S-PROCÉDURE ET AUTRES LEMMES UTILES : APPLICATIONS EN AUTOMATIQUE (ÉPISODE $1/x$, $x \geq 2$)

Olivier Bachelier[1] Patrick Coirault[1] et d'autres motivés[1]

[1]LIAS-Canal Automatique

Séminaires du LIAS Campus historique

Objectif de l'exposé

Il s'agit ici de présenter quelques lemmes et théorèmes souvent utilisés en automatique, parfois corrélés et d'en montrer quelques applications.

À propos de cet exposé

- Dans cet exposé, les raisonnements, sans être complètement originaux, présentent un point de vue et un formalisme propres aux auteurs.
- Les références ne sont pas forcément indiquées pour retrouver des demonstrations qui sont faites ici mais plutôt pour retrouver les concepts qui sont évoqués. Elles se focalisent aussi sur certains travaux spécifiques du LIAS. Il s'agit donc d'un choix orienté (donc contestable).

Sommaire

Un peu d'Histoire

Yakubovic... le pionnier ?... peut-être.

- La S-procédure est née de l'esprit de V. A. Yakubovic...
- Elle est assez « incompréhensible » dans sa version initiale et relève plutôt de l'automatique non linéaire.
- Elle a subi par ailleurs plusieurs évolutions,
- ...et ce dans les années 1960, 1970... bref au siècle dernier.

Lien avec Popov

- Certains auteurs ont fait le lien avec les travaux de V. M. Popov.
- Popov était un chercheur roumain qui avait le bon goût de parfois publier dans un très bon français...
- ce qui ne rendait pas ses travaux plus simples à comprendre.
- On lui doit le critère du cercle et son critère éponyme (aux alentours de 1960) et des travaux sur l'hyperstabilité (1963) en lien avec ce propos.
- Bref, il est donc possible de connecter les travaux de Popov à ceux de Yakubovic.

... pendant ce temps là, Kalman...

- Toujours dans les années 1960, un certain R. E. Kalman propose des résultats proches de ceux de V. M. Popov.
- Aujourd'hui, on connecterait cela au *lemme positif réel*.
- Pendant ce temps, Yakubovic et ses disciples peaufinent la S-procédure.

Pour rendre tout cela compréhensible

Il est préférable, pour redonner un peu de cohérence à tout cela, de se contenter d'étudier les systèmes linéaires. Certains auteurs ont formulé des propositions qui réunissent un peu de tous ces travaux :

- B. D. O. Anderson (1967).
- J. C. Willems (1971)

On parle parfois pour désigner ces propositions de *Lemme de Kalman-Yakubovic-Popov (KYP)* voire de *Lemme de Kalman-Yakubovic-Popov-Anderson*

Au passage, dans son article, dès 1971, J. C. Willems alerte la communauté sur l'importance des LMI, une vingtaine d'années avant que l'on puisse les résoudre.

Et le formalisme évolue

- Aujourd'hui, pour faire référence au lemme KYP, on cite plus volontiers le travail de Rantzer (1996) ou encore le lemme KYP *généralisé* d'Iwasaki et Hara (2005).
- Pour citer, la S-procédure, on se réfère par exemple à l'ouvrage sur les LMI (Boyd et al 1996), à C. W. Scherer (2001) ou encore à Iwasaki, Hara et Fu (2000).

Références

Références « historiques » sur la S-procédure

V. A. Yakubovich.
The solution to certain matrix inequalities in automatic control theory.
Dokl. Akad. Nauk. (URSS), 143 :1304–1307, 1962.

F. P. Gantmacher et V. A. Yakubovich.
Absolute stability margin of nonlinear control systems.
Dans *2nd All-Union Session on Theoretical and Applied Mechanics*, Moscou, Russie (URSS), 1966.

V. A. Yakubovich.
S-procedure in nonlinear control theory.
Vestnik Leningrad Univ., 1 :62–77, 1971.

Références

Références "historiques" sur le lemme KYP

- V. M. Popov.
  Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions.
  Revue roumaine des sciences techniques, série Électrotechnique et Énergétique, 9(4) :629–690, 1964.

- R. E. Kalman.
  Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control.
  Proceedings of National Academic Science, USA, 49 :201–205, 1963.

- B. D. O. Anderson.
  A system theory for positive real matrices.
  SIAM Journal of Control, 5 :171–182, 1967.

Références

Références un peu plus modernes sur KYP

J. C. Willems.
Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation.
IEEE Transactions on Automatic Control, 16(6) :621–634, 1971.

A. Rantzer.
On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma.
Systems & Control Letters, 28 :7–10, 1996.

T. Iwasaki, G. Meinsma, et M. Fu.
Generalized S−procedure and finite frequency KYP lemma.
Mathematical Problems in Engineering, 6 :305–320, 2000.

Références

Références un peu plus modernes sur la S-procédure

- S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron et V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* Volume 15 de la série "SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- C. W. Scherer. LPV control and full block multipliers. *Automatica*, 37 :361–375, 2001.
- S. V. Gusev et A. L. Likhtarnikov. Kalman-Popov-Yakubovich lemma and the S-procedure : A historical essay. *Automation and Remote Control*, 67(11) :1768–1810, 2006. Je l'ai perdu ($\ddot{\frown}$) !

Homework

Un peu d'Histoire
S-procédure abstraite
S-procédure concrète
Quelques lemmes utiles
S-procédure et KYP
S-procédure et incertitude LFR
S-procédure, Lyapunov et Stein
Applications et perspectives locales
Banc hybride

J'aime bien *"homework"*, ça fait comme les vrais chercheurs qui travaillent outre Atlantique.

Exercise (avec un 's' pour être cohérent)
Question essentielle : pourquoi parfois mets-je un 'h' à la fin de Yakubovic(h) mais pas toujours ? (sur 10 points).

S-procédure abstraite

La S-procédure abstraite

... en version édulcorée (si si !)

Soient les entités suivantes :

- ∇ un ensemble compact de matrices complexes Δ ;
- Θ, une matrice hermitienne ;
- V une matrice de $\mathbb{R}^{l \times n}$;
- $\mathcal{S}(\Delta)$ une famille de sous-espaces de $\mathbb{C}^{l}$ dépendant continûment de Δ sur ∇ ;
- $\mathcal{B}(\Delta) = \{x \in \mathbb{C}^{n} : Vx \in \mathcal{S}(\Delta)\}, \ \Delta \in \nabla$.

La S-procédure abstraite

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

a)

$$x'\Theta x < 0 \quad \forall x \in \mathcal{B}(\Delta)\backslash\{0\}, \quad \forall \Delta \in \nabla.$$

b)

$$\exists X : \begin{cases} V'XV + \Theta < 0 \\ z'Xz \geq 0 \qquad\qquad \forall z \in \mathcal{S}(\Delta), \forall \Delta \in \nabla \end{cases}$$

Remarque

Quand l'ensemble ∇ *n'est pas compact, l'implication* **b)**$\Rightarrow$ **a)** *reste valide : c'est le "sens facile" de la S-procédure.*

Référence

S-procédure abstraite avec démonstration dans cet article :

C. W. Scherer.
LPV control and full block multipliers.
Automatica, 37 :361–375, 2001.

S-procédure concrète

S-procédure concrète

Un peu d'Histoire
S-procédure abstraite
S-procédure concrète
Quelques lemmes utiles
S-procédure et KYP
S-procédure et incertitude LFR
S-procédure, Lyapunov et Stein
Applications et perspectives locales
Banc hybride

Concrète, concrète... c'est vite dit !

- La famille de sous-espaces $\mathcal{S}(\Delta)$ est restreinte à la forme particulière :

$$\mathcal{S}(\Delta) = \text{Ker}\left(\begin{bmatrix} I & -\Delta \end{bmatrix}\right), \quad \forall \Delta \in \nabla.$$

Ceci signifie que les éléments de $\mathcal{S}(\Delta)$ s'écrivent sous la forme

$$z = \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix} q, \quad q \text{ quelconque.}$$

S-procédure concrète

- Dans cette version, la seconde inégalité de **b**) peut servir à définir ∇, à savoir

$$\nabla = \left\{ \Delta : \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix}' X \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \ \forall X \in \mathbb{X} \right\}.$$

$\mathbb{X}$ est un ensemble de *multiplieurs* X. On définit aussi $\mathbb{X}_{\mathrm{all}}$ par :

$$\mathbb{X}_{\mathrm{all}} = \left\{ X = X' : \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix}' X \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \ \forall \Delta \in \nabla \right\}.$$

Il est clair que $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{X}_{\mathrm{all}}$.
L'inégalité $z'Xz \geq 0$ est alors vérifiée pour tout $X \in \mathbb{X}$ et pour tout $X \in \mathbb{X}_{\mathrm{all}}$. Il importe de savoir si un même X peut aussi vérifier la première inégalité de **b**).

S-procédure concrète

La S-procédure devient alors l'équivalence entre

a)

$$x'\Theta x < 0 \quad \forall x \in \mathcal{B}(\Delta)\backslash\{0\}, \quad \forall \Delta \in \nabla.$$

et

c)

$$\exists X \in \mathbb{X}_{\text{all}} : V'XV + \Theta < 0.$$

L'ensemble $\mathbb{X}$ est lié à la définition de ∇. L'ensemble $\mathbb{X}_{\text{all}}$ et est *sans perte* : il « couvre »tous les multiplieurs potentiels. Mais on particularise encore...

S-procédure concrète

- On impose par ailleurs une structure à V :

$$V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix}.$$

Il vient alors :

$$\mathcal{B}(\Delta) = \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix} q \right\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{B}(\Delta) = \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \begin{bmatrix} I & -\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix} x = 0 \right\}$$

S-procédure concrète

$$\Leftrightarrow \mathcal{B}(\Delta) = \left\{x \in \mathbb{C}^n : \begin{bmatrix} (I-\Delta A) & -\Delta B \end{bmatrix} x = 0\right\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{B}(\Delta) = \left\{ x\in\mathbb{C}^n : x = \underbrace{\begin{bmatrix} (I-\Delta A)^{-1}\Delta B \\ I \end{bmatrix}}_{\text{forme LFT ou LFR}} \xi \right\}.$$

Rappel

LFT = *Linear Fractional Transform* (Transformée linéaire fractionnaire)
LFR = *Linear Fractional Representation* (Représentation linéaire fractionnaire)

S-procédure concrète

La S-procédure devient alors l'équivalence entre

d)

$$\begin{bmatrix} (I-\triangle A)^{-1}\triangle B \\ I \end{bmatrix}' \Theta \begin{bmatrix} (I-\triangle A)^{-1}\triangle B \\ I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \Delta \in \nabla$$

(On rappelle que $\nabla = \left\{ \triangle : \begin{bmatrix} \triangle \\ I \end{bmatrix}' X \begin{bmatrix} \triangle \\ I \end{bmatrix} \geq 0,\ \forall X \in \mathbb{X} \right\}$.)

et

e)

$$\exists X \in \mathbb{X}_{\mathrm{all}} : \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix}' X \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix} + \Theta < 0,$$

où $\mathbb{X}_{\mathrm{all}}$ est l'ensemble sans perte défini par :

$$\mathbb{X}_{\mathrm{all}} = \left\{ X = X' : \begin{bmatrix} \triangle \\ I \end{bmatrix}' X \begin{bmatrix} \triangle \\ I \end{bmatrix} \geq 0,\ \forall \triangle \in \nabla \right\}.$$

S-procédure concrète

Remarque

La condition **d)** *dépend de* Δ *(infinité d'inégalités sur* ∇*) alors que la condition* **e)** *ne dépend que d'un* X *à déterminer (exploitation numérique envisageable).*

Référence

On parle de S-procédure “concrète de bloc plein” car X est *a priori* de bloc plein. La question est souvent de savoir si l'on peut contraindre sa structure en considérant la recherche de X dans $\mathbb{X}$ plutôt que dans X_{all}. En effet, X_{all} n'est a priori pas facile à déterminer..

Référence sur la S-procédure concrète

C. W. Scherer.
A full block S-procedure with applications.
Proc. 36th Conference on Decision Control, San Diego (ni Pepito, ni bière), USA, 1997.

Quelques lemmes utiles

Soit une matrice hermitienne M définie en signe. On a

Définition négative

$$M < 0 \Leftrightarrow T'MT < (\leq)\, 0\, \forall T \text{ non singulière}$$

ou

Définition positive

$$M > 0 \Leftrightarrow T'MT > (\geq)\, 0\, \forall T \text{ non singulière}$$

- Justification directe (par la définition en signe).
- En fait, la congruence conserve même la répartition des valeurs propres (qui sont réelles) par rapport à l'axe imaginaire (c'est-à-dire l'inertie de la matrice).

Un lemme d'inversion

$$T = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{et } X \text{ inversible}$$

$$\Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} X^{-1} & -X^{-1}Y \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Complément de Schur

Soient les deux matrices

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \quad \text{et} \quad L = \left[\begin{array}{r|r} I & 0 \\ \hline -D^{-1}C & D^{-1} \end{array}\right],$$

où D est inversible. Il vient

$$ML = \left[\begin{array}{r|r} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow M^{-1}ML = L = M^{-1}\left[\begin{array}{r|r} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

Complément de Schur

Un peu d'Histoire
S-procédure abstraite
S-procédure concrète
Quelques lemmes utiles
S-procédure et KYP
S-procédure et incertitude LFR
S-procédure, Lyapunov et Stein
Applications et perspectives locales
Banc hybride

$$\Leftrightarrow M^{-1} = L \left[\begin{array}{r|r} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^{-1}.$$

En utilisant le lemme d'inversion, il vient

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{r|r} I & 0 \\ \hline -D^{-1}C & D^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{r|r} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ \hline 0 & I \end{array} \right],$$

Complément de Schur

Un peu d'Histoire
S-procédure abstraite
S-procédure concrète
Quelques lemmes utiles
S-procédure et KYP
S-procédure et incertitude LFR
S-procédure, Lyapunov et Stein
Applications et perspectives locales
Banc hybride

ce qui conduit à

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

L'expression $A - BD^{-1}C$ est appelé *complément de Schur* de M.

Lemme de Schur

Si l'on suppose que M est hermitienne ($\Rightarrow C = B',\ A = A',\ D = D'$), la relation devient

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B' & D \end{array}\right]^{-1}}_{M^{-1}} = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -D^{-1}B' & I \end{array}\right] \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} (A - BD^{-1}B)^{-1} & 0 \\ \hline 0 & D^{-1} \end{array}\right]}_{N^{-1}} \left[\begin{array}{c|c} I & -BD^{-1} \\ \hline 0 & I \end{array}\right].$$

D'après le lemme de Sylvester,

$$M^{-1} < 0 \Leftrightarrow N^{-1} < 0,$$

ce qui conduit à

$$M < 0 \Leftrightarrow N < 0.$$

Lemme de Schur

Ceci se résume à

Lemme de Schur

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B' & D \end{array}\right] < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A - BD^{-1}B' < 0, \\ D < 0. \end{cases}$$

(L'inversibilité de D est assurée par $D < 0$.)

Référence

Un peu d'Histoire
S-procédure abstraite
S-procédure concrète
Quelques lemmes utiles
S-procédure et KYP
S-procédure et incertitude LFR
S-procédure, Lyapunov et Stein
Applications et perspectives locales
Banc hybride

Pour trouver ce résultat, on peut se référer à l'excellent ouvrage sur les matrices :

R. A. Horn and C. R. Johnson
Topics in Matrix Analysis.
Cambridge University Press, 1991.

Lemme de Schur : application

Le système linéaire discret $x_{k+1} = Ax_k$ est asymptotiquement stable (on dit alors que A est stable au sens de Schur... mais ce n'est pas lié au lemme) si et seulement si

$$\exists P = P' > 0 \; : \; -P + A'PA < 0$$

(inégalité primale de Stein) ou

$$\exists Y = Y' > 0 \; : \; -Y + AYA' < 0$$

(inégalité duale de Stein)

Remarque

L'inégalité primale (resp. duale) de Stein signifie que $V(x_k) = x_k'Px_k$ (resp .$V(x_k) = x_k'Y^{-1}x_k$) est une fonction de Lyapunov qui décroît quand k augmente.

Lemme de Schur : application

Si l'on applique le lemme de Schur à l'inégalité duale, on a

$$\exists Y = Y' > 0 \; : \; -Y + AYY^{-1}YA' < 0$$

$$\Leftrightarrow \exists Y \; : \; \left[\begin{array}{c|c} -Y & AY \\ \hline YA' & -Y \end{array}\right] < 0,$$

qui est linéaire en Y mais aussi en A.

Si A est la matrice d'état d'un système bouclé par retour d'état c.-à-d. $A = A_0 + BK$, on a

$$\exists Y \text{ et } \exists L \ : \left[\begin{array}{c|c} -Y & A_0 Y + BL \\ \hline Y A_0' + L'B' & -Y \end{array}\right] < 0.$$

où $L = KY$.

Il suffit donc, si K est inconnue, de résoudre la LMI ci-dessus en $Y = Y'$ et L puis de calculer $K = LY^{-1}$.

Dans le cas continu, l'inégalité de Lyapunov est déjà linéaire en A $\Rightarrow$ inutile de recourir au lemme de Schur.

Référence

Où trouver l'inégalité de Stein ?

P. Stein
Some theorems on the inertia of general matrices
Journal of Research of the National Bureau of Standards 48 :82-83, 1952

Lemme de Finsler

Soient la matrice hermitienne $\Theta = \Theta'$ et la matrice de rang plein V (*a priori* non carrée). Les deux propositions suivantes sont équivalentes

a)

$$\text{Ker}(V)'\Theta\text{Ker}(V) < 0$$

b)

$$\exists \tau > 0 \ : \ \Theta - \tau V'V < 0$$

Ce n'est pas évident à voir mais c'est un peu une forme de S-procédure...si si car τI est un multiplieur !

...*(exemple à venir)*

Attention à l'abus de notation : Ker(V) désigne ici une matrice, dont les colonnes forment une base de Ker(V).

Référence

D'où vient le lemme de Finsler ?

P. Finsler
Über das Vorkommen definiter und semidefiniter Formen in Scharen quadratischer Formen : Comment
Commentarii Mathematici Helvetica 9 :188-192, 1937

Ich habe diesen Artikel nicht gelesen ! Finsler hätte es im Franzosen schreiben sollen... non mais sans blague !

Lemme d'élimination des matrices

Soient la matrice hermitienne $\Theta = \Theta'$ et les matrices de rang plein V_L et V_R (*a priori* non carrées). Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

a)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{Ker}(V_L)'\Theta\mathrm{Ker}(V_L) < 0 & \text{ou}\, V_L V_L' > 0 \\ \mathrm{Ker}(V_R)'\Theta\mathrm{Ker}(V_R) < 0 & \text{ou}\, V_R V_R' > 0 \end{array} \right.$$

b)

$$\exists H \ : \ V_L' H V_R + V_R' H' V_L + \Theta < 0$$

On parle aussi de *lemme de projection*. La matrice H est un multiplieur. Ce lemme et la S-procédure peuvent être vus comme des corollaires d'un théorème plus général mais c'est une autre histoire.

Référence

Où trouver le lemme d'élimination ?

- S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron et V. Balakrishnan.
Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory
Volume 15 de la série "SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- P. Gahinet et P. Apkarian
A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control
International Journal of Robust and Nonlinear Control, 4 :41-448, 1994.
- R. E. Skelton, T. Iwasaki et K. Grigoriadis.
A unified approach to linear control design.
Taylor and Francis series in Systems and Control, 1997.

Lemme d'élimination des matrices

Exemple :

- L'inégalité duale de Stein s'écrit aussi ainsi :

$$\begin{bmatrix} I \\ A' \end{bmatrix}' \underbrace{\begin{bmatrix} -Y & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}}_{\Theta} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ A' \end{bmatrix}}_{\mathrm{Ker}(V_R)} < 0.$$

On choisit $V_L = I \Rightarrow V_L V_L' = I > 0$. Le lemme conduit à

$$\exists H : \begin{bmatrix} -Y & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} H + H' \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}'}_{V_R} < 0$$

Remarque

On "casse" le produit AY. On peut faire pareil avec l'inégalité de Lyapunov.

Lemme d'élimination des matrices

- Si l'on veut un mulitplieur carré, on change V_L en remarquant que

$$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}' \underbrace{\begin{bmatrix} -Y & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}}_{\Theta} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{Ker}(V_L)} = -Y < 0.$$

Le lemme conduit alors à

$$\exists G : \begin{bmatrix} -Y & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} G \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}'}_{V_L} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} G' \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}'}_{V_R} < 0$$

Lemme d'élimination des matrices

- Si l'on cherche K telle que $A = A_0 + BK$ soit Schur-stable, cela revient à chercher $Y = Y' > 0$, G et L telles que

$$\begin{bmatrix} -Y & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} + \left(\left(\begin{bmatrix} A_0 \\ -I \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} L \right) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}' \right)^H < 0$$

(avec la notation $M^H = M + M'$), et de calculer $K = LG^{-1}$.

Remarque

La matrice de retour K ne dépend plus de la matrice de Lyapunov $P = Y^{-1}$.

Ces résultats ont de grosses implications en analyse et en commande robuste.

Références

Où trouver ces applications ?

- J. C. Geromel, M. C. de Oliveira et L. Hsu
  LMI characterization of structural and robust stability
  Linear Algebra and its Applications 285 :69-80, 1998
- M. C. de Oliveira, J. Bernussou et J. C. Geromel
  A new discrete-time robust stability condition
  Systems and Control Letters 37(4), July 1999
- D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier et J. Bernussou
  A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty
  Systems and Control Letters 40(1) :21-30, May 2000

Lemme d'élimination des matrices

Autre exemple :

Retour statique de sortie : on cherche F telle que $(A+BFC)$ est Schur-stable. On suppose que l'on a calculé un retour d'état K tel qu'il existe $P=P'>0$ vérifiant l'inégalité primale de Stein :

$$M = -P + (A+BK)'P(A+BK) < 0.$$

On impose que F vérifie

$$-P + (A+BFC)'P(A+BFC) < 0 \Leftrightarrow$$

$$-P + (A+BK+B(FC-K))'P(A+BK+B\underbrace{(FC-K)}_{S}) < 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix}' \underbrace{\begin{bmatrix} M & (A+BK)'PB \\ \bullet & P \end{bmatrix}}_{\Theta} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix}}_{\mathrm{Ker}(V_R)} < 0.$$

Lemme d'élimination des matrices

En outre,

$$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}' \Theta \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{Ker}(V_L)} = M < 0.$$

En vertu du lemme, il existe une matrice H telle que

$$\Theta + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{V_L'} H \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} FC - K & -I \end{array} \right]}_{V_R} \right)^H < 0$$

Lemme d'élimination des matrices

Chercher F revient donc à résoudre la LMI suivante en $P = P' > 0$, H et L,

$$\left[\begin{array}{c|c} M & (A+BK)'PB \\ \hline \bullet & P \end{array}\right] +$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \left(H \left[\begin{array}{c|c} -K & -I \end{array}\right] + L \left[\begin{array}{c|c} C & 0 \end{array}\right]\right)\right)^H < 0.$$

La matrice F est alors donnée par $F = H^{-1}L$.

Remarque

La condition de stabilisation est conservative car on impose dès le départ la même matrice P pour $(A+BK)$ et $(A+BFC)$. Cette condition s'adapte au cas continu.

Références

Un peu d'Histoire

S-procédure abstraite

S-procédure concrète

Quelques lemmes utiles

S-procédure et KYP

S-procédure et incertitude LFR

S-procédure, Lyapunov et Stein

Applications et perspectives locales

Banc hybride

Deux références : cas général et cas discret uniquement.

- D. Peaucelle et D. Arzelier
  Ellipsoidal sets for resilient and robust static ouput feedback
  IEEE Transactions on Automatic Control
  50(6) :899-904, 2005

- D. Mehdi, E. Boukhas et O. Bachelier
  Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems
  IMA Journal of Mathematical Control and Information
  21(1) :1-13, 2004

S-procédure et lemme de Kalman-Yakubovic-Popov

S-procédure et KYP

Il s'agit dans cette partie de montrer que la S-procédure concrète peut-être un moyen de démontrer le lemme de Kalman-Yakubovic-Popov.

S-procédure et KYP continu

L'idée est ici de faire le lien entre Δ et une pulsation ω en posant

$$\Delta = \frac{1}{s} I,$$

où $s \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (variable de Laplace). Ainsi, la LFR impliquée dans la S-procédure concrète devient

$$\begin{bmatrix} (I - \Delta A)^{-1} \Delta B \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(I - \frac{1}{s} A\right)^{-1} \frac{1}{s} B \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix}.$$

S-procédure et KYP continu

La condition **d)** de la S-procédure concrète s'écrit alors

$$\begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}' \Theta \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} < 0, \; \forall \frac{1}{s} I \in \nabla.$$

Mais il faut définir un ensemble ∇ de façon à spécifier un ensemble de pulsations.

S-procédure et KYP continu

Ceci se fait par le choix d'un ensemble :

$$\nabla = \left\{ \Delta = \frac{1}{s} I \; : \; \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix}' X \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \, \forall X \in \mathbb{X} \right\},$$

pour lequel on impose aussi l'ensemble de multiplieurs

$$\mathbb{X} = \left\{ X = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \; : \; P = P' \right\}.$$

Cet ensemble $\mathbb{X}$ est sans perte c'est-à-dire qu'il n'y pas de restriction à considérer $\mathbb{X}$ plutôt que $\mathbb{X}_{\text{all}}$.

S-procédure et KYP continu

Ce choix de multiplieurs conduit en fait à

$$\left(\frac{1}{s'} + \frac{1}{s}\right) P \geq 0,\ \forall P = P'$$

$$\Leftrightarrow \left(s' + s\right) P \geq 0,\ \forall P = P'$$

C'est vrai entre autres pour $P = I$ et $P = -I$ donc

$$s + s' = 0.$$

Ainsi s décrit l'axe imaginaire achevé (compacifié) $\mathcal{I} \cup \{\infty\} \Rightarrow s = \mathbf{i}\omega$.

S-procédure et KYP continu

La condition **d)** de la S-procédure concrète se récrit

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{i}\omega I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix}' \Theta \begin{bmatrix} (\mathbf{i}\omega I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix} < 0, \ \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

D'après cette même S-procédure concrète, elle équivalente à **e)** qui se récrit alors

$$\exists P = P' : \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix} + \Theta < 0.$$

C'est le lemme KYP en version continue !

Remarque et référence

Remarque

Le plan complexe, l'axe imaginaire et l'ensemble $\mathbb{R}$ *sont étendus par ajout de* $\{\infty\}$ *afin de les rendre compacts ce qui permet d'affirmer que la S-procédure est non conservative dans ce cas.*
En outre, la structure particulière $\Delta = \frac{1}{s} I$ *n'introduit pas de conservatisme car l'ensemble* $\mathbb{X}$ *est* sans perte*.*

A. Rantzer.
On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma.
Systems & Control Letters, 28 :7–10, 1996.

S-procédure et KYP discret

Si maintenant on change $\mathbb{X}$ par

$$\mathbb{X} = \left\{ X = \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} : P = P' \right\},$$

alors il vient

$$\left(-\frac{1}{s's} + 1 \right) P \geq 0,\ \forall P = P'$$

$$\Leftrightarrow \left(s's - 1 \right) P \geq 0,\ \forall P = P'$$

C'est vrai entre autres pour $P = I$ et $P = -I$ donc

$$ss' = 1.$$

Ainsi s décrit décrit $\mathcal{C}$, le cercle unitaire (qui est compact) $\Rightarrow s = e^{i\omega}$. L'ensemble $\mathbb{X}$ est sans perte.

S-procédure et KYP discret

La S-procédure s'instancie alors en l'équivalence

$$\begin{bmatrix} \left(e^{i\omega} I - A\right)^{-1} B \\ I \end{bmatrix}' \Theta \begin{bmatrix} \left(e^{i\omega} I - A\right)^{-1} B \\ I \end{bmatrix} < 0,\ \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists P = P' : \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix} + \Theta < 0.$$

C'est le lemme KYP en version discrète !

Référence

Toujours la même ($\Rightarrow$ continu & discret)

A. Rantzer.
On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma.
Systems & Control Letters, 28 :7–10, 1996.

Mais à quoi tout cela peut bien servir ?...On y vient.

S-procédure et KYP : extension

Une extension du lemme KYP pour le cas d'une zone de fréquences restreintes est possible grâce au lemme KYP à fréquence finie ou au KYP généralisé proposés par Iwasaki et Hara

T. Iwasaki et S. Hara
Generalized KYP lemma : unified frequency domain inequalities with design applications
IEEE Transactions on Automatic Control, 50(1) :41-59, 2005.

S-procédure et lemme borné réel

Un peu d'Histoire
S-procédure abstraite
S-procédure concrète
Quelques lemmes utiles
S-procédure et KYP
S-procédure et incertitude LFR
S-procédure, Lyapunov et Stein
Applications et perspectives locales
Banc hybride

On fixe maintenant un choix de Θ :

$$\Theta = \begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} C'C & C'D \\ \hline D'C & D'D - \gamma^2 I \end{array}\right].$$

L'ensemble des multplieurs est lui aussi légèrement modifié (toujours sans perte) :

$$\mathbb{X} = \left\{ X = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \; : \; P = P' \underline{\geq 0} \right\},$$

de sorte que $(s + s') \geq 0$ ce qui veut dire que s décrit le demi-plan complexe droit fermé.

S-procédure et lemme borné réel

La condition **d)** du KYP continu se récrit alors

f)

$$\left[\ C\,(sI-A)^{-1}\,B+D\ \right]'\left[\ C\,(sI-A)^{-1}\,B+D\ \right]<\gamma^2 I,\ \forall s\in\mathbb{C}^+\cup\{\infty\},$$

tandis que la condition **e)** se récrit

g)

$$\exists P=P'>0\ :\ \left[\begin{array}{c|c} A'P+PA+C'C & PB+C'D \\ \hline B'P+D'C & D'D-\gamma^2 I \end{array}\right]<0.$$

S-procédure et lemme borné réel

La condition **f)** implique que l'inverse de $(sI - A)$ existe sur $\mathbb{C}^+$ ce qui signifie que la fonction de transfert $(C\,(sI - A)^{-1}\,B + D)$ n'a pas de pôle dans $\mathbb{C}^+$ autrement dit, qu'elle est stable au sens de Hurwitz.

On peut le voir sur le premier bloc de la condition **g)** :

$$A'P + PA + C'C < 0$$

$$\Rightarrow A'P + PA < 0$$

Cette inégalité de Lyapunov impose la stabilité de A au sens de Hurwitz puisque $P > 0$.

S-procédure et lemme borné réel

Enfin la condition **f)** impose aussi

$$||C(\mathbf{i}\omega I - A)^{-1}B + D||_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}} ||C(\mathbf{i}\omega I - A)^{-1}B + D||_2 < \gamma.$$

où $||.||_2$ désigne la norme-2 d'une matrice (valeur singulière maximale) et où $||G(s)||_\infty$ désigne la norme $\mathcal{L}_\infty$ du transfert $G(s)$. Cette norme est plutôt appelée norme $\mathcal{H}_\infty$ si le transfert est stable.

Ainsi l'instance précédente du lemme KYP permet d'analyser la norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système (qui correspond aussi au gain $\mathcal{L}_2$). Cette instance est appelée *Lemme borné réel (en version continue et exprimée sous forme de LMI)*.

Il en existe une version discrète.

Référence

Approche LMI du problème $\mathcal{H}_\infty$ avec lemme borné réel en continu

P. Gahinet et P. Apkarian
A linear matrix inequality approach to H_∞ control
International Journal of Robust and Nonlinear Control, 4 :41-448, 1994.

S-procédure et incertitude LFR

S-procédure et incertitude LFR

Un peu d'Histoire

S-procédure abstraite

S-procédure concrète

Quelques lemmes utiles

S-procédure et KYP

S-procédure et incertitude LFR

S-procédure, Lyapunov et Stein

Applications et perspectives locales

Banc hybride

Il s'agit dans cette partie de montrer la pertinence de la S-procédure pour analyser la stabilité robuste d'une matrice vis-à-vis d'une incertitude LFR bornée en norme.

S-procédure et incertitude LFR

Un peu d'Histoire

S-procédure abstraite

S-procédure concrète

Quelques lemmes utiles

S-procédure et KYP

S-procédure et incertitude LFR

S-procédure, Lyapunov et Stein

Applications et perspectives locales

Banc hybride

Soit la matrice incertaine complexe (hélas !) :

$$\mathbf{A} = A + B\bar{\Delta}C \quad \text{avec} \quad \bar{\Delta} = (I - \Delta D)^{-1}\Delta.$$

- $\bar{\Delta}$ est une forme dite *LFR bornée en norme*.
- L'incertitude Δ appartient à la boule de matrices complexes de rayon $\rho = \gamma^{-1}$, définie par

$$\nabla = \left\{\Delta \,:\, \Delta'\Delta \leq \gamma^{-2}I\right\}$$

$$\Leftrightarrow \nabla = \left\{\Delta \,:\, \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix}' \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha\gamma^2 I & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix}}_{X} \begin{bmatrix} \Delta \\ I \end{bmatrix} \geq 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

La matrice X est un multiplieur paramétré par α.

S-procédure et incertitude LFR

La matrice **A** est « Hurwitz » si et seulement si

$$\det(sI - \mathbf{A}) \neq 0,\ \forall \Delta \in \nabla,\ \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$$

$$\Leftrightarrow \det(sI - A - B(I - \Delta D)^{-1}\Delta C) \neq 0,\ \forall \Delta \in \nabla,\ \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$$

$$\Updownarrow$$

$$-(sI - A - B(I-\Delta D)^{-1}\Delta C)'(sI - A - B(I - \Delta D)^{-1}\Delta C) < 0,\ \forall \Delta \in \nabla,\ \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$$

$$\Updownarrow$$

$$[\bullet]'\ \underbrace{[\bullet]'(-I)\begin{bmatrix} -B & (sI - A) \end{bmatrix}}_{\Theta} \underbrace{\begin{bmatrix} (I - \Delta D)^{-1}\Delta C \\ I \end{bmatrix}}_{\text{LFR}} < 0,\ \forall \Delta \in \nabla,\ \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}.$$

S-procédure et incertitude LFR

Avec le changement de variable suivant (visant à retrouver un peu les notations de la S-procédure concrète (sans perte)),

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{D} & \mathcal{C} \end{bmatrix},$$

le facteur contenant la LFR devient

$$\begin{bmatrix} (I - \Delta D)^{-1} C \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - \Delta \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} \\ I \end{bmatrix},$$

et l'on peut appliquer la S-procédure concrète avec

$$V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D & C \end{bmatrix}.$$

S-procédure et incertitude LFR

Alors, de manière équivalente, il existe $\alpha(s) > 0$ tel que

$$\Theta(s)+[\bullet]'\begin{bmatrix} -\alpha(s)\gamma^2 I & 0 \\ 0 & \alpha(s) I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ D & C \end{bmatrix} < 0,\ \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$$

$$\Leftrightarrow [\bullet]'\left(-\underbrace{\frac{1}{\alpha(s)}}_{\tau(s)>0}\right)\begin{bmatrix} -B & (sI-A) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} D'D-\gamma^2 I & D'C \\ C'D & C'C \end{bmatrix} < 0,\ \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$$

Par congruence, on permute les blocs, en lignes et colonnes, tout en conservant la définition négative (th. de Sylvester) :

$$[\bullet]'(-\tau(s))\begin{bmatrix} (sI-A) & -B \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C'C & C'D \\ D'C & D'D-\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0,\ \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}.$$

S-procédure et incertitude LFR

On applique le lemme de Finsler (voici enfin l'exemple) en notant que

$$\mathrm{Ker}(\left[\begin{array}{cc} (sI - A) & -B \end{array}\right]) = \left[\begin{array}{c} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{array}\right].$$

Il vient alors

$$\left[\begin{array}{c} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{array}\right]' \left[\begin{array}{cc} C'C & C'D \\ D'C & D'D - \gamma^2 I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{array}\right] < 0, \ \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}.$$

(Le changement de couleur est significatif).

S-procédure et incertitude LFR

En effet, on se retrouve dans la même situation que pour l'établissement du lemme borné réel et donc il suffit d'appliquer la S-procédure concrète pour « éliminer » s et ainsi obtenir

$$\exists P = P' \; : \; \left[\begin{array}{c|c} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ \hline B'P + D'C & D'D - \gamma^2 I \end{array}\right] < 0.$$

S-procédure et incertitude LFR

En résumé

$\mathbf{A} = (A + B(I - \Delta D)^{-1} \Delta C)$ stable vis-à-vis de la boule ∇ si et seulement si

$$\exists P = P' \; : \; \left[\begin{array}{c|c} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ \hline B'P + D'C & D'D - \gamma^2 I \end{array} \right] < 0.$$

- $\mathbf{A}$ est quadratiquement stable c.-à-d. que

  $$\exists P \; : \; \mathbf{A}'P + P\mathbf{A} < 0.$$

  (Il n'est pas nécessaire d'avoir $P(\Delta)$.)
- Il est possible d'adapter ce résultat au cas discret.

Première remarque

Le lemme borné réel (LBR) sert donc à :

- déterminer la stabilité robuste d'une matrice incertaine complexe vis-à-vis d'une incertitude LFR bornée en norme ;
- exprimer une contrainte sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ d'une matrice de transfert.

Les deux problèmes sont équivalents !

Seconde remarque

En « résolvant la LMI du LBR » (en *P*), on peut minimiser γ. La valeur minimale γ_* a donc deux sens :

- la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert ;
- l'inverse du plus grand rayon de la boule ∇ appelé rayon complexe de stabilité (attention, le rayon réel peut être plus élevé ! Il est plus dur à calculer).

Le rayon complexe (réel) de stabilité est l'inverse de μ complexe (resp. réelle), la valeur singulière structurée, introduite par Doyle (1982).

Références

Introduction de μ (un grand phénomène de mode !)

J. C. Doyle
Analysis of feedback systems with structured uncertainties
IEE Proceedings, Part D, 129 :242–250, 1982.

Définition des rayons de stabilité

D. Hinrichsen et A. J. Pritchard
Stability radii of linear systems
Systems and Control Letters, 7(1) :1–10, 1986.

Références

Lien entre la norme $\mathcal{H}_\infty$ et la stabilité quadratique

P. Khargonekar, I. R. Petersen et K. Zhou
Robust stabilization of uncertain linear systems : Quadratic stabilizability and $\mathcal{H}_\infty$ control theory
IEEE Transactions on Automatic Control, 22 :327-339, 1990.

Méthode de calcul du rayon réel (donc de μ réelle)

L. Qiu, B. Bernhardsson, A. Rantzer, E. J. Davison, P. M. Young et J. C. Doyle
A Formula for Computation of the Real Stability Radius
Automatica, 31(6) :879–890, 1995.

S-procédure, Lyapunov et Stein

Stabilité au sens d'Hurwitz

Un peu d'Histoire
S-procédure abstraite
S-procédure concrète
Quelques lemmes utiles
S-procédure et KYP
S-procédure et incertitude LFR
S-procédure, Lyapunov et Stein
Applications et perspectives locales
Banc hybride

A est stable au sens de Hurwitz si et seulement si

$$\det(sI - A) \neq 0,\ \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$$

$$\Leftrightarrow (sI - A)'(-I)(sI - A) < 0,\ \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$$

$$\Leftrightarrow [\bullet]'\ \underbrace{[\bullet]'(-I)\begin{bmatrix} I & (-A) \end{bmatrix}}_{\ominus} \begin{bmatrix} sI \\ I \end{bmatrix} < 0,\ \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}.$$

sI constitue une LFR très simple et l'on raisonne ici par rapport à sI plutôt que $\frac{1}{s}I$.

Stabilité au sens d'Hurwitz

$$s \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\} \Leftrightarrow \Delta = sI \in \nabla \quad \text{avec}$$

$$\nabla = \left\{ sI : s \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\},\ \begin{bmatrix} sI \\ I \end{bmatrix}' \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}}_{X} \begin{bmatrix} sI \\ I \end{bmatrix} \geq 0,\ P = P' \geq 0 \right\}.$$

Dans ce cas simple, il vient $V = I$ et la S-procédure concrète conduit à la condition de stabilité

$$\exists P = P' > 0 : \underbrace{[\bullet]'(-I)\begin{bmatrix} I & (-A) \end{bmatrix}}_{\ominus} + \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} < 0.$$

On applique le lemme de Finsler et il vient

Stabilité au sens d'Hurwitz

$$\exists P = P' > 0 \;:\; A'P + PA < 0.$$

qui n'est autre que l'inégalité de Lyapunov.

Bien sûr, on peut la démontrer autrement (par Lyapunov, ce qui permet une interprétation énergétique, en passant par des formes de Jordan, ou autres).

Stabilité au sens de Schur

Un peu d'Histoire
S-procédure abstraite
S-procédure concrète
Quelques lemmes utiles
S-procédure et KYP
S-procédure et incertitude LFR
S-procédure, Lyapunov et Stein
Applications et perspectives locales
Banc hybride

On fait le même raisonnement mais en considérant $sI \in \mathcal{D}^C$, l'extérieur du disque unitaire, ce qui conduit au multiplieur

$$X = \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}, \; P = P' > 0$$

et donc à la condition

$$P = P' > 0 \; : \; -P + A'PA > 0.$$

C'est l'inégalité de Stein également démontrable par d'autres approches.

Références

Hommage au maître

A. M. Lyapunov
Problème général de la stabilité du mouvement
Annales de la Faculté de Sciences de Toulouse, 1907, traduit en Français du texte original en Russe, Kharkov, 1892.

Alternative discrète pour les systèmes linéaires

P. Stein
Some theorems on the inertia of general matrices
Journal of Research of the National Bureau of Standards 48 :82-83, 1952

Applications et perspectives théoriques locales

Applications et perspectives

- Placement de pôles, à travers le concept de $\mathcal{S}$-régularité (l'idée est d'empêcher les pôles d'appartenir à une région $\mathcal{S}$ complémentaire de la région de placement) ;
- LFR généralisée (« implicite ») $\mathbf{A} = D + (E - \triangle A)^{-1}(\triangle B - F)$;
- Théorème unique recouvrant la S-procédure abstraite et le lemme d'élimination des matrices (rapport technique consultable sur demande) ;
- Systèmes nD (multidimensionnels) : en cours et à venir.

Références

Placement de pôles, systèmes et incertitudes implicites

B. Sari, O. Bachelier et D. Mehdi.
Robust S-regularity of matrix pencils applied to the analysis of descriptor models
Linear Algebra and its Applications 435(5) :923-942, 2011
Rapport technique LAII-ENSIP, 2007

D. Peaucelle, D. Arzelier, D. Henrion et F. Gouaisbault
Quadratic separation for feedback connection of an uncertain matrix and an implicit linear transformation.
Automatica 43 :796-804, 2007

Références

Théorème général regroupant S-procédure abstraite et lemme d'élimination des matrices

B. Sari, O. Bachelier et D. Mehdi.
Full block projection theorem
Rapport technique LAII-ENSIP, 2010.

Le KYP en version *n*D

O. Bachelier, W. Paszke et D. Mehdi
On the KYP lemma and the multidimensional models.
Multidimensional Systems and Signal Processing
19(3-4) :425-447, 2008.

S-procédure et Banc hybride

S-procédure et banc hybride

Voir épisode 2 réalisé par Patrick Coirault !

En boulgarama *Dolby surround full HD* et en 3D !

Et pour paraphraser le groupe Rainbow...

If you don't like rock'n roll (or S-procedure)
Well, if you don't like rock'n roll
If you don't like rock'n roll
Then it's too late now
Well it's too late now