenne d'un signal périodique :  $P = S_{eff}^2$ .

Si l'on revient à l'analogie électrique de la partie 2.1, et que l'on suppose que la tension aux bornes de la résistance  $R$  est une constante  $U_{eff}$  alors la puissance moyenne dans la résistance est bien  $P = U_{eff}^2$ .

Si maintenant la tension est sinusoïdale ( $u(t) = U \sin(\omega_p t)$ ), le calcul de la valeur moyenne conduit à  $P = \frac{U^2}{2}$  ce qui amène une valeur efficace de tension  $U_{eff} = \sqrt{P} = \frac{U}{\sqrt{2}}$ , formule bien connue. Le sens en est simple. La valeur efficace de la tension (qu'elle soit sinusoïdale ou non) est la valeur de la tension continue qui conduit à la même puissance moyenne dissipée par la résistance.

### 2.2.3.4 Puissance moyenne d'un signal apériodique

Comme pour la moyenne, l'idée est de considérer qu'un signal apériodique est un signal périodique de période infinie, ce qui conduit à la définition suivante.

Soit un signal apériodique  $s(t)$ . La puissance moyenne de  $s(t)$  est définie par

$$P = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s^2(t) dt \quad (2.11)$$

Bien entendu, cette formule est aussi valable pour des signaux périodiques mais, dans ce cas, la formule (2.9) est souvent bien plus appropriée sur le plan calculatoire.

## 2.3 Retour sur la classification des signaux

Dans le chapitre précédent, on a vu une classification des signaux qui reposait sur diverses distinctions telles que, entre autres, le caractère morphologique du signal (continu ou discret), la prédictivité (déterministe ou aléatoire) et, pour les signaux déterministes, la périodicité (périodique ou apériodique).

On peut, sur la base des notions précédemment introduites, établir de nouvelles distinctions. Ainsi on distingue :

- les signaux à *amplitude bornée*, ou, plus simplement, *bornés*, qui vérifient

$$|s(t)| < \infty \quad \forall t ;$$

- les signaux *non bornés*.

Mais ce critère est moins utilisé que celui qui distingue :

- les signaux d'*énergie bornée (ou finie)*

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty ;$$

- les signaux d'*énergie non bornée*.

Enfin, un dernier critère distingue :

- les signaux de *puissance moyenne bornée (ou finie)*

$$P = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s^2(t) dt < \infty ;$$

- les signaux de *puissance moyenne non bornée*.

**Remarque 2.2** *Un signal dont la puissance moyenne est finie et non nulle a une énergie totale infinie. Un signal à énergie totale finie a une puissance moyenne nulle (sur tout l'horizon de temps).*

## 2.4 Mesures de puissances en décibels

Dans certains appareils de mesure, on peut rencontrer des mesures de puissance exprimées en  $\text{dB}_W$  ou  $\text{dB}_m$ . Pour en comprendre le sens, il faut comprendre ce que l'on entend par mesure en dB.

Tout d'abord, on définit le gain  $G$  en décibels (dB) entre la puissance  $P_1$  et  $P_2$  par la quantité

$$G = 10 \log_{10} \left( \frac{P_2}{P_1} \right).$$

Le dB est donc une unité adimensionnelle qui exprime en fait plutôt une amplification entre deux grandeurs s'exprimant dans la même unité. Il faut donc au moins deux signaux pour définir un gain en décibels.

Alors pourquoi un appareil associerait-il une mesure en dB à un seul signal ? Tout simplement parce qu'il compare sa puissance à une puissance de référence.

On définit donc la puissance d'un signal en  $\text{dB}_m$  en calculant le gain en dB de sa puissance par rapport à 1 mW :

$$P_{\text{dB}_m} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_W}{1 \text{ mW}} \right). \quad (2.12)$$

De la même façon, on définit la puissance exprimée en  $\text{dB}_W$  par

$$P_{\text{dB}_W} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_W}{1 \text{ W}} \right). \quad (2.13)$$

Il est même possible, même si c'est moins courant, d'exprimer la puissance en  $\text{dB}_\mu$  :

$$P_{dB_\mu} = 10\log_{10} \left( \frac{P_W}{1\mu W} \right). \quad (2.14)$$

Il est facile de vérifier que

$$\begin{cases} P_{dB_m} &= P_{dB_W} + 30 ; \\ P_{dB_\mu} &= P_{dB_m} + 30 ; \\ P_{dB_\mu} &= P_{dB_W} + 60. \end{cases}$$

# Chapitre 3

## Représentation fréquentielle des signaux

Dans ce chapitre, seuls les signaux continus sont étudiés, particulièrement, dans un premier temps, les signaux périodiques (donc déterministes). La représentation la plus naturelle pour ces signaux est la représentation temporelle qui consiste tout simplement à donner l'expression de la grandeur physique exprimée par le signal en fonction du temps. Cependant, il est possible d'exprimer un signal dans le domaine fréquentiel, ce qui est nettement moins intuitif. Néanmoins, cela est très utile car une telle représentation permet de connaître rapidement des caractéristiques d'un signal qui peuvent se révéler d'un grand intérêt en traitement du signal.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction par une approche intuitive</b>	<b>17</b>
<b>3.2</b>	<b>Représentation spectrale d'un signal périodique</b>	<b>22</b>
3.2.1	Développement en série de Fourier	22
3.2.2	Représentation spectrale bilatérale	25
<b>3.3</b>	<b>Représentation spectrale d'un signal aperiodique</b>	<b>27</b>
3.3.1	Transformation de Fourier	27
3.3.2	Transformation inverse de Fourier	29
3.3.3	Transformée de Fourier et impulsion de Dirac	29
3.3.4	Transformation de Fourier et série de Fourier	30
<b>3.4</b>	<b>Énergie et représentation spectrale : théorème de Parseval</b>	<b>30</b>
3.4.1	Cas général	30
3.4.2	Cas périodique	31
<b>3.5</b>	<b>Intérêt de la représentation spectrale</b>	<b>31</b>
<b>3.6</b>	<b>Retour à la classification</b>	<b>32</b>

---

### 3.1 Introduction par une approche intuitive

L'idée de cette partie est de donner quelques éléments de compréhension du lien temps/fréquence. Bien sûr, la notion de période pour un signal périodique est liée de manière triviale à celle de fréquence. On a

$$\omega_p = 2\pi f_p \quad \text{et} \quad f_p = \frac{1}{T_p}, \quad (3.1)$$

où :

- $T_p$  est la période du signal périodique ;
- $f_p$  est la fréquence associée à  $T_p$  ;
- $\omega_p$  est la pulsation associée à  $T_p$ .

Ces relations mathématiques sont triviales mais il ne faut pas se contenter d'en rester là pour faire du traitement du signal. On ne pourrait pas aller bien loin. Si l'on reprend l'exemple du signal pseudo périodique de la figure 1.4,

$T_p$  est l'inverse de  $f_0$  mais n'est pas une période. Si l'on veut avancer un peu, il faut creuser le lien entre temps et fréquence. On verra que  $f_0$  est bien présent dans la représentation fréquentielle du signal... mais comment ? C'est la question posée dans ce chapitre.

Pour une première approche, on peut essayer de comprendre ce qui se passe lorsque le son d'une note de guitare parvient à l'oreille<sup>1</sup>. Sans justifier rigoureusement le phénomène, la corde, soumise à une tension correspondant au réglage de la clef, est coincée entre deux extrémités (soit entre le sillet de chevalet et celui de tête, soit entre le sillet de chevalet et le doigt). Un doigt vient pincer la corde ainsi bloquée et provoquer une vibration. C'est un phénomène mécanique qui provoque des variations de pression d'air autour de la corde. Grossièrement, on peut dire que ces variations de pression se propagent jusqu'à l'oreille, constituant ainsi une onde acoustique.

Entendre une seule note, c'est percevoir une seule fréquence d'onde acoustique. Or, dans le cas d'une note de guitare, la fréquence de cette onde serait celle de la vibration de la corde qui en est à l'origine. Il faut donc brièvement étudier comment vibre une corde coincée aux deux bouts. Mais avant, il faut être bien conscient d'un fait : plus la fréquence est élevée, plus la note perçue est aiguë.

La fréquence de vibration d'une corde dépend de trois choses :

- la masse linéique de la corde (notée  $\mu$  et exprimée en kg/m) qui est liée à son épaisseur ;
- la force avec laquelle on tend cette corde (tension notée  $F$  et exprimée en N) ;
- la longueur de la corde (notée  $l$  et exprimée en m).

De façon plus précise, la vitesse  $v$  de vibration mécanique de la corde s'exprime :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Ensuite, la longueur  $\lambda$  de l'onde produite (qui sera aussi longueur d'onde du son) est donnée par :

$$\lambda = \frac{v}{f},$$

où  $f$  désigne la fréquence de la vibration. La note est donc directement liée à la fréquence  $f = \frac{v}{\lambda}$ . L'épaisseur et un bon accordage de la corde assurent de la valeur de  $F$  et de celle de  $\mu$ , donc aussi de celle de  $v$ . Il reste à s'assurer de la valeur de  $\lambda$  pour obtenir la bonne fréquence, c'est-à-dire la bonne note.

Cette bonne valeur de  $\lambda$  est obtenue à la condition que la longueur  $l$  de la corde soit un multiple de la  $\frac{\lambda}{2}$ . C'est pourquoi, on ne coince pas la corde à n'importe quel endroit du manche. Lorsque la longueur de la corde satisfait cette condition (c'est-à-dire lorsque l'on ne la coince pas n'importe comment), il s'installe dans la corde, lors du pincement, une onde dite *stationnaire*, c'est à dire que la vibration mécanique de la corde se fait, par exemple, selon le dessin de la figure 3.1 qui représente une onde dite « à un seul ventre ». Un point de la corde est soumis à une variation de position (verticalement sur la figure) qui est sinusoïdale et le son sera à l'image de cette sinusoïde (après amplification dans la caisse de résonance : ceci relève d'aspects importants en musique mais qui ne sont pas détaillés ici car ils n'amèneraient rien à la compréhension). Sur cette figure, on voit aussi que la longueur d'onde est égale à deux fois la longueur de la corde. Mais ce n'est pas la seule onde stationnaire qui s'installe. S'installent aussi, et en même temps, d'autres ondes stationnaires de longueurs d'onde plus faibles et qui amènent deux, trois, quatre, etc. ventres, comme indiqué sur la figure 3.2.

Les vibrations comportant plusieurs ventres sont telles que la longueur d'onde est 2 fois plus faible pour 2 ventres que pour un seul, 3 fois plus faibles pour 3 ventres, 4 fois plus faibles pour 4 ventres, etc. Ceci signifie que la corde vibre à une fréquence deux (resp. trois, quatre, etc.) fois plus élevée pour deux (resp. trois, quatre, etc.) ventres. Toutes ces vibrations (ou toutes ces fréquences) correspondent à des sons différents. À chaque multiplication de la fréquence par 2, on élève la note d'une octave (on monte d'une gamme mais c'est la même note). Il en existe en réalité une infinité, c'est-à-dire qu'il existe des vibrations avec  $n$  ventres,  $n$  tendant vers l'infini.

1. L'auteur tient à remercier Frédéric Launay à qui il emprunte honteusement cette idée.

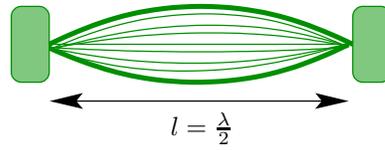


FIGURE 3.1 – Vibration d’une corde selon un seul ventre (cas irréaliste)

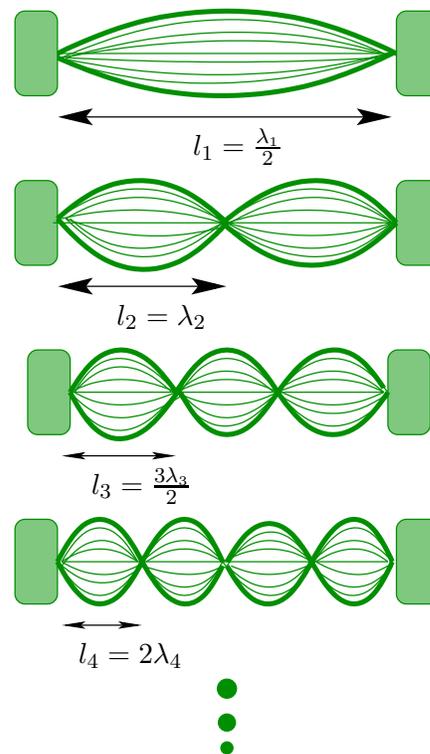


FIGURE 3.2 – Vibration d’une corde selon un ou plusieurs ventres (cas réaliste)

Cependant, ces vibrations n'ont pas toute la même importance. Ainsi la première vibration est la plus marquée. La hauteur du ventre, qui est proportionnelle à l'amplitude du signal sinusoïdal correspondant, est plus importante que pour les autres vibrations. C'est la vibration *fondamentale*. Plus le nombre de ventres est élevé (donc plus la fréquence est élevée), plus l'amplitude de la vibration diminue. On obtient des vibrations *harmoniques*. Plus précisément, on dit que la fondamentale est la première harmonique et que les autres vibrations sont les harmoniques de rang 2, 3, 4, etc.

Par exemple, si l'on suppose que la plus faible des fréquences de vibration de la corde pincée est  $f_1 = 55\text{Hz}$ , alors cette vibration fondamentale, une fois convertie en son, correspond à la note **La**, plus précisément **La0**, c'est-à-dire le **La** de la première octave audible (remarque : la gamme de fréquences audibles va de 20Hz à 20kHz). La fréquence  $f_2 = 2f_1 = 110\text{Hz}$  correspond à la deuxième harmonique qui est le **La1**, c'est-à-dire le **La** de la deuxième octave. Puis,  $f_3 = 3f_1 = 165\text{Hz}$  est la fréquence de la troisième harmonique appelée *quintoiement* par les musiciens. Elle correspond au **Mi2**.  $f_4 = 4f_1 = 220\text{Hz}$  (quatrième harmonique) est le **La2**, etc..

Lorsque la corde de guitare est pincée, la note entendue est essentiellement la fondamentale mais elle est plus ou moins habillée de ses harmoniques selon l'instrument, ce qui donne un *timbre* à la note.

**Remarque 3.1** *La qualité du son entendu est également lié à la façon dont la caisse de résonance amplifie et restitue le son produit par la vibration, donc au savoir-faire du luthier.*

Un diapason est censé, autant que possible, émettre un son pur (ce qui n'est pas tout à fait vrai). Cela veut dire qu'il émet uniquement la *fondamentale* et que les harmoniques sont idéalement absentes du son émis.

En revanche, comme on vient de le voir, une corde de guitare émet à la fois la fondamentale et ses harmoniques. Plus le rang  $n$  de l'harmonique est élevé (fréquence  $f_n = n.f_1$ ), moins la contribution au son de cette harmonique est forte. Ainsi, on peut imaginer qu'un son de corde pour le **La0** est constitué principalement d'une sinusoïde de fréquence  $f_1 = 55\text{Hz}$  à laquelle il faut ajouter un certain nombre d'autres sinusoïdes d'amplitudes moindres aux fréquences  $f_2 = 110\text{Hz}$ ,  $f_3 = 165\text{Hz}$ ,  $f_4 = 220\text{Hz}$ , etc. Au-delà d'une certaine fréquence, on peut considérer que les harmoniques sont si peu significatives qu'elles sont absentes du signal.

Du point de vue sonore, on a souvent l'impression de n'entendre que la fondamentale, surtout pour une oreille peu exercée. En effet, les contributions harmoniques sont très faibles. On suppose par exemple qu'une corde est pincée et émet un signal sonore correspondant à une sinusoïde de fréquence  $f_1 = 55\text{Hz}$  :

$$s_1(t) = \sin(2\pi f_1 t).$$

Puis, on suppose que ce signal fondamental est accompagnée de ses harmoniques de rang 2, 3 et 4 qui présentent évidemment des amplitudes plus faibles (au-delà, les harmoniques sont supposées d'amplitudes négligeables) :

$$\begin{cases} s_2(t) &= 0,15 \sin(2\pi f_2 t), & f_2 &= 2f_1, \\ s_3(t) &= 0,1 \sin(2\pi f_3 t), & f_3 &= 3f_1, \\ s_4(t) &= 0,05 \sin(2\pi f_4 t), & f_4 &= 4f_1. \end{cases}$$

Le signal global est alors exprimé par la somme suivantes (remarque : les sinusoïdes sont synchronisées) :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t).$$

L'ensemble de ses signaux est représenté sur la figure 3.3.

Il est difficile, voire impossible, à la vue de la *représentation temporelle* du seul signal  $s(t)$  (5<sup>ème</sup> courbe de la figure 3.3) d'estimer la contribution des différentes harmoniques. En disposant des quatre premières courbes, c'est-à-dire des représentations temporelles des harmoniques en question, on peut obtenir cette information en regardant les différentes amplitudes mais ceci n'est pas très visuel. Une façon synthétique de visualiser les contributions des différentes harmoniques au signal total est de représenter les amplitudes en fonction des fréquences qui contribuent au signal, comme sur la figure 3.4. On parle de *représentation fréquentielle* ou de *représentation spectrale* du signal. Le *spectre* du signal est l'ensemble des fréquences qui y sont contenues.

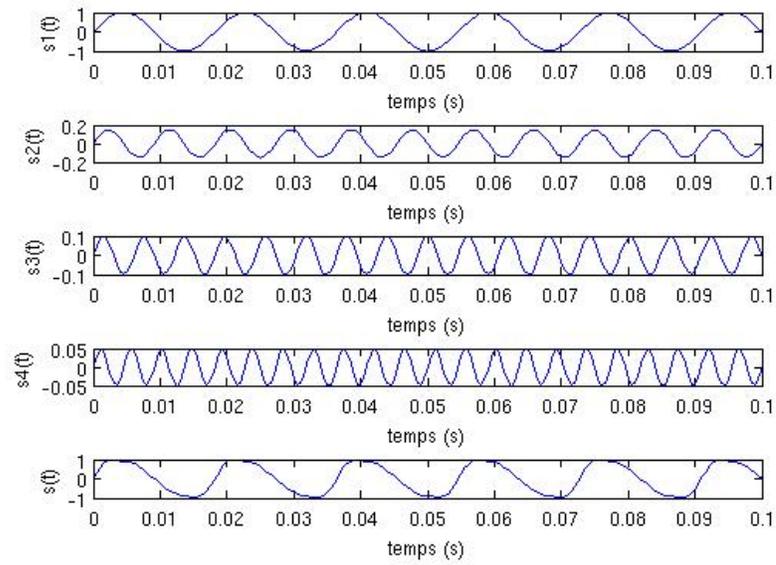


FIGURE 3.3 – Signal sonore issue d’une corde avec ses harmoniques (amplitudes non réalistes et sans unité)

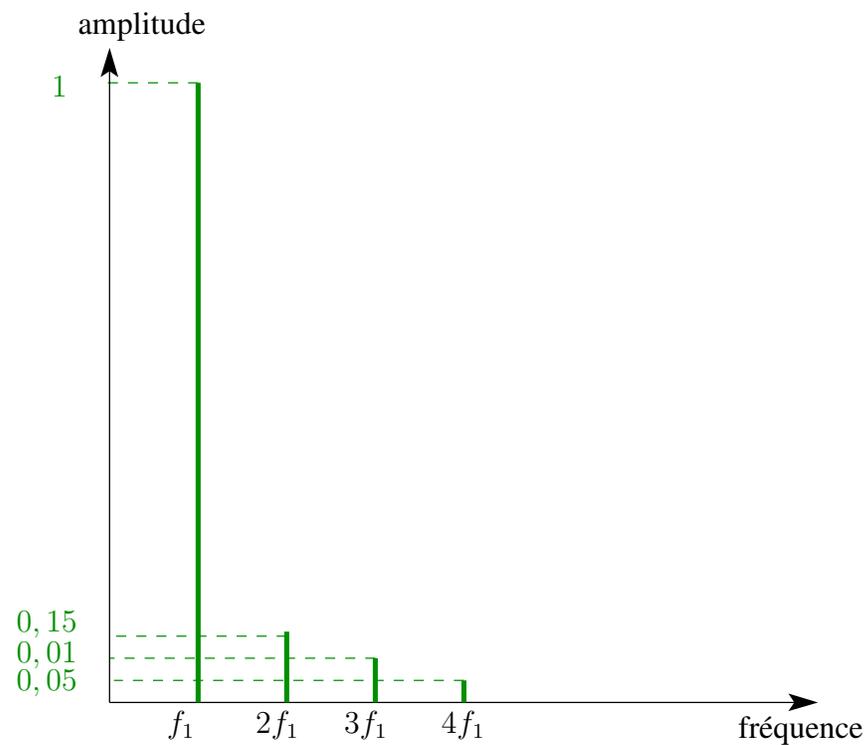


FIGURE 3.4 – Représentation spectrale du signal issu du pincement de la corde

Bien entendu dans l'exemple de la corde de guitare, le signal final est par construction une somme de signaux sinusoïdaux. La représentation spectrale est donc assez aisée à concevoir. La question majeure de ce chapitre est celle de la représentation spectrale de tout signal, en particulier périodique. Dans le cas présent, on est parti des différentes harmoniques pour construire le signal total. Souvent, c'est le chemin inverse qui est emprunté. Comment, à partir d'un signal dont on connaît la représentation temporelle (souvent une fonction de  $t$ ) peut-on retrouver la représentation spectrale, c'est-à-dire les raies de fréquences comme celles de la figure 3.4?

## 3.2 Représentation spectrale d'un signal périodique

L'idée de représentation fréquentielle est maintenant formulée de manière plus précise avec quelques notions mathématiques. Dans un premier temps, seuls les signaux périodiques sont traités et le concept de *décomposition en série de Fourier* est introduit. Ensuite, le cas des signaux apériodiques est également traité grâce à la notion de *transformation de Fourier*.

### 3.2.1 Développement en série de Fourier

Dans ce paragraphe, seuls les signaux *périodiques* seront considérés. On dit d'un signal  $s(t)$  qu'il est périodique s'il est reproduit à l'identique à intervalles de temps régulier. Cet intervalle est la période. Mathématiquement, un signal  $s(t)$  est périodique de période  $T_p$  si et seulement si

$$s(t + T_p) = s(t), \quad \forall t.$$

On rappelle que  $f_p = \frac{1}{T_p}$  est la *fréquence* du signal et que  $\omega_p = 2\pi f_p$  est sa *pulsation*.

Dans la partie précédente, on a étudié un peu un exemple de signal périodique qui se décompose en une somme de sinusoides. On pourrait penser que c'est une particularité de ce signal mais il n'en est rien. En effet, suite à de nombreux travaux sur les cordes vibrantes (encore elles !) et sur la propagation de la chaleur, travaux menés entre autres par Jean le Rond d'Alembert, Leonhard Euler et Daniel Bernouilli (fils de Jean et neveu de Jacques), Joseph Fourier propose une solution mathématique au problème présent.

Tout (ou presque tout) signal périodique  $s(t)$  de pulsation  $\omega_p$  (donc de fréquence  $f_p$  et de période  $T_p$ ) est décomposable en une somme infinie de sinusoides :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_p t) + b_n \sin(n\omega_p t)), \quad (3.2)$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) \cos(n\omega_p t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) \sin(n\omega_p t) dt \quad \forall n \geq 1. \quad (3.3)$$

Cette somme est appelée *décomposition en série de Fourier* et les valeurs  $a_n$  et  $b_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  en sont les *coefficients*.

En réalité, il existe des restrictions sur les signaux qui admettent ce genre de décomposition, comme démontré par Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet et Camille Jordan, mais ce sont des subtilités mathématiques qui peuvent être ignorées ici. La démonstration du résultat est également omise.

Il est possible de représenter cette décomposition en séries de Fourier, grâce aux coefficients, comme illustré sur un exemple totalement quelconque par la figure 3.5 (remarque : l'axe des abscisses fait apparaître les fréquences mais il pourrait tout aussi bien faire apparaître les pulsations). Dans les *spectres* représentés, l'information consiste

en une série d'impulsions de Dirac décalées (cf. §1.3) dont la *force* prend la valeur du coefficient représenté. On désigne souvent par « raies spectrales » ces impulsions.

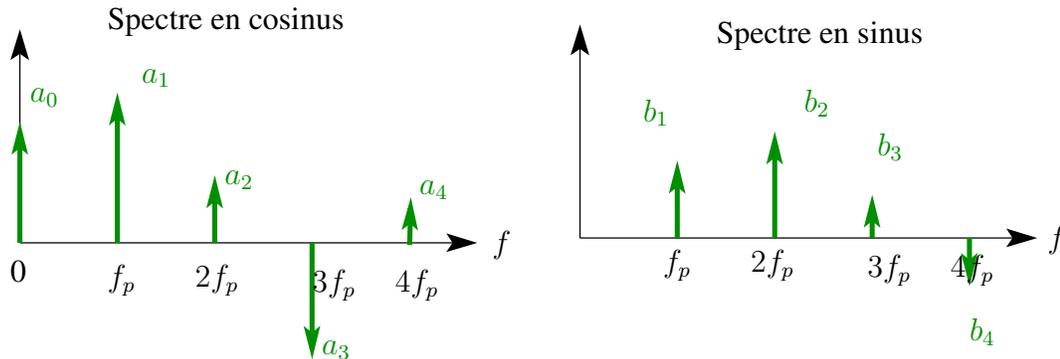


FIGURE 3.5 – Spectres en cosinus et sinus d'un signal périodique quelconque

**Remarque 3.2** Attention ! Il s'agit d'impulsions de Dirac avec comme argument la fréquence  $f$  et non le temps  $t$ . Cela ne change pas la description mathématique de l'impulsion mais il faut bien être conscient que  $\delta(f) \neq \delta(t)$ .

On peut noter que les coefficients de la série peuvent être positifs ou négatifs. Le coefficient  $a_0$  correspond à une composante constante (une sorte d'*offset* du signal). Il apparaît logiquement dans le spectre en cosinus puisque  $a_0 = a_0 \cos(0)$ . Cette composante continue est bien à fréquence 0. On peut définir par cohérence un coefficient  $b_0 = 0$  si on le souhaite.

En outre, il est intéressant d'introduire pour chaque fréquence concernée la quantité suivante,

$$V_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \forall n \geq 0,$$

qui est appelée *amplitude* de rang  $n$  du signal  $s(t)$ . Il est facile de vérifier que

$$V_0 = |a_0|,$$

pour la composante continue.  $V_1$  est l'amplitude de la *fondamentale* et les quantités  $V_n, \forall n > 1$  sont les amplitudes des harmoniques de rang  $n$ .

La formule (3.2) peut se récrire

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \left( \frac{a_n}{V_n} \cos(n\omega_p t) + \frac{b_n}{V_n} \sin(n\omega_p t) \right). \quad (3.4)$$

En notant que

$$\left( \frac{a_n}{V_n} \right)^2 + \left( \frac{b_n}{V_n} \right)^2 = 1,$$

on peut définir, pour chaque valeur de  $n$ , un nombre  $\phi_n$  tel que

$$\cos(\phi_n) = \frac{a_n}{V_n}.$$

Il en existe en fait deux qui sont opposés. Quoi qu'il en soit, on a

$$\left( \frac{a_n}{V_n} \right)^2 = \cos^2(\phi_n)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{b_n}{V_n}\right)^2 = 1 - \cos^2(\phi_n) = \sin^2(\phi_n) \Rightarrow \sin(\phi_n) = \pm \frac{b_n}{V_n}.$$

On fait le choix

$$\sin(\phi_n) = -\frac{b_n}{V_n},$$

ce qui tranche entre les deux valeurs possibles de  $\phi_n$  et conduit à réécrire  $s(t)$  ainsi :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n (\cos(\phi_n) \cos(n\omega_p t) - \sin(\phi_n) \sin(n\omega_p t)).$$

Après application de la formule trigonométrique bien connue, il vient

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \cos(n\omega_p t + \phi_n). \quad (3.5)$$

Dans cette expression essentielle,  $\phi_n$  est appelée *phase* au rang  $n$ , ce qui signifie que les harmoniques (fondamentale comprise) sont déphasées les unes par rapport aux autres. La contribution de chaque harmonique est bien sûr quantifiée par  $V_n$  même si  $\phi_n$  participe à la forme du signal global.

Il faut bien comprendre que  $\phi_0 = 0$  si la valeur moyenne  $a_0$  de  $s(t)$  est positive ou nulle et  $\phi = -\pi$  rad si cette valeur  $a_0$  est strictement négative.

Il est possible de reprendre l'idée de la figure 3.5 en remplaçant les coefficients de la série par  $V_n$  et  $\phi_n$ , comme illustré sur la figure 3.6.

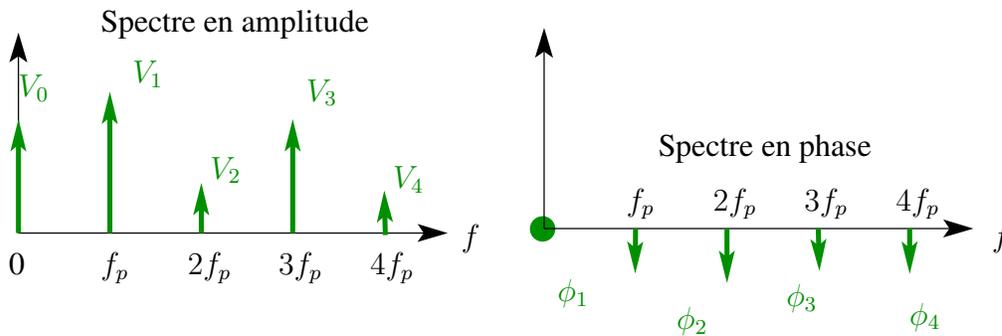


FIGURE 3.6 – Spectres en amplitude et en phase d'un signal périodique quelconque

**Remarque 3.3** Il existe un appareil, appelé analyseur de spectre qui, s'il dispose comme entrée d'un signal périodique, fournit le spectre en amplitude mais pas le spectre de phase. Un dispositif de ce genre sera largement utilisé en travaux pratiques. Bien sûr, la hauteur des raies affichées par l'appareil correspond bien à la force des impulsions de Dirac, non à leur hauteur infinie.

**Remarque 3.4** Il est bien sûr possible de s'appuyer sur les formules mathématiques pour obtenir  $a_n$  et  $b_n$ , puis, par extension,  $V_n$  et  $\phi_n$ . Cependant, il existe des tables qui fournissent ces éléments pour les signaux usuels. Il faut par ailleurs noter deux propriétés classiques :

- Lorsque  $s(t)$  est pair c'est-à-dire que  $s(-t) = s(t)$ ,  $\forall t$ , il vient  $b_n = 0$ ,  $\forall n \geq 0$ .
- Lorsque  $s(t)$  est impair c'est-à-dire que  $s(-t) = -s(t)$ ,  $\forall t$ , il vient  $a_n = 0$ ,  $\forall n \geq 0$ .

### 3.2.2 Représentation spectrale bilatérale

Par définition, une fréquence est positive. Toutefois, l'abstraction mathématique (qui n'est pas toujours un ennemi !) conduit parfois à des notions étranges comme celles de *fréquence négative* ou *spectre bilatéral*. L'idée n'est pas si compliquée. Lorsque l'on parle d'impédance complexe, ou de nombre complexe associé à un signal, il n'est nulle question d'imaginer que la grandeur physique considérée est complexe et donc peut évoluer sur deux axes. Il s'agit juste d'un procédé mathématique qui, s'il semble étrange au début, est introduit pour simplifier certains aspects calculatoires.

Dans cet esprit, on rappelle les formules d'Euler :

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i},$$

où  $i$  désigne l'unité imaginaire des nombres complexes. L'application de ces formules à la relation (3.2) conduit à

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{in\omega_p t} + \left( \frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-in\omega_p t} \right).$$

On pose

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n > 0$$

définissant ainsi des coefficients d'indices négatifs. Ces coefficients sont donc indicés de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Ils peuvent être directement calculés par les formules

$$c_0 = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) dt, \quad c_n = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) e^{-in\omega_p t} dt, \quad c_{-n} = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) e^{in\omega_p t} dt \quad \forall n > 0, \quad (3.6)$$

Le résultat est maintenant résumé, mais en utilisant une écriture plus compacte qui permet d'oublier la notation  $c_{-n}$  et qui intègre  $c_0$  à la somme :

Tout (ou presque tout) signal périodique  $s(t)$  de pulsation  $\omega_p$  (donc de fréquence  $f_p$  et de pulsation  $T_p$ ) et d'énergie finie est décomposable en une somme infinie d'exponentielles :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_p t}, \quad (3.7)$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) e^{-in\omega_p t} dt, \quad \forall n \quad (3.8)$$

Cette somme est appelée *décomposition en série de Fourier bilatérale* et les valeurs  $c_n$  en sont les *coefficients* (la formule (3.6) reste valable).

La moitié des termes de cette somme font apparaître des coefficients d'indice négatifs associés à des exponentielles dont l'argument fait virtuellement apparaître une pulsation (ou une fréquence) négative ( $n\omega_p = 2n\pi f_p$  avec  $n$  négatif). C'est pourquoi l'on parle de *fréquence négative* et de *spectre bilatéral*. On peut ainsi reprendre l'idée des figures 3.5 ou 3.6 mais en utilisant la partie réelle et la partie imaginaire des coefficients de la série, sachant que

$$R_n = \operatorname{Re}(c_n) = \operatorname{Re}(c_{-n}) = R_{-n}, \quad I_n = \operatorname{Im}(c_n) = -\operatorname{Im}(c_{-n}) = -I_{-n}.$$

Un tel spectre est représenté sur la figure 3.7.

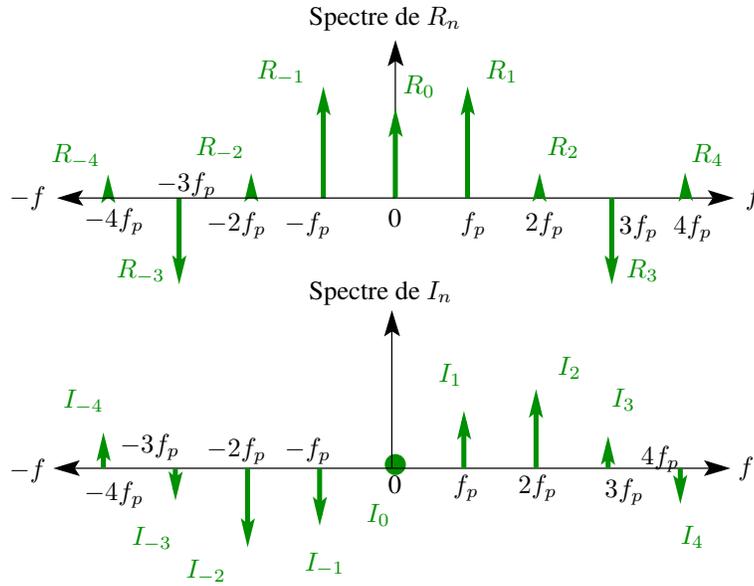


FIGURE 3.7 – Spectre bilatéral d'un signal périodique quelconque

Sur cette figure, on constate que le spectre de la partie réelle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (propriété de parité) alors que le spectre de la partie imaginaire est symétrique par rapport à l'origine des axes (propriété d'imparité).

Les coefficients  $c_n$  vérifient les relations

$$|c_0| = V_0, \quad |c_n| = \frac{|V_n|}{2}, \quad \text{Arg}(c_n) = \phi_n \quad \forall n. \quad (3.9)$$

Ainsi, il est aussi possible de tracer le spectre en  $|c_n|$  et celui en  $\phi_n$ , ce qui peut ressembler à la figure 3.8.

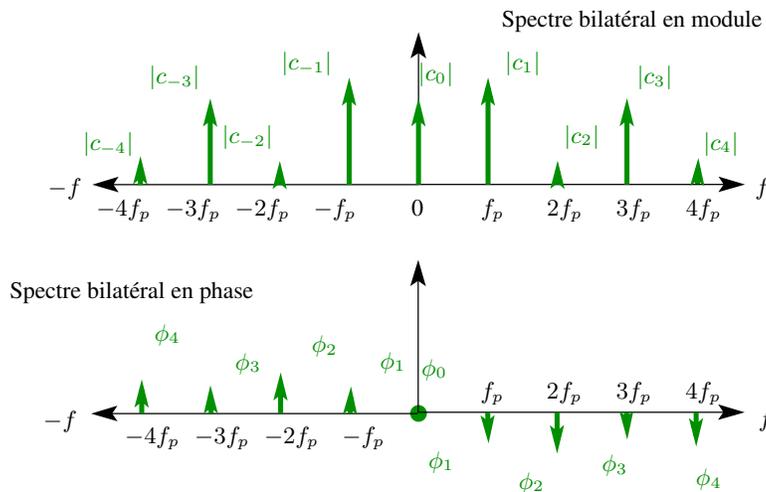


FIGURE 3.8 – Spectre bilatéral en module et en phase

Cette figure laisse penser que le spectre de module est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (ce qui est

vrai) et que celui de phase est symétrique par rapport à l'origine du repère (ce qui peut être vrai lorsque  $\phi_0 = 0$  (valeur moyenne du signal positive ou nulle) et pour des choix pertinents d'arguments, ces derniers étant définis modulo  $2\pi$ ).

### 3.3 Représentation spectrale d'un signal aperiodique

Les résultats de la partie précédente ne sont valables que pour des signaux périodiques. Or, en traitement du signal, on peut rencontrer des signaux qui ne le sont pas. Ce n'est pas pour autant qu'il est exclu de leur trouver une représentation fréquentielle. Il faut simplement changer d'outil et envisager les choses de façon un peu plus générale, grâce à la *transformation de Fourier*.

#### 3.3.1 Transformation de Fourier

Lorsqu'un signal est périodique de période  $T_p = \frac{1}{f_p}$ , son spectre fait apparaître des *raies* distantes de  $f_p$  et correspondant aux diverses harmoniques présentes dans le signal, comme sur les figures 3.5, 3.6 et 3.7. Bien entendu, plus la période  $T_p$  est élevée, plus les raies se rapprochent. Si l'on pousse le raisonnement à sa limite, un signal *aperiodique* peut être interprété comme un signal périodique de période infinie. L'espace entre les raies se réduit alors à zéro et le spectre, au lieu d'être composé de plusieurs raies espacées, se transforme en une courbe continue où tous les points viennent se toucher. On ne peut alors plus vraiment parler d'harmoniques de rang  $n$ . L'espace fréquentiel n'est plus discret mais continu (le spectre, quel qu'il soit, est défini pour toute valeur de  $f$ ).

Le raisonnement précédent est très graphique mais il faut maintenant regarder la conséquence mathématique de tout cela. Pour cela, on se réfère plutôt à la formule « bilatérale » (3.7), qui ne s'applique que pour les signaux périodiques et qui est rappelée ci-après :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_p t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(\tau) e^{-in\omega_p \tau} d\tau \right) e^{in\omega_p t}. \quad (3.10)$$

On vient de voir que dans le cas où  $s(t)$  est périodique, la fréquence  $f$  ne contribue à la représentation fréquentielle du signal que si elle est un multiple de la fréquence fondamentale  $f_p$ . Autrement dit, on considère que  $f = n f_p$ , où  $n$  indique le « numéro » de la raie spectrale. On voit bien apparaître  $n$  dans la formule ci-avant.

Dans le cas aperiodique, on peut toujours considérer

$$f = n f_p = \frac{n}{T_p}$$

mais en notant que  $T_p \rightarrow \infty$  (ou  $f_p \rightarrow 0$ ). Ainsi, les raies spectrales se « collent » les unes aux autres et  $f$  devient une variable continue (elle peut prendre toutes les valeurs réelles). Il convient donc de remplacer la somme discrète (symbolisée par le  $\Sigma$ ) par une somme continue, c.-à-d. une intégrale, en  $f$ , en notant bien que

$$\begin{cases} f & = \frac{n}{T_p} \Rightarrow dn = T_p df, \\ T_p & \rightarrow \infty, \\ \omega_p T_p & = 2\pi. \end{cases}$$

Ceci conduit à

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_p} \left( \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-2i\pi f \tau} d\tau \right) e^{2i\pi n f_p t} dn \\ s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-2i\pi f \tau} d\tau \right)}_{S(f)} e^{2i\pi f t} df \\ &\Leftrightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{2i\pi f t} df. \end{aligned}$$

On a donc

<u>périodique</u>	<u>apériodique</u>
$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2i\pi n f_p t}$	$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{2i\pi f t} df$

Dans le cas périodique (fréquence discrète, donc somme discrète),  $f$  ne peut valoir que  $n f_p$  alors que dans le cas apériodique (fréquence continue, donc somme continue=intégrale),  $f$  peut prendre toute valeur réelle. Quant à la fonction  $S(f)$ , elle joue, dans le cas apériodique, le même rôle que celui joué par la suite complexe  $c_n$  dans le cas périodique.

Cette analogie ne peut se faire qu'à partir de la série de fourier bilatérale. C'est donc ici que l'on comprend l'intérêt théorique de ce développement bilatéral.

Il faut noter que dans le cas périodique, ce sont les coefficients  $c_n$  qui déterminent la hauteur des diverses raies spectrales (par leur phase et leur module notamment). On comprend ici, par analogie entre  $c_n$  et  $S(f)$ , que c'est  $S(f)$  (par son module et sa phase qui sont des fonctions de  $f$ ) qui détermine la représentation spectrale d'un signal apériodique.

L'opération mathématique qui consiste à associer à  $s(t)$  la quantité  $S(f)$  est appelée *transformation de Fourier* et l'image de  $s(t)$ , c'est-à-dire  $S(f)$  elle-même, est appelée *transformée de Fourier*.

La transformation de Fourier est souvent notée  $\mathcal{F}$  de sorte qu'avec les présentes notations, il vient

$$\mathcal{F}(s)(f) = S(f).$$

Voici un résumé de ce qu'il faut retenir.

Tout (ou presque tout) signal apériodique  $s(t)$  borné et d'énergie bornée (finie) admet une *transformée de Fourier*

$$\mathcal{F}(s)(f) = S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-2i\pi f t} dt. \quad (3.11)$$

qui permet d'établir un *spectre continu* du signal  $s(t)$ .

La transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  admet quelques propriétés :

- parité :  
Lorsque  $s(t)$  est pair c'est-à-dire que  $s(-t) = s(t)$ ,  $\forall t$ , il vient

$$S(f) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos(2\pi f t) dt.$$

- imparité :  
Lorsque  $s(t)$  est impair c'est-à-dire que  $s(-t) = -s(t)$ ,  $\forall t$ , il vient

$$S(f) = 2i \int_0^{\infty} s(t) \sin(2\pi f t) dt.$$

- linéarité :

$$s_1(t) + k s_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S_1(f) + k S_2(f), \quad k \in \mathbb{R}$$

- contraction du domaine :

$$s(kt) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|k|} S\left(\frac{f}{k}\right), \quad k \in \mathbb{R}$$

- Translation temporelle :

$$s(t + t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} S(f)e^{2i\pi ft_0}, \quad t_0 \in \mathbf{R}$$

- Modulation dans le domaine temporel :

$$s(t)e^{i2\pi f_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} S(f - f_0), \quad f_0 \in \mathbf{R}$$

- Produit de convolution :

$$(s_1 * s_2)(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S_1(f)S_2(f)$$

(On verra plus tard ce que cela signifie.)

- Produit simple :

$$s_1(t)s_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S_1(f) * S_2(f)$$

(On verra plus tard ce que cela signifie.)

- Dérivation :

$$\frac{ds(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2i\pi f S(f)$$

- Intégration :

$$\int_0^t s(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{S(f)}{2i\pi f}$$

- Dualité :

$$\text{Si } s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S(f) \text{ alors } S(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} s(-f)$$

Pour déterminer une transformée de Fourier, on peut bien sûr se lancer dans le calcul de l'intégrale mais on peut aussi utiliser des tableaux qui fournissent les transformées pour des signaux usuels.

Il est important, en pratique, de comprendre qu'un analyseur de spectre ne peut pas vraiment produire le spectre d'amplitude d'un signal aperiodique. Il considère un horizon assez long de temps comme une période et donne un spectre d'amplitude relatif à cette période. Si l'horizon est très large, on voit plein de raies rapprochées qui permettent d'avoir d'une idée du spectre continu du signal.

### 3.3.2 Transformation inverse de Fourier

Il existe un moyen de revenir du domaine fréquentiel au domaine temporel en utilisant la *transformation de Fourier inverse*.

Tout (ou presque tout) spectre  $S(f)$  admet une *transformée de Fourier inverse*

$$\mathcal{F}^{-1}(S)(t) = s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{2i\pi ft}df. \quad (3.12)$$

Ses propriétés sont liées à celle de  $\mathcal{F}$  et on peut se référer aux mêmes tableaux de transformées.

### 3.3.3 Transformée de Fourier et impulsion de Dirac

Il est très important de noter (ceci sans démonstration) que la transformation de Fourier du Dirac temporel et du Dirac temporel décalé sont données par

$$\mathcal{F}(\delta(t))(f) = 1, \quad \mathcal{F}(\delta(t - \alpha))(s) = e^{-2i\pi\alpha f}, \quad (3.13)$$

en tenant notamment compte des propriétés de l'impulsion de Dirac vues au chapitre précédent et de celles de  $\mathcal{F}$  vues en §3.3.1.

On peut définir la fonction  $A\delta(t)$  (Dirac de force  $A$ ) qui a pour transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(A\delta(t))(f) = A, \quad (3.14)$$

et la fonction  $A\delta(t - \alpha)$  (Dirac de force  $A$  décalé d'un temps  $\alpha$ ) qui a pour transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(A\delta(t - \alpha))(f) = Ae^{-2i\pi f\alpha}. \quad (3.15)$$

De la même manière, on peut calculer (le calcul n'est pas fourni) la transformée de Fourier inverse de l'impulsion de Dirac fréquentielle (centrée ou décalée) :

$$\mathcal{F}^{-1}(A\delta(f))(t) = A, \quad \mathcal{F}^{-1}(A\delta(f - f_0))(t) = Ae^{2i\pi f_0 t}. \quad (3.16)$$

### 3.3.4 Transformation de Fourier et série de Fourier

Cette partie ne concerne que les signaux périodiques. Pour de tels signaux, la représentation spectrale consiste en un ensemble de Dirac tels que ceux dessinés sur la figure 3.8. Le but de paragraphe est de montrer que cette représentation du spectre est compatible avec la représentation du spectre fournie par  $\mathcal{F}$ .

Il est rappelé qu'un signal  $s(t)$  périodique, de période  $T_p$  admet un développement bilatéral en série de Fourier

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_p t}.$$

Comme  $\mathcal{F}$  est un opérateur linéaire (cf. §3.3.1), il vient

$$S(f) = \mathcal{F}(s)(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}(e^{2i\pi n f_p t}).$$

Compte tenu de la relation (3.16), il vient

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - n f_p). \quad (3.17)$$

La transformée de Fourier d'un signal périodique est bien, mathématiquement, la combinaison de plusieurs impulsions de Dirac fréquentielles et décalées représentant les harmoniques. Chaque impulsion est pondérée par le coefficient  $c_n$  qui devient une force complexe associée au Dirac. La représentation graphique de cette « fonction » mathématique peut tout à fait être celle de la figure 3.8..

En conclusion, il était judicieux de représenter les harmoniques par des impulsions de Dirac dans le paragraphe 3.2.1. Ainsi, les deux outils que sont la décomposition en série de Fourier et la transformation de Fourier sont bien compatibles dans cette représentation spectrale. Le cas périodique devient un cas particulier du cas apériodique. On pourra noter  $S(f)$  dans les deux cas pour désigner le spectre.

## 3.4 Énergie et représentation spectrale : théorème de Parseval

### 3.4.1 Cas général

On a, vu au chapitre précédent, quelle était l'expression de l'énergie totale d'un signal  $s(t)$ , rappelée ci-après :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt.$$

Et bien cette énergie peut aussi être calculée à partir de la transformée de Fourier  $S(f)$  du signal, grâce à l'égalité suivante :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df. \quad (3.18)$$

Cette égalité est appelée *égalité de Parseval*, ou *théorème de Parseval*, ou encore *identité de Rayleigh*. Elle montre que l'énergie ne dépend pas de la représentation choisie (temporelle ou fréquentielle). La quantité  $\Phi(f) = |S(f)|^2$  est appelée *densité spectrale d'énergie*.

Une interprétation peut-être plus intéressante de ce théorème est que l'énergie totale est la somme des énergies de chaque harmonique. Dans le cas apériodique, cette interprétation est sujète à caution puisque les harmoniques ne sont pas définies mais il faut entendre cette somme comme la somme continue (donc une intégrale) de toutes les contributions à chaque fréquence. Le paragraphe suivant aborde le cas des signaux périodiques.

### 3.4.2 Cas périodique

Lorsque le signal  $s(t)$  est périodique de période  $T_p$  et est décrit par les représentations fréquentielles (3.2-3.3) ou (3.7-3.8), il peut vraiment être vu comme la somme de toutes ses harmoniques. L'interprétation précédente se traduit par la formule suivante, qui exprime cette fois-ci la puissance moyenne :

$$P = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (3.19)$$

Ceci signifie que l'on peut définir, au même titre que les spectre d'amplitude ou de phase, etc., un spectre de puissance dans lequel chaque « raie » exprime la contribution de l'harmonique à la puissance moyenne.

## 3.5 Intérêt de la représentation spectrale

Dans cette courte partie, on se pose la question essentielle : à quoi ça sert tout ça ?

Il est encore difficile à ce stade des connaissances de prendre la mesure de l'intérêt de la représentation spectrale. Toutefois, on peut lancer quelques indices.

Si un analyseur de spectre fait apparaître une raie importante à une fréquence qui ne devrait pas figurer dans le signal étudié, c'est que ce dernier est entaché d'un bruit qui caractérise peut-être un phénomène craint ou connu. Si le spectre d'un signal correspondant aux battements de coeur fait apparaître des raies surprenantes, c'est peut-être lié à une anomalie cardiaque. Dans bien des domaines, les défauts ou anomalies laissent une « signature fréquentielle » qui permet de les identifier.

De plus, et on le verra plus tard, il est parfois possible d'isoler les différentes composantes d'un signal, surtout si on comprend bien cette idée de spectre (idée de *filtrage*). Ainsi on peut éventuellement isoler un signal caractéristique d'un défaut pour mieux l'étudier ou au contraire, on peut parfois « nettoyer » un signal en le débarrassant de son bruit.

Lorsque l'on écoute une station de radio, on isole dans l'ensemble des ondes émises une composante à une fréquence donnée qui permet ensuite de reconstituer le signal sonore. Ce raisonnement serait un peu difficile si l'on n'avait pas cette vision fréquentielle des signaux.

Dans cet esprit, le prochain chapitre est consacré au filtrage.

### 3.6 Retour à la classification

La représentation spectrale permet de revenir un peu à la classification des signaux (cf. paragraphes 1.2 et 2.3) et d'introduire, de nouveau, des distinctions entre les signaux en fonction des fréquences qu'ils transportent. En effet, on vient de voir que tout signal, même apériodique, est caractérisé par un spectre et, par conséquent, par un ensemble de fréquences.

Si l'on appelle  $f_{\min}$  et  $f_{\max}$  la plus petite et la plus grande fréquence significative dans le spectre d'un signal  $s(t)$  (par fréquences significatives, on entend généralement les fréquences pour laquelle la puissance est non négligeable). Alors on définit la bande de fréquence par

$$\Delta f = f_{\max} - f_{\min}.$$

Cette bande de fréquence s'exprime bien sûr en Hz. La fréquence moyenne sur cette bande est donnée par

$$f_{\text{moy}} = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2}.$$

On distingue alors :

— les signaux à *bande étroite* pour lesquels

$$\frac{\Delta f}{f_{\text{moy}}} \ll 1;$$

— les signaux à *large bande* pour lesquels

$$\frac{\Delta f}{f_{\text{moy}}} > 1.$$

Pour les signaux à bande étroite, on distingue encore :

- les signaux d'extrêmement basses fréquences (EBF) pour lesquels  $f_{\text{moy}} < 30\text{Hz}$  (détection de phénomènes naturels);
- les signaux de super basses fréquences (SBF) pour lesquels  $30\text{Hz} < f_{\text{moy}} < 300\text{Hz}$  (communications entre sous-marins, réseaux électriques et leur rayonnement);
- les signaux d'ultra basses fréquences (UBF) pour lesquels  $300\text{Hz} < f_{\text{moy}} < 3\text{kHz}$  (détection de phénomènes naturels (magnétiques terrestres), radio-amateurisme, téléphonie);
- les signaux de très basses fréquences (TBF) pour lesquels  $3\text{kHz} < f_{\text{moy}} < 30\text{kHz}$  (implants médicaux, communications entre sous-marins);
- les signaux de basses fréquences (BF) pour lesquels  $30\text{kHz} < f_{\text{moy}} < 300\text{kHz}$  (radionavigation, radio grandes ondes);
- les signaux de moyennes fréquences (MF) pour lesquels  $300\text{kHz} < f_{\text{moy}} < 3\text{MHz}$  (radio AM, appareils de recherche de victimes d'avalanche);
- les signaux de hautes fréquences (HF) pour lesquels  $3\text{MHz} < f_{\text{moy}} < 30\text{MHz}$  (domaines militaire, aéronautique, maritime, radio amateurisme, etc.);
- les signaux de très hautes fréquences (THF) pour lesquels  $30\text{MHz} < f_{\text{moy}} < 300\text{MHz}$  (radio FM, domaines militaire, aéronautique, maritime, radio amateurisme, SAMU, communication entre pompiers, etc.);
- les signaux d'ultra hautes fréquences (UHF) pour lesquels  $300\text{MHz} < f_{\text{moy}} < 3\text{GHz}$  (télévision, GSM, GPS, Wi-Fi);
- les signaux de super hautes fréquences (SHF) pour lesquels  $3\text{GHz} < f_{\text{moy}} < 30\text{GHz}$  (télévision satellite, micro-onde, radar météorologique);
- les signaux d'extrêmement hautes fréquences (EHF) pour lesquels  $30\text{GHz} < f_{\text{moy}} < 300\text{GHz}$  (systèmes anti-collision pour véhicules);

Les sons audibles vont des EBF (20Hz) aux TBF (20kHz).

Souvent, pour des fréquences au delà de 3GHz, on raisonne plutôt en longueurs d'onde. Ceci concerne surtout

les signaux lumineux :

- les signaux infrarouges pour lesquels  $700\text{nm} < \lambda < 0,1\text{mm}$  ;
- les signaux lumineux visibles pour lesquels  $400\text{nm} < \lambda < 700\text{nm}$  ;
- les signaux ultraviolets pour lesquels  $10\text{nm} < \lambda < 400\text{nm}$  ;
- les rayons  $X$  pour lesquels  $10\text{pm} < \lambda < 10\text{nm}$  (radiographie, astrophysique, cristallographie, etc.) ;
- les rayons  $\gamma$  pour lesquels  $\lambda < 10\text{pm}$  (radiographie, astronomie, imagerie médicale, etc.).

Si l'on dispose d'analyseurs de spectre très performants, on peut donc trouver, dans des signaux, des « traces de fréquences » de ce que l'on recherche ou de ce que l'on craint !



# Chapitre 4

## Filtrage des signaux continus

Dans ce chapitre, est évoquée la transformation d'un signal en un autre signal, notamment dans le but d'éliminer ou de réduire la contribution de certaines fréquences dans le signal. C'est la notion de *filtrage*. Sont notamment abordés les concepts de *produit de convolution* et de *fonction de transfert*.

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Motivation</b>	<b>35</b>
<b>4.2</b>	<b>Réponse impulsionnelle d'un filtre causal</b>	<b>36</b>
<b>4.3</b>	<b>Réponse d'un filtre : produit de convolution</b>	<b>37</b>
<b>4.4</b>	<b>Transformation de Fourier et produit de convolution</b>	<b>39</b>
<b>4.5</b>	<b>Principe et intérêt du filtrage</b>	<b>40</b>
4.5.1	Gabarits des filtres	40
4.5.2	Influence des gabarits sur le spectre	41

---

### 4.1 Motivation

Le principe du *filtrage* est résumé par la figure 4.1. Un signal  $e(t)$  traverse un système qui le modifie de sorte qu'en sortie de ce système, on obtient un autre signal  $s(t)$ .

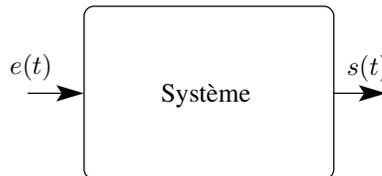


FIGURE 4.1 – signal  $e(t)$  modifié en un signal  $s(t)$  par un système (ou filtre)

Ce système peut correspondre par exemple à un canal de transmission de l'information contenue dans  $e(t)$  qui aurait l'inconvénient de déformer  $e(t)$  ou il peut aussi correspondre à un dispositif que l'on construirait pour extraire une information de  $e(t)$  et la retrouver plus simplement sur  $s(t)$ . On dit que  $s(t)$  est la *réponse* du système à  $e(t)$ .

La notion de *système* sera revue en Automatique mais elle est en fait déjà connue. Un système n'est rien d'autre qu'un *filtre* tel que ceux vus en électronique. On utilisera donc indifféremment le mot *système* ou le mot *filtre* même si, en traitement du signal, c'est plus en tant que *filtre* qu'il sera étudié.

Les modèles mathématiques des filtres peuvent être parfois très compliqués. Ici, on se contentera d'étudier les filtres dits linéaires, c'est-à-dire ceux qui sont décrits par une équation linéaire à coefficients constants :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}. \quad (4.1)$$

On appelle *ordre du système* la valeur  $n$ . Les systèmes physiques sont dits *causaux* c'est-à-dire que la sortie  $s(t)$  ne peut dépendre de l'entrée à un moment ultérieur. Ceci se traduit par  $n \geq m$ .

De tels systèmes présentent une propriété très intéressante : la *linéarité* qui leur donne leur nom et s'exprime ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} e(t) = e_1(t) \Rightarrow s(t) = s_1(t) \\ \& \\ e(t) = e_2(t) \Rightarrow s(t) = s_2(t) \end{array} \right\} \Rightarrow e(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) \Rightarrow s(t) = \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t) \quad \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.2)$$

Autrement dit, si  $s_1(t)$  est la réponse du filtre à  $e_1(t)$  et que  $s_2(t)$  est la réponse à  $e_2(t)$ , alors toute combinaison linéaire de  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  en entrée conduit à la même combinaison linéaire de  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  en sortie.

Ce n'est autre que la généralisation du *théorème de superposition* vu en électricité où les systèmes rencontrés étaient linéaires.

La meilleure solution pour comprendre ce qu'il advient de  $e(t)$  lorsqu'il traverse le filtre n'est pas toujours de résoudre l'équation différentielle (4.1) mais souvent de voir ce qui se passe aux différentes fréquences contenues dans  $e(t)$ .

Pour cela, on étudie, dans la partie suivante, la *réponse impulsionnelle* du filtre, c'est-à-dire sa réaction à la présence d'une impulsion sur  $e(t)$ . À partir de cette réponse, on étudie la réponse du même filtre à un signal quelconque.

## 4.2 Réponse impulsionnelle d'un filtre causal

La *réponse impulsionnelle* d'un filtre est sa réponse à une *impulsion de Dirac* (cf. §1.3). C'est une impulsion idéalisée qui ne doit pas être confondue avec avec  $\delta_d(t)$ , l'*impulsion unitaire discrète* (voir figure 4.2), définie par

$$\delta_{d_k} = \delta_{0k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Cette dernière est aussi une impulsion idéalisée mais ce n'est pas son intégrale qui vaut 1 pour  $t = 0$ , c'est simplement sa valeur proprement dite.

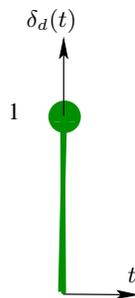


FIGURE 4.2 – Impulsion unitaire discrète

L'impulsion de Dirac et l'impulsion unitaire discrète sont des impulsions idéalisées qui ne sont, mathématiquement, rigoureusement, pas des fonctions, mais des *distributions*. Leur étude rigoureuse impliquerait donc l'étude des distributions mais ce ne sera pas nécessaire ici.

Soit maintenant l'impulsion d'amplitude  $e$  notée  $e\delta_d(t)$ . Elle correspond à une impulsion rectangulaire telle celle représentée que la figure 4.3.

De même que l'impulsion de Dirac a été définie à partir de la figure 1.5 en faisant tendre  $\Delta t$  vers zéro, on peut

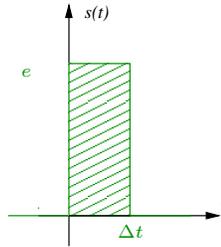


FIGURE 4.3 – Impulsion rectangulaire de hauteur  $e$

définir l'impulsion  $e\delta_d(t)$  comme la limite de la figure 4.3 lorsque  $\Delta t$  tend vers zéro (la largeur devient infiniment petite mais la hauteur reste constante). Par rapport à l'impulsion de Dirac, c'est la hauteur qui est différente et qui passe de  $\frac{1}{\Delta t}$  à une constante  $e$ . On écrira donc, un peu abusivement,

$$e\delta_d(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} e\Delta t\delta(t). \quad (4.4)$$

Si l'on décale cette impulsion d'un temps  $\tau$ , il faut aussi décaler le Dirac de sorte que

$$e\delta_d(t - \tau) = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} e\Delta \tau\delta(t - \tau). \quad (4.5)$$

On notera plutôt  $\Delta \tau$  l'intervalle de temps, puisqu'il s'agit maintenant d'un intervalle de temps autour de  $\tau$ . Ceci ne change de toute façon rien à la formule.

Enfin, on note  $g(t)$  la réponse du filtre à l'impulsion de Dirac :

$$e(t) = \delta(t) \Rightarrow s(t) = g(t). \quad (4.6)$$

Par ailleurs, si l'impulsion de Dirac est décalée d'un temps  $\tau$  en entrée, le système répondra lui aussi avec un retard de  $\tau$ , ce qui conduit à

$$e(t) = \delta(t - \tau) \Rightarrow s(t) = g(t - \tau). \quad (4.7)$$

Cette réponse impulsionnelle est importante pour déterminer la réponse à n'importe quel signal *causal* (défini uniquement pour  $t \geq 0$ ).

### 4.3 Réponse d'un filtre : produit de convolution

Il s'agit maintenant de déterminer, pour tout signal causal  $e(t)$ , l'expression de la sortie du filtre  $s(t)$  en fonction de  $g(t)$ .

À un instant quelconque  $\tau$ , le signal  $e(t)$  a pour valeur  $e(\tau)$ ... ce qui est une parfaite évidence. Si l'on suppose maintenant que le signal n'existe qu'à l'instant  $\tau$ , alors il se résume à une impulsion d'amplitude  $e(\tau)$ , située à l'instant  $\tau$  qui s'écrit donc  $e(\tau)\delta_d(t - \tau) = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} e(\tau)\Delta \tau\delta(t - \tau)$ , comme on l'a vu dans la partie précédente. Plus exactement si l'on considère un temps infinitésimal correspondant à l'élément différentiel  $d\tau$  (il s'agit de  $\Delta \tau$  tendant vers zéro), alors à cet élément différentiel de temps, on associe un élément différentiel du signal d'entrée  $de_\tau = e(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$ . Oui mais voilà, le signal  $e(t)$  est défini pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ . Ceci veut dire qu'il est la somme de tous les éléments différentiels  $de_\tau$  que l'on peut rencontrer au cours du temps jusqu'à  $t$  :

$$e(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau)\delta(t - \tau)d\tau.$$

Or, quelle est la réponse impulsionnelle de chaque impulsion rencontrée ? En se rappelant que l'impulsion de Dirac a pour réponse la réponse impulsionnelle  $g(t)$  et que chaque impulsion n'est autre qu'un Dirac décalé de  $\tau$  et multiplié par un coefficient de  $e(\tau)\Delta\tau$ , il suffit de jouer sur la linéarité du filtre (théorème de superposition qui conserve le coefficient) et d'utiliser la relation (4.7) pour obtenir le morceau (l'élément différentiel) de la réponse associé à l'élément différentiel  $de(\tau)$  :

$$ds_\tau = e(\tau)d\tau g(t - \tau).$$

La réponse à un instant  $t$  est la réponse à tout ce que le signal  $e(t)$  a apporté au filtre jusqu'à l'instant  $t$ . C'est-à-dire qu'il faut faire la somme de toutes les contributions des différentes « impulsions » rencontrées sur  $e(t)$  (c'est-à-dire tous les  $ds_\tau$ ). Puisque le temps est continu (c'est ce qui se dit !) alors la somme est en fait une intégrale et  $\Delta\tau$  est donc devenu l'élément différentiel  $d\tau$  de cette intégrale. Il vient ainsi :

$$s(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (4.8)$$

Comme le système est causal, la partie du signal  $e$  qui arrive sur le filtre après le temps  $t$  ne peut pas avoir d'influence sur le temps signal  $s$  avant l'instant  $t$  (pour ça, il faudrait pouvoir remonter le temps !). L'intégrale précédente peut donc se récrire

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Donc on peut résumer ce paragraphe ainsi :

Soit un filtre causal tel que celui représenté sur la figure 4.1 et de réponse impulsionnelle  $g(t)$ . La réponse  $s(t)$  à un signal  $e(t)$  s'exprime

$$s(t) = e(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (4.9)$$

qui permet d'établir un *spectre continu* du signal  $s(t)$ .

Du point de vue mathématique, l'intégrale dans la formule (4.9) est appelée *produit de convolution* de  $e(t)$  et de  $s(t)$  et est notée  $e(t) * g(t)$ . On peut démontrer un certain nombre de propriétés de ce produit de convolution.

- Commutativité :

$$s(t) = e(t) * g(t) = g(t) * e(t). \quad (4.10)$$

- Élément neutre :

$$s(t) * \delta(t) = \delta(t) * s(t) = s(t). \quad (4.11)$$

(C'est évident pour la réponse impulsionnelle d'un filtre mais c'est en fait vrai pour tout signal.)

- Décalage temporel :

$$\delta(t - T) * s(t) = s(t - T). \quad (4.12)$$

(Là encore, c'est évident pour la réponse impulsionnelle d'un filtre mais c'est aussi vrai pour tout signal.)

## 4.4 Transformation de Fourier et produit de convolution

On vient de voir que la transformation d'un signal  $e(t)$  en un signal  $s(t)$  par un filtre linéaire causal, correspond, mathématiquement, à un produit de convolution

$$s(t) = e(t) * g(t),$$

où  $g(t)$  désigne la réponse impulsionnelle du filtre. Il faut bien prendre conscience que ce produit est un produit dans le domaine temporel. Même s'il est différent du simple produit de deux signaux qui s'écrirait plutôt  $e(t)g(t)$ , cela n'en reste pas moins un produit de deux signaux exprimés en fonction du temps.

Or, on a passé un certain temps au chapitre précédent à étudier la représentation fréquentielle (ou spectrale) des signaux. Il est donc naturel de se poser la question suivante : que devient le filtrage, c'est-à-dire la convolution, dans le domaine fréquentiel. La réponse a en fait été donnée lors de l'énumération des propriétés de la transformation de Fourier (cf. §3.3.1). En effet, le produit de convolution dans le domaine temporel devient le produit classique dans le domaine fréquentiel. Autrement dit

$$s(t) = e(t) * g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S(f) = E(f)G(f). \quad (4.13)$$

Ceci permet d'établir un *spectre continu* du signal  $s(t)$ .

Cette relation dans le domaine fréquentiel est résumée par la figure 4.4.

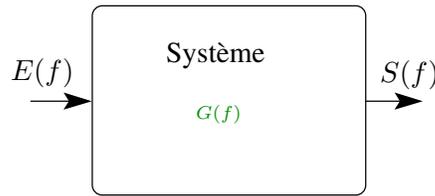


FIGURE 4.4 – Filtrage dans le domaine fréquentiel

Cette figure montre que l'on obtient la transformée de Fourier  $S(f)$  de la sortie du filtre à partir de la transformée de Fourier  $E(f)$  du signal d'entrée en multipliant cette dernière par la quantité  $G(f)$  qui est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle  $g(t)$  du filtre. Dans le domaine fréquentiel,  $G(f)$  traduit le transfert entre  $E(f)$  et  $S(f)$ . C'est pourquoi on dit que  $G(f)$  est la *fonction de transfert* en  $f$  du filtre.

Lorsque le filtre est linéaire, la fonction de transfert s'exprime mathématiquement par une fraction :

$$G(f) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}, \quad (4.14)$$

où  $p = i\omega = 2i\pi f$ . Les coefficients du numérateur et du dénominateur sont les mêmes que ceux rencontrés dans l'équation différentielle (4.1) et la causalité du filtre se traduit par  $n \geq m$ .

**Remarque 4.1** *Ce n'est pas la première fois que ce vocable fonction de transfert est rencontré. En électricité, le concept d'impédance complexe associée à divers composants électriques a conduit aux fonctions de transfert en  $i\omega$ . Ce sont les mêmes! (même si ce n'est pas évident). Les circuits électriques sont des filtres souvent linéaires et leur fonction de transfert n'est autre que la transformée de Fourier de leur réponse impulsionnelle. En d'autres termes,  $\hat{G}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$  est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du circuit électrique. De plus, ces fonctions de transfert seront de nouveau étudiées en Automatique et s'exprimeront comme en (4.14) mais elle seront obtenues par application de la transformation de Laplace (voir cours de mathématiques). La quantité  $p$  sera alors la variable de Laplace et sera donc un peu plus générale que  $i\omega$ .*

## 4.5 Principe et intérêt du filtrage

### 4.5.1 Gabarits des filtres

En pratique, il n'est pas si fréquent d'utiliser l'intégrale (ou produit) de convolution. En d'autres termes, pour bien des applications, le raisonnement ne se fait pas dans le domaine temporel, mais plutôt dans le domaine fréquentiel. C'est pourquoi la fonction de transfert revêt une très grande importance. Pour le comprendre, on peut d'abord se rappeler que  $E(f)$ ,  $S(f)$  et  $G(f)$  sont des nombres complexes (puisqu'ils s'expriment en fonction de  $\mathbf{i}$ ). Ils ont donc des modules. Ces modules vérifient la relation

$$|S(f)| = |G(f)| \cdot |E(f)|. \quad (4.15)$$

Il existe aussi une formule relative aux arguments, sur laquelle on pourrait s'étendre un peu mais dans le cadre de ce cours très succinct, les modules sont privilégiés. Cette équation peut en dire assez long sur le filtrage. On voit par exemple que le module de la fonction de transfert, à savoir  $|G(f)|$ , dépend de la fréquence  $f$ . Et c'est là tout l'intérêt de la fonction de transfert.

En effet, il est logique de considérer que la fréquence  $f$  (contenue dans  $e(t)$ ) contribue beaucoup à  $s(t)$  si  $|S(f)|$  est grand. Or  $|S(f)|$  est d'autant plus grand que  $|G(f)|$  est grand. Autrement dit, si  $|G(f)|$  est grand, cela veut dire que le filtre amplifie beaucoup ou, tout du moins laisse passer la contribution de la fréquence  $f$ . En revanche, si  $|G(f)|$  est petit, la contribution de  $f$  à  $e(t)$  n'est pas bien restituée sur  $s(t)$ .

Ainsi,  $G(f)$ , selon son expression, peut amplifier les contributions de certaines fréquences et réduire les contributions d'autres fréquences. C'est pourquoi on l'appelle *filtre* puisqu'il filtre certaines fréquences.

Bien sûr, la notion de *filtre* est déjà connue du lecteur qui en connaît notamment certaines représentations graphiques telles que le *diagramme de Bode*. Il n'est pas question de revenir longuement sur ces notions ici. Néanmoins, on peut rappeler qu'il est possible de représenter le module  $|G(f)|$  en fonction de  $f$  pour voir quelles sont les fréquences privilégiées par le filtre. Il faut toutefois satisfaire deux règles pour une représentation efficace :

1. La fréquence est graduée en échelle logarithmique.
2. L'amplification n'est pas donnée directement mais on porte en ordonnée ce qu'on appelle gain en décibels  $T(f) = 20 \log_{10}(|G(f)|)$ , l'échelle restant alors linéaire.

On obtient alors (mais ce n'est pas une surprise) la courbe de gain du diagramme de Bode. La première règle a pour but de ne pas privilégier les fréquences les plus élevées dans la représentation graphique et la seconde permet, entre autres, de pouvoir mettre des filtres  $G_1(f)$  et  $G_2(f)$  en série (deux filtrages consécutifs) et de vérifier que le filtre total  $G(f) = G_2(f)G_1(f)$  satisfait

$$T(f) = 20 \log_{10}|G(f)| = 20 \log_{10}|G_2(f)G_1(f)| = 20(\log_{10}|G_2(f)| + \log_{10}|G_1(f)|) = T_1(f) + T_2(f).$$

Cette formule indique que l'on construit la courbe de gain globale en additionnant les deux courbes de gain de  $G_1(f)$  et  $G_2(f)$  ce qui simplifie grandement la construction de certains diagrammes.

Toujours est-il qu'un *filtre* doit avant tout être vu comme un « gabarit fréquentiel » qui laisse passer des fréquences et en bloque d'autres. Trois gabarits de filtres sont plus utilisés que les autres. Ils sont indiqués par la figure 4.5.

Ces filtres sont idéalisés. Ils font apparaître des *fréquences de cassure* très brutales.

- Le filtre passe-bas idéal laisse passer les basses fréquences mais aucune au dessus de  $f_c$ .
- Le filtre passe-haut idéal laisse passer les hautes fréquences mais aucune au dessous de  $f_c$ .
- Le filtre passe-bande idéal laisse passer les fréquences entre  $f_{c1}$  et  $f_{c2}$  mais rien à l'extérieur de cet intervalle.

Les gammes de fréquences non bloquées sont appelées *bandes passantes* des filtres.

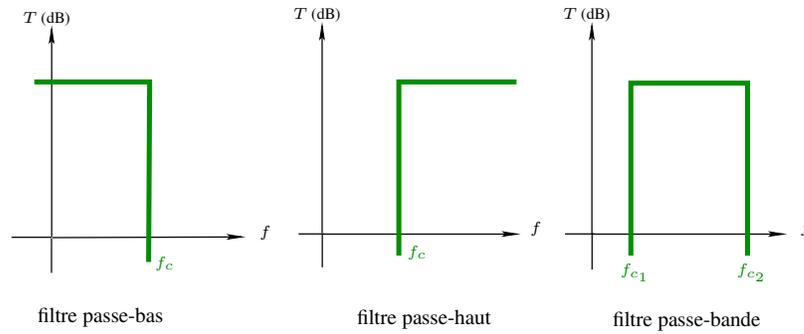


FIGURE 4.5 – Gabarits classiques idéalisés de filtres

En pratique, les filtres ne sont pas idéaux mais ont une forme moins rectangulaire. Il ressemblent plutôt à ceux de la figure 4.6.

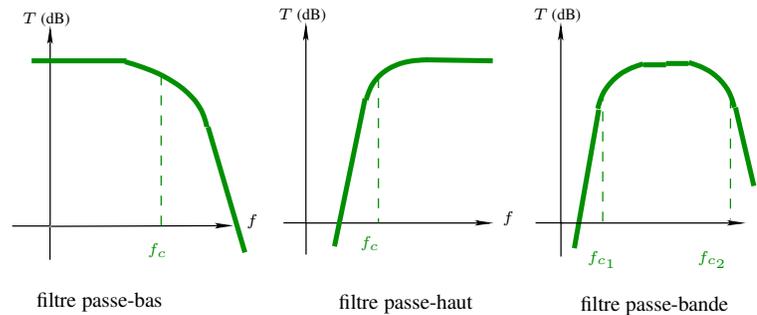


FIGURE 4.6 – Gabarits classiques réalistes de filtres

Les fréquences de cassures et les bandes passantes sont moins évidentes à voir. On définit généralement les bandes passantes et les fréquences de cassure à  $-3\text{dB}$  qui contiennent ou bornent les fréquences pour lesquels le signal de sortie est atténué de moins de  $3\text{dB}$  par rapport à la fréquence optimale, c'est-à-dire que la puissance de  $s(t)$  reste au moins égale à la moitié de sa puissance maximale (notamment lorsque  $n = 1$ ). Ces filtres sont bien sûr moins efficaces que les filtres idéaux mais on peut les construire. Pour faire en sorte qu'un filtre se rapproche d'un gabarit idéal, il faut généralement augmenter  $n$ , voire parfois  $m$ , ce qui complique la mise en œuvre du filtre.

## 4.5.2 Influence des gabarits sur le spectre

Pour voir quel peut être l'intérêt du filtrage, on peut considérer le cas des trois filtres idéalisés de la figure 4.5. Chaque filtre sera appliqué à un signal (ou plutôt à son spectre) pour trois objectifs différents.

### 4.5.2.1 Filtrage passe-bas

L'idée de ce paragraphe est résumée par la figure 4.7.

Sur cette figure, on voit le spectre en module du signal d'entrée  $e(t)$  qui est apériodique. Ce module, élevé dans les basses fréquences, descend lorsque la fréquence augmente puis remonte autour d'une certaine fréquence, produisant une sorte de « pic ». Ce pic peut être la manifestation d'un bruit qui vient perturber le signal (les bruits sont souvent de fréquences plus élevées que le signal). Pour éliminer ce bruit, on applique un filtre passe-bas idéal dont la fréquence  $f_c$  est supérieure à la fréquence utile maximale du signal mais inférieure aux fréquences auxquelles le bruit est observé. Ainsi, lorsque l'on regarde le spectre en module du signal de sortie  $s(t)$ , on retrouve la même

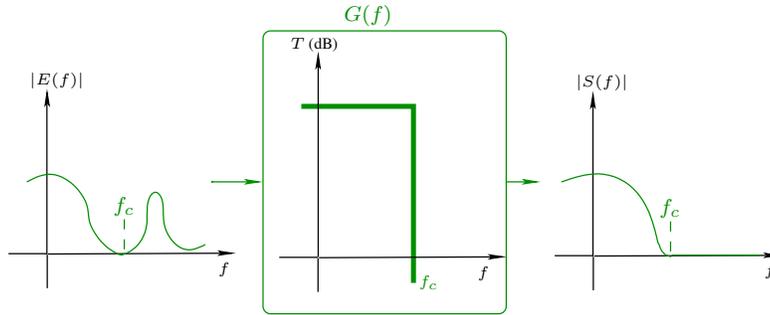


FIGURE 4.7 – Exemple de filtrage passe-bas

forme mais sans le pic lié au bruit qui n'a pas pu traverser le filtre.

Avec un filtre réel non idéalisé, le spectre du signal de sortie serait un peu altéré et l'on verrait peut-être un léger pic, nettement moins important qu'en entrée. Tout dépend du filtre choisi et des possibilités de choix pour  $f_c$ .

#### 4.5.2.2 Filtrage passe-haut

L'idée de ce paragraphe est résumée par la figure 4.8.

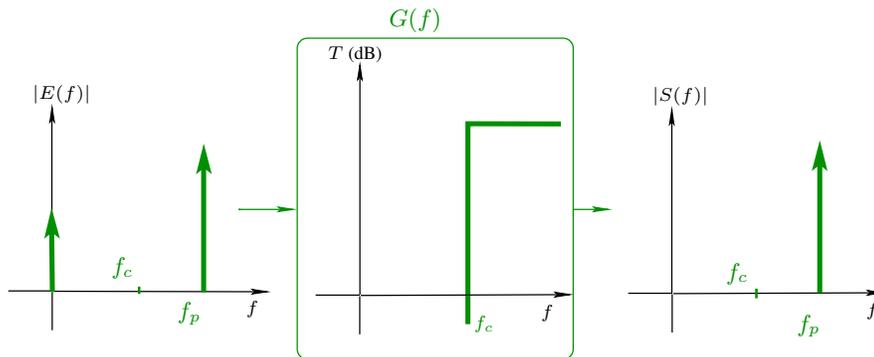


FIGURE 4.8 – Exemple de filtrage passe-haut

Le spectre d'entrée fait apparaître deux bandes. Il s'agit donc d'un signal périodique que l'on prendra ici, par exemple, sinusoïdal de fréquence  $f_p$  présentant une composante continue :

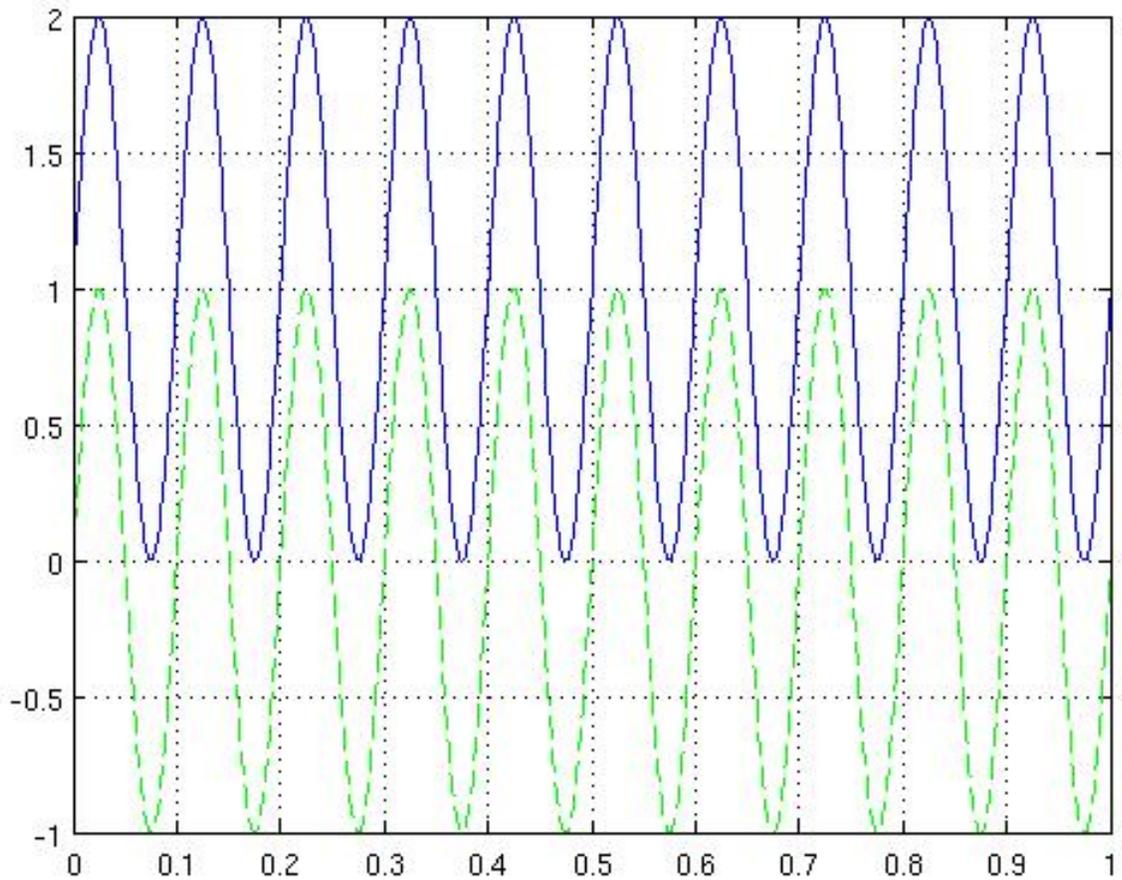
$$e(t) = E_0 + E \sin(2\pi f_p t).$$

(un déphasage nul est supposé pour simplifier le raisonnement.)

L'idée du filtrage passe-haut est de ne laisser passer que les termes de  $e(t)$  ayant une fréquence supérieure à  $f_c$ . Comme  $f_p$  est supérieure à  $f_c$ , le terme sinusoïdal passe à travers le filtre, mais la composante continue est bloquée puisque  $f_c > 0$ .

Les signaux temporels  $e(t)$  et  $s(t)$  sont tracés sur la figure 4.9 pour le cas où  $f_c = 1\text{Hz}$ ,  $f_p = 10\text{Hz}$ ,  $E_0 = 1$ ,  $E = 1$  et pour une amplification unitaire du filtre dans la bande passante.

On constate que la composante continue a disparu et que contrairement à  $e(t)$  qui est centré sur  $E_0 = 1$ , le signal

FIGURE 4.9 – Signal  $e(t)$  en trait plein et signal  $s(t)$  en pointillés.

$s(t)$  est centré sur 0. Cela signifie que la valeur moyenne de  $E_{\text{moy}}$  de  $e(t)$  est égale à 1 alors que la valeur moyenne  $S_{\text{moy}}$  de  $s(t)$  est égale à 0. Bien entendu, un filtre réel non idéalisé n'est pas tout à fait aussi efficace et il convient de nettement séparer  $f_c$  et  $f_p$  pour un résultat significatif. Si  $f_p$  est proche de  $f_c$ , le filtrage n'est pas suffisant.

On retrouve ce cas de figure en électronique lorsque l'on polarise en montage à base de transistor. Le point de polarisation est tel que le signal de sortie du montage présente une composante continue. On la supprime grâce à un condensateur de découplage. Le choix de la capacité associée correspond en fait au choix de  $f_c$ . Si la capacité est bien choisie,  $f_c$  est inférieure à la fréquence du signal utile sortant du montage et la composante continue liée à la polarisation disparaît. Seule reste la partie alternative utile.

#### 4.5.2.3 Filtrage passe-bande

L'idée de ce paragraphe est résumée par la figure 4.10.

Dans le spectre de  $e(t)$ , on distingue trois raies à des fréquences  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ . Mais une seule raie se situe dans la bande passante du filtre, c'est-à-dire entre  $f_{c1}$  et  $f_{c2}$ , donc seule cette raie traverse le filtre. Ainsi, seule la sinusoïde de fréquence  $f_2$  se retrouve sur  $s(t)$ .

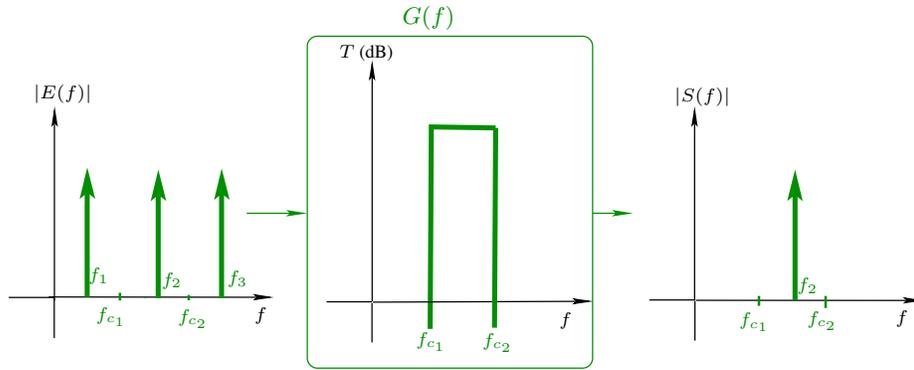


FIGURE 4.10 – Exemple de filtrage passe-bande

À titre d'exemple,  $e(t)$  peut résulter de la somme de trois sinusoïdes à des fréquences  $f_1$ ,  $f_2$ , et  $f_3$ . On note que les raies ont ici la même hauteur ce qui signifie que les amplitudes des sinus sont égales (la valeur considérée ici est  $E$ ) :

$$e(t) = E \sin(2\pi f_1 t) + E \sin(2\pi f_2 t) + E \sin(2\pi f_3 t).$$

Comme seul le second terme de fréquence  $f_2$  n'est pas bloqué par le filtre, on obtient pour  $s(t)$  :

$$e(t) = S \sin(2\pi f_2 t),$$

où  $S$  dépend de l'amplification  $A$  du filtre dans la bande passante. Si l'on suppose que  $A$  vaut 2 et que  $E$  vaut 1, alors  $S = AE = 2$  et les deux signaux  $e(t)$  et  $s(t)$  sont représentés sur la figure 4.11.

Ce cas de figure correspond à celui des stations de radio. Toutes les stations émettent à des fréquences différentes qui parviennent toutes à l'antenne mais il faut faire le tri entre toutes ces fréquences et récupérer le signal de la station que l'on souhaite écouter. Pour cela, il faut un filtre passe-bande assez sélectif, c'est-à-dire avec une bande très étroite pour ne conserver que la fréquence voulue et pas celles d'à côté. Toutefois, dans le cas de la radio, les signaux sont un peu plus complexes que de simples sinusoïdes. Le principe de la sélection d'une fréquence reste néanmoins celui présenté ici.

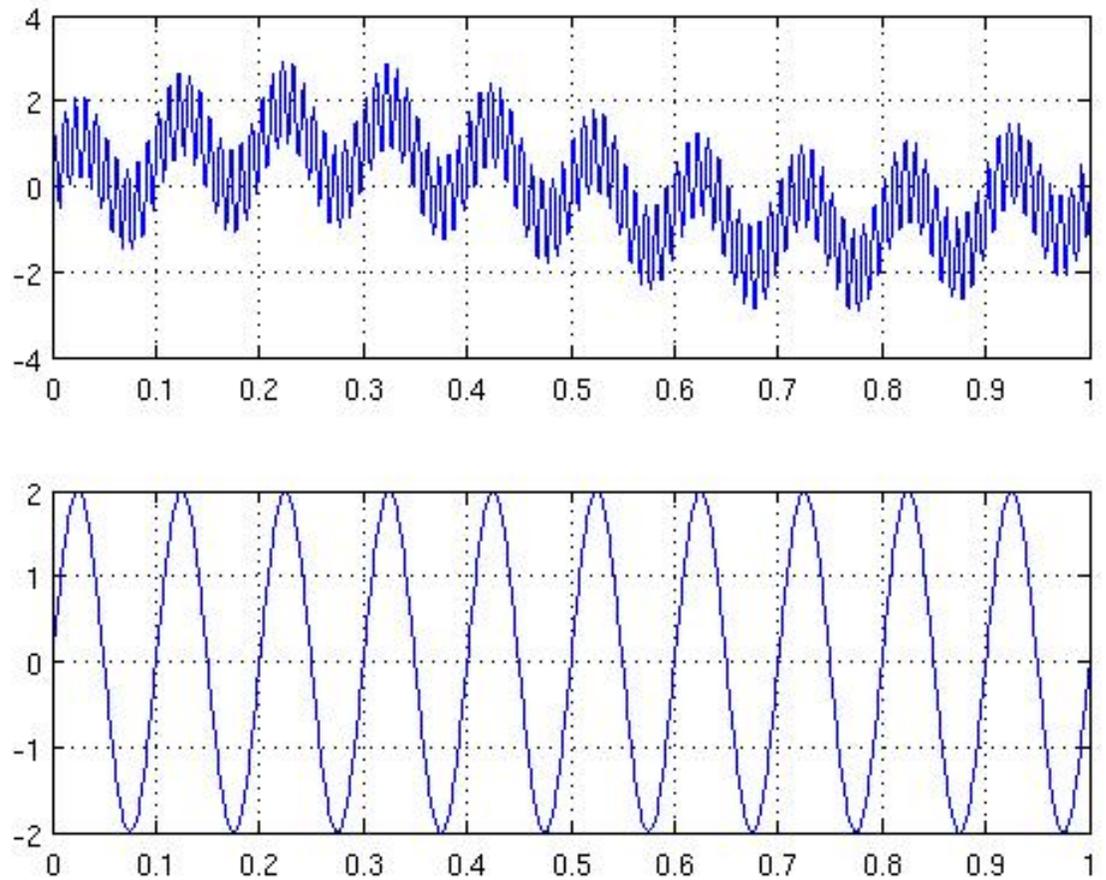


FIGURE 4.11 – Signaux en entrée et en sortie du filtre passe-bande



## Chapitre 5

# Échantillonnage des signaux continus

De plus en plus de dispositifs utilisés pour le traitement du signal sont des dispositifs numériques. Ils font appel à un ordinateur, un microprocesseur ou un microcontrôleur. De fait les signaux qu'ils manipulent sont des signaux à temps discret (cf. §1.2). Même les outils de simulation tels que MATLAB ou SIMULINK utilisent des signaux discrets, de même que les oscilloscopes modernes. Or les signaux physiques étudiés sont souvent initialement analogiques et vouloir les manipuler en tant que signaux discrets suppose que l'on puisse les transformer de l'un en l'autre. Une telle transformation peut avoir des conséquences et il convient d'en étudier les propriétés pour l'utiliser au mieux. C'est l'objet de ce chapitre qui s'attarde aussi sur les outils mathématiques qui facilitent la compréhension et la conception. Y sont abordés l'échantillonnage, le théorème de Shannon et le problème du repliement de spectre.

### Sommaire

---

<b>5.1 Échantillonnage : une notion physique et mathématique</b> . . . . .	<b>47</b>
5.1.1 Échantillonnage impulsionnel . . . . .	47
5.1.2 Échantillonnage impulsionnel idéal et transformation étoile temporelle . . . . .	49
<b>5.2 Qualité de l'échantillonnage</b> . . . . .	<b>50</b>
5.2.1 Échantillonnage dans le domaine fréquentiel . . . . .	50
5.2.2 Repliement de spectre et théorème de Shannon . . . . .	51
5.2.3 Bruit et filtre anti-repliement . . . . .	52
<b>5.3 Échantillonnage en pratique : CAN et CNA</b> . . . . .	<b>53</b>

---

## 5.1 Échantillonnage : une notion physique et mathématique

Avant de se lancer dans la lecture de cette partie, il convient de relire le paragraphe 1.2.

Il est possible de transformer un signal continu en un signal discret. Ce processus est appelé *échantillonnage* ou *discrétisation*. Il est représenté sur la figure 5.1. Le signal est dit *discrétisé* ou *échantillonné*. Les instants d'échantillonnage ne sont pas nécessairement régulièrement espacés dans le temps. Toutefois, généralement, les échantillons sont « prélevés » à intervalles réguliers. La durée entre deux instants d'échantillonnage, notée  $T_e$  sur la figure 5.1, est alors appelée *période d'échantillonnage*. Dans ce paragraphe, on se contente de discuter d'un échantillonnage à période  $T_e$ . Dans un premier temps, l'*échantillonnage impulsionnel* est évoqué. Puis, une seconde partie introduit la notion d'*échantillonnage idéal*. Cet échantillonnage conduit à la notion de *transformée étoile*.

### 5.1.1 Échantillonnage impulsionnel

On a vu au chapitre précédent, plus précisément au paragraphe 4.2, ce qu'est une impulsion unitaire discrète. On rappelle que ce n'est pas l'impulsion de Dirac.

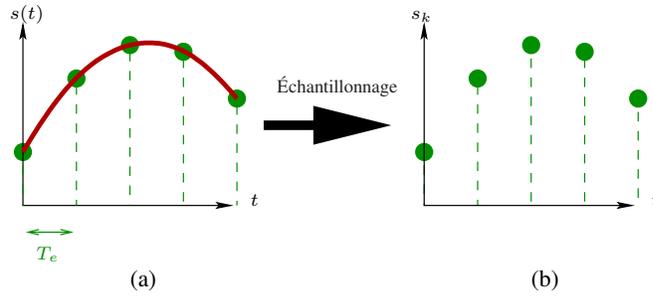


FIGURE 5.1 – Processus d'échantillonnage

Soit maintenant le train d'impulsions unitaires distantes dans le temps de  $T_e$ , se produisant à partir de l'instant 0 sur un horizon infini de temps, et dessiné sur la figure 5.2.

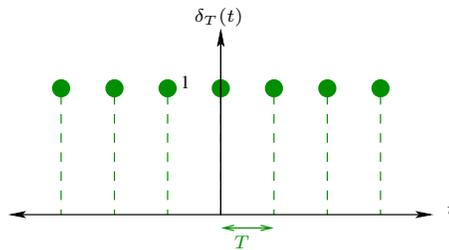


FIGURE 5.2 – Train d'impulsions unitaires discrètes

Du point de vue mathématique, ce train d'impulsions, noté  $\delta_T(t)$ , s'exprime

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_d(t - kT_e). \quad (5.1)$$

Il est donc possible d'exprimer le signal échantillonné de la figure 5.1 (ici noté  $s_s(t)$ ) en fonction du temps :

$$s_s(t) = s(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kt)\delta_d(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k\delta_d(t - kT_e). \quad (5.2)$$

On peut associer cette transformation à celle d'une fonction continue en un train d'impulsions de largeur nulle. Puisque l'échantillonnage est ici supposé de période fixe, ces impulsions sont régulièrement espacées dans le temps. L'opération est symbolisée par l'« interrupteur » de la figure 5.3.

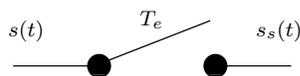


FIGURE 5.3 – Symbole de l'échantillonneur impulsionnel à période  $T_e$

Un tel échantillonnage n'est pas tout à fait réaliste puisqu'en pratique, une impulsion de durée nulle ne peut exister. Il n'en est pas moins vrai que l'opérateur mathématique associé a été défini et correspond bien à ce qui est souhaité

dans un échantillonnage. Dans le paragraphe suivant, une autre forme d'échantillonnage encore moins réaliste (et pourtant utile) est présentée.

### 5.1.2 Échantillonnage impulsionnel idéal et transformation étoile temporelle

Pour des raisons de cohérence mathématique, il est coutume d'introduire un opérateur mathématique appelé *échantillonneur idéal* qui consiste à voir ces impulsions comme des impulsions, non seulement instantanées (de largeur nulle) mais aussi d'amplitude infinie. Toutefois, pour que ces impulsions puissent véhiculer un tant soit peu une réalité physique, à savoir l'information présente au niveau du signal, il est souhaitable que l'intégration au cours du temps de chaque impulsion soit liée à la valeur  $s(kT_e)$  du signal  $s(t)$  à l'instant d'échantillonnage  $kT_e$  par la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(\theta)\delta(\theta)d\theta = s(0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} s(\theta)\delta(\theta - kT_e)d\theta = s(kT_e), \quad (5.3)$$

où  $\delta(t)$  n'est autre que l'impulsion de Dirac, et où, de ce fait,  $\delta(t - kT_e)$  est l'impulsion de Dirac différée d'un temps  $kT_e$  (cf. §4.2). D'ordinaire, l'impulsion de Dirac est vue comme une impulsion de durée  $\Delta t$  et d'amplitude  $\frac{1}{\Delta t}$  pour une valeur de  $\Delta t$  tendant vers 0. C'est donc une impulsion de largeur nulle, d'amplitude infinie et de surface 1. Parfois, on dit que la *force* de cette impulsion est de 1.

Les autres propriétés de  $\delta(t)$  sont, entre autres (cf. §4.2),

$$\begin{cases} \delta(at) & = \frac{1}{|a|}\delta(t), \\ \delta(-t) & = \delta(t), \\ s(t)\delta(t - h) & = s(h)\delta(t - h). \end{cases} \quad (5.4)$$

Soit un train d'impulsions de Dirac se produisant à chaque instant d'échantillonnage  $kT_e$ , à partir de l'instant 0 et sur un horizon infini de temps. Un tel train d'impulsions est appelé *peigne de Dirac*. Il est ici noté  $P_\delta(t)$  et est représenté sur la figure 5.4. Sur cette figure, on peut noter que les impulsions font apparaître une flèche plutôt qu'un point. Il s'agit d'une notation graphique usuelle pour illustrer le fait que c'est la force des impulsions qui est unitaire et non leur amplitude.

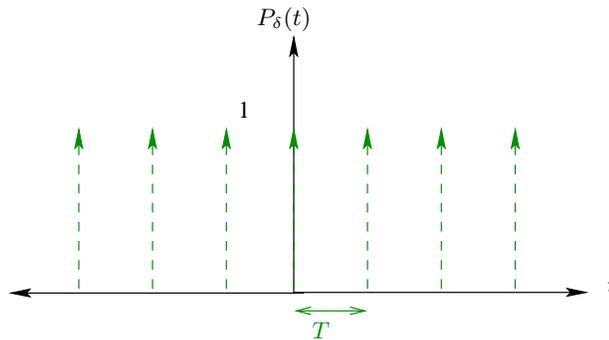


FIGURE 5.4 – Peigne de Dirac

L'échantillonnage idéal peut alors être défini comme la transformation du signal continu  $s(t)$  en un signal échantillonné noté  $s^*(t)$  s'exprimant

$$s^*(t) = s(t)P_\delta(t). \quad (5.5)$$

Compte tenu de la structure du peigne de Dirac, il vient

$$s^*(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e),$$

qui, de par la troisième propriété donnée en (5.4), s'écrit

$$s^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_e)\delta(t - kT_e). \quad (5.6)$$

Cette opération est parfois appelée *transformation étoile temporelle*. L'expression de  $s^*(t)$  est similaire à celle de  $s_s(t)$  donnée en (5.2). Les impulsions unitaires discrètes ont été remplacées par des impulsions de Dirac.

L'échantillonnage impulsionnel idéal est donc l'opération qui consiste à transformer  $s(t)$  en  $s^*(t)$ . Elle est symbolisée comme indiqué par la figure 5.5. Cette symbolisation est la même que pour l'échantillonneur impulsionnel de sorte que pour un même schéma, on peut raisonner avec un type d'échantillonnage ou l'autre, même si c'est l'échantillonnage idéal qui est généralement retenu car c'est lui qui assure une cohérence mathématique entre les outils utilisés.

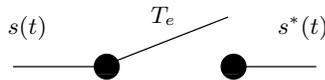


FIGURE 5.5 – Symbole de l'échantillonneur impulsionnel idéal à période  $T_e$

## 5.2 Qualité de l'échantillonnage

### 5.2.1 Échantillonnage dans le domaine fréquentiel

La formule (5.5) montre que l'échantillonnage impulsionnel idéal d'un signal consiste à multiplier ce signal par le peigne de Dirac. Si l'on rappelle la propriété suivante, rapidement évoquée en §3.3.1, on a

$$S^*(f) = S(f) * P_\delta(f). \quad (5.7)$$

La transformée de Fourier de  $s(t)$  est donc égale au produit de convolution de la transformée  $S(f)$  du signal continu avec la transformée  $P_\delta(f)$  du peigne de Dirac.

Le peigne de Dirac est un signal périodique de période  $T_e$ . À ce titre, on peut calculer les coefficients de sa série de Fourier bilatérale :

$$c_n = \frac{1}{T_e} \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} P_\delta(t) e^{-in\omega_e t} dt = \frac{1}{T_e} \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \delta(t) e^{-in\omega_e t} dt = \frac{1}{T_e} \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \delta(t) \cdot 1 dt = \frac{1}{T_e},$$

où  $\omega_e = 2\pi f_e = \frac{2\pi}{T_e}$  est la pulsation d'échantillonnage. En fait, pour comprendre ce calcul, il faut bien voir que dans l'intervalle  $[-\frac{T_e}{2}; \frac{T_e}{2}]$ , seul le motif élémentaire, à savoir le simple Dirac, est intégré. Ensuite, il suffit d'utiliser la formule (3.17) avec  $f_p = f_e$  pour obtenir

$$P_\delta(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_e). \quad (5.8)$$

Le spectre d'un peigne de Dirac est donc un peigne de Dirac en fréquences avec des Dirac de force  $f_e = \frac{1}{T_e}$ .

L'injection de (5.8) dans (5.7) conduit à

$$S^*(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f) * \delta(f - nf_e).$$

En utilisant la propriété (4.12) (c'est une propriété mathématique qui s'applique que l'argument soit  $f$  ou  $t$ ), il vient

$$S^*(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - n f_e). \quad (5.9)$$

De cette relation, on peut déduire l'assertion suivante.

L'échantillonnage impulsionnel idéal revient à reproduire le spectre du signal continu de façon périodique autour de chaque valeur  $n f_e$ .

Pour illustrer ce principe fondamental, un exemple quelconque est donné par la figure 5.6.

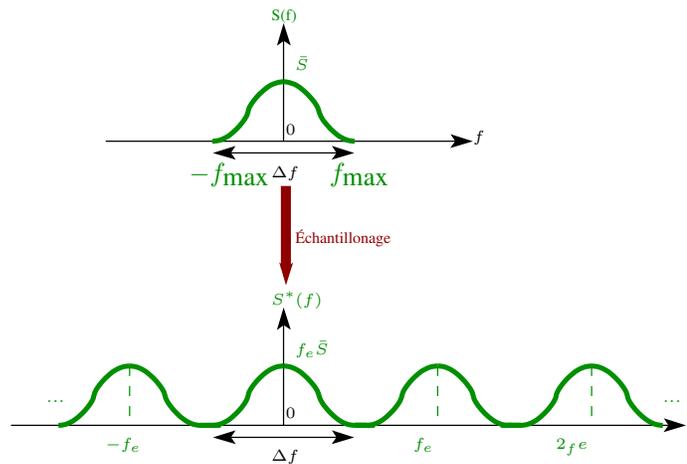


FIGURE 5.6 – Spectres du signal continu et de son image discrète par échantillonnage

**Remarque 5.1** Cette périodisation du spectre concerne autant la phase que le module !

### 5.2.2 Repliement de spectre et théorème de Shannon

Dans le cas illustré par la figure 5.6, les « morceaux » du spectre de  $s^*(t)$  ne se chevauchent pas. C'est parce que  $f_e \geq \Delta_f = 2f_{\max}$ . Or, que signifie  $f_e \geq 2\Delta_f$  ?

Intuitivement, on comprend que si l'on prend beaucoup d'échantillons d'un signal, on obtient une information intéressante, c'est-à-dire que les échantillons donnent une bonne idée de l'allure du signal. En d'autres termes, on prélève assez de points sur la courbe pour avoir une bonne idée de sa forme. De ceci, on comprend facilement qu'il faut échantillonner plus vite que que les fréquences les plus élevées dans le signal. Cela paraît évident : si l'on prélève des échantillons moins vite que le signal n'évolue, ou loupe quelque chose (les dynamiques rapides, donc les fréquences élevées du signal).

Mais dispose-t-on d'une règle systématique qui dit si l'on échantillonne assez vite ou pas ? La représentation spectrale permet de répondre à la question. Dans le cas de la figure 5.6, on voit que le spectre de  $S^*(f)$  (donc l'information présente sur le signal échantillonné) permet de reconstruire sans difficulté le spectre du signal continu originale. La forme de ce dernier se retrouve, et même plusieurs fois, sur le spectre du signal échantillonné. En bref, pas de problème dans le cas où  $f_e \geq 2f_{\max}$ .

Si maintenant, on prélève les échantillons un peu moins vite de sorte que  $f_e < 2f_{\max}$ , alors, la représentation de cette opération est donnée par la figure 5.7.

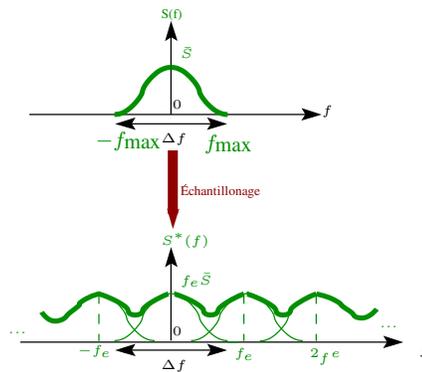


FIGURE 5.7 – Spectres du signal continu et de son image discrète par échantillonnage pour  $f_e < 2f_{\max}$

Sur cette figure, on constate que les « morceaux » du spectre de  $s^*(t)$  se chevauchent, ce qui brouille l'information sur le spectre de  $s(t)$ . Ce chevauchement introduit un bruit qui s'ajoute au spectre que l'on souhaiterait voir apparaître. Ce phénomène est appelé *repliement de spectre* et a été mis en évidence par Claude Shannon. C'est juste l'interprétation fréquentielle d'un échantillonnage trop lent.

Par conséquent, il faut échantillonner de telle sorte que  $f_e \geq 2f_{\max}$ . En résumé :

**Théorème de Shannon :** pour un échantillonnage efficace évitant le repliement de spectre, il faut respecter la condition  $f_e \geq 2f_{\max}$ .

**Remarque 5.2** On a souvent intérêt à respecter très largement la règle proposée par Shannon car on ne connaît pas bien  $f_{\max}$ . Par exemple, en automatique, on préfère utiliser le rapport 10 plutôt que 2. En effet, on agit parfois en amont de  $s(t)$  de telle sorte que  $f_{\max}$  augmente donc il faut anticiper.

### 5.2.3 Bruit et filtre anti-repliement

Souvent, il arrive que  $s(t)$  soit bruité de sorte qu'on échantillonne  $s(t) + b(t)$  plutôt que  $s(t)$ , où  $b(t)$  est un bruit, généralement de hautes fréquences par rapport à  $s(t)$ , et mal connu. Sur le plan, spectral, il peut se manifester comme sur la figure 5.7.

La conséquence du bruit est visible sur le spectre qui devient celui de  $s^*(t) + b^*(t)$ . On ne retrouve pas la forme du spectre du signal utile à cause de ce bruit.

Il est parfois (même souvent) possible de remédier au problème en supprimant le bruit avant d'échantillonner lorsque le bruit est de fréquence plus élevée que le signal utile (comme sur la figure 5.7). Comment « éliminer » les plus hautes fréquences d'un signal ? La réponse est donnée par le paragraphe 4.5.2.1. Il faut faire précéder le dispositif d'échantillonnage par un filtre passe-bas présentant une fréquence de cassure plus grande que la fréquence maximale contenue dans  $S(f)$  mais plus petite que la fréquence minimale contenue dans  $B(f)$ . Ainsi, le filtre nettoie le signal utile en filtrant le bruit et l'on peut alors procéder à l'échantillonnage. Un tel filtre est appelé *filtre anti-repliement* et est très utilisé en pratique.

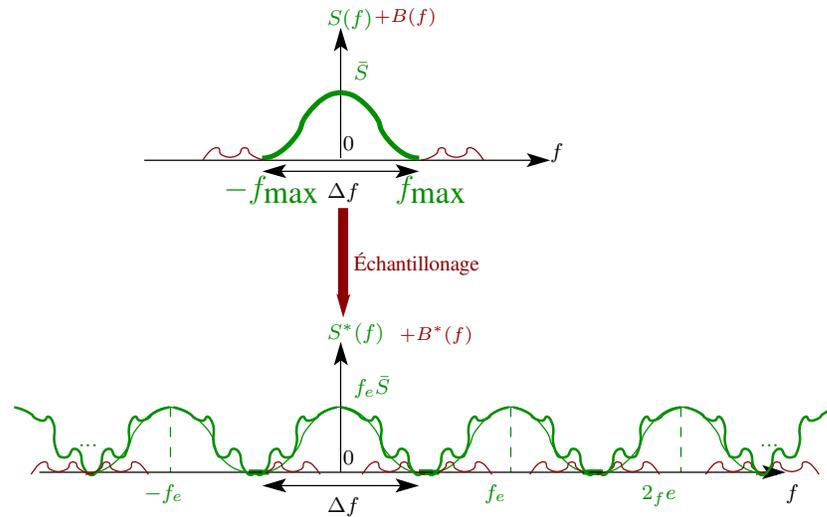


FIGURE 5.8 – Spectres du signal continu et de son image discrète en présence de bruit

### 5.3 Échantillonnage en pratique : CAN et CNA

Dans cette partie, il faut envisager les signaux continus comme des tensions analogiques et les signaux discrets comme des valeurs numériques (codées en binaire) telles que celles manipulées par les ordinateurs.

L'échantillonnage vient d'être abordé de manière quelque peu mathématique. L'impulsion de Dirac ne peut pas être produite en pratique mais il ne faut pas s'en inquiéter. Elle n'intervient que pour donner de la cohérence aux outils mathématiques qui permettent les calculs. Il faut garder présent à l'esprit qu'échantillonner, c'est prélever des valeurs sur une courbe !

En pratique, on peut concevoir un système qui multiplie le signal par un train d'impulsions qui seront peut-être unitaires mais certainement pas de largeur nulle. Ce document ne s'attarde pas sur les techniques électroniques qui résolvent ce problème. Simplement, il convient de retenir que le dispositif généralement utilisé pour échantillonner un signal est le *convertisseur analogique numérique (CAN)*.

Un tel composant assure en réalité deux opérations :

- une opération dite d'*échantillonnage blocage* qui consiste généralement à prélever des valeurs à des instants  $nT_e$  (échantillonnage) mais aussi à bloquer ces valeurs pendant une durée égale à  $T_e$  (blocage dit « d'ordre zéro »), comme indiqué sur la figure 5.9. Le blocage en tant que tel n'a d'intérêt que le temps de la conversion ;
- une opération de conversion analogique numérique proprement dite, qui permet d'approcher la valeur exacte prélevée par une valeur numérique codée en binaire, interprétable par un ordinateur qui la reçoit sur un port ou que l'on peut envoyer sur les entrées d'un composant programmable par exemple (c'est une quantification).

Après ces deux opérations, le signal réellement exploité par le dispositif numérique n'est pas simplement *discret*, mais il est *numérique*.

L'opération de blocage sert aussi à restituer un signal. Si l'on suppose qu'un signal est déjà échantillonné ou, tout du moins, discret (c'est donc une suite de valeurs), alors il est représenté par une série de points régulièrement espacés dans le temps (des impulsions). Lui appliquer un blocage d'ordre zéro revient à transformer la série d'im-

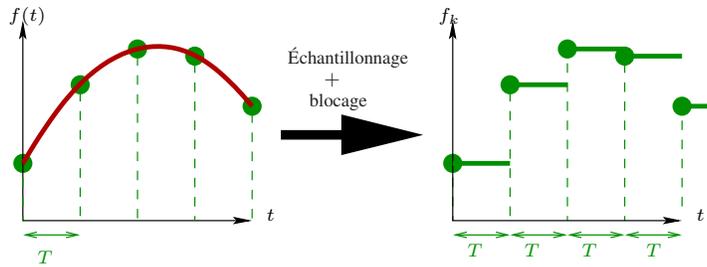


FIGURE 5.9 – Échantillonnage et blocage d'ordre zéro d'un signal

pulsions en un signal en forme d'escalier (on peut continuer de se référer à la figure 5.9).

Si les valeurs de la suite du signal discret sortent d'un composant numérique ou d'un ordinateur, alors elles ne correspondent qu'à des codes binaires. Un processus de conversion électronique permet de transformer des valeurs en code binaire en de vraies tensions. Le blocage n'intervient qu'ensuite et maintient la tension pendant un temps  $T_e$ . L'ensemble convertisseur+bloqueur constitue un *convertisseur numérique analogique (CNA)*.

Les **CAN** et **CNA** sont des composants électroniques très courants, souvent peu chers, quoique cela dépende de leur définition (nombre de bits utilisés pour coder les valeurs : de ce dernier dépend la hauteur minimale des marches de l'escalier), des gammes de tension et de la possibilité plus ou moins grande de réduire  $T_e$ .

**Remarque 5.3** *Il existe des blocages qui ne sont pas d'ordre zéro et qui cherchent à obtenir des formes plus sophistiquées que celle de l'escalier (blocage d'ordre 1, 2, etc.). Ils ne seront pas vus dans ce cours qui, d'ailleurs, se termine ici.*

# Chapitre 6

## Conclusions, références et perspectives

Dans ce chapitre de conclusion, on revient sur ce qui a été vu, sur ce qui reste à voir et sur les notes de cours et ouvrages qui ont servi à la conception de ce document.

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>En résumé</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>6.2</b>	<b>Pour aller plus loin</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>6.3</b>	<b>Références bibliographiques</b> . . . . .	<b>56</b>

---

### 6.1 En résumé

Dans ce document, un premier chapitre a cherché à définir rapidement ce qu'est un signal et quels sont les objectifs du traitement du signal. Les différents types de signaux y ont été énumérés (sans exhaustivité).

Le deuxième chapitre s'est focalisé sur la notion d'énergie et de puissance d'un signal, notions utiles au delà du traitement du signal. La classification des signaux a été complétée.

Le troisième chapitre a présenté la notion de représentation spectrale d'un signal qui nécessite l'étude de la série de Fourier et de la transformation de Fourier.

Dans le quatrième chapitre, on s'est servi de la représentation spectrale pour expliquer le filtrage et tenter d'en montrer l'intérêt.

Enfin, dans le cinquième chapitre, des notions d'échantillonnage ont été abordées (repliement de spectre, théorème de Shannon). Elles sont restées très succinctes mais elles sont essentielles.

### 6.2 Pour aller plus loin

Avec les connaissances apportées par ce document, on ne peut pas se prétendre *traiteur du signal*. Seules quelques bases ont été jetées. Bien trop de notions sont ignorées par manque de temps. Parmi ce qui mériterait d'être abordé pour aller plus loin, on peut citer :

- une étude plus approfondie des signaux discrets grâce à *la transformation en  $z$*  ;
- la notion de filtrage en temps discret. De même que les spectres en  $f$  des signaux continus conduisent à des filtres possédant une fonction de transfert en  $f$ , les signaux discrets exprimés en  $z$  conduisent à des filtres possédant des fonctions de transfert en  $z$  (pour l'étudiant en MP : voir d'éventuels modules complémentaires) ;
- la transformation de Fourier discrète qui étend le principe de la transformation de Fourier au cas des signaux discrets et qui conduit, sur le plan du calcul numérique, à la notion de *FFT (Fast Fourier Transform)* ;
- la *modulation* des signaux (en amplitude, en fréquence, etc.) très utile pour la transmission de ces signaux (pour l'étudiant en MP : voir d'éventuels modules complémentaires) ;
- tout l'aspect stochastique ou aléatoire des signaux, avec les notions d'*espérance*, de *variance*, de *covariance*, d'*écart-type*, de *corrélation*, d'*auto-corrélation*, d'*intercorrélation*, etc. Ces aspects, quoique très

importants en traitement du signal, ont été franchement ignorés dans le document, faute de temps en présence des étudiants.

### 6.3 Références bibliographiques

Un certain nombre de références (livres, notes de cours) qui ont été prêtées à l'auteur ou simplement prélevées (légalement !) sur Internet ont servi à la conception de ce document. Que leurs auteurs en soient remerciés.

Francis Cottet.

*Aide mémoire - Traitement du signal.*

Éditions Dunod, 2005.

Hwei P. Hsu.

*Theory and Problems of Signals and Systems.*

Shaum's outline series, McGraw-Hill, 1995.

Frédéric Launay.

*Polycopié de notes de cours : « Cours de traitement du signal ».*

IUT de Poitiers-Châtelleraut-Niort, département de Réseaux et Télécoms, 2011.

Majdi Khoudeir.

*Cours manuscrit : « Traitement du signal ».*

IUT de Poitiers-Châtelleraut-Niort, département de Mesures Physiques, 2011.

Didier Chambert.

*Polycopié d'énoncés de Travaux Pratiques : « Module Traitement du signal ».*

IUT de Poitiers-Châtelleraut-Niort, département de Mesures Physiques, 2011.

Sandrine Moreau, Afzal Chamroo, Thierry Poinot, Patrice Remaud, et Guillaume Mercère.

*Polycopié de notes de cours : « Traitement du signal ».*

École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers (ENSIP), 2ème année de cycle ingénieur, 2012.

Jean-Claude Trigeassou.

*Notes manuscrites de cours : « Outils mathématiques pour le traitement du signal ».*

École Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers (ESIP, aujourd'hui ENSIP), 2ème année de cycle ingénieur.

Jean-François Bercher

*Polycopié de cours : « TF, Dirac, convolution et tutti quanti ».*

École Supérieure d'Ingénieurs en Électrotechnique et Électricité, 2001.

Michel Lecomte.

*Polycopié de cours : « Transformation de Fourier ».*

École des Mines de Douai, 2001.

Joël Leroux.

*Polycopié de cours : « Techniques numériques pour le traitement du signal ».*

Édition 2000.

James L. Crowley.

*Polycopié de cours : « Traitement du signal : signaux physiques et modèles théoriques ».*

École Nationale Supérieure d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble (ENSIMAG), 2001.

Wikipedia, the free encyclopedia

<http://en.wikipedia.org/wiki/Wikipedia>

L'auteur remercie tout particulièrement Frédéric Launay et Thierry Poinot des éclaircissements apportés par leurs soins ainsi que des documents particulièrement bien construits dont il a pu profiter grâce à eux.



## Annexe A

# Fourier et sa transformation

### A.1 Brève biographie de Joseph Fourier



Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), plus communément appelé Joseph Fourier, est un mathématicien et physicien français connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier et leur application au problème de la propagation de la chaleur.

#### A.1.1 Sa vie

Fils d'un garçon tailleur, Joseph Fourier grandit à Auxerre. Bien qu'orphelin dès l'âge de 10 ans, il n'en poursuit pas moins une brillante scolarité qui l'amena à intégrer l'École normale supérieure à 26 ans, où il suivit les enseignements, entre autres, de Lagrange et Laplace.

Participant à la Révolution, il échappa de peu à la guillotine puis se fit une réputation lors de la campagne d'Égypte menée par Napoléon, ce qui lui permit de devenir diplomate puis préfet de l'Isère, par ordre de Napoléon.

Il créa l'Université royale de Grenoble en 1810 (l'université actuelle porte son nom) et c'est lui qui y perçut le potentiel de Champollion. Il devint membre de la Royal Society (en tant qu'étranger!), de l'Académie Française mais aussi de l'Académie des sciences dont il tint le rôle de secrétaire perpétuel.

#### A.1.2 Son œuvre

Joseph Fourier est surtout connu pour ses travaux sur la propagation de la chaleur et l'évolution de la température. En bon mathématicien, il s'appuya sur la notion de séries trigonométriques pour étayer ses travaux, ce qui posa les bases du développement en série de Fourier. Certains scientifiques vinrent ajouter un peu de rigueur mathématique à ces outils (Lagrange, Laplace, etc.).

Il fut le premier à comprendre l'influence des couches de gaz de l'atmosphère sur la température de la Terre, ce qui fit de lui le premier à évoquer l'effet de serre. De même il fut le premier à comprendre que la principale source d'énergie sur terre est le Soleil.

## A.2 Brève biographie de Claude Shannon



Claude Shannon (1916-2001) étudia le génie électrique à l'Université du Michigan avant d'intégrer le *Massachusetts Institute of Technology (MIT)* où, suivant entre autres les enseignements de Wiener, il obtint un master en 1938, master dans lequel, illustrant ses aptitudes aux mathématiques, il appliqua l'algèbre booléenne à la conception de machines à relais, montrant par la même que la matérialisation électrique de l'algèbre de Boole (par des relais ou tout autres équivalents plus modernes) pouvait résoudre tout problème logique (ah, les fameuses tables de vérité, leur simplification, etc. !). Ce master fut considéré par certains comme le « master le plus brillant de tous les temps » (rien que ça !). En 1940, il décrocha son doctorat de mathématiques, toujours au MIT.

Il partagea sa carrière entre des activités académiques, notamment au MIT entre 1958 et 1978, et ses activités plus appliquées aux laboratoires Bell (1941-1972).

Grandissant dans le culte de son héros Thomas Edison (dont il apprit plus tard qu'il était un cousin éloigné), il était un bricoleur de génie, construisant chez lui de nombreux mécanismes amusants ou paradoxaux.

En 1948 et 1949, Shannon présenta son schéma de principe de communication entre machines. Ce schéma fut vécu comme une révolution dans le monde des sciences de l'information et de la communication, à un tel point que Shannon est perçu comme le père de théorie de l'information, ce dont il se défendit.

Il fut aussi à l'origine, entre autres, de la notion d'entropie de l'information, toujours croissante, dont il montra l'analogie avec l'entropie définie en thermodynamique.

Il s'illustra aussi en jetant certaines bases théoriques de codage, de compression (premier théorème de Shannon) et étudia la capacité d'un canal à transmettre le contenu d'une source d'information (second théorème de Shannon). Son œuvre est donc majeure et ce n'est que pour une petite part de cette dernière ayant trait à l'Automatique, le théorème de Nyquist-Shannon brièvement exposé ci-avant (Nyquist étant souvent oublié), que cette biographie est retenue.

Shannon fut emporté par la maladie d'Alzheimer.

## A.3 Table de transformées de Fourier

Voici un tableau succinct regroupant quelques transformées connues. Ce tableau est à utiliser en sus des propriétés données dans le cours. Pour exprimer rigoureusement ces transformées, il convient d'introduire les fonction suivantes :

$$\begin{aligned} \kappa : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ f &\mapsto \begin{cases} \kappa(f) = f & \text{si } f \neq 0, \\ \kappa(f) = 0 & \text{si } f = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(Cette fonction permet d'éviter d'écrire abusivement des expressions non définies en  $f = 0$  dans le tableau ci-après.)

$$\begin{aligned} s : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} s(t) = 1 & \text{si } t > 0, \\ s(t) = 0 & \text{si } t = 0, \\ s(t) = -1 & \text{si } t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(Cette fonction est appelée fonction signe.)

$$\Gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$t \mapsto \mathbf{s}(t) = 1 \text{ si } t > 0,$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2} \text{ si } t = 0,$$

$$\Gamma(t) = 0 \text{ si } t < 0.$$

(Cette fonction est appelée échelon unitaire ou encore fonction de Heaviside. Les définitions peuvent varier concernant sa valeur en  $t = 0$ . Le choix présent permet de retrouver certaines transformées du tableau ci-après.)

Original $s(t)$	Transformée de Fourier $S(f)$	Transformée de Fourier $S^+(f)$ de $s(t)\Gamma(t)$ (signal causal)
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1	1
Fonction signe $\mathbf{s}(t)$	$\kappa\left(\frac{1}{j\pi f}\right)$	
Echelon d'amplitude $E$ i.e. $E\Gamma(t) = \frac{E(\mathbf{s}(t) + 1)}{2}$	$\kappa\left(\frac{E}{2i\pi f}\right) + \frac{E}{2}\delta(f)$	$\kappa\left(\frac{E}{2i\pi f}\right) + \frac{E}{2}\delta(f)$
1	$\delta(f)$	$\kappa\left(\frac{E}{2i\pi f}\right) + \frac{E}{2}\delta(f)$
Peigne de Dirac i.e. $P_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T}P_\delta(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nT)$
Rampe de pente $b$ i.e. $bt$		$\kappa\left(\frac{b}{(2i\pi f)^2}\right) + \frac{j}{2\pi} \frac{d\delta(f)}{df}$
$e^{2i\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$	$\kappa\left(\frac{1}{2i\pi(f - f_0)}\right) + \frac{1}{2}S(f)$
$e^{-at}$ , $\text{Re}(a) > 0$		$\frac{1}{2i\pi f + a}$
$t e^{-at}$ , $\text{Re}(a) > 0$		$\frac{1}{(2i\pi f + a)^2}$
$t^{q-1} e^{-at}$ , $\text{Re}(a) > 0$		$\frac{q!}{(2i\pi f + a)^q}$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{i}{2}\delta(f - f_0) - \frac{i}{2}\delta(f + f_0)$	$\kappa\left(\frac{(2\pi f_0)^2}{(2i\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}\right) + \frac{1}{2}S(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$	$\kappa\left(\frac{2i\pi f}{(2i\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}\right) + \frac{1}{2}S(f)$
$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t)$ , $\text{Re}(a) > 0$		$\frac{2\pi f_0}{(2i\pi f + a)^2 + (2\pi f_0)^2}$
$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t)$ , $\text{Re}(a) > 0$		$\frac{2i\pi f + a}{(2i\pi f)^2 + 2\pi f_0}$

La colonne de droite est ajoutée pour, entre autres, faire un lien avec les transformées de Laplace (vues plus tard dans l'année).

**Rappel des propriétés importantes :**

- Lorsque  $s(t)$  est pair c'est-à-dire que  $s(-t) = s(t)$ ,  $\forall t$ , il vient

$$S(f) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt.$$

- Lorsque  $s(t)$  est impair c'est-à-dire que  $s(-t) = -s(t)$ ,  $\forall t$ , il vient

$$S(f) = 2i \int_0^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt.$$

- linéarité :

$$s_1(t) + ks_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S_1(f) + kS_2(f), \quad k \in \mathbf{R}$$

- contraction du domaine :

$$s(kt) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|k|} S\left(\frac{f}{k}\right), \quad k \in \mathbf{R}$$

- Translation temporelle :

$$s(t + t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} S(f) e^{2i\pi f t_0}, \quad t_0 \in \mathbf{R}$$

- Modulation dans le domaine temporel :

$$s(t) e^{i2\pi f_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} S(f - f_0), \quad f_0 \in \mathbf{R}$$

- Produit de convolution :

$$(s_1 * s_2)(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S_1(f) S_2(f)$$

- Produit simple :

$$s_1(t) * s_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S_1(f) * S_2(f)$$

- Dérivation :

$$\frac{ds(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2i\pi f S(f)$$

- Intégration :

$$\int_0^t s(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{S(f)}{2i\pi f}$$

- Dualité :

$$\text{Si } s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S(f) \text{ alors } S(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} s(-f)$$