Travaux dirigés

Automatique

⋆

Introduction aux systèmes linéaires continus

Olivier BACHELIER
Courriel : Olivier.Bachelier@univ-poitiers.fr
Tel : 05-49-45-36-79 ; Fax : 05-49-45-40-34

Les commentaires constructifs et les rapports d'erreurs sont les bienvenus !

Résumé

Ce petit document d'énoncés de travaux dirigés s'inscrit dans le cadre de l'initiation à l'automatique (au sens de la régulation et de l'asservissement des systèmes) en deuxième année de l'**IUT de Poitiers-Châtellerault-Niort** et s'adresse principalement aux étudiants du département de **Mesures Physiques**, situé sur le site de Châtellerault. Il accompagne les notes de cours intitulées *Un premier pas en Automatique*.
L'IUT de Poitiers-Châtellerault-Niort est un UFR de l'**Université de Poitiers**.
Le document se focalise principalement sur les notions de boucle, de fonctions de transfert des systèmes linéaires, de réponse et de stabilité de ces systèmes et, enfin, envisage un peu la commande de ces derniers.

Connaissances préalables souhaitées

Les étudiants doivent s'appuyer sur le contenu des notes de cours correspondant à ce module. Mais une bonne connaissance du cours de traitement du signal et de la notion de diagramme de Bode vue en filtrage est utile. L'éventuelle connaissance préalable de la transformation de Laplace est bienvenue.

Déroulement des séances

Le module de traitement du signal ne comprend hélas que cinq séances de TD au cours desquelles les notions vues en cours sont illustrées.
Cinq énoncés sont donc proposés.

Table des matières

TD n° 1

Notion de boucle et modélisation des systèmes

Objectifs

- Comprendre l'utilité de la boucle.
- Modéliser un système linéaire par une fonction de transfert.

Durée : 2h00

Sommaire

1.1 À propos de la boucle...

1.1.1 La voiture : un système bouclé

Un petit exercice est proposé pour illustrer la notion de boucle. Le système considéré est une voiture dans laquelle se trouve un conducteur (cérébré, c'est important !) évoluant dans un environnement (route, météo, etc.).
Voici quelques questions (sous forme de discussion avec l'enseignant) :

1. Répertorier, sur ce système, quelques exemples de boucles.
2. Quelles sont les boucles ≪ automatiques ≫ ?
3. Citer d'autres exemples de boucles de régulation ou d'asservissement qui ne sont pas liées au véhicule.
4. Quelle est la différence entre *asservissement* et *régulation* ?

1.1.2 De l'art de prendre sa douche

Trois types de douche sont considérées : la douche collective, la douche classique avec un banal (mais efficace) mitigeur et la douche avec mitigeur thermostatique. La sortie à contrôler est la température de l'eau de la douche.

1. Expliquer à l'aide de schémas en quoi ces trois types de douche correspondent à trois types de boucle : ouverte, manuelle et automatique.
2. Citer un autre exemple trivial de plomberie qui présente un système régulé.

1.2 Modélisation des systèmes linéaires

1.2.1 Petits exemples mécaniques

Soit le système mécanique donné par la figure 1.1

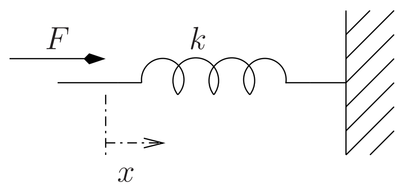

FIGURE 1.1 – Système à ressort

F est la force exercée sur le ressort, x la position d'un point du ressort (par rapport à une référence initiale nulle) et k la constante de raideur de ce dernier. L' entrée du système est $u = F$ et la sortie est $y = x$ comme sortie.

1. Déterminer la fonction de transfert d'un tel système.
2. À quel comportement correspond-elle ?

Soit maintenant le système mécanique donné par la figure 1.2 où le ressort est remplacé par un amortisseur associé à un coefficient de frottement visqueux f.

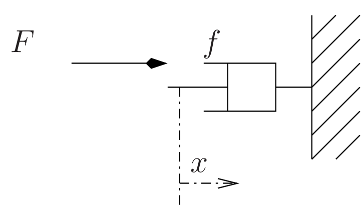

FIGURE 1.2 – Système à amortisseur

L'entrée et la sortie du cas précédent sont conservées.

1. Déterminer la fonction de transfert de ce nouveau système.
2. De quel comportement s'agit-il ?

Soit maintenant une association des deux systèmes comme le montre la figure 1.3.
L'entrée et la sortie des cas précédents sont toujours conservées.

3. Déterminer la fonction de transfert de ce nouveau système.

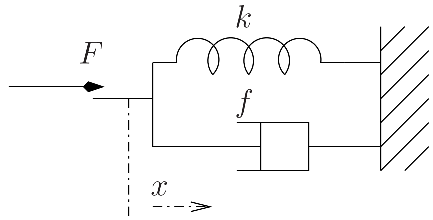

FIGURE 1.3 – Ressort + amortisseur

4. De quel comportement s'agit-il ?
5. Quels sont les pôles et les zéros du système ?
6. Quel est le gain statique ?
7. Quelle est la constante de temps ?

Enfin, l'on veut modéliser un système mécanique dont le schéma est donné figure 1.4 :

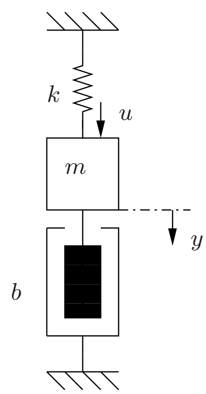

FIGURE 1.4 – Exemple de système mécanique

Un solide de masse m est soumis à plusieurs forces. La constante de raideur du ressort est de valeur k et b est un coefficient de frottement visqueux. L'on peut appliquer une force u dirigée comme indiqué sur la figure 1.4. Il s'agit de l'entrée du système. La sortie est y, la variation de position de la masse par rapport à une valeur d'équilibre.

8. Déterminer la fonction de transfert correspondante.
9. Quel sont son gain statique, son coefficient d'amortissement et sa pulsation propre non amortie ?

1.3 Sur le schéma type d'asservissement

Soit le schéma bloc de la figure 1.5.

1. Donner un nom à tous les éléments du schéma-bloc, à savoir :
   – les blocs : $R(p)$, $G(p)$, $L(p)$, $H(p)$ et le symbole $\otimes$;
   – les signaux : $Y_c(p)$, $\varepsilon(p)$ $U(p)$, $Y(p)$.
2. Exprimer $L(p)$.
3. Exprimer $H(p)$ en utilisant la formule vue en cours (formule dite « de *Black* »).
4. Redémontrer cette formule en vous aidant du schéma-bloc.

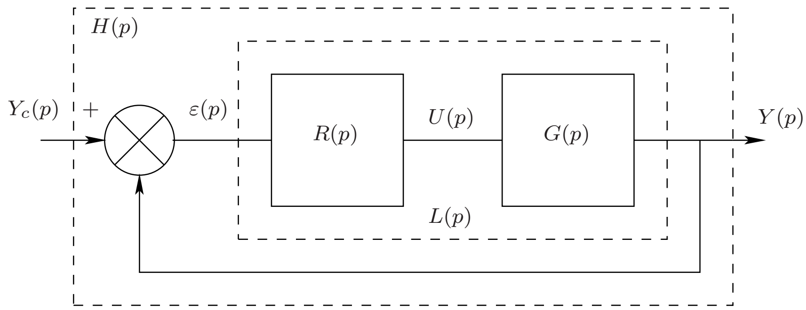

FIGURE 1.5 – Système bouclé

1.4 Modélisation d'un système d'antenne parabolique

On cherche à modéliser une antenne parabolique dans le but d'asservir ultérieurement sa position selon deux axes. La position de la parabole se traduit en effet par deux valeurs de positions angulaires (une pour chaque axe) qui peuvent être commandées indépendamment l'une de l'autre au moyen de deux moteurs. Par conséquent, on étudie ici le sous-problème consistant à asservir une seule des deux positions angulaires. Le schéma de la figure 1.6 présente le principe de fonctionnement de cet asservissement. On impose une consigne en tension y_c qui traduit une position angulaire désirée. Par ailleurs, un potentiomètre convertit la position angulaire de l'arbre de sortie θ en une tension y selon une loi proportionnelle de gain b, cohérente avec l'échelle des consignes. La différence de tension est amplifiée en une tension u qui excite un moteur à courant continu M. Ce dernier, en tournant à une vitesse Ω, par le biais d'un réducteur de vitesse de rapport a, entraîne bien sûr une variation de θ donc de y.

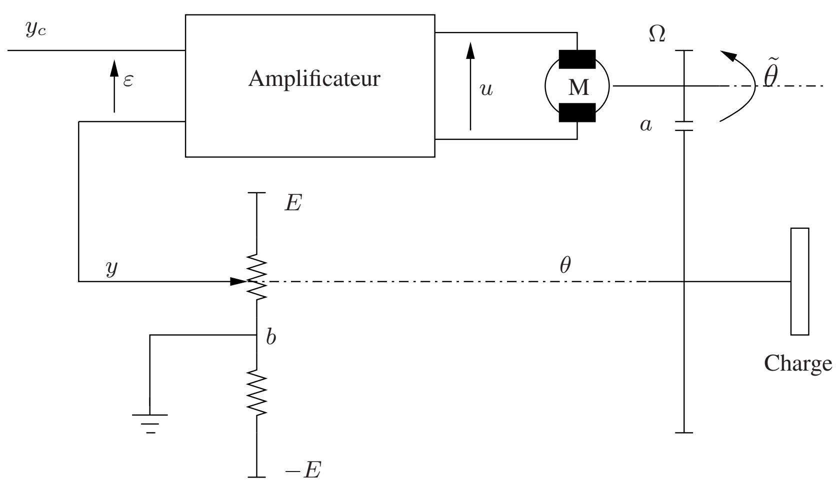

FIGURE 1.6 – Schéma de principe de l'asservissement de position angulaire

Première partie : formalisation du schéma-bloc

1. Montrer que l'asservissement de θ peut être présenté sous la forme d'un schéma-bloc comparable à celui de la figure 1.5 (identifier clairement la consigne, la commande, l'erreur et la sortie).

2. Quel élément joue le rôle du régulateur ?

Deuxième partie : transmittance du moteur

Le moteur utilisé est un moteur à courant continu de type ≪ à aimant permanent ≫. Il peut être modélisé comme indiqué par la figure 1.7.

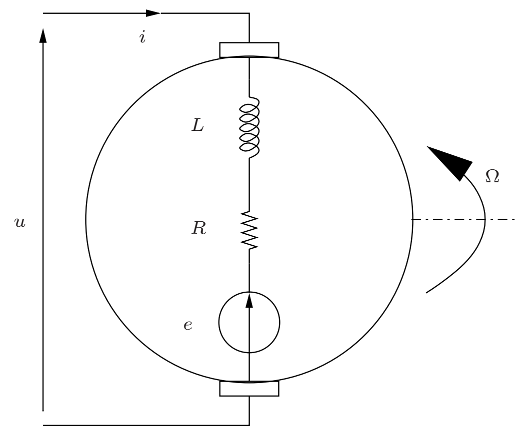

FIGURE 1.7 – Modèle du moteur à courant continu

Il s'agit de déterminer la fonction de transfert du moteur $G_1(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$. Le raisonnement est sensiblement différent de celui mené en cours.

3. Écrire l'équation différentielle décrivant les phénomènes électriques.
4. Appliquer la transformation de Laplace à cette équation.
5. En considérant que le couple moteur C_m est égal à $C_m = C \times i$ (il est donc proportionnel à l'intensité du courant d'induit) et que le couple résistant C_r s'exprime $C_r = f\Omega$ où f est un coefficient de frottement visqueux, donner l'équation différentielle reliant l'inertie J de l'arbre du moteur à Ω.
6. Appliquer la transformation de Laplace à l'équation obtenue.
7. Donner l'expression de la fonction de transfert $G_1(p)$.
8. En négligeant l'inductance L généralement faible, reformuler cette fonction et montrer qu'elle peut prendre la forme canonique de 1er ordre.

Troisième partie : transmittance du procédé

9. Quelle est la relation qui unit, dans le domaine de Laplace, la vitesse angulaire Ω à la position angulaire θ ?
10. Exprimer $G_2(p)$, la fonction de transfert entre $\Omega(p)$ et $Y(p)$.
11. Donner la fonction de transfert du procédé en boucle ouverte $G(p) = \dfrac{Y(p)}{U(p)}$.

Quatrième partie : la boucle fermée

12. En supposant que l'amplification est de gain A, utiliser les résultats de l'exercice 1 pour écrire la fonction de transfert de la chaîne directe.
13. En déduire la fonction de transfert en boucle fermée.
14. Quel est son gain statique ?
15. À quoi peut alors servir A du point de vue électrotechnique ainsi que du point de vue de l'Automatique ?
16. Quel dispositif pourrait par exemple assurer cette amplification ?

17. Exprimer la fonction de transfert sous forme canonique.
18. Préciser un peu mieux l'influence de A.

1.5 Réduction de schéma–bloc

Soit le système dont le schéma-bloc est donné par la figure 1.8.

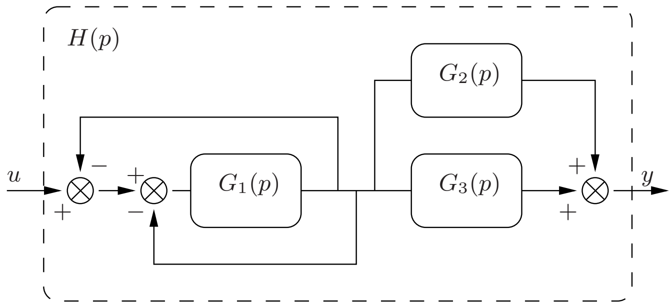

FIGURE 1.8 – Schéma-bloc du système global

Utiliser les règles de réduction d'un schéma-bloc et d'association de fonctions de transfert pour déterminer la fonction de transfert globale $H(p)$ du système.

TD n° 2

Réponse des systèmes linéaires

Objectifs

- Étudier la réponse d'un système de premier ou de deuxième ordre.
- Comprendre un peu l'influence des pôles sur cette réponse.

Durée : 1h30

Sommaire

2.1 Réponse indicielle d'un système de premier ordre

Soit le circuit RC de la Figure 2.1.

1. Écrire l'équation différentielle liant $u(t) = v_i(t)$ à $y(t) = v_o(t)$.
2. En prenant la transformée de Laplace des deux membres de l'équation différentielle précédemment obtenue et en notant respectivement $U(p)$ et $Y(p)$ les transformées de Laplace de $u(t)$ et $y(t)$, avec la condition initiale $y(0) = 0$, donner l'expression du rapport

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}.$$

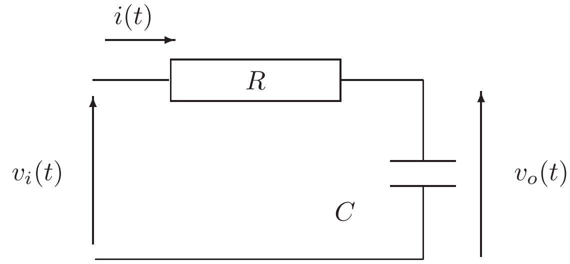

FIGURE 2.1 – Circuit RC

3. Que représente alors $G(p)$?
4. Si $u(t) = v_i(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E, à savoir

$$u(t) = \begin{cases} E & \forall t \geq 0, \\ 0 & \forall t < 0, \end{cases}$$

   donner alors l'expression de $y(t) = v_o(t)$ pour tout $t \geq 0$.
5. Déterminer le temps de réponse t_r à 5% défini par :

$$\left| \frac{y(t) - y(\infty)}{y(\infty)} \right| \leq 0.05, \qquad \forall t \geq t_r$$

   où $y(t)$ représente la réponse indicielle du système, en le comparant notamment à la constante de temps $\tau = RC$.
6. En déduire un premier moyen de déduire graphiquement τ sur la réponse indicielle.
7. Donner l'expression de l'équation de la tangente $\mathcal{D}$ à la réponse indicielle en l'origine.

Soit $\mathcal{D}_\infty$ la droite ayant pour équation $y(t) = y(\infty)$, $\forall t \geq 0$. Soit t_1, l'abscisse du point B d'intersection entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_\infty$.

8. Déterminer alors l'expression de t_1 en fonction de τ.
9. En déduire un second moyen pour déterminer τ.

On considère que le système est en boucle fermée comme l'indique la Figure 1.5 (voir TD n˚1) avec

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \text{et} \quad R(p) = A.$$

10. Donner l'expression de $H(p)$, la fonction de transfert en boucle fermée.
11. Ecrire $H(p)$ sous la forme

$$H(p) = \frac{K'}{1 + \tau' p}$$

    et donner les expressions des constantes K' et τ' en fonction de K, A et τ. Comparer la boucle ouverte et la boucle fermée en terme de rapidité.

2.2 Réponse indicielle d'un système de deuxième ordre

On considère à nouveau un système en boucle fermée comme l'indique la Figure 1.5 (voir TD n˚1), avec $R(p) = A$, mais, cette fois-ci, $G(p)$ est la fonction de transfert d'un système canonique de deuxième ordre.

1. Rappeler la forme canonique en question.
2. Quels les trois paramètres caractéristiques de cette fonction de transfert (les nommer et en donner la signification) ?
3. Rappeler les diverses formes possibles de la réponse indicielle en boucle ouverte (celle de $G(p)$) en fonction du coefficient d'amortissement.
4. Quels sont les cas correspondant à des pôles complexes ?

TD n° 3

Stabilité des systèmes linéaires

Objectifs

- Comprendre ce que signifie la stabilité d'un système.
- Comprendre l'influence des pôles sur cette stabilité.
- Comprendre le critère du revers.

Durée : 1h00

Sommaire

3.1 Stabilité

Quelques questions sur la stabilité...

1. Des propriétés suivantes, rapidité, précision, et stabilité, laquelle est la plus importante ? Commenter.
2. Un bras robotisé est mal asservi et présente un comportement instable. Décrivez des possibilités pour de tels comportements.
3. S'il est maintenant stabilisé, atteindra-t-il la position voulue ?
4. Donner des exemples de comportements stables ou instables (discussion avec l'enseignant).

3.2 Critères des racines

Soient cinq systèmes dont les fonctions de transfert sont :

$$G_1(p) = \frac{p+6}{(p+1)(p+3)} \quad ; \quad G_2(p) = \frac{p-6}{(p+3)(p+2)} \quad ; \quad G_3(p) = \frac{1}{(p-2)(p+3)} \quad ;$$

$$G_4(p) = \frac{1}{1+0,1p+p^2} \quad ; \quad G_5(p) = \frac{2}{1+2p+p^2}.$$

1. Lesquels sont stables ?
2. Lesquels présentent une oscillation très marquée dans leur réponse indicielle ?
3. Déterminer l'allure de la réponse indicielle du dernier système.

3.3 Critère du revers

Soit le système bouclé présenté par la figure 3.1.

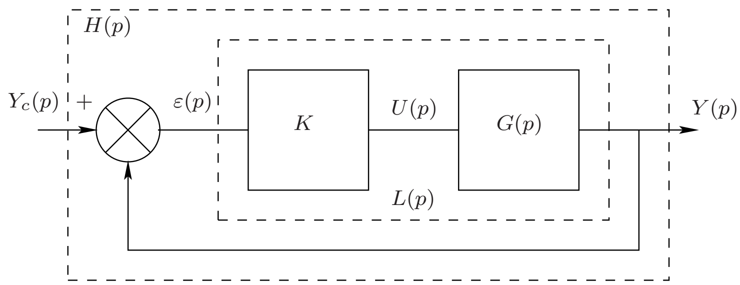

FIGURE 3.1 – Système bouclé

On suppose que la fonction de transfert du procédé est de la forme $G(p) = \dfrac{0.5}{p(1+p)}$. On s'intéresse à la stabilité de ce système bouclé.

On suppose d'abord que le gain K est donné : $K = 1$.

1. Sur papier à échelle semi-logarithmique, tracer le diagramme de Bode de $L(p)$ en s'appuyant sur un premier tracé asymptotique.
2. Évaluer les marges de stabilité dans le plan de Bode.
3. À l'aide du critère du revers, conclure quant à la stabilité asymptotique de $H(p)$.

On suppose maintenant simplement que K est constant, toujours positif.

4. En utilisant le diagramme de Bode, expliquer ce que deviennent les marges de stabilité
   - quand $K > 1$;
   - quand $0 < K < 1$.
5. Quelles sont les valeurs de $K > 0$ susceptibles de provoquer des oscillations dans les réponses temporelles du système en boucle fermée (donner une réponse qualitative) ?

On s'intéresse maintenant aux pôles de $H(p)$.

6. Exprimer les pôles du système bouclé en envisageant différents cas selon les valeurs de K.
7. Pour quelles valeurs de K obtient-on la stabilité asymptotique ?
8. Pour quelles valeurs de K le système est-il susceptible de présenter un comportement oscillatoire ?

TD n° 4

Commande par approche fréquentielle

Objectifs

- S'initier à la commande par l'approche fréquentielle.
- Utiliser à bon escient les marges de stabilité.

Durée : 2h00

Soit le système asservi suivant

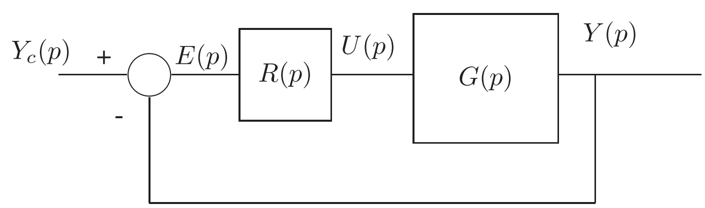

FIGURE 4.1 – Système avec correcteur

où $R(p)$ est un correcteur que l'on définira par la suite et $G(p)$ est le système à corriger dont la fonction de transfert est donnée par

$$G(p) = \frac{K}{(1 + p/\omega_1)(1 + p/\omega_2)},$$

avec $K = 100$, $\omega_1 = 2rd/s$ et $\omega_2 = 20rd/s$.

1. Tracer le diagramme de Bode du système en boucle ouverte $G(p)$.
2. Relever les marges de phase et de gain du système non corrigé (c'est-à-dire avec $R(p) = 1$).

On pose $R(p) = A$.

3. Écrire la fonction de transfert en boucle fermée sous la forme

$$H(p) = \frac{K_n\omega_n^2}{p^2 + 2m\omega_n p + \omega_n^2}$$

et donner les expressions de m, ω_n et K_n en fonction de K, ω_1, ω_2 et A.

4. Calculer la valeur de A permettant d'avoir un un coefficient d'amortissement égal à 0,7 en boucle fermée.
5. Quel est le gain statique en boucle fermée ?
6. En déduire l'erreur de position.
7. Justifier les résultats obtenus et commenter.

On pose maintenant

$$R(p) = \frac{\omega_i}{p}.$$

8. Tracer le diagramme de Bode du système pour $\omega_i = 1$rad/s.
9. Relever les marges de phase et de gain du système pour $\omega_i = 1$ et donner les valeurs des pulsations ω_c et ω_φ définies respectivement par Arg $\left(\frac{1}{j\omega_c}G(j\omega_c)\right) = -180°$ et $\left|\frac{1}{j\omega_\varphi}G(j\omega_\varphi)\right| = 1$.
10. Relever la pulsation notée ω_{135} définie par Arg $\left(\frac{1}{j\omega_{135}}G(j\omega_{135})\right) = -135°$et déterminer ω_i à partir de la condition $\omega_i\left|\frac{1}{j\omega_{135}}G(j\omega_{135})\right| = 1$.
11. Quelles sont alors les marges de phase et de gain du système dont la chaîne directe est $L(p) = R(p)G(p)$?
12. Commenter sur l'intérêt de ce nouveau régulateur.
13. Est-il efficace pour rejeter une perturbation en échelon sur $u(t)$?
14. Est-il efficace pour rejeter une perturbation en échelon sur $\epsilon(t)$?

TD n° 5

Réglage d'un PID par compensation de pôles

Objectifs

– Paramétrer un régulateur PID commandant un système simple.
– Appliquer la technique de la ≪ compensation de pôle ≫.

Durée : 1h30

On se propose de commander en vitesse le modèle de moteur à courant continu (vu en cours) dont la fonction de transfert est donnée par

$$G(p) = \frac{C}{JLp^2 + (RJ + fl)p + (Rf + C^2)}.$$

Pour simplifier, les valeurs numériques sont choisies sans réalisme et fixées à $C = f = J = R = 1$ et $L = 0,1$.

1. Écrire la fonction de transfert en utilisant les valeurs numériques.
2. Quel est son gain statique ?
3. Quels sont ses pôles ?
4. Quelles sont les constantes de temps associées ?

On décide de négliger l'inductance L.

5. Montrer que le modèle peut être simplifié en $G_s(p) = \dfrac{K}{1 + \tau p}$.
6. Donner les valeurs du gain statique, de la constante de temps, et du pôle associé.

Les figures 5.1 et 5.2 superposent, d'une part, les réponses indicielles de $G(p)$ et $G_s(p)$ et, d'autre part, leurs diagrammes de Bode.

7. Commenter ces courbes en expliquant notamment comment distinguer les deux réponses et les faire correspondre aux deux fonctions de transfert.

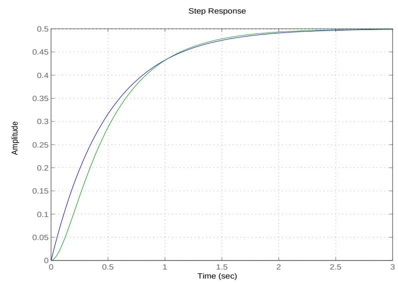

FIGURE 5.1 – Réponses indicielles de $G(p)$ et $G_s(p)$

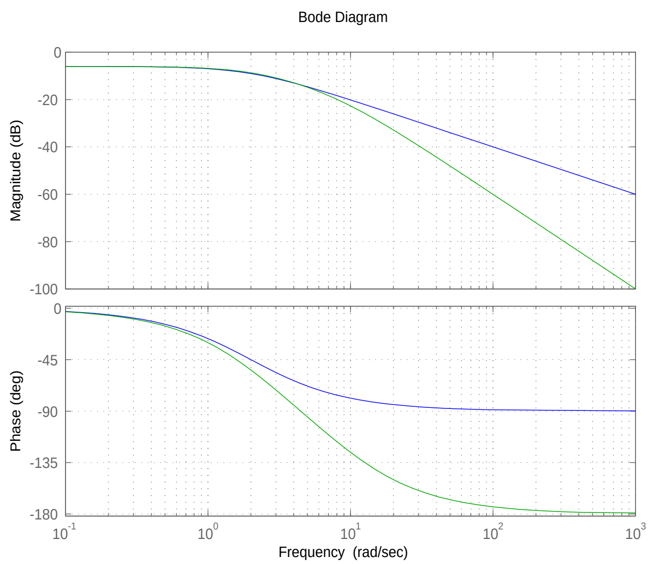

FIGURE 5.2 – Réponses fréquentielles de $G(p)$ et $G_s(p)$

On décide de se contenter de $G_s(p)$ pour synthétiser un correcteur PID.

8. Rappeler l'expression temporelle d'un correcteur PID ainsi que sa fonction de transfert.

On décide d'adopter un régulateur de fonction de transfert

$$R(p) = \frac{A}{p}(1 + \tau p).$$

Ce régulateur utilise donc la constante de temps de $G_s(p)$.

9. Montrer qu'il s'agit d'un régulateur PI.
10. Calculer la chaîne directe $L(p)$. À quel modèle de transfert correspond-elle ?
11. Calculer $H(p)$, la fonction de transfert en boucle fermée.
12. Exprimer τ_{bf}, la constante de temps en boucle fermée.
13. Calculer A pour obtenir $\tau_{bf} = 1/10$.

14. Expliquer pourquoi la technique utilisée ici est appelée ≪ compensation de pôle ≫.

La figure 5.3 montre la réponse indicielle théorique en boucle fermée ainsi que celle réellement obtenue sur le moteur.

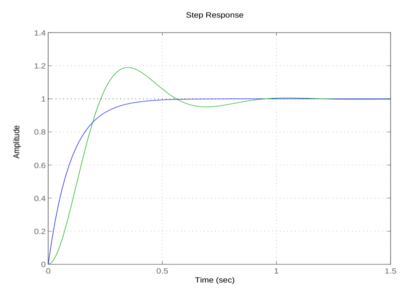

FIGURE 5.3 – Réponses indicielles de $H(p)$ et $H_s(p)$

15. Quelle est la réponse réelle ? Comment expliquer une telle différence qui n'apparaissait pas en boucle ouverte ?

On souhaite conserver des temps de réponse du même ordre mais réduire cette oscillation que l'on estime trop marquée. Pour ce faire, le régulateur est maintenant pris de la forme

$$R(p) = \frac{A}{p}(1+\tau p)(1+\tau_d p).$$

16. De quel type de régulateur s'agit-il ? Quel en est l'intérêt ?

Pour aider au choix de τ_d, la figure 5.4 fait apparaître les diagrammes de Bode des deux chaînes directes dans le cas du modèle simplifié et dans le cas du modèle complet. En outre, les marges de stabilité sont données pour le cas complet. L'on note notamment qu'à la pulsation 8,26 rad/s, la marge de phase est mesurée à 48,4°.

17. Tracer le diagramme de Bode asymptoptique de $(1+\tau_d p)$.
18. Expliquer comment choisir τ_d pour augmenter la marge de phase de $L(p)$.

On choisit $\tau_d = 0,1$s. Ceci permet d'obtenir la réponse indicielle donnée par la figure 5.5.

19. Pourquoi la réponse indicielle obtenue ressemble-t-elle à celle d'un premier ordre ?

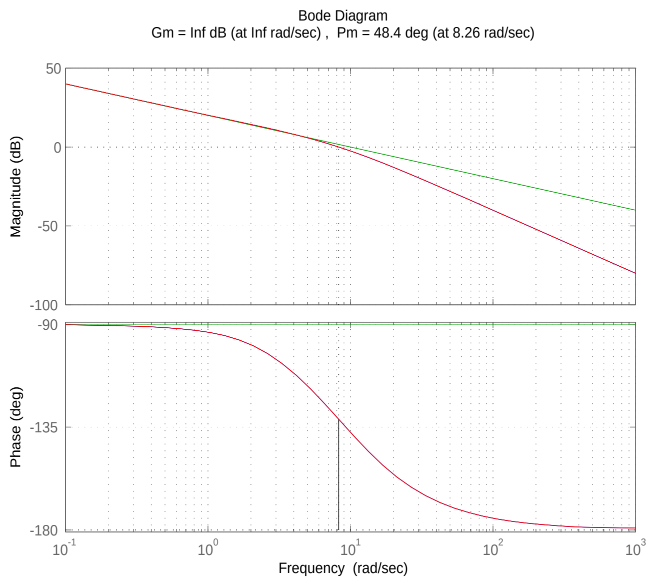

FIGURE 5.4 – Réponses fréquentielles de $L(p)$ et $L_s(p)$

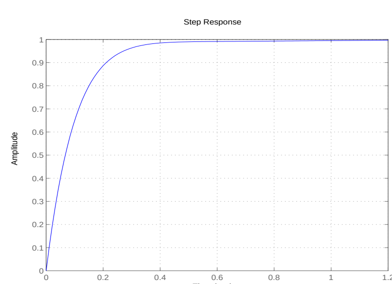

FIGURE 5.5 – Réponse indicielle de $H(p)$ avec le régulateur complet