Institut Universitaire de Technologie de Poitiers
Département de Génie Electrique et Informatique Industrielle

Travaux Dirigés d'Asservissements Linéaires

Module AU3

Driss MEHDI et Olivier BACHELIER

Soit le circuit RC de la Figure 1,

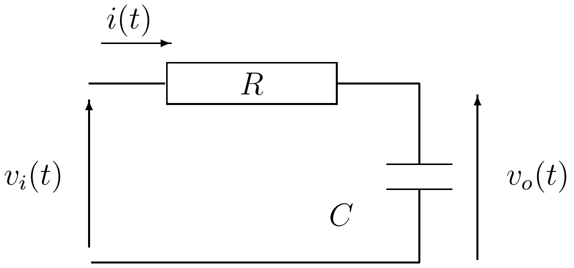


FIG. 1 – Circuit RC

1) Ecrire l'équation différentielle liant $v_i(t)$ à $v_o(t)$.
2) En prenant la transformée en p des deux membres de l'équation différentielle obtenue précédemment et en notant respectivement $V_i(p)$ et $V_o(p)$ les transformées en p de $v_i(t)$ et $v_o(t)$, avec la condition initiale $v_o(0) = 0$, donner l'expression du rapport

$$F(p) = \frac{V_o(p)}{V_i(p)}.$$

Que représente alors $F(p)$?
3) Si $v_i(t)$ est un échelon de tension

$$v_i(t) = \begin{cases} E & \forall t \geq 0, \\ 0 & \forall t < 0, \end{cases}$$

donner alors l'expression de $v_o(t)$ pour tout $t \geq 0$.
4) Déterminer le temps de réponse t_r à 5% donné par :

$$\left| \frac{y(t) - y(\infty)}{y(\infty)} \right| \leq 0.05, \qquad \forall t \geq t_r$$

où $y(t)$ représente la réponse indicielle du système.
5) Déterminer le temps de montée $t_m = t_{90\%} - t_{10\%}$ où $t_{10\%}$ et $t_{90\%}$ désignent respectivement les instants auxquels la réponse indicielle atteint 10% et 90% de sa valeur finale.
6) Soit A un point de la courbe représentant la réponse indicielle de coordonnées $(t_o, y(t_o))$.
   – Donner l'expression de l'équation de la tangente $\mathcal{C}$ passant par le point A.
   – Soit $\mathcal{C}_o$ la droite ayant pour équation $y_o(t) = y(\infty)$, $\forall t \geq 0$. Soit t_1 l'abscisse de B le point d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_o$. Déterminer alors l'écart $t_1 - t_o$ en fonction de τ.
   – En déduire un moyen pour déterminer τ.
7) On considère que le système est en boucle fermée comme l'indique la Figure 2.

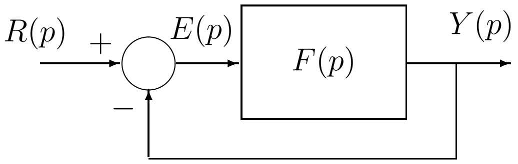


FIG. 2 – Boucle fermée

avec $F(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$.

- Donner l'expression de $H(p)$, la fonction de transfert en boucle fermée.
- Ecrire $H(p)$ sous la forme
$$H(p) = \frac{K'}{1+\tau' p}$$
et donner les constantes K' et τ' en fonction de K et τ. Comparer la boucle ouverte et la boucle fermée en terme de rapidité.

Etude d'un premier cas

Soit le circuit électrique de la figure 3.

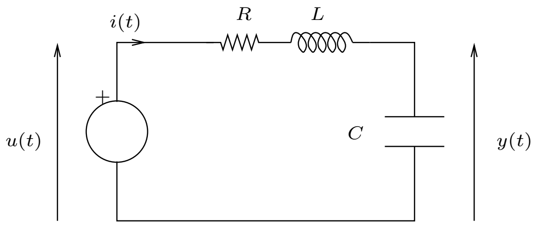


FIG. 3 – Circuit RLC

On suppose que la tension $u(t)$ délivrée par l'alimentation est le signal d'entrée alors que la tension $y(t)$ est le signal de sortie.

Fonction de transfert du circuit RLC

1) Ecrire l'ensemble des équations algébriques et différentielles décrivant le comportement du système.
2) En déduire l'expression de $u(t)$ en fonction de $y(t)$ en éliminant $i(t)$ de cette expression.
3) Appliquer la transformation de *Laplace* en supposant des conditions initiales nulles.
4) En déduire la fonction de transfert $G(p) = Y(p)/U(p)$.
5) Quel est l'ordre de $G(p)$ (justifier la réponse) ?
6) Mettre $G(p)$ sous forme canonique.
7) Quel est le gain statique du système ?

Réponse indicielle

On suppose qu'avant l'instant $t = 0$, la tension $u(t)$ est nulle et le circuit RLC est au repos. A cet instant $t = 0$, la tension $u(t)$ passe subitement à 1V. On a donc $u(t) = \Gamma(t)$, c'est-à-dire que $u(t)$ est un échelon unitaire (encore appelé fonction de *Heaviside*).
On peut par ailleurs écrire que $G(p)$ a la forme

$$G(p) = \frac{A}{(p - r_1)(p - r_2)}$$

où r_1 et r_2 sont les racines du dénominateur de la fonction de transfert.

1) Comment s'appelle aussi le dénominateur de la fonction de transfert ?
2) Comment appelle-t-on les racines r_1 et r_2 ?

3) Quelle est la transformée de *Laplace* $U(p)$ du signal d'entrée ?
4) Quelle est donc $Y(p)$, celle du signal de sortie ?
5) On peut montrer que $Y(p)$, par décomposition en éléments simples, peut s'écrire :

$$Y(p) = \frac{R_1}{p - r_1} + \frac{R_2}{p - r_2} + \frac{1}{p}.$$

R_1 et R_2 sont appelés des résidus. En utilisant la transformation inverse de *Laplace*, exprimer $y(t)$ en fonction de R_1, R_2, r_1, r_2 et $\Gamma(t)$.

Sans analyser la forme détaillée de la réponse indicielle, on cherche à en connaître quelques caractéristiques. Il convient de différencier le cas où r_1 et r_2 sont réels de celui où ils sont complexes.

r_1 et r_2 sont réels

1) Que se passe-t-il si l'une des deux valeurs r_1 ou r_2 est positive ?
2) Est-il possible que la réponse indicielle présente une oscillation ?
3) On suppose que r_1 et r_2 sont négatifs. Vers quelle valeur la tension $y(t)$ converge-t-elle ?

r_1 et r_2 sont complexes

Dans ce cas, r_1 et r_2 sont forcément conjugués et l'on a $r_1 = \tilde{r}_2 = \alpha + j\beta$. En outre, on montre que R_1 et R_2 sont aussi conjugués et $R_1 = \tilde{R}_2 = \rho e^{j\theta}$.

1) Expliquer pourquoi r_1 et r_2 ne peuvent être que conjugués.
2) Réexprimer $y(t)$ sous une forme plus simple faisant apparaître un cosinus.
3) Que se passe-t-il si la partie réelle de r_1 (donc aussi celle de r_2) est positive ?
4) Dans le cas opposé, vers quelle valeur la tension $y(t)$ converge-t-elle ?
5) Commenter les formes possibles de la réponse indicielle en fonction des valeurs de α et β.
6) L'oscillation est-elle toujours visible ?

Cas général

On s'intéresse ici à un modèle canonique de deuxième ordre.

1) Rappeler cette forme canonique de la fonction de transfert de deuxième ordre.
2) Donner un nom et une signification à chaque paramètre.
3) On s'intéresse plus particulièrement au coefficient d'amortissement m. En utilisant les résultats du cours, préciser à quelles valeurs possibles de m correspondent les deux cas étudiés ($\{r_1; r_2\} \in \mathbb{R}^2$ d'une part, et $\{r_1; r_2\} \in \mathbb{C}^2$ d'autre part).

Remarque 1 *Il est rappelé que le cours reprend toutes les réponses indicielles et fréquentielles d'un modèle de deuxième ordre en fonction des paramètres de la forme canonique de la fonction de transfert. Ce TD ne vient que pour confirmer une partie de ces résultats.*

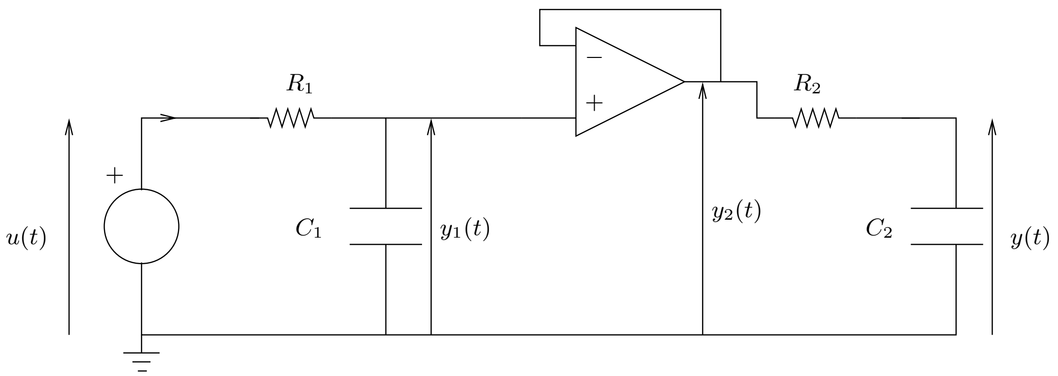


FIG. 4 – Circuits RC en cascade

Systèmes de premier ordre en cascade

Le circuit de la figure 4 est maintenant étudié.

1) Exprimer $y_1(t)$ en fonction de $u(t)$.
2) En déduire la fonction de transfert $G_1(p) = Y_1(p)/U(p)$. De quel ordre est-elle ?
3) Exprimer $y(t)$ en fonction de $y_2(t)$.
4) En déduire la fonction de transfert $G_2(p) = Y(p)/Y_2(p)$. De quel ordre est-elle ?
5) Exprimer $y_2(t)$ en fonction de $y_1(t)$.
6) En déduire la fonction de transfert $G(p) = Y(p)/U(p)$. De quel ordre est-elle ?
7) Quel est le gain statique du système ?
8) Quelles sont les deux constantes de temps τ_1 et τ_2 ?
9) Quels sont les deux pôles ?
10) Quel est le rôle du montage à base d'amplificateur opérationnel (justifier très précisément la réponse) ?
11) A quel cas parmi les deux étudiés ce montage correspond-il : $\{r_1; r_2\} \in \mathbb{R}^2$ ou $\{r_1; r_2\} \in \mathbb{C}^2$? Peut-il osciller ?
12) Que peut-on dire du coefficient d'amortissement ?
13) On suppose que τ_2 est très inférieure à τ_1 de telle sorte que l'on peut la négliger. Que devient $G(p)$? De quel ordre est-elle ?
14) Si l'on trace la réponse indicielle d'un tel système (toujours avec $\tau_2 << \tau_1$), comment pourra-t-on détecter qu'il s'agit d'un système de deuxième ordre malgré les apparences ?

TD AU3 N°3 : Réponse fréquentielle des systèmes
Association de fonctions de transfert — $2^{\text{ème}}$ année

Exercice 1

Soit un système du premier ordre de fonction de transfert $F(p) = \dfrac{K}{1 + \tau p}$ avec $K = 10$ et $\tau = 0.1s$.

1) Tracer le diagramme asymptotique de *Bode*, Gain et Phase ainsi que l'allure des courbes réelles.
2) Donner l'équation du lieu $F(j\omega)$ (partie imaginaire en fonction de la partie réelle).
3) Tracer ce lieu en utilisant le diagramme de *Nyquist*.
4) même question que précédemment mais en utilisant le diagramme de *Black-Nichols*

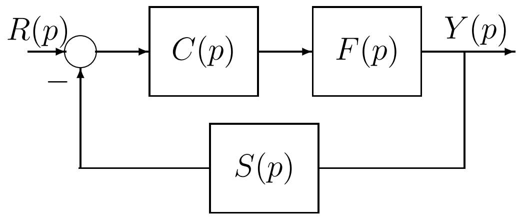
Exercice 2

Soit le système dont la fonction de transfert est donnée par $F(p) = \dfrac{K}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$ avec $K = 10$, $\tau_1 = 0.1\ s$ et $\tau_2 = 0.01\ s$.

1) Tracer le diagramme asymptotique de *Bode*, Gain et Phase.
2) Donner l'allure du lieu de $F(j\omega)$ en utilisant le diagramme de *Nyquist*.
3) Donner l'allure du lieu de $F(j\omega)$ en utilisant le diagramme de *Black-Nichols*

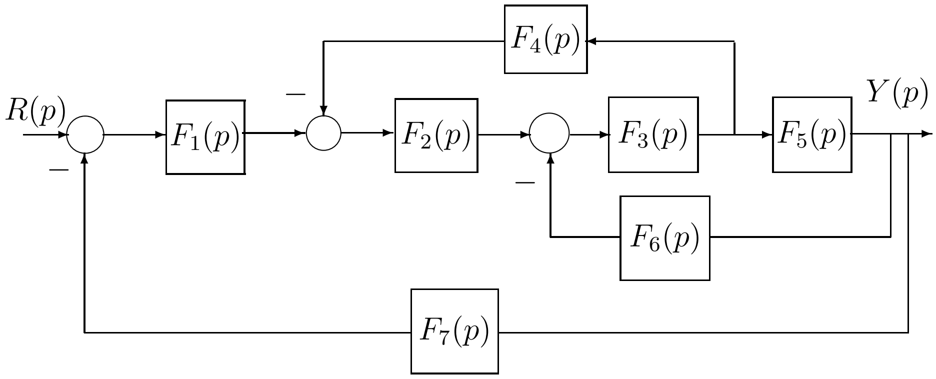
Exercice 3

Donner la fonction de transfert du système en boucle fermée suivant :



Exercice 4

Donner la fonction de transfert du système en boucle fermée suivant :



Exercice 1

Soit le schéma bloc de la figure 5.

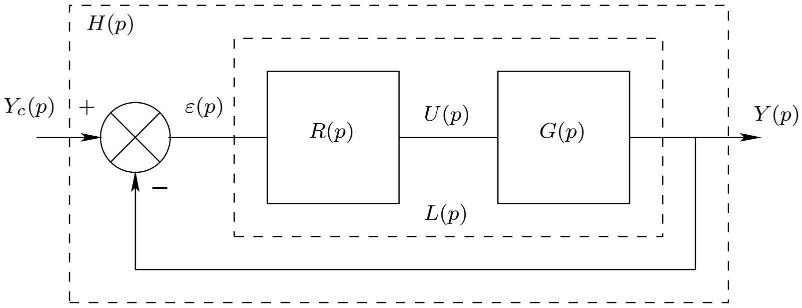


FIG. 5 – Système bouclé

1) Donner un nom à tous les éléments du schéma-bloc, à savoir :
   – les blocs : $R(p)$, $G(p)$, $L(p)$, $H(p)$ et le signe $\otimes$;
   – les signaux : $Y_c(p)$, $\varepsilon(p)$ $U(p)$, $Y(p)$.
2) Exprimer $L(p)$.
3) Exprimer $H(p)$ en utilisant la formule vue en cours (formule dite “de *Black*”).
4) Redémontrer cette formule en vous aidant du schéma-bloc.

Exercice 2

On cherche à asservir la position d'une antenne parabolique selon deux axes. La position de la parabole se traduit en effet par deux valeurs de positions angulaires (une pour chaque axe) qui peuvent être commandées indépendamment l'une de l'autre au moyen de deux moteurs. Par conséquent, on étudie ici le sous problème consistant à asservir une seule des deux positions angulaires. Le schéma de la figure 6 présente le principe de fonctionnement de cet asservissement. On impose une consigne en tension y_c qui traduit une position angulaire désirée. Par ailleurs, un potentiomètre convertit la position angulaire de l'arbre de sortie θ en une tension y selon une loi proportionnelle de gain b. La différence de tension est amplifiée en une tension u qui excite un moteur à courant continu M. Ce dernier, en tournant à une vitesse Ω, par le biais d'un réducteur de vitesse de rapport a, entraîne bien sûr une variation de θ donc de y.

Première partie : formalisation du schéma-bloc

1) Montrer que l'asservissement de θ peut être présenté sous la forme d'un schéma-bloc comparable à celui de la figure 5.
2) Identifier clairement la consigne, la commande, l'erreur et la sortie.
3) Quel élément joue le rôle du régulateur ?

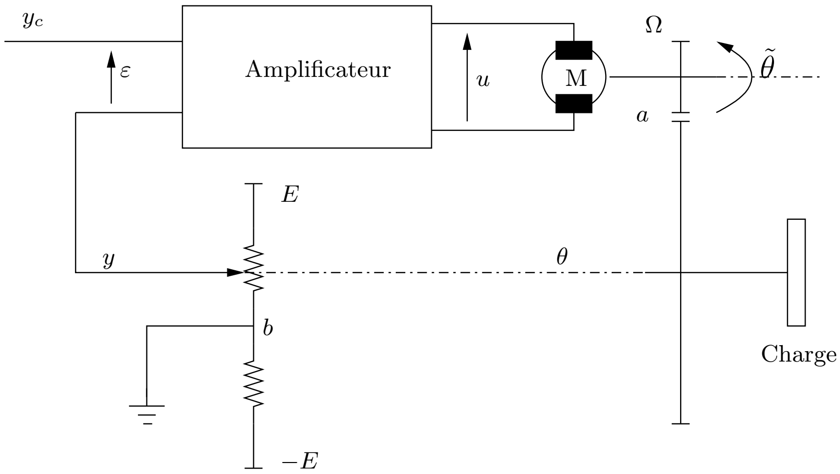


Fig. 6 – Schéma de principe de l'asservissement de position angulaire

Deuxième partie : transmittance du moteur

Le moteur utilisé est un moteur à courant continu de type "à aimant permanent". Il peut être modélisé comme indiqué par la figure 7.

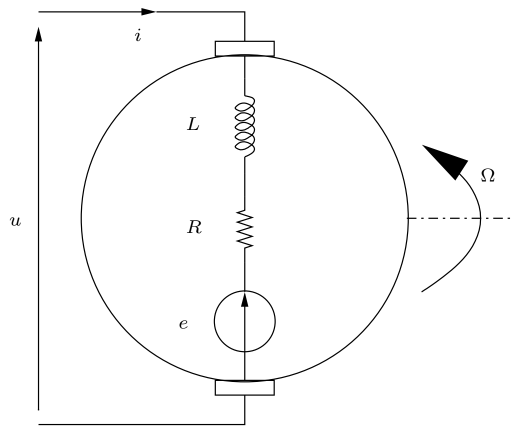


Fig. 7 – Modèle du moteur à courant continu

Il s'agit de déterminer la fonction de transfert du moteur $G_1(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$.

1) Ecrire l'équation différentielle décrivant les phénomènes électriques.
2) Appliquer la transformation de *Laplace* à cette équation.
3) En considérant que le couple moteur C_m est égal à $C_m = C \times i$ (il est donc proportionnel à l'intensité du courant d'induit) et que le couple résistant C_r s'exprime $C_r = f\Omega$ où f est un coeffcient de frottement visqueux, donner l'équation différentielle reliant l'inertie J de l'arbre du moteur à Ω.
4) Appliquer la transformation de *Laplace* à l'équation obtenue.
5) Donner l'expression de la fonction de transfert $G_1(p)$.

6) En négligeant l'inductance L généralement faible, reformuler cette fonction et montrer qu'elle peut prendre la forme canonique de 1^{er} ordre.

Troisième partie : transmittance du procédé

1) Quelle est la relation qui unit, dans le domaine de *Laplace*, Ω à θ, la position angulaire de l'arbre du moteur ?
2) Exprimer $G_2(p)$, la fonction de transfert entre $\Omega(p)$ et $Y(p)$.
3) Donner la fonction de transfert du procédé en boucle ouverte $G(p) = \dfrac{Y(p)}{U(p)}$.

Quatrième partie : la boucle fermée

1) En supposant que l'amplification est de gain A, utiliser les résultats de l'exercice 1 pour écrire la fonction de transfert de la chaîne directe.
2) En déduire la fonction de transfert en boucle fermée.
3) Quel est son gain statique ?
4) Quel élément essentiel explique ce résultat (donner une première explication physique ainsi qu'une seconde mathématique) ?
5) A quoi peut alors servir A du point de vue électrotechnique ainsi que du point de vue de l'Automatique ?
6) Quel dispositif pourraît par exemple assurer cette amplification ?
7) Exprimer la fonction de transfert sous forme canonique.
8) Préciser un peu mieux l'influence de A.

Exercice 1

Soit l'équation caractéristique $D(p) = p^3 + p^2 + 2p + 8 = 0$.

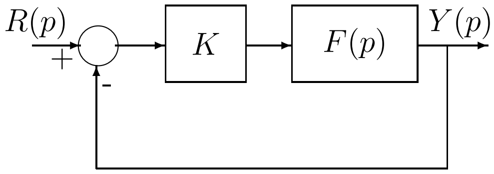
1) Dresser le tableau de *Routh-Hurwitz* et conclure de la stabilité du système dont le polynôme caractéristique est $D(p)$.
2) Donner le nombre des pôles stables, des pôles instables et de ceux sur l'axe imaginaire.

Exercice 2

Mêmes questions que précédemment pour $\begin{cases} D(p) = p^4 + p^3 + 5p^2 + 5p + 2 = 0. \\ D(p) = p^3 + 3p^2 + 2p + 6 = 0. \end{cases}$

Exercice 3

Soit le système en boucle fermée suivant

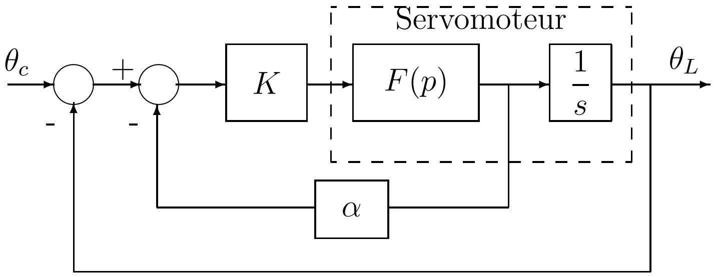


avec

$$F(p) = \frac{2}{p^3 + 4p^2 + 5p + 2}.$$

1) Donner le fonction de transfert en boucle fermée $H(p)$.
2) Donner l'ensemble des valeurs de K pour lesquelles le système en boucle fermée est stable.

Exercice 4



avec

$$F(p) = \frac{12}{p^2 + 7p + 10}$$

1) Donner le fonction de transfert en boucle fermée $H(p)$.
2) Sur le plan (K, α), préciser l'ensemble des valeurs de K et α pour lesquelles le système en boucle fermée est stable.

Soit le système bouclé présenté par la figure 8.

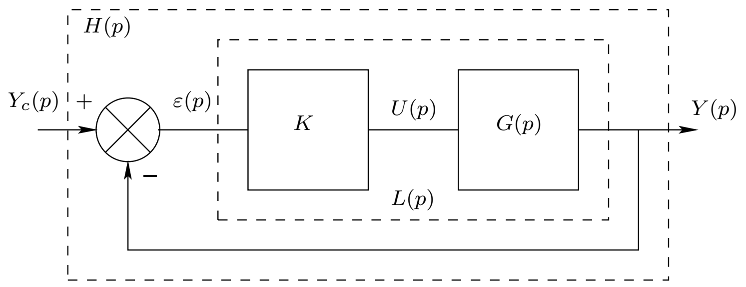


FIG. 8 – Système bouclé

On suppose que la fonction de transfert est de la forme $G(p) = \dfrac{0.5}{p(1+p)}$. On s'intéresse à la stabilité de ce système bouclé en utilisant divers outils d'analyse étudiés en cours.

Utilisation de la chaîne directe $L(p)$

On suppose d'abord que le gain K est donné : $K = 1$.

Analyse qualititative à K donné

1) Sur papier à echelle semi-logarithmique, tracer le diagramme de *Bode* de $L(p)$ en s'appuyant sur un premier tracé asymptotique.
2) En utilisant ce diagramme, tracer le lieu de *Nyquist* de $L(p)$.
3) A l'aide du critère du revers, conclure quant à la stabilité asymptotique de $H(p)$.

Analyse quantitative à K donné

1) Utiliser le lieu de *Nyquist* pour estimer graphiquement les marges de stabilité en boucle fermée.
2) Retrouver ces marges dans le plan de *Bode*.

Influence de K

On suppose maintenant simplement que K est constant, toujours positif.

1) En utilisant le diagramme de *Bode*, expliquer ce que deviennent les marges de stabilité
   - quand $K > 1$;
   - quand $0 < K < 1$.
2) Interpréter ces résultats dans le plan de *Nyquist*.
3) Quelles sont les valeurs de $K > 0$ susceptibles de provoquer des oscillations dans les réponses temporelles du système en boucle fermée (donner une réponse qualitative) ?
4) Que se passe-t-il si $K < 0$? Justifier la réponse dans les deux plans.

Utilisation de la transmittance $H(p)$

On raisonne maintenant directement sur la boucle fermée.

Critère algébrique de Routh-Hurwitz

1) Calculer $H(p)$.
2) Appliquer le critère de *Routh-Hurwitz* pour déterminer les valeurs de K qui assurent la stabilité en boucle fermée.
3) Comparer ce résultat à celui de la partie précédente.

Critère des racines

1) Exprimer les pôles du système bouclé en envisageant différents cas selon les valeurs de K.
2) Pour quelles valeurs de K obtient-on la stabilité asymptotique ?
3) Pour quelles valeurs de K le système est-il susceptible de présenter un comportement oscillatoire ?

Comparaison des critères

Commenter en quelques mots les différences fondamentales existant entre ces différents critères.

Soit le système asservi suivant

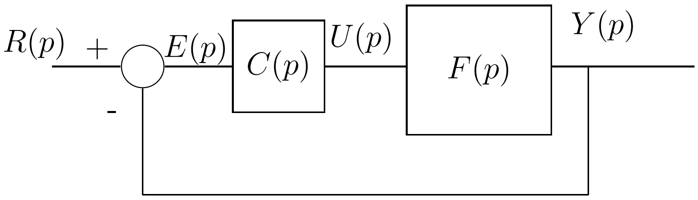


Fig. 9 – Système avec correcteur

où $C(p)$ est un correcteur que l'on définira par la suite et $F(p)$ le système à corriger donné par

$$F(p) = \frac{K}{(1+p/\omega_1)(1+p/\omega_2)}$$

avec $K = 100$, $\omega_1 = 2rd/s$ et $\omega_2 = 20rd/s$.

1) Tracer le diagramme asymptotique de *Bode* du système en boucle ouverte $F(p)$.
2) Relever les marges de phase et de gain du système non corrigé ($C(p) = 1$).
3) On pose $C(p) = A$.
   – Ecrire la fonction de transfert en boucle fermée sous la forme
   $$T(p) = \frac{K_n\omega_n^2}{p^2 + 2m\omega_n p + \omega_n^2}$$
   et donner les expressions de m, ω_n et K_n en fonction de K, ω_1, ω_2 et A.
   – Donner l'expression temporelle de la réponse indicielle du système en boucle fermée dans le cas $m < 1$.
   – Donner l'expression du premier dépassement indiciel en boucle fermée en fonction de K, ω_1, ω_2 et A.
   Quelle est l'expression du second dépassement en fonction du premier ?
   – Calculer la valeur de A permettant d'avoir un dépassement indiciel de 20% et donner l'allure de la réponse indicielle.
   – Quel est alors le temps de réponse obtenu (approximativement) ?
   – Quelles sont les valeurs des erreurs de position et de vitesse du système en boucle fermée ? Justifier les résultats obtenus.
4) On pose maintenant
   $$C(p) = \frac{\omega_i}{p}.$$
   – Tracer le diagramme asymptotique de *Bode* du système pour $\omega_i = 1$.
   – Relever les marges de phase et de gain du système pour $\omega_i = 1$ et donner les valeurs des pulsations ω_c et ω_φ définies respectivement par $\mathrm{Arg}\left\{\frac{1}{j\omega_c}F(j\omega_c)\right\} = -180°$ et $\left\|\frac{1}{j\omega_\varphi}F(j\omega_\varphi)\right\| = 1$.
   – Relever la pulsation notée ω_{135} définie par $\mathrm{Arg}\left\{\frac{1}{j\omega_{135}}F(j\omega_{135})\right\} = -135°$et déterminer ω_i à partir de la condition $\omega_i\left\|\frac{1}{j\omega_{135}}F(j\omega_{135})\right\| = 1$.
   – Quelles sont alors les marges de phase et de gain du système dont la chaîne directe est $L(p) = C(p)F(p)$?

Etude d'une boucle fermée

Asservissement de vitesse

Soit le modèle de premier ordre du moteur déjà étudié (l'entrée est la tension d'induit et la sortie est la vitesse du moteur)

$$G_\Omega(p) = \frac{A}{1+\tau p}.$$

Ce modèle est commandé en boucle fermée à l'aide d'un hacheur de gain $\bar{A}$ de telle sorte que l'asservissement obtenu est donné par la figure 10.

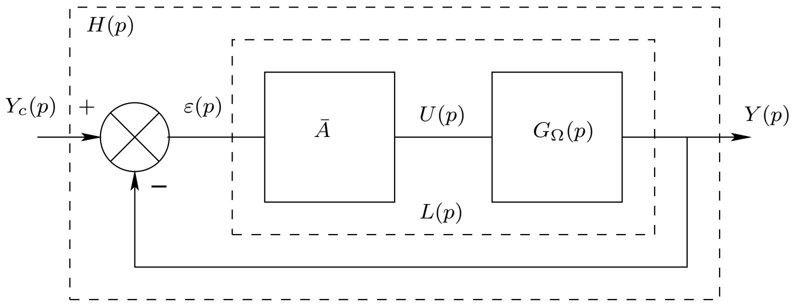


FIG. 10 – Système bouclé

1) Exprimer $L(p)$, la fonction de transfert de la chaîne directe.
2) Exprimer $H(p)$, la fonction de transfert en boucle fermée.
3) Donner la définition de l'erreur de position ε_p.
4) Calculer les gains statiques des modèles en boucle ouverte et en boucle fermée.
5) Exprimer $\varepsilon(p)$ en focntion de $Y_c(p)$.
6) En déduire la valeur de l'erreur de position ε_p.
7) Est-ce compatible avec la valeur du gain statique en boucle fermée ?
8) Le système est-il précis (donner une réponse qualitative) ?

Asservissement de position

On s'intéresse maintenant à l'asservissement de position angulaire de l'arbre du moteur. On remplace donc $G_\Omega(p)$ dans le schéma-bloc 10 par $G_\theta(p)$, la fonction de transfert entre la tension d'induit u et la position angulaire θ.

1) Donner l'expression de $G_\theta(p)$.
2) Recalculer $H(p)$.

3) Recalculer l'erreur de position. Le système est-il précis ?
4) Recalculer le gain statique en boucle fermée. Est-ce compatible avec la réponse à la question précédente ?
5) Ces résultats étaient-ils prévisibles ? Conclure.

Influence d'une perturbation

On réalise maintenant la commande selon le schéma de la figure 11.

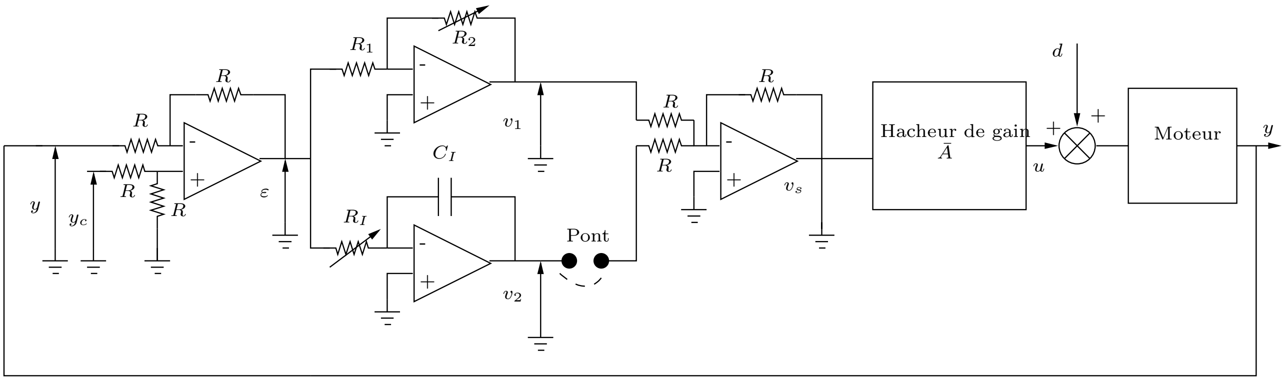


FIG. 11 – Nouveau système bouclé

Un "bloc" électronique permet, à partir de y, tension image de la position angulaire et de y_c, tension image de la consigne en position, de fournir à un hacheur une excitation v_s de manière à produire une commande u appliquée au système. Cependant, les imperfections du hacheur sont telles que u est entachée d'un offset d qui sera ici considéré comme un signal de perturbation.

Etude du bloc électronique

1) Exprimer ε en fonction de y et y_c. Quel est le rôle de ce premier montage à amplificateur ?
2) Exprimer v_1 en fonction de ε.
3) Idem pour v_2.
4) En supposant que le pont correspond à un gain α variable selon qu'il est un circuit ouvert ou fermé, exprimer v_s en fonction de ε.
5) En déduire la fonction de transfert $R(p) = \dfrac{U(p)}{\varepsilon(p)}$, le bloc correspondant pouvant être vu comme un régulateur.
6) Comment pourrait-on appeler un tel régulateur ?

Le pont en circuit ouvert

On suppose ici que le pont est en circuit ouvert.

1) Quelle est alors la fonction de transfert $R(p)$ du régulateur ?
2) Exprimer $Y(p)$ en fonction de $Y_c(p)$ et $D(p)$.

3) On suppose que la consigne et la perturbation sont respectivement des échelons d'amplitude Y_{c_0} et D_0. Exprimer $Y_c(p)$ et $D(p)$.
4) Donner l'expression de l'erreur de position. Est-elle nulle ? Conclure.

Le pont en circuit fermé

On valide maintenant l'effet intégral considérant le pont comme un court-circuit. Les signaux de consigne et de perturbation sont toujours des échelons.

1) Quelle est alors l'expression de $R(p)$?
2) Actualiser l'expression de $\varepsilon(p)$.
3) Recalculer l'erreur de position.
4) En déduire le gain statique du système en boucle fermée.
5) Conclure sur l'utilité des intégrateurs dans la chaîne directe en présence d'une perturbation de type échelon.

On se propose de commander en vitesse le modèle de moteur à courant continu déjà obtenu au TD n°4 et donné par

$$G(p) = \frac{C}{JLp^2 + (RJ + fl)p + (Rf + C^2)}.$$

Pour simplifier, les valeurs numériques sont choisies sans réalisme et fixées à $C = f = J = R = 1$ et $L = 0,1$.

1. Ecrire la fonction de tranfert en utilisant les valeurs numériques. Quelle est son gain statique ? Quelles sont ses pôles ? Quelles sont les constantes de temps associées ?

On décide de négaliger l'inductance L.

2. Montrer que le modèle peut être simplifié en $G_s(s) = \dfrac{K}{1 + \tau p}$.

3. Donner les valeurs du gain statique, de la constante de temps, et du pôle associé.

Les figures 12 et 13 superposent, d'une part, les réponses indicielles de $G(p)$ et $G_s(p)$ et, d'autre part, leurs diagrammes de Bode.
4. Commenter ces courbes en expliquant notamment comment distinguer les deux réponses et les

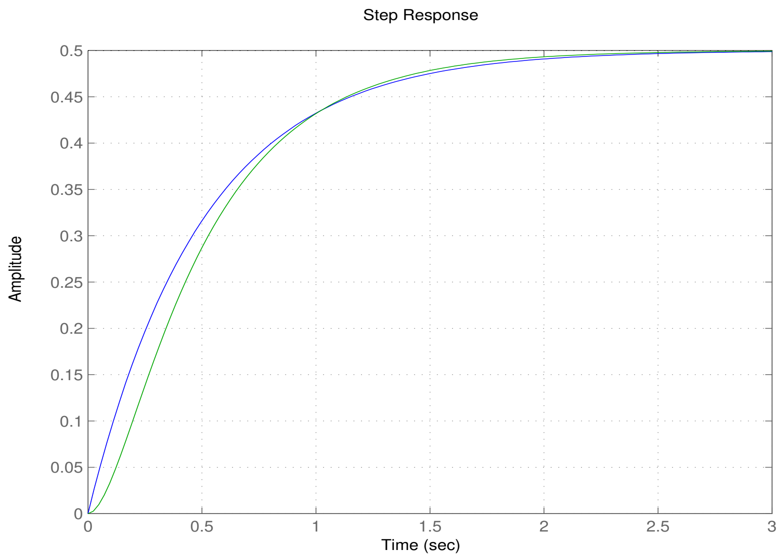


FIG. 12 – Réponses indicielles de $G(p)$ et $G_s(p)$

faire correspondre aux fonctions de transfert.

On décide de se contenter de $G_s(p)$ pour synthétiser un correcteur PID.
5. Rappeler l'expression temporelle d'un correcteur PID ainsi que sa fonction de transfert.

On décide d'adopter un régulateur de fonction de transfert

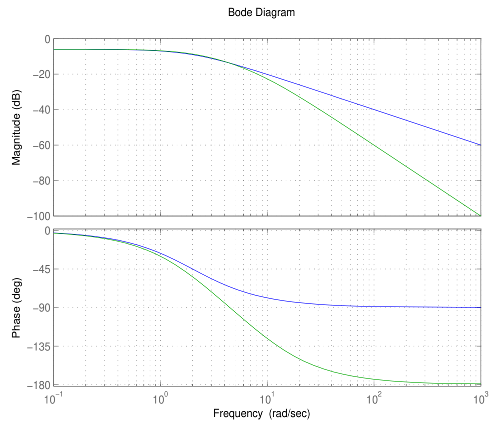


FIG. 13 – Réponses fréquentielles de $G(p)$ et $G_s(p)$

$$R(p) = \frac{A}{p}(1 + \tau p).$$

Ce régulateur utilise donc la constante de temps de $G_s(p)$.
6. Montrer qu'il s'agit d'un régulateur PI.
7. Calculer la chaîne directe $L(p)$. À quel modèle de transfert correspond-elle ?
8. Expliquer pourquoi la technique utilisée ici est appelée « compensation de pôle ».
9. Calculer $H(p)$, la fonction de transfert en boucle fermée. Exprimer τ_{bf}, la constante de temps en boucle fermée.
10. Calculer A pour obtenir $\tau_{bf} = 1/10$.

La figure 14 montre la réponse indicelle théorique en boucle en fermée ainsi que celle réellement obtenue sur le moteur.
11. Quelle est la réponse réelle ? Comment expliquer cette différence qui n'apparaissait pas en boucle

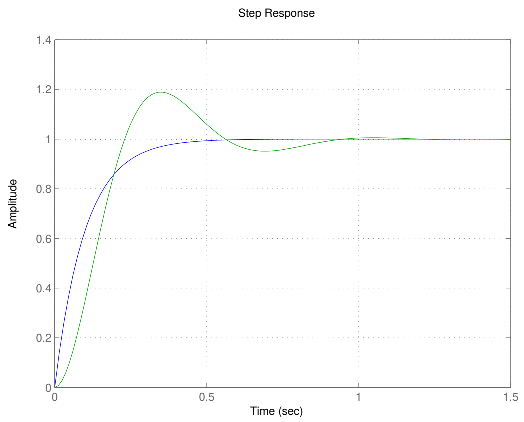


FIG. 14 – Réponses indicielles de $H(p)$ et $H_s(p)$

ouverte ?

On souhaite conserver des temps de réponse du même ordre mais réduire cette oscillation que l'on estime trop marquée. Pour ce faire, le régulateur est mainteant pris de la forme

$$R(p) = \frac{A}{p}(1+\tau p)(1+\tau_d p).$$

12. De quel type de régulateur s'agit-il ? Quel en est l'intérêt ?

Pour aider au choix de τ_d, la figure 15 fait apparaître les diagrammes de Bode des deux chaînes directes dans le cas du modèle simplifié et dans le cas du modèle complet. En outre, les marges de stabilité sont données pour le cas complet. L'on note notamment qu'à la pulsation 8,26 rad/s, la marge de phase est mesurée à 48,4°.

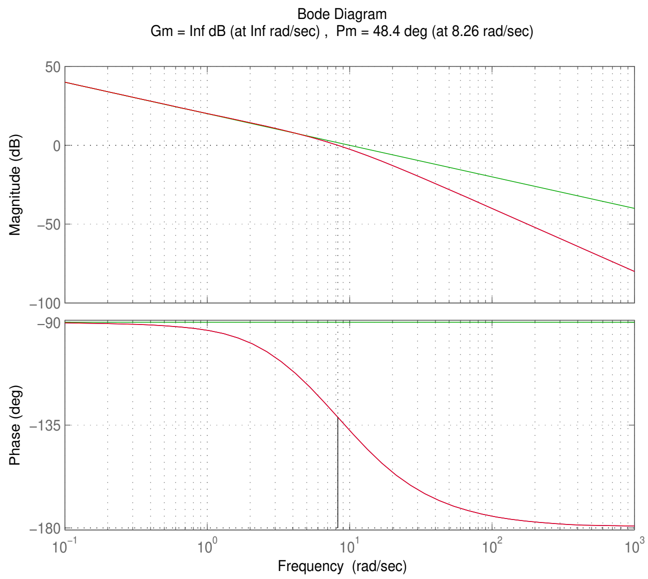


FIG. 15 – Réponses fréquentielles de $L(p)$ et $L_s(p)$

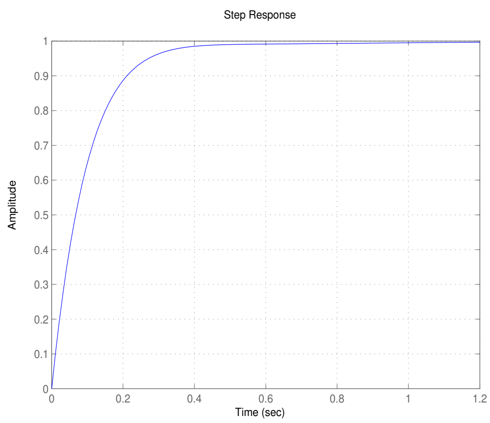


FIG. 16 – Réponse indicielle de $H(p)$ avec le régulateur complet

13. Tracer le diagramme de Bode asymptoptique de $(1+\tau_d p)$.
14. Expliquer comment choisir τ_d pour augmenter la marge de phase de $L(p)$.

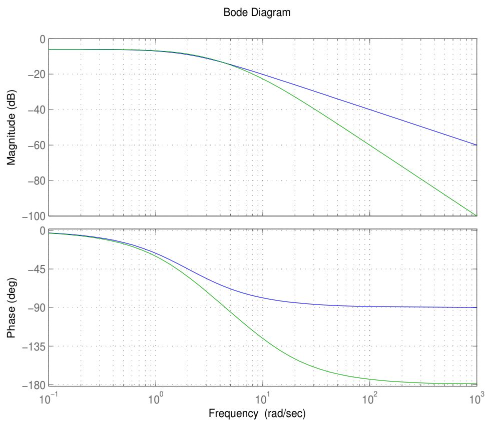


FIG. 17 – Réponse fréquentielle de $L(p)$ avec le régulateur complet

On choisit $\tau_d = 0,1$s. Ceci permet d'obtenir la réponse indicielle donnée par la figure 16.
15. À l'aide, entre autres, de la nouvelle réponse fréquentielle de $L(p)$ donnée par la figure 17, expliquer pourquoi les oscillations sont moindres dans la réponse indicielle.
16. Pourquoi la réponse indicielle obtenue ressemble-t-elle à celle d'un premier ordre ?

TD AU3 N°10 : Un autre exemple de commande — $2^{\text{ème}}$ année

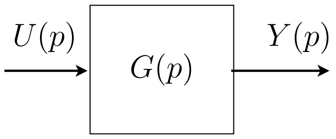


Figure 1 : Système en boucle ouverte

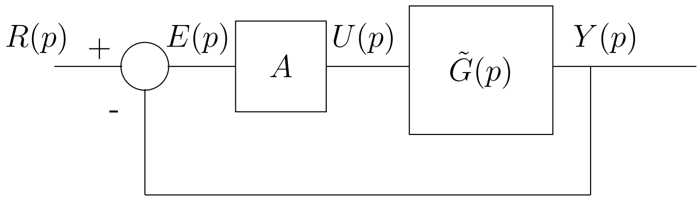


Figure 2 : Système en boucle fermée

Considérons le système en boucle ouverte de la Figure 1 dont la fonction de transfert est donnée par

$$G(p) = \frac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

avec $K = 10$, $\tau_1 = 1s$, $\tau_2 = 10s$.

1) Tracer le diagramme asymptotique de Bode du système.
2) Donner l'expression de la réponse indicielle du système ainsi que son allure.
3) On suppose que $\tau_2 >> \tau_1$ c'est à dire que l'on peut négliger $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ devant 1. Quelle est alors l'expression de la réponse indicielle du systèmes ? Montrer que dans ce cas la fonction de transfert du système est donnée par

$$\tilde{G}(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)} \tag{1}$$

et donner l'expression de τ en fonction de τ_2

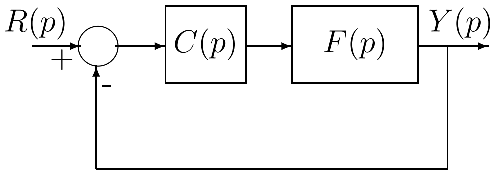
4) Quels sont les paramètres du système que l'on peut déterminer à partir de la réponse indicielle du système (1) ? Comment peut-on les déterminer.
5) On considère maintenant le système en boucle fermée de la Figure 2
Donner alors la fonction de transfert en boucle fermée.
6) Écrire la fonction de transfert en boucle fermée sous la forme

$$\frac{K_o w_o^2}{p^2 \ + \ 2mw_o p \ + \ w_o^2}$$

et donner K_o, m et w_o en fonction de K, A et τ

7) On souhaite obtenir une réponse indicielle avec un dépassement relatif (le premier noté D_1) de 5%. Déterminer alors les valeurs de m et de A correspondant à ce réglage

Soit le système en boucle fermée suivant



avec

$$F(p) = \frac{K}{(1 + p/\omega_1)(1 + p/\omega_2)(1 + p/\omega_3)}$$

$K = \sqrt{10}$, $\omega_1 = 1\ rd/s$, $\omega_2 = 10\omega_1$ et $\omega_3 = 10\omega_2$.

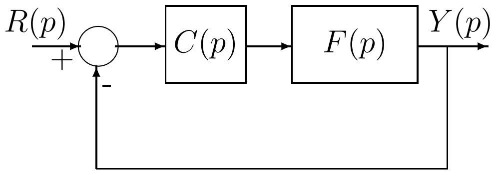
Correcteur proportionnel : $C(p) = A$

1. Tracer le diagramme asymptotique de Bode du système en boucle ouverte $F(p)$.
2. Relever la marge de phase et la marge de gain du système non corrigé.
3. Faire la synthèse d'un correcteur proportionnel $C(p) = A$ pour avoir une marge de phase de 45°.
4. Relever la marge de phase et la marge de gain du système corrigé.
5. Quelle est la bande passante du système en boucle fermée.

Action intégrale pure : $C(p) = \dfrac{\omega_i}{p}$

1. Tracer le diagramme asymptotique de Bode du système en boucle ouverte $F_1(p) = \dfrac{F(p)}{p}$.
2. Faire la synthèse d'un correcteur proportionnel $C_1(p) = A_i$ pour que le système corrigé $C_1(p)F_1(p)$ possède une marge de phase de 45°.
3. En prenant $\omega_i = A_i$, montrer que le système corrigé $C(p)F(p)$ possède bien une marge de phase de 45°.
4. Relever la marge de phase et la marge de gain du système corrigé.
5. Quelle est la bande passante du système en boucle fermée.

Soit le système en boucle fermée suivant



avec

$$F(p) = \frac{K}{(1+p/\omega_1)(1+p/\omega_2)(1+p/\omega_3)}$$

$K = \sqrt{10}$, $\omega_1 = 1\ rd/s$, $\omega_2 = 10\omega_1$ et $\omega_3 = 10\omega_2$.

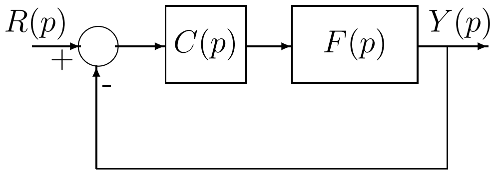
Correcteur PI : $C(p) = A_i\left(1 + \frac{\omega_i}{p}\right) = A\left(\frac{1+\frac{p}{\omega_i}}{p}\right)$

1. Faire la synthèse d'un correcteur PI.
2. Tracer le diagramme asymptotique de Bode du système corrigé.
3. Relever la marge de phase et la marge de gain du système corrigé.
4. Quelle est la bande passante du système en boucle fermée.

Action dérivée : $C(p) = K_d p$

1. Tracer le diagramme asymptotique de Bode du système en boucle ouverte $F_2(p) = pF(p)$.
2. Relever la marge de phase et la marge de gain du système $F_2(p)$.
3. Faire la synthèse d'un correcteur proportionnel $C_2(p) = A_2$ (pour le système $F_2(p)$) pour avoir une marge de phase de 45°.
4. Relever la marge de phase et la marge de gain du système corrigé $C_2(p)F_2(p) = C(p)F(p)$.
5. Quelle est la bande passante du système en boucle fermée.

Soit le système en boucle fermée suivant



avec

$$F(p) = \frac{K}{(1+p/\omega_1)(1+p/\omega_2)(1+p/\omega_3)}$$

$K = \sqrt{10}$, $\omega_1 = 1\ rd/s$, $\omega_2 = 10\omega_1$ et $\omega_3 = 10\omega_2$.

Correcteur PD : $C(p) = A_d\left(1 + \dfrac{p}{\omega_d}\right)$

1. Faire la synthèse d'un correcteur PD.
2. Tracer le diagramme asymptotique de Bode du système corrigé.
3. Relever la marge de phase et la marge de gain du système corrigé.
4. Quelle est la bande passante du système en boucle fermée.

Correcteur PID : $C(p) = A\left(1 + \dfrac{p}{\omega_d}\right)\left(1 + \dfrac{\omega_i}{p}\right)$

1. Faire la synthèse d'un correcteur PID.
2. Tracer le diagramme asymptotique de Bode du système corrigé.
3. Relever la marge de phase et la marge de gain du système corrigé.
4. Quelle est la bande passante du système en boucle fermée.

Conclusion

1. Commenter les résultats obtenus en comparant les correcteurs en terme de rapidité de la boucle fermée.

Soit le système en boucle fermée suivant

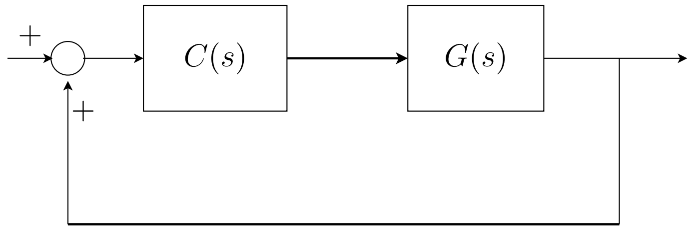


FIG. 18 – Système en boucle fermée

avec

$$G(s) = \frac{50}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

Le diagramme de Bode du système en boucle ouverte est donné Figure 19.

1 : Pour $C(s) = 1$

1–1 : Donner la classe du système représenté en Figure 18.

2–1 : Donner l'allure du lieu de Nyquist du système en boucle ouverte.

3–1 : Que peux-t-on dire concernant la stabilité de la boucle fermée.

2 : On suppose que le correcteur est de la forme $C(s) = K + \dfrac{K_I}{s}$,

2–1 : utiliser le critère de Routh, pour exprimer les condition(s) sur K et K_I pour que le système en boucle fermée soit stable.

2–2 : donner l'erreur de position en régime permanent en fonction de K et K_I lorsque la référence est un échelon unité.

2–3 : Reprendre la question (2–2) lorsque la référence est une rampe ($w(t) = t, \ \forall t > 0$).

2–4 : Déterminer la valeur de K pour que le système corrigé présente une marge de phase de 45°.

ω	Gain	Phase	ω	Gain	Phase	ω	Gain	Phase
1.9692	1.5010	-129.1303	4.0701	0.4080	-179.1742	2.5258	1.0198	-146.8291
1.9738	1.4961	-129.2946	4.0795	0.4060	-179.3216	2.5316	1.0159	-146.9917
1.9783	1.4911	-129.4590	4.0889	0.4040	-179.4690	2.5375	1.0119	-147.1543
1.9829	1.4862	-129.6234	4.0984	0.4020	-179.6163	2.5433	1.0080	-147.3168
1.9875	1.4814	-129.7877	4.1078	0.4000	-179.7634	2.5492	1.0041	-147.4793
1.9920	1.4765	-129.9521	4.1173	0.3980	-179.9105	2.5551	1.0002	-147.6418
1.9966	1.4716	-130.1165	4.1268	0.3961	-180.0574	2.5610	0.9963	-147.8042
2.0012	1.4667	-130.2809	4.1363	0.3941	-180.2042	2.5669	0.9924	-147.9666
2.0059	1.4619	-130.4453	4.1459	0.3921	-180.3510	2.5728	0.9885	-148.1289
2.0105	1.4570	-130.6097	4.1555	0.3902	-180.4976	2.5788	0.9846	-148.2912
2.0151	1.4522	-130.7741	4.1650	0.3882	-180.6441	2.5847	0.9808	-148.4534

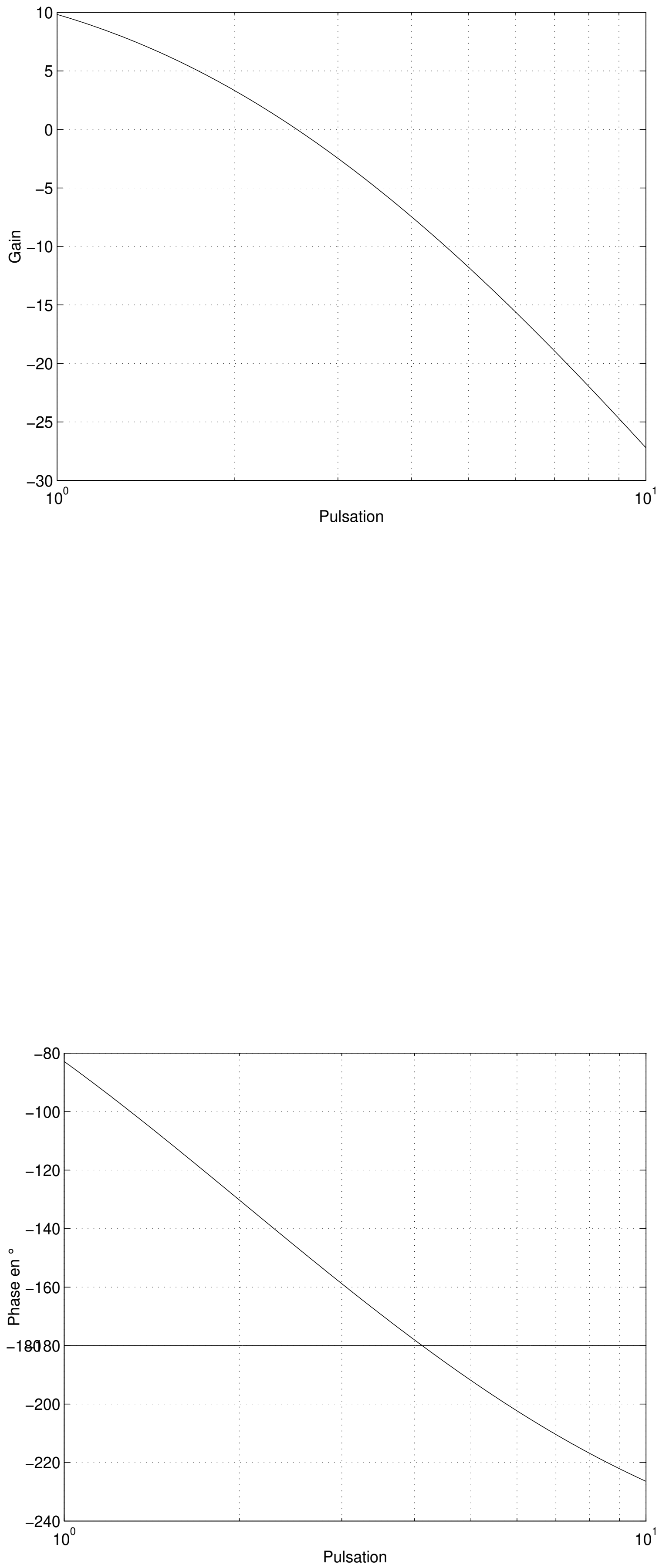


FIG. 19 – Diagramme de Bode