

## Représentations d'état linéaires des systèmes mono-entrée, mono-sortie

*Modélisation, analyse et commande :  
notions de base et un peu plus*



OLIVIER EUGÈNE BACHELIER

Éditions Lily et Aksel





L'auteur en pleine réflexion

# *Représentations d'état linéaires des systèmes mono-entrée, mono-sortie*

*Modélisation, analyse et commande :  
notions de base et un peu plus*



*Editions L & A*

Version du 23 février 2021





## OBJET

Cet ouvrage d'Automatique, écrit d'abord au **Laboratoire d'Informatique et d'Automatique pour les Systèmes (LIAS)**, puis au domicile de l'auteur, est la version étendue d'un cours s'inscrivant dans le cadre de la deuxième année de « cycle ingénieur » de l'**École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers (ENSIP)** et s'adressant initialement aux étudiants de la spécialité **Maîtrise de l'Énergie Électrique (MEE)**. Ces derniers ont déjà suivi un enseignement relatif à l'étude des systèmes linéaires modélisés par une fonction de transfert (approche fréquentielle). Le cours initial (et donc le présent ouvrage qui s'ensuit) s'intéresse aux mêmes systèmes mais propose une étude via un modèle différent, appelé représentation d'état linéaire (approche temporelle). Cette version étendue vise bien sûr un plus large public. Elle comprend plus de détails, plus d'exemples, d'exercices et de corrections, ainsi que quelques biographies. La bibliographie est plus fournie.

L'ENSIP est une composante de l'**Université de Poitiers**.

Le LIAS est un laboratoire de recherche sous tutelle de l'ENSIP et de l'**École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique (ENSMA)**.

**Connaissances préalables souhaitées :** notions de systèmes linéaires, équations différentielles, fonction de transfert en  $p$  (voire en  $z$ ), analyse et commande des systèmes linéaires par approche fréquentielle, quelques bases d'algèbre linéaire.



À bon lecteur, salut !

*Il est temps de battre en brèche le lieu commun selon lequel  
les mathématiques prouvent. Elles découvrent.*

Joshua Chover, mathématicien... et peintre

*Beware the savage jaw of ????*

≈!+★



# Avant-propos

... sous forme de questions avec de vraies fausses réponses et d'obscurités considérations.

L'approche temporelle de l'Automatique, parfois qualifiée de « moderne », eût pu tout aussi bien devenir l'approche « classique » en lieu et place de l'approche fréquentielle et de ses fonctions de transfert. Du reste, ce qualificatif de « moderne » n'a lieu d'être qu'en Europe occidentale et en Amérique mais n'a pas vraiment de sens, par exemple, dans l'ancien bloc soviétique. Le modèle utilisé pour décrire le comportement des systèmes à commander, et sur lequel s'appuie l'approche temporelle, est la *représentation d'état*, qui fait l'objet de ce document. Mais elle n'est qu'une écriture formalisée regroupant des équations différentielles et algébriques, c'est-à-dire des modèles bien connus depuis quelques siècles. Alors pourquoi l'approche temporelle n'émergea-t-elle pas naturellement comme approche classique dans la communauté scientifique occidentale ?

Je n'ai pas de réponse certaine à cette question et je ne suis pas historien des sciences (ça ne s'improvise pas comme dirait mon ami Patrice Remaud), mais je me risque ici à une tentative d'explication succincte. La manipulation et l'analyse des équations différentielles, fussent-elles linéaires, ne sont pas toujours aisées. Les premières interrogations sur la nature et les propriétés des solutions d'une équation différentielle remontent à I. Newton<sup>1</sup>, G. W. von Leibnitz<sup>2</sup> et aux frères J. et J. Bernouilli<sup>3</sup>. Quant à l'idée d'en transformer les propriétés par un moyen de

---

1. Philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome britannique (1642 ou 1643-1727).

2. Gottfried Wilhelm Leibnitz, philosophe, mathématicien, juriste et diplomate allemand (1646-1716).

3. Jacques (1654-1705) et Jean (1667-1748), mathématiciens et physiciens suisses. Les trois fils de Jean sont également de célèbres scientifiques.

---

commande (dans un contexte évidemment plus physique), ouvrant ainsi la voie du calcul mathématique d'une loi de commande à partir d'un modèle, il semble que la paternité en revienne à J. C. Maxwell<sup>4</sup>. Toutefois, « attaquer » ces équations différentielles par la « face nord » n'est pas toujours très motivant. En revanche, l'utilisation de la transformation de Laplace<sup>5</sup> (Marquis P. S. de Laplace, un Français) ou du calcul opérationnel de O. Heaviside<sup>6</sup> (un Britannique) sont des alternatives à cette manipulation directe. Ces alternatives ont aussi l'avantage de conduire à une interprétation fréquentielle dans laquelle les systèmes à commander sont plutôt vus comme des filtres. La variable de Laplace  $p$ , difficile à interpréter physiquement dans sa généralité, se rapproche alors de  $i\omega$ ,  $i$  représentant l'unité imaginaire, la grandeur  $\omega$  étant une pulsation (la relation avec la travail de J. Fourier<sup>7</sup>, un autre Français, est évidente). Il s'agit là des bases d'une approche fréquentielle de l'Automatique dont le modèle clef est la *fonction de transfert* avec laquelle le lecteur gagnera à se sentir un minimum familier avant de poursuivre l'étude de cet ouvrage. Ce point de vue fréquentiel s'appuie donc sur les travaux de savants essentiellement européens, qui plus est, d'Europe occidentale. Il permit plus tard à l'électronique (analogique) de s'affirmer en tant que discipline scientifique à part entière dans les années 1930 avec les travaux précurseurs de H. S. Black, de H. Nyquist, puis dans les années 1940, de H. W. Bode<sup>8</sup>. L'effort de guerre nécessaire à cette période, effort également scientifique, contribua à cette affirmation de l'approche fréquentielle en électronique puis en Automatique. Des ingénieurs et chercheurs états-uniens reprirent les habitudes « fréquentielles » des mathématiciens et physiciens européens. Ainsi, en occident (c'est-à-dire aux États-Unis puis dans le reste de ce qui serait le bloc de l'ouest), cette approche, qui avait alors de vraies visées en Automatique, parut quelque temps comme presque définitive et s'installa dans le monde de l'ingénierie et dans celui qui l'alimente en concepts, à savoir le monde académique de l'enseignement et de la recherche.

Cependant, dans une autre partie de l'Europe où l'électronique florissait sans doute un peu moins, le cheminement intellectuel n'avait pas donné lieu à cette approche fréquentielle et la fonction de transfert n'était pas populaire, voire pas utilisée. Ce n'est pas pour autant que l'on n'y faisait pas d'Automatique. Bien au contraire.

---

4. James Clerk Maxwell, physicien et mathématicien écossais (1831-1879), célèbre pour les équations éponymes décrivant de façon unifiée les phénomènes électromagnétiques.

5. voir biographie 2.1 page 40.

6. voir biographie 2.2 page 41.

7. Baron Joseph (ou Jean Baptiste Joseph) Fourier, mathématicien et physicien français (1768-1830).

8. cf. biographies 2.4, 2.3, et 2.5, page 42.

---

Simplement, on n'y avait pas abandonné la manipulation directe des équations différentielles, même non linéaires, et les théories en vogue y étaient plutôt les méthodes de A. M. Liapounov<sup>9</sup> où les travaux de L. S. Pontryaguine<sup>10</sup>. Aussi hermétiques que pussent à première vue paraître ces travaux pour un occidental de l'époque, ils n'empêchèrent pas les Soviétiques d'emporter la bataille initiale de la conquête spatiale en étant les premiers à envoyer, avec succès, un satellite dans l'espace (Sputnik 1 en 1957). De quoi interpeler leurs homologues occidentaux. Ainsi, aux États-Unis, une équipe fut mise sur pied, sous la houlette du mathématicien S. Lefschetz<sup>11</sup>, pour étudier le potentiel des approches soviétiques, notamment les méthodes de Liapounov.

La reconnaissance de l'intérêt de ces approches fut telle que le premier congrès mondial de la fédération internationale d'Automatique (*International Federation of Automatic Control (IFAC)*) eut lieu, de façon consensuelle, à Moscou, dans un contexte pourtant tendu entre les deux grandes puissances de l'époque. Lors de ce congrès, R. E Kálmán<sup>12</sup>, l'un des membres de l'équipe de S. Lefschetz, qui avait déjà bien avancé dans ses recherches, proposa un formalisme matriciel pour écrire les systèmes d'équations algèbro-différentiels linéaires pouvant décrire le comportement de certains systèmes. Il jeta ainsi les bases (et même plus) de la représentation d'état, c'est-à-dire de ce que le lecteur trouvera dans ce document, et dans bien d'autres plus approfondis. Kálmán et ses acolytes (R. E. Bellman et J. E. Bertram notamment) mirent en évidence les possibilités d'exploiter les propriétés de l'algèbre linéaire dans un tel contexte et ce fut le renouveau, dans les années 1960-1970, de l'approche temporelle, curieusement requalifiée de « moderne ». Un avantage certain de ce formalisme est la facilité avec laquelle il s'adapte aux systèmes comprenant plusieurs entrées et plusieurs sorties. Cette adaptation est bien moins évidente avec l'approche fréquentielle. Par ailleurs, l'approche temporelle facilite souvent l'implantation numérique des lois de commande.

Pour autant, nulle ne fut question, fort logiquement du reste, d'abandonner les fonctions de transfert. Les deux approches sont complémentaires et ce document ne cherche en aucun cas à dénigrer un modèle au profit d'un autre. L'outil le meilleur est souvent celui que l'on maîtrise le mieux.

---

9. mathématicien et physicien russe (1857-1918) : voir sa biographie en annexe page 772.

10. mathématicien soviétique (1908-1988).

11. Solomon Lefschetz, mathématicien russe d'origine turque (1884-1972) : voir biographie 3.1 page 76.

12. voir biographie en annexe I.2 page 777.

---

On eût pu s'attendre à ce que les deux approches cohabitassent dans les documents didactiques, les cours etc. Selon moi, ce ne fut pas le cas pour ce qui concerne la France. Il semble que l'enseignement de l'Automatique en France, quoique de qualité, fut assez lent à intégrer ce retour de l'approche temporelle (cela va beaucoup mieux, je rassure le lecteur). Sans doute l'Automatique est-elle trop liée à l'enseignement en électronique. Encore aujourd'hui, la représentation d'état n'est enseignée qu'une fois les fonctions de transfert assimilées par l'étudiant. Bien des ouvrages ne présentent que l'approche fréquentielle, surtout dès lors qu'ils ne s'adressent qu'à des étudiants de niveau « Bac+2 » (ou L2). Bien d'autres, écrits à l'attention d'étudiants plus avancés, consacrent un voire deux chapitres à la représentation d'état, contre peut-être six à dix chapitres dédiés à la fonction de transfert. Bien entendu, il existe des exceptions et il est possible de lire des livres entièrement consacrés à la représentation d'état. Toutefois, force est de constater que la fonction de transfert se taille la part du lion. Il est rare de voir un apprentissage équilibré des deux approches dès le premier niveau d'enseignement. Pour l'avoir testé en tant qu'élève, je le conseille pourtant. À ce titre, il faut noter l'excellent ouvrage, très original dans sa forme, de Bernard Pradin et Germain Garcia, *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*, édité aux Presses universitaires du Mirail (Toulouse), qui me semble être la meilleure exception à l'usage en vigueur. Il s'agit d'un ouvrage très didactique à l'image de l'enseignement des auteurs (je puis en témoigner).

Une explication facile du choix généralement admis de commencer par l'approche fréquentielle, voire de s'y restreindre, pourrait résider dans la difficulté des notions mathématiques requises. Et pourtant, là encore, on peut s'interroger. La fonction de transfert nécessite quelques connaissances sur le travail de Laplace, Fourier ; évoluer dans le domaine de Laplace, proposer des interprétations fréquentielles (marges de stabilité, etc.) du comportement d'un système alors que l'on s'intéresse à une réponse temporelle (indicielle, impulsionnelle, etc.) n'est pas si immédiat pour un esprit vierge de toute idée préconçue. Bien entendu, pour manipuler des représentations d'état, il faut être quelque peu familier des équations différentielles, du calcul matriciel et de l'algèbre linéaire. Mais finalement, tout cela n'est pas plus difficile que la transformation de Laplace. Là encore, il faut sans doute invoquer la particularité française. En France, l'Automatique est presque systématiquement enseignée selon le modèle typique du monde de l'EEA (Électronique, Électrotechnique, Automatique) dont les habitants sont à l'aise avec les concepts fréquentiels. Dans d'autres pays, ce lien est souvent plus ténu. S'appuyer sur les difficultés mathématiques ne me paraît pas une justification raisonnable pour privilégier l'approche fréquentielle. Du reste, il suffit de regarder le cursus d'un mathématicien pur. Il est fort probable que ce dernier se soit exercé à l'art du calcul matriciel et aux subtilités de l'algèbre



---

linéaire bien avant d'avoir étudié les transformations de Fourier et de Laplace, si même il étudie la seconde. Ces dernières sont en fait introduites à dessein dans certains parcours, premiers cycles, ayant une vocation d'ingénierie (ce que je ne cherche pas à contester).

En conséquence, le lecteur intéressé par le document et par l'approche temporelle en général, ne doit pas « s'en faire un monde » et ne doit croire en aucun cas qu'il s'agit d'une étape « avancée » sur la route de l'Automatique. C'est juste un chemin parallèle, ni plus direct, ni plus piégeux.

Ce document était à l'origine un recueil de notes de cours qui s'est étoffé peu à peu. Il était destiné à des étudiants de deuxième année de cycle ingénieur à l'[ENSIP](#) (École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers). Dans leur cursus, l'Automatique prend une part importante (je l'écris pendant que c'est encore vrai !). Les programmes de ce cycle sont une illustration de la tendance française à enseigner l'Automatique : l'approche fréquentielle est vue en début de deuxième année, l'approche temporelle dans la suite de l'année, et les méthodes plus avancées et plus spécifiques en troisième et dernière année. Que l'on ne se méprenne pas sur ma pensée, je n'ai rien contre cette façon de procéder. Je note qu'elle fonctionne bien, qu'elle s'est généralisée et je m'y suis en l'occurrence adapté pour ces enseignements. Je tiens juste, eu égard aux réflexions ci-avant, à ne pas faire apparaître l'approche temporelle comme une inéluctable « seconde étape ». Je reconnais néanmoins que l'approche temporelle a ma faveur, mais essentiellement pour une affaire de goûts.

Une autre question se pose : un fichier électronique en ligne ou un livre ?

J'ai pesé le pour et le contre du livre. Parmi les inconvénients du livre, il faut contacter un éditeur, se conformer scrupuleusement au format imposé, peut-être se contraindre à utiliser un traitement de texte WYSIWYG d'une célèbre marque de logiciels (quelle horreur !), se renseigner rigoureusement sur les propriétés intellectuelles, se limiter dans le contenu (!!!), éviter les fantaisies... de quoi se décourager. Parmi les avantages, il faut citer une ligne sur mon CV (léger sourire), l'enrichissement personnel par le profit des ventes (franche rigolade mais je vais contacter J. K. Rowling pour une éventuelle cosignature) et l'« objet livre » en lui-même, parce qu'un livre, ça peut être un bel objet (et là, je dois confesser que je suis attaché à cet aspect mais à l'heure où il convient de prendre en compte des considérations écologiques...).

Il convient aussi de mentionner les avantages du fichier électronique. Il a une large

---

diffusion, permet un retour rapide des lecteurs (c'est important le « *feedback* » en Automatique), ce qui autorise une évolution plus rapide du document. Le lecteur l'aura compris, je compte sur lui pour me signaler les nombreuses coquilles, petites ou grosses inexactitudes, approximations légères ou grossières, énormités honteuses, etc. qui parsèment ce document fort peu relu. En outre, toute suggestion est la bienvenue même si aucune garantie n'est donnée qu'elle sera suivie d'effets (ce n'est pas mon seul travail que de faire évoluer ce document)... néanmoins de nombreux ajouts sont déjà en germination.

Ce que j'espère, c'est que de nombreux lecteurs trouveront dans ce travail de quoi avancer un peu sur le sentier de l'Automatique. Le lectorat visé consiste en des étudiants, essentiellement de L3 et M1 (Bac+3, Bac+4). Mais un étudiant de M2 (Bac+5) pourra peut-être aussi y trouver son compte. Bien sûr, les élèves ingénieurs sont des lecteurs potentiels. Il est peut-être également une autre catégorie de lecteurs qui peut porter un intérêt à ce document : celle des jeunes doctorants, fraîchement recrutés, sans doute déjà très savants (sans plaisanterie aucune) et désireux néanmoins d'assoier un peu leur savoir ou de se remémorer quelques notions de base sur l'approche temporelle avant de se lancer dans leurs propres investigations sur le sujet. Enfin, un enseignant nouvellement en charge d'un cours sur le sujet aura éventuellement matière à se faciliter la tâche. Le document dans ses versions allégée et complète est disponible sur la toile à l'adresse

<http://www.lias-lab.fr/perso/olivierbachelier/teachings.php>.

*Que tout ceci serve l'Automatique! Ou du moins ne le desserve pas!*

Enfin, il est d'usage de remercier ceux sans qui ces quelques pages seraient encore pires. Je me prête à la coutume avec plaisir. Je remercie bien entendu mes enseignants, mes élèves, mes collègues qui, tous, ont contribué ou contribuent à leur façon au bouillon de culture automaticienne dans lequel je cherche à éviter la noyade. Je suis particulièrement reconnaissant à Bernard Pradin, professeur émérite<sup>13</sup> à l'[INSA de Toulouse](#) (Institut National des Sciences Appliquées) de Toulouse et [Germain Garcia](#), professeur dans le même institut, mes principaux enseignants d'Automatique, de m'avoir donné le goût de cette discipline. Je demande à Bernard de me pardonner quelques emprunts à ces indispensables photocopiés de notes de cours. Je remercie d'ailleurs tous les auteurs des ouvrages d'Automatique que j'ai pu lire et qui m'ont sans doute influencé. J'exprime également ma gratitude à

---

13. enfin... plus maintenant mais émérite un jour, émérite toujours.

---

Guillaume Mercère, maître de conférences habilité à diriger les recherches à l'ENSIP, qui partageait avec moi cet enseignement de représentation d'état et qui en a aujourd'hui la pleine charge. Il est un collaborateur et ami sympathique, énergique et efficace, dont les remarques sont toujours pertinentes. Elles m'ont aidé à améliorer le document. Avant lui, Jérôme Bosche, aujourd'hui maître de conférences habilité à diriger les recherches à l'Université de Picardie Jules Verne, avait essuyé les plâtres en participant avec moi à la première mouture de cet enseignement. Il a été le premier relecteur de la version initiale du document. Et ce ne fut pas une mince affaire d'autant plus qu'il devait de surcroît souffrir mon encadrement et ma collaboration dans son activité de recherche. Son célèbre homonyme<sup>14</sup> a peint l'enfer. J'espère ne pas lui avoir fait subir. Merci à lui de son amitié et de ses précieux amendements au document. Enfin, je remercie ceux qui sont obligés de supporter que mon esprit vagabonde dans un *espace d'état* aux moments où il devrait être tout dédié à leur bonheur : ma femme Fatiha, ma fille Lily, mon fils Aksel.

*À Fatiha, la discrète,  
À Lily, la princesse qui ne voulait pas que j'écrive des « maths de samourai »,  
À Aksel, le guépard, qui lira cette dédicace quand il sera en âge de le faire,  
À mes parents et à mon ingénieur automaticien de frère.*

Poitiers, le 23 février 2021,

Olivier E. Bachelier<sup>15</sup>

---

14. Jheronimus van Aken dit Jérôme Bosch, peintre néerlandais (1450-1516).

15. L'auteur a choisi de faire figurer l'initiale de son second prénom : ça fait américain, donc sérieux.



# *Sur l'utilisation de ce document*

*... ou comment respecter le droit et la volonté de l'auteur.*

Toute œuvre est protégée par le droit, sans que cela ne requiert une quelconque démarche de la part de l'auteur. Bien sûr, cet ouvrage ne mérite peut-être pas d'être qualifié d'œuvre mais il est une création comme une autre et, à ce titre, le droit s'applique.

J'ai choisi de mettre ce travail en ligne pour qu'il soit profitable au plus grand nombre mais cela ne signifie pas que le document ne soit pas protégé par la loi. J'en conserve les droits d'auteurs. Une rapide vérification des textes de lois montrera au lecteur que cela ne vaut autorisation à quiconque d'utiliser le document comme bon lui semble. Il existe des règles à respecter et en particulier, sans entrer dans les détails juridiques, il convient d'utiliser l'ouvrage dans le respect des souhaits de son auteur. Je veux donc ici indiquer au lecteur comment il est autorisé à utiliser ce fichier. Voici les principales conditions (liste non exhaustive) :

- Ne pas mettre en ligne le document sans mon accord ;
- Il est possible d'utiliser tout ou partie du document (impressions, photocopies d'extraits plus ou moins importants) à condition de faire mention de l'auteur ;
- Indiquer le crédit en accompagnement des contenus utilisés ;
- J'ai le droit de m'opposer à une utilisation que je considère comme irrespectueuse de mon intention initiale (la loi m'y autorise).

En particulier, je serais très peiné s'il s'avérait que certaines personnes malintentionnées mettaient en ligne le document sur des sites de vente de cours comme il en existe malheureusement (notamment des sites de vente d'étudiants à étudiants,

---

c'est un comble!). Ces personnes s'exposeraient du reste à de fortes amendes. Cet appât du gain serait extrêmement malvenu dès lors que j'ai souhaité offrir ce travail de longue haleine sans chercher un quelconque profit. J'estime que c'est mon devoir d'employé du service public mais je regretterais qu'il serve des intérêts privés, qu'il profite à des personnes cupides n'ayant pas produit d'effort de production. C'est pourquoi je rappelle ici le lien vers la page internet où le fichier peut être téléchargé gratuitement :

<http://www.lias-lab.fr/perso/olivierbachelier/teachings.php>.

Merci de respecter l'esprit de cette mise en ligne.

Olivier Bachelier

# *Organisation du document*

*... où comment s'y retrouver dans tout ce b...*

L'ouvrage est organisé de façon assez traditionnelle. Toutefois, quelques choix de l'auteur méritent des commentaires. Chaque chapitre commence par un bref préambule puis présente son propre sommaire. Vient ensuite le contenu proprement dit du chapitre, c'est-à-dire l'exposé des diverses notions. Les propositions les plus importantes (selon l'auteur) sont encadrées et mises en valeur, de même que les principales équations et formules. Un fond coloré (ou grisé pour une version en niveaux de gris) est également utilisé pour les remarques qui parsèment le document. Les exemples illustrant le cours font apparaître une police brune (plus claire).

À la fin de chaque chapitre, une section est consacrée aux exercices. Elle est physiquement matérialisée par un double trait de marge. Dans cette partie, l'auteur tente d'illustrer chaque point abordé au cours du chapitre. La section suivante propose des corrections aux exercices. Elle est également matérialisée par un double trait de marge, mais il est plus large. L'auteur a voulu ces corrections assez détaillées, à des fins didactiques. Le lecteur ne doit pas sous-estimer la probabilité d'erreurs de calcul ou de typographie dans cette partie, l'auteur étant souvent le seul relecteur.

Enfin, chaque chapitre se termine par une section de notes et de références dans laquelle l'auteur se permet quelques commentaires, propose quelques citations à divers articles et livres relatifs aux sujets abordés. Ces références ne constituent pas une liste exhaustive. Elles représentent au contraire un choix personnel, partial, restreint. Elles sont liées aux lectures, aux sources d'inspira-

---

tion et aux goûts de l'auteur. Certaines contributions citées le sont à titre historique, d'autres parce qu'elles sont communément admises comme références sur le sujet, et, enfin, d'autres encore, parce qu'elles traitent d'un sujet particulier qui a attiré l'attention de l'auteur. Elles ont pu être sélectionnées tant pour la profondeur de leur contenu que pour leur forme et leur caractère didactique. Certaines combinent les deux qualités. De ce fait, on trouve d'authentiques articles et livres de recherche mais aussi des ouvrages destinés à l'enseignement. L'auteur a choisi d'y faire aussi figurer quelques photocopiés de cours, généralement prélevés sur la toile.

De nombreuses références bibliographiques sont accompagnées d'un commentaire. Elles peuvent apparaître, avec le commentaire associé, à la fin de plusieurs chapitres. Ce choix de redondance est délibéré de la part de l'auteur qui espère que chaque chapitre puisse être lu comme un bloc accompagné des références correspondantes. Il arrive que l'auteur aiguille le lecteur vers ses propres productions. Ce n'est pas par pédantisme, du moins l'espère-t-il, mais simplement parce qu'il les connaît mieux et est vraiment certain des inepties que l'on peut y trouver.

Tout au long du document, l'auteur mentionne certaines personnes, certains personnages plus ou moins historiques, avec parfois une certaine fantaisie que le lecteur voudra bien lui pardonner. Le choix des personnes citées est, comme celui des ouvrages et articles, largement contestable. Il peut s'agir d'individus, pas toujours célèbres, ayant simplement un rapport avec le sujet traité sur le moment, ou bien de savants ayant réellement eu une influence sur le développement de l'Automatique, voire des sciences en général, ou encore simplement de personnes ayant eu une influence sur la vision que l'auteur a de l'Automatique. Ces citations sont souvent accompagnées de notes de bas de page qui peuvent se retrouver identiquement dans plusieurs chapitres, plusieurs paragraphes du même chapitre, de façon à ce que le document puisse être lu en plusieurs fois, sans que le recours aux différents renvois soit toujours nécessaires. Cette volonté de redondance est assumée et est propre à tout le document. Le lecteur qui lira tout (loué soit-il!) pourra peut-être s'en agacer.

Quelques biographies de scientifiques dont les travaux ont eu un impact particulier sur l'évolution de l'Automatique sont occasionnellement proposées dans des encadrés au cours des divers chapitres. Les dessins qui les accompagnent, de la main de l'auteur, tentent de reproduire des photographies connues des scientifiques en question.



---

À la fin de l'ouvrage, plusieurs annexes sont données. Elles ne sont pas indispensables à la compréhension des notions mais permettent d'approfondir quelques aspects, allégeant ainsi le corps du document. Suivent une bibliographie restreinte regroupant les références qui ont été les plus utiles à l'écriture du document ainsi qu'un index que l'auteur a voulu assez complet. Cet index ne renvoie pas toujours vers des explications de la notion indexée, mais parfois juste vers une simple évocation. Il est volontairement très (trop ?) complet et quelque peu fantaisiste.

Même si certains développements mathématiques ou démonstrations de résultats sont exposés, l'auteur espère ne pas trop noyer le lecteur dans ces aspects et souhaite que la mise en forme puisse permettre d'aller rapidement vers les points fondamentaux du propos.

L'auteur envisage d'apporter des évolutions à ce document : non seulement des corrections, des réparations d'omissions, mais aussi de nouveaux chapitres si le temps lui en est laissé. En tout cas, il espère sincèrement que les choix opérés lors de cette rédaction auront l'heur de plaire aux lecteurs.



# Table des matières

<i>Avant propos</i>	<b>ix</b>
<i>Sur l'utilisation de ce document</i>	<b>xvii</b>
<i>Organisation du document</i>	<b>xix</b>
<b>1 Introduction, notions de base</b>	<b>1</b>
1.1 Notion de système . . . . .	2
1.2 Notion de modèle . . . . .	3
1.3 Notion de boucle . . . . .	6
1.4 Grandes lignes du cours . . . . .	9
1.5 Exercices . . . . .	10
1.5.1 La voiture : un système bouclé . . . . .	10
1.5.2 De l'art de prendre sa douche . . . . .	10
1.5.3 Rétroviseur à réglage de position électronique . . . . .	10
1.5.4 Nécessité d'une régulation étudiée . . . . .	11
1.6 Correction des exercices . . . . .	13
1.6.1 La voiture : un système bouclé . . . . .	13
1.6.2 De l'art de prendre sa douche . . . . .	14
1.6.3 Rétroviseur à réglage de position électronique . . . . .	16
1.6.4 Nécessité d'une régulation étudiée . . . . .	17
1.7 Notes et références . . . . .	20
<b>2 Rappel sur la fonction de transfert</b>	<b>27</b>
2.1 Équations préliminaires . . . . .	28
2.1.1 Linéarité, point de fonctionnement, caractéristique sta- tique et linéarisation . . . . .	29

2.1.2	Modèle entrée/sortie : l'équation différentielle . . . . .	33
2.1.3	Transformation de Laplace : de l'équation différentielle à la fonction de transfert . . . . .	34
2.2	Fonction de transfert . . . . .	36
2.2.1	Comment obtenir la fonction de transfert ? . . . . .	36
2.2.2	Intérêt de la fonction de transfert . . . . .	38
2.2.3	Brève considération historique . . . . .	39
2.3	Exercices . . . . .	45
2.3.1	Petits exemples mécaniques . . . . .	45
2.3.2	Moteur à courant continu . . . . .	47
2.4	Correction des exercices . . . . .	50
2.4.1	Petits exemples mécaniques . . . . .	50
2.4.2	Moteur à courant continu . . . . .	52
2.5	Notes et références . . . . .	56
<b>3</b>	<b>La représentation d'état</b> . . . . .	<b>65</b>
3.1	Principe général . . . . .	67
3.2	De la non-linéarité à la linéarité . . . . .	70
3.3	Historique de la représentation d'état . . . . .	74
3.4	Comment obtenir un modèle d'état ? . . . . .	78
3.4.1	Par le jeu d'équations . . . . .	78
3.4.2	Par l'équation différentielle unique . . . . .	78
3.5	De la fonction de transfert à la représentation d'état . . . . .	80
3.5.1	Cas d'une fonction de transfert strictement propre ( $m < n$ )	81
3.5.1.1	Réalisation diagonale ou quasi diagonale de Jordan	81
3.5.1.2	Réalisation de forme compagne . . . . .	84
3.5.2	Cas d'une fonction de transfert non strictement propre ( $m = n$ ) . . . . .	86
3.5.3	Cas d'une fonction de transfert non propre ( $m > n$ ) . . .	87
3.6	De la représentation d'état à la fonction de transfert . . . . .	87
3.7	D'une réalisation à l'autre . . . . .	88
3.7.1	Changement de base . . . . .	89
3.7.2	Obtention d'une forme compagne horizontale . . . . .	90
3.7.3	Obtention d'une forme compagne verticale . . . . .	91
3.7.4	Obtention d'une forme de Jordan . . . . .	91
3.7.4.1	Les valeurs propres $\lambda_i$ de $A$ sont distinctes . . .	92
3.7.4.2	Les valeurs propres $\lambda_i$ de $A$ sont multiples . . .	92
3.8	Associations de représentations d'état . . . . .	94
3.8.1	Modèles en parallèle . . . . .	95

3.8.2	Modèles en série . . . . .	96
3.8.3	Interconnexion de modèles . . . . .	97
3.9	Exercices . . . . .	100
3.9.1	Promenons nous dans les bois ... . . . .	100
3.9.2	Et les poissons, alors? . . . . .	107
3.9.3	Après la forêt et l'eau, promenons nous dans les airs . . . . .	109
3.9.4	Modélisation simplifiée d'un bâtiment soumis à des se- cusses sismiques . . . . .	111
3.9.5	Petit exemple mécanique . . . . .	113
3.9.6	Système à deux chariots . . . . .	113
3.9.7	Bille sur rail . . . . .	114
3.9.8	Fomulation hamiltonienne de la loi de Newton . . . . .	114
3.9.9	L'incontournable . . . . .	115
3.9.10	Un peu d'électronique analogique . . . . .	117
3.9.11	Moteur à courant continu . . . . .	118
3.9.12	Rendez-vous à la salle des fêtes . . . . .	119
3.9.13	Modélisation d'un lecteur de disque dur . . . . .	121
3.9.14	Système hydraulique . . . . .	122
3.9.15	Niveau de fluide et température dans une cuve . . . . .	123
3.9.16	Maquette d'hélicoptère . . . . .	125
3.9.17	Choix d'une réalisation . . . . .	129
3.9.18	« Jordanisation » d'une réalisation . . . . .	130
3.9.19	Associations de systèmes . . . . .	130
3.10	Correction des exercices . . . . .	131
3.10.1	Promenons nous dans les bois ... . . . .	131
3.10.2	Et les poissons, alors? . . . . .	132
3.10.3	Après la forêt et l'eau, promenons nous dans les airs . . . . .	133
3.10.4	Modélisation simplifiée d'un bâtiment soumis à des se- cusses sismiques . . . . .	134
3.10.5	Petit exemple mécanique . . . . .	135
3.10.6	Système à deux chariots . . . . .	136
3.10.7	Bille sur rail . . . . .	136
3.10.8	Fomulation hamiltonienne de la loi de Newton . . . . .	137
3.10.9	L'incontournable . . . . .	138
3.10.10	Un peu d'électronique analogique . . . . .	142
3.10.11	Moteur à courant continu . . . . .	145
3.10.12	Rendez-vous à la salle des fêtes . . . . .	146
3.10.13	Modélisation d'un lecteur de disque dur . . . . .	147
3.10.14	Système hydraulique . . . . .	149

3.10.15 Niveau de fluide et température dans une cuve . . . . .	149
3.10.16 Maquette d'hélicoptère . . . . .	153
3.10.17 Choix d'une réalisation . . . . .	156
3.10.18 « Jordanisation » d'une réalisation . . . . .	157
3.10.19 Associations de systèmes . . . . .	159
3.11 Notes et références . . . . .	161
<b>4 Réponse d'un modèle d'état</b>	<b>167</b>
4.1 Solution du système autonome . . . . .	168
4.1.1 Matrice de transition d'état . . . . .	168
4.1.2 Solution de l'équation homogène . . . . .	169
4.2 Solution de l'équation d'état complète . . . . .	170
4.3 Calcul de $e^{At}$ . . . . .	172
4.3.1 Méthode des séries . . . . .	172
4.3.2 Par la transformation de Laplace . . . . .	174
4.3.3 Méthodes des modes . . . . .	175
4.3.4 Méthode Cayley-Hamilton . . . . .	176
4.4 Régime transitoire : influence des modes . . . . .	178
4.5 Réponse impulsionnelle . . . . .	181
4.6 Réponse indicielle . . . . .	181
4.7 Réponse harmonique . . . . .	183
4.8 Exercices . . . . .	185
4.8.1 Exponentielle de $At$ . . . . .	185
4.8.2 Calcul d'une réponse à un signal composé . . . . .	185
4.8.3 Préambule au chapitre suivant . . . . .	186
4.8.4 Réponse fréquentielle . . . . .	186
4.8.5 Opération tape-cul . . . . .	187
4.9 Correction des exercices . . . . .	190
4.9.1 Exponentielle de $At$ . . . . .	190
4.9.2 Calcul d'une réponse à un signal composé . . . . .	191
4.9.3 Préambule au chapitre suivant . . . . .	194
4.9.4 Réponse fréquentielle . . . . .	194
4.9.5 Opération tape-cul . . . . .	197
4.10 Notes et références . . . . .	199
<b>5 Stabilité des modèles d'état</b>	<b>201</b>
5.1 Une approche quasi intuitive : la stabilité BIBO . . . . .	202
5.2 Stabilité d'un état d'équilibre . . . . .	204
5.2.1 Définition et recherche d'un état d'équilibre . . . . .	204

5.2.2	Stabilité . . . . .	205
5.3	Critères de stabilité . . . . .	205
5.3.1	Critère des racines . . . . .	206
5.3.1.1	$\text{rang}(A) = n$ . . . . .	207
5.3.1.2	$\text{rang}(A) < n$ . . . . .	207
5.3.1.3	En résumé . . . . .	208
5.3.1.4	Stabilité interne et stabilité BIBO . . . . .	209
5.3.1.5	Les marges de stabilité . . . . .	210
5.3.2	Critère de Routh-Hurwitz . . . . .	211
5.3.3	Méthode de Liapounov . . . . .	216
5.4	Exercices . . . . .	220
5.4.1	C'est stable une montgolfière? . . . . .	220
5.4.2	Niveau de fluide et température dans une cuve . . . . .	220
5.4.3	Stabilité dans les airs... ou presque . . . . .	220
5.4.4	Équilibre précaire . . . . .	221
5.4.5	Critère de Hurwitz pour des ordres faibles . . . . .	221
5.5	Correction des exercices . . . . .	223
5.5.1	C'est stable une montgolfière? . . . . .	223
5.5.2	Niveau de fluide et température dans une cuve . . . . .	224
5.5.3	Stabilité dans les airs... ou presque . . . . .	225
5.5.4	Équilibre précaire . . . . .	226
5.5.5	Critère de Hurwitz pour des ordres faibles . . . . .	226
5.6	Notes et références . . . . .	229
<b>6</b>	<b>Commandabilité et observabilité</b>	<b>237</b>
6.1	Définitions . . . . .	238
6.1.1	Commandabilité ou gouvernabilité . . . . .	238
6.1.2	Observabilité . . . . .	239
6.2	Critère de Kálmán . . . . .	240
6.2.1	Commandabilité . . . . .	240
6.2.2	Observabilité . . . . .	242
6.2.3	Dualité des deux concepts . . . . .	245
6.3	Critères s'appliquant aux formes de Jordan . . . . .	246
6.3.1	$A$ diagonalisable . . . . .	247
6.3.2	$A$ non diagonalisable . . . . .	247
6.4	Grammiens . . . . .	248
6.4.1	Définition des grammiens . . . . .	248
6.4.2	Interprétation des grammiens . . . . .	249
6.4.3	Calcul des grammiens . . . . .	250

6.5	Test de Popov-Belevitch-Hautus . . . . .	251
6.6	Modèles et structures . . . . .	253
6.6.1	Différence entre les modèles . . . . .	254
6.6.2	Systèmes composites . . . . .	257
6.6.2.1	Systèmes en série . . . . .	257
6.6.2.2	Systèmes en parallèle . . . . .	258
6.6.2.3	Systèmes en rétroaction . . . . .	259
6.7	Réalisation minimale . . . . .	260
6.7.1	Définition . . . . .	261
6.7.2	Réalisation minimale et notion de pôles . . . . .	261
6.7.3	Réalisation minimale et stabilité . . . . .	262
6.8	Décomposition de Kalman . . . . .	263
6.8.1	Décomposition relative à la commandabilité . . . . .	263
6.8.2	Décomposition relative à l'observabilité . . . . .	267
6.8.3	Décomposition complète . . . . .	268
6.9	Quelques éléments biographiques . . . . .	275
6.10	Exercices . . . . .	278
6.10.1	Un exo à tout faire . . . . .	278
6.10.2	Décomposition de Kálmán . . . . .	278
6.10.3	Retour au chapitre 4 . . . . .	279
6.11	Correction des exercices . . . . .	280
6.11.1	Exo à tout faire . . . . .	280
6.11.2	Décomposition de Kálmán . . . . .	285
6.11.3	Retour au chapitre 4 . . . . .	288
6.12	Notes et références . . . . .	290
<b>7</b>	<b>Commande par retour d'état</b> . . . . .	<b>297</b>
7.1	Notion de retour d'état . . . . .	298
7.2	Placement de pôles . . . . .	300
7.2.1	Commandabilité et placement de pôles . . . . .	301
7.2.2	Placement de pôles sur une réalisation canonique . . . . .	302
7.2.3	Placement de pôles sur une réalisation quelconque . . . . .	303
7.2.3.1	Obtention de la forme canonique à partir de la fonction de transfert . . . . .	303
7.2.3.2	Obtention de la forme canonique à partir d'une autre réalisation . . . . .	303
7.2.3.3	Algorithme de placement de pôles . . . . .	304
7.3	Précommande . . . . .	308
7.4	Rejet de perturbation . . . . .	310



7.4.1	Première approche . . . . .	310
7.4.2	Seconde approche . . . . .	315
7.5	Stabilisabilité et détectabilité . . . . .	321
7.5.1	Critères de type PBH . . . . .	323
7.5.2	Stabilisabilité et détectabilité interprétées par décomposition de Kálmán . . . . .	324
7.6	Stabilisation . . . . .	326
7.7	Retour d'état et énergie de commande . . . . .	328
7.8	Quelques éléments historiques . . . . .	329
7.9	Exercices . . . . .	332
7.9.1	Un peu de calcul littéral . . . . .	332
7.9.2	Oh là ! ça tangué ! . . . . .	333
7.9.3	Moteur à courant continu . . . . .	336
7.9.4	Asservissement de position d'une bille sur un rail . . . . .	337
7.9.5	Stabilisation par résolution d'inégalité . . . . .	338
7.10	Correction des exercices . . . . .	340
7.10.1	Un peu de calcul littéral . . . . .	340
7.10.2	Oh là ! ça tangué ! . . . . .	344
7.10.3	Moteur à courant continu . . . . .	351
7.10.4	Asservissement de position d'une bille sur un rail . . . . .	357
7.10.5	Stabilisation par résolution d'inégalité . . . . .	360
7.11	Notes et références . . . . .	363
<b>8</b>	<b>Observateurs</b> . . . . .	<b>369</b>
8.1	Notions préliminaires . . . . .	371
8.1.1	Motivation . . . . .	371
8.1.2	Principe de l'observation . . . . .	373
8.1.3	Propriété d'un observateur . . . . .	373
8.1.4	Condition d'existence d'un observateur . . . . .	374
8.1.5	À propos de la transmission directe . . . . .	374
8.2	Synthèse d'un observateur d'ordre minimal . . . . .	375
8.2.1	Observateur d'ordre minimal (de Luenberger) . . . . .	375
8.2.2	Procédure de Luenberger . . . . .	378
8.3	Synthèse d'un observateur d'ordre plein . . . . .	383
8.3.1	Observateur d'ordre plein . . . . .	383
8.3.2	Procédure de synthèse . . . . .	386
8.3.3	Observateur de Kálmán = observateur <i>identité</i> de Luenberger . . . . .	389
8.4	Commande par retour d'état observé . . . . .	391

8.4.1	Avec un observateur d'ordre minimal . . . . .	391
8.4.2	Avec observateur d'ordre plein . . . . .	395
8.5	Commande par retour d'état observé avec intégrateur . . . . .	398
8.6	Observateur d'ordre réduit . . . . .	400
8.6.1	Définition et synthèse . . . . .	400
8.6.2	Observateur réduit et retour d'état . . . . .	407
8.6.3	Observateur réduit, retour d'état et intégrateur . . . . .	411
8.7	Robustesse d'un observateur à une incertitude de modèle . . . . .	413
8.7.1	Stabilité de l'écart et convergence d'un observateur . . . . .	413
8.7.1.1	Observateur de Luenberger . . . . .	414
8.7.1.2	Observateur identité d'ordre plein . . . . .	414
8.7.1.3	Observateur d'ordre réduit . . . . .	415
8.7.1.4	Conclusion sur la convergence . . . . .	415
8.7.2	Principe de séparation et incertitude . . . . .	416
8.8	Observateurs à entrées inconnues . . . . .	418
8.8.1	Entrée inconnue sur la dynamique . . . . .	418
8.8.2	Dualité avec la commande à effet intégral . . . . .	419
8.8.3	Entrées inconnues sur la dynamique et la sortie . . . . .	419
8.8.4	Intérêt de ces observateurs . . . . .	420
8.9	Observateur d'ordre plein et retour dynamique de sortie . . . . .	421
8.10	Exercices . . . . .	427
8.10.1	Euh... ça tangué toujours un peu... . . . . .	427
8.10.2	Asservissement de position d'une bille sur un rail . . . . .	429
8.10.3	Commande sans capteur d'une machine synchrone . . . . .	429
8.11	Correction des exercices . . . . .	434
8.11.1	Euh... ça tangué toujours un peu... . . . . .	434
8.11.2	Asservissement de position d'une bille sur un rail . . . . .	441
8.11.3	Commande sans capteur d'une machine synchrone . . . . .	443
8.12	Notes et références . . . . .	457
<b>9</b>	<b>Introduction à la représentation d'état discrète</b>	<b>463</b>
9.1	Rappels sur les signaux . . . . .	465
9.1.1	Signaux continus, discrets, quantifiés, non quantifiés . . . . .	465
9.1.2	Transformation de signaux . . . . .	468
9.1.2.1	Échantillonnage . . . . .	468
9.1.2.1.1	Échantillonnage impulsif . . . . .	468
9.1.2.1.2	Échantillonnage impulsif idéal . . . . .	472
9.1.2.1.3	Transformée de Laplace étoile . . . . .	474
9.1.2.2	Quantification . . . . .	475

	9.1.2.3	Blocage . . . . .	476
9.2		Systèmes discrets linéaires . . . . .	479
	9.2.1	Définition . . . . .	479
	9.2.2	Modèles externes . . . . .	480
		9.2.2.1 Premier modèle externe : l'équation récurrente . . . . .	480
		9.2.2.2 Transformation en $z$ . . . . .	481
		9.2.2.3 Second modèle externe : la fonction de transfert en $z$ . . . . .	484
	9.2.3	Modèle interne : la représentation d'état . . . . .	486
	9.2.4	Lien entre les modèles . . . . .	486
		9.2.4.1 D'une réalisation à l'autre . . . . .	486
		9.2.4.2 De l'équation d'état à la fonction de transfert en $z$ . . . . .	486
		9.2.4.3 De la fonction de transfert en $z$ à l'équation d'état . . . . .	487
9.3		Systèmes échantillonnés . . . . .	487
	9.3.1	Pourquoi étudier les modèles discrets ? (notion de système échantillonné) . . . . .	487
	9.3.2	Commande numérique . . . . .	489
	9.3.3	Échantillonnage et théorème de Shannon . . . . .	490
	9.3.4	Signaux continu/échantillonné/discretisé : un bilan . . . . .	493
	9.3.5	Obtention d'un modèle échantillonné . . . . .	498
		9.3.5.1 Fonction de transfert étoile . . . . .	498
		9.3.5.2 Calcul de $G(z)$ . . . . .	499
		9.3.5.3 Modèle d'état . . . . .	502
9.4		Réponse d'un système discret . . . . .	504
	9.4.1	Réponse du modèle d'état . . . . .	505
		9.4.1.1 Résolution de l'équation d'état . . . . .	505
		9.4.1.2 Les principaux types de réponse . . . . .	505
		9.4.1.2.1 Réponse impulsionnelle . . . . .	505
		9.4.1.2.2 Réponse indicielle . . . . .	506
		9.4.1.3 Calcul de $A^k$ . . . . .	506
		9.4.1.4 Réponse d'un système échantillonné . . . . .	508
	9.4.2	Analyse de la réponse : étude des modes . . . . .	508
9.5		Stabilité d'un système discret . . . . .	510
	9.5.1	Stabilité BIBO . . . . .	510
	9.5.2	Stabilité interne . . . . .	511
		9.5.2.1 Définition et recherche d'un état d'équilibre . . . . .	511
		9.5.2.2 Stabilité . . . . .	512
	9.5.3	Critère des racines . . . . .	512
		9.5.3.1 Résultat général . . . . .	512

	9.5.3.2	Stabilité interne et stabilité BIBO . . . . .	514
	9.5.3.3	Marge de stabilité . . . . .	514
	9.5.4	Critère de Jury . . . . .	515
	9.5.5	Méthode de Liapounov . . . . .	515
	9.5.6	Stabilité d'un système échantillonné . . . . .	517
	9.5.6.1	Échantillonnage d'une boucle ouverte . . . . .	518
	9.5.6.2	Bouclage d'un système échantillonné . . . . .	518
9.6		Commandabilité/observabilité . . . . .	519
	9.6.1	Définitions . . . . .	519
	9.6.1.1	Commandabilité . . . . .	519
	9.6.1.2	Observabilité . . . . .	520
	9.6.2	Critère de Kálmán . . . . .	520
	9.6.2.1	Commandabilité . . . . .	520
	9.6.2.2	Observabilité . . . . .	521
	9.6.2.3	Dualité des deux concepts . . . . .	521
	9.6.3	Critères s'appliquant aux formes de Jordan . . . . .	522
	9.6.4	Grammiens . . . . .	522
	9.6.4.1	Définition des grammiens . . . . .	522
	9.6.4.2	Interprétation des grammiens . . . . .	523
	9.6.4.3	Calcul des grammiens . . . . .	523
	9.6.5	Test PBH . . . . .	524
	9.6.6	Modèles et structures . . . . .	524
	9.6.7	Réalisation minimale . . . . .	525
	9.6.8	Décomposition de Kálmán . . . . .	525
9.7		Commande par retour d'état . . . . .	527
	9.7.1	Les différentes approches de la commande numérique . . . . .	527
	9.7.2	Retour d'état discret . . . . .	528
	9.7.3	Placement de pôles par retour d'état . . . . .	529
	9.7.3.1	Commandabilité et placement de pôles . . . . .	529
	9.7.3.2	Technique de placement de pôles . . . . .	529
	9.7.4	Stabilisabilité et détectabilité . . . . .	531
	9.7.5	Stabilisation . . . . .	532
	9.7.6	Stabilisabilité, détectabilité . . . . .	534
9.8		Commande par retour de sortie . . . . .	534
9.9		Exercices . . . . .	536
	9.9.1	Petit système de premier ordre . . . . .	536
	9.9.2	Le revenu national . . . . .	536
	9.9.3	Nouveau plongeon dans la cuve . . . . .	537
	9.9.4	Egalité et inégalité de Stein . . . . .	541

9.10	Correction des exercices . . . . .	543
9.10.1	Petit système de premier ordre . . . . .	543
9.10.2	Le revenu national . . . . .	545
9.10.3	Nouveau plongeon dans la cuve . . . . .	546
9.10.4	Egalité et inégalité de Stein . . . . .	553
9.11	Notes et références . . . . .	556
<b>10</b>	<b>Suspension magnétique</b>	<b>563</b>
10.1	Présentation du système . . . . .	565
10.2	Modélisation du procédé . . . . .	568
10.2.1	Obtention d'un premier modèle non linéaire . . . . .	568
10.2.2	Linéarisation du modèle . . . . .	570
10.2.3	Réduction du modèle linéaire . . . . .	572
10.3	Identification des paramètres . . . . .	574
10.3.1	Idée initiale : utilisation des formes canoniques de deuxième ordre . . . . .	575
10.3.2	Stabilisation du modèle . . . . .	576
10.3.3	Identification de la boucle fermée . . . . .	580
10.3.4	Identification de la boucle ouverte . . . . .	581
10.4	Asservissement en position . . . . .	582
10.5	À propos du train à suspension magnétique . . . . .	587
10.6	Notes et références . . . . .	591
<b>11</b>	<b>Commande optimale</b>	<b>593</b>
11.1	Commande LQ des systèmes à temps continu . . . . .	594
11.1.1	Position du problème . . . . .	594
11.1.2	Interprétation du critère . . . . .	595
11.1.3	Établissement du résultat . . . . .	596
11.2	Commande LQ des systèmes discrets . . . . .	600
11.2.1	Position du problème . . . . .	600
11.2.2	Interprétation du critère . . . . .	601
11.2.3	Établissement du résultat . . . . .	602
11.3	Exercices . . . . .	606
11.3.1	Commande LQ du tangage . . . . .	606
11.3.2	Commande LQ du pendule inverse . . . . .	607
11.4	Correction des exercices . . . . .	611
11.4.1	Commande LQ du tangage . . . . .	611
11.4.2	Commande LQ du pendule inverse . . . . .	614
11.5	Notes et références . . . . .	620

<b>12 Conclusion</b>	<b>625</b>
12.1 Résumé du cours . . . . .	625
12.2 Perspectives . . . . .	626
12.3 Notes et références . . . . .	629
<b>Annexes</b>	<b>633</b>
<b>A Rappels de mathématiques</b>	<b>635</b>
A.1 À propos des matrices . . . . .	636
A.1.1 Vecteurs . . . . .	636
A.1.2 Vectorisation d'une matrice . . . . .	637
A.1.3 Transposition-conjugaison . . . . .	637
A.1.4 Matrices carrées . . . . .	638
A.1.5 Opérations sur les matrices . . . . .	639
A.1.5.1 Addition de matrices . . . . .	639
A.1.5.2 Multiplication de matrices . . . . .	640
A.1.5.3 Exponentielle de matrice . . . . .	642
A.1.5.4 Produit de Kronecker . . . . .	642
A.1.6 Normes de matrices . . . . .	645
A.1.6.1 Définition et propriétés des normes . . . . .	645
A.1.6.2 Norme euclidienne d'un vecteur . . . . .	645
A.1.6.3 Norme 2 d'une matrice . . . . .	646
A.1.7 Déterminant d'une matrice carrée . . . . .	646
A.1.7.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 . . . . .	647
A.1.7.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 ou plus . . . . .	647
A.1.7.3 Quelques propriétés du déterminant . . . . .	648
A.1.8 Mineurs d'une matrice . . . . .	648
A.1.9 Cofacteurs et matrice adjointe . . . . .	650
A.1.10 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée . . . . .	651
A.1.11 Rang d'une matrice . . . . .	651
A.1.12 Matrices inverses . . . . .	652
A.1.12.1 Définition et calcul . . . . .	652
A.1.12.2 Propriétés des inverses . . . . .	654
A.1.12.3 Matrice unitaire . . . . .	654
A.1.12.4 Pseudo-inverse . . . . .	654
A.1.13 Complément orthogonal . . . . .	658
A.1.14 Valeurs propres d'une matrice . . . . .	659

A.1.14.1	Structure propre d'une matrice . . . . .	659
A.1.14.2	Propriétés des valeurs propres . . . . .	663
A.1.14.3	Propriétés des vecteurs propres . . . . .	663
A.1.15	Trace d'une matrice . . . . .	664
A.1.16	Valeurs singulières d'une matrice . . . . .	665
A.1.16.1	Décomposition en valeurs singulières . . . . .	665
A.1.16.2	Valeurs singulières et valeurs propres . . . . .	666
A.1.17	Rang, déterminant, valeurs propres et valeurs singulières d'une matrice carrée . . . . .	666
A.2	À propos de la définition positive . . . . .	667
A.2.1	Fonction définie positive . . . . .	667
A.2.2	Matrices hermitiennes définies en signe . . . . .	668
A.3	Système d'équations linéaires . . . . .	670
A.4	Notes et références . . . . .	672
<b>B</b>	<b>Réponse transitoire</b>	<b>675</b>
B.1	Influence du spectre de la matrice d'état . . . . .	676
B.2	Influence des vecteurs propres de $A$ . . . . .	678
B.2.1	Couplage modes/sorties . . . . .	678
B.2.2	Couplage modes/commandes en boucle fermée . . . . .	679
B.2.3	Couplage modes/consignes en boucle fermée . . . . .	680
B.2.4	En résumé sur les vecteurs propres . . . . .	681
B.3	Influence des zéros . . . . .	681
B.3.1	Zéros d'un modèle d'état . . . . .	681
B.3.2	Contribution des zéros . . . . .	682
B.4	Le cas discret . . . . .	683
B.5	Notes et références . . . . .	684
<b>C</b>	<b>Formule d'Ackermann</b>	<b>687</b>
C.1	Rappel du problème . . . . .	687
C.2	Résolution selon Ackermann . . . . .	688
C.3	Notes et références . . . . .	691
<b>D</b>	<b>Sur les zéros</b>	<b>693</b>
D.1	Retour d'état et zéros du système . . . . .	694
D.2	Réductibilité de $G_f(p)$ . . . . .	697
D.3	Notes et références . . . . .	700

<b>E</b>	<b>À propos de <math>\mathcal{L}</math></b>	<b>703</b>
E.1	Rappel des définitions . . . . .	703
E.2	Propriétés de $\mathcal{L}$ . . . . .	704
E.3	Tableau de transformées . . . . .	706
E.4	Notes et référence . . . . .	708
<b>F</b>	<b>Lyapunov en linéaire</b>	<b>709</b>
F.1	Inégalité de Liapounov dans le cas continu . . . . .	710
F.2	Inégalité de Liapounov dans le cas discret . . . . .	711
F.3	Le cas échantillonné . . . . .	712
F.4	De l'inégalité à l'équation de Liapounov . . . . .	713
F.5	Notes et références . . . . .	719
<b>G</b>	<b>Grammiens</b>	<b>723</b>
G.1	Signification des grammiens . . . . .	723
G.2	Grammien et commandabilité en continu . . . . .	726
G.3	Grammien et critère de Kálmán en continu . . . . .	729
G.4	Invariance des valeurs propres de $W_c W_o$ . . . . .	731
G.5	Notes et références . . . . .	733
<b>H</b>	<b>MATLAB<sup>©</sup></b>	<b>735</b>
H.1	Fonctions mathématiques de base . . . . .	736
H.2	Fonctions liées au modèle d'état . . . . .	748
H.3	Fonctions liées aux modèles discrets . . . . .	764
H.4	Notes et références . . . . .	770
<b>I</b>	<b>Biographies</b>	<b>771</b>
I.1	Alexandre Liapounov . . . . .	772
I.1.1	Sa vie . . . . .	772
I.1.2	L'influence de son œuvre . . . . .	774
I.2	Rudolf Kálmán . . . . .	777
I.3	Notes et références . . . . .	782
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>787</b>
	<b>Index</b>	<b>789</b>



# Chapitre 1

## *Introduction, notions de base*

L'Automatique est une discipline scientifique qui vise à conférer à un dispositif donné, appelé système, des propriétés souhaitées et ce, sans nécessité d'une intervention humaine. Une telle discipline requiert d'attribuer un modèle au comportement du dit système (phase de modélisation) et de l'utiliser afin, d'une part, de mieux comprendre ce comportement (phase d'analyse) et d'autre part, d'agir sur le système dans le but d'améliorer ses propriétés (phase de commande).

Sans revenir trop longuement dans cette introduction sur des concepts étudiés lors des cours relatifs à l'approche dite fréquentielle, il convient de rappeler quelques notions de base.

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Notion de système . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>Notion de modèle . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>1.3</b>	<b>Notion de boucle . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.4</b>	<b>Grandes lignes du cours . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>1.5</b>	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>10</b>
1.5.1	La voiture : un système bouclé . . . . .	10
1.5.2	De l'art de prendre sa douche . . . . .	10
1.5.3	Rétroviseur à réglage de position électronique . . . . .	10
1.5.4	Nécessité d'une régulation étudiée . . . . .	11

<b>1.6</b>	<b>Correction des exercices</b>	<b>13</b>
1.6.1	La voiture : un système bouclé	13
1.6.2	De l'art de prendre sa douche	14
1.6.3	Rétroviseur à réglage de position électronique	16
1.6.4	Nécessité d'une régulation étudiée	17
<b>1.7</b>	<b>Notes et références</b>	<b>20</b>

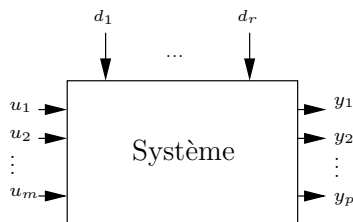
## 1.1. Notion de système

Un système est une combinaison de composants interconnectés pour atteindre un objectif, rendre un service à un ou plusieurs opérateurs humains. Le « composant » est un organe fonctionnel qui ne se limite pas à un objet physique mais peut correspondre à un objet plus abstrait de telle sorte qu'un système peut être économique, financier, démographique, même si, dans de document, seront plutôt rencontrés des systèmes physiques, c'est-à-dire mécaniques, électriques, électroniques, hydrauliques, pneumatiques, chimiques, thermiques, mécatroniques voire biologiques.

Parmi les grandeurs, éventuellement physiques, mises en jeu dans le fonctionnement d'un système, on peut distinguer celles qui, générées par l'environnement extérieur au système, agissent sur ce dernier. Ce sont les entrées parmi lesquelles figurent celles dont l'homme a la maîtrise (les *entrées de commande* ou simplement *entrées* ou *commandes*) et celles qui échappent à son contrôle (les *perturbations*). On distingue aussi les grandeurs par lesquelles le système agit sur l'environnement extérieur, à savoir les *sorties*. On note souvent par les lettres  $u$ ,  $d$  et  $y$ , respectivement les commandes, les perturbations et les sorties, de sorte qu'un système peut-être représenté par le schéma de la figure 1.1.

Dans le cadre de ce cours, seront surtout étudiés les systèmes *monovariationnelles* pour lesquels  $m = p = 1$ , c'est-à-dire ne comportant qu'une seule entrée et une seule sortie. On parle aussi de systèmes *mono-entrée/mono-sortie*, un vocable moins usité, et pourtant moins ambigu.

Il est rappelé que l'automaticien est souvent amené à réintroduire l'information présente au niveau de la sortie sur l'entrée afin de modifier les performances du système. Ce dernier est alors dit bouclé. La notion de boucle, *a priori* déjà

FIGURE 1.1 – Système comportant  $m$  entrées,  $p$  sorties et  $r$  perturbations

connue des étudiants ou des lecteurs de cet ouvrage, est néanmoins détaillée au paragraphe 1.3. Une partie de ce cours consacrée à la commande y reviendra. Il va de soi que les performances attendues sont les mêmes que celles envisagées lors de l'étude de l'approche fréquentielle, à savoir la stabilité, la forme des régimes transitoires, la précision et le rejet de perturbations.

## 1.2. Notion de modèle

Comme le sous-entend le préambule de cette introduction, l'analyse d'un système et *a fortiori* sa commande font appel à un modèle du comportement du système. De cette description mathématique du comportement peuvent naître des outils d'analyse et de commande qui sont utilisés par la suite. On distingue plusieurs automatiques selon la nature des signaux et des modèles considérés.

◇ Ainsi certains signaux dits à *événements continus* peuvent prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné alors que d'autres signaux dits à *événements discrets* sont susceptibles de prendre uniquement certaines valeurs bien déterminées. Sur la base de cette différence, on distingue l'automatique des systèmes à *événements continus* de l'automatique des systèmes à événements discrets. Seul le cas des événements continus sera envisagé dans ce cours.

◇ Une autre distinction tout aussi fondamentale se fait sur le temps. En effet, les signaux peuvent être définis à tout instant du temps (on parle de *signaux à temps continu* ou de *signaux continus*) ou simplement connus à des instants donnés (on parle de signaux *discrets*, *discrétisés*, ou *échantillonnés*... avec des nuances entre ces termes). Dans le second cas, les signaux de sortie sont ainsi

mesurés, et donc connus, uniquement à certains instants, et la séquence (suite) des échantillons est souvent obtenue sous forme numérique en sortie d'un convertisseur analogique numérique. Elle est transmise à un ordinateur qui en déduit une séquence (suite) de signaux de commande. Celle-ci est transformée par un convertisseur numérique analogique qui restitue un signal à temps continu sur l'entrée du système. Pour le ordinateur, l'ensemble constitué du système et des convertisseurs est vu comme un *système à temps discret* (ou, de manière plus générale, « *système discret* »). Dans ce cours, sera essentiellement considérée l'automatique des *systèmes à temps continu* (ou simplement des « *systèmes continus* »). Seul les chapitres 9,11 et quelques autres paragraphes traiteront de l'automatique des systèmes discrets.

◇ Il existe d'autres distinctions qui reposent sur le modèle mathématique utilisé pour décrire le comportement du système. Ce modèle est obtenu soit par *identification* (on fait correspondre un modèle de structure donnée au comportement entrées/sorties du système), soit, et ce sera le cas ici, par une utilisation judicieuse, lorsque c'est possible, des équations correspondant aux lois de la physique régissant le comportement du système. La plupart de ces équations sont différentielles et non linéaires. Cependant, il est souvent recommandé de travailler dans une gamme de valeurs autour d'un point de fonctionnement de telle sorte que les équations sont raisonnablement remplaçables par des équations différentielles dites linéaires à coefficients constants. Cette approximation permet donc de passer d'un modèle *non linéaire* à un modèle *linéaire*. Bien que moins fidèle à la réalité, ce dernier facilite l'analyse et la commande du système, notamment grâce à un principe fondamental, celui de *superposition*, résumé sur la figure 1.2.

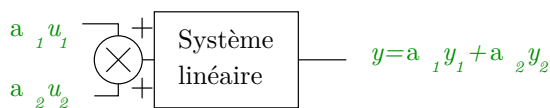


FIGURE 1.2 – Principe de superposition

Si l'entrée  $u_1(t)$  entraîne la sortie  $y_1(t)$  et si l'entrée  $u_2(t)$  entraîne la sortie  $y_2(t)$  alors une entrée  $a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)$ , où  $a_1$  et  $a_2$  sont des réels quelconques mais constants, entraîne une sortie  $y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$ . De façon générale, le principe de superposition appliqué à un système linéaire associé à l'opérateur mathématique  $L$  (c.-à-d. tel que  $y(t) = L(u(t))$ ) se résume ainsi :

$$\begin{aligned} y_i(t) &= L(u_i(t)) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \\ \Rightarrow L \left( \sum_{i=1}^N (a_i u_i(t)) \right) &= \sum_{i=1}^N (a_i y_i(t)), \quad \forall \{a_1, \dots, a_N\} \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{1.1}$$

En réalité, l'équation (1.1) ne fournit pas une définition tout à fait rigoureuse d'un système linéaire. Il faudrait par exemple montrer que la propriété reste vraie lorsque  $N$  tend vers l'infini, c.-à-d. montrer que l'on peut vérifier

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L \left( \sum_{i=1}^N (a_i u_i(t)) \right) = L \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (a_i u_i(t)) \right).$$

Or cette inversion dans l'ordre d'application des opérateurs  $\lim$  et  $L$  ne peut se faire que sous certaines conditions dépendant des éventuelles discontinuités de  $L$ . Grossièrement, c'est l'« ampleur » de ces discontinuités qui permet de savoir si le principe de superposition s'applique pour une combinaison d'un nombre infini d'entrées. Or, quantifier ces discontinuités amène rapidement à emprunter divers méandres des branches des mathématiques telles que les notions de normes, d'espaces métriques, voire de topologie. Il semble inutile de consacrer plus de temps à l'élaboration d'une définition très rigoureuse alors que les systèmes qui seront étudiés dans ce document vérifieront tous l'équation (1.1). Cette dernière sert donc de définition, certes approximative, mais réaliste, des systèmes linéaires. Il est à noter que Thomas Kailath, dans son ouvrage *Linear Systems*, relève fort bien ces subtilités.

Ce cours est restreint à l'étude des systèmes linéaires.

**Remarque 1.1** Pour certains auteurs, ce principe de superposition ne suffit pas à définir un système linéaire. Il faut lui ajouter le principe d'homogénéité qui stipule que si un système délivre une sortie  $\hat{y}(t)$  pour une entrée  $\hat{u}(t)$ , alors l'entrée  $\tilde{u}(t) = \alpha\hat{u}(t)$  engendre une sortie  $\tilde{y}(t) = \alpha\hat{y}(t)$ . Il semble pourtant que cette propriété soit vérifiée dès lors que le principe de superposition est respectée. En effet, ce n'est que l'application de l'équation (1.1) pour  $N = 1$ . Ainsi, par exemple, le système d'entrée  $u(t)$ , de sortie  $y(t)$  et décrit par

$$y(t) = u(t) + 1$$

ne vérifie pas le principe d'homogénéité puisque  $\alpha y(t) = \alpha u(t) + \alpha \neq \alpha u(t) + 1$  (sauf pour  $\alpha = 1$ ). Il n'est donc pas linéaire. En fait la propriété d'homogénéité est souvent évoquée pour montrer que le système a un comportement « linéaire » et non « affine ». Elle reste cependant une conséquence du principe de superposition. On peut toutefois noter qu'un système « affine » peut être étudié autour d'un point de fonctionnement ce qui le rend linéaire.

◇ Enfin, comme il a déjà été mentionné, une dernière distinction est essentielle pour ce cours. Les systèmes sont soit *monovariabiles* (une seule entrée, une seule sortie) soit *multivariabiles* (plusieurs entrées, plusieurs sorties). Les systèmes monovariabiles seront étudiés mais l'auteur s'autorisera quelques escapades dans le monde des systèmes multivariabiles.

En résumé, ce cours concerne les systèmes **linéaires monovariabiles** (continus et, parfois, **discrets**), c'est-à-dire ceux qui peuvent être décrits par une fonction de transfert.

### 1.3. Notion de boucle

Le lecteur s'est normalement déjà familiarisé avec la notion de *boucle* ou *bouclage*. Toutefois, une légère piqûre de rappel est ici administrée (ce sera rapide et, l'auteur l'espère, sans douleur). Il s'agit donc d'une (de la ?) notion fondamentale en Automatique, que les électroniciens (qui sont les premiers à l'avoir clairement formalisée) appellent *contre-réaction*. Le principe est d'acquérir une information présente sur les sorties et de l'utiliser judicieusement pour modifier les entrées. Le but de cette *rétroaction* est d'obtenir un comportement souhaité du système, c'est-à-dire, des signaux de sortie satisfaisants. L'utilisation de la boucle résulte du fait que les automaticiens ont constaté que la modification

convenable des sorties par une action sur les entrées, sans tenir compte des sorties, était insuffisante.

Sans entrer à ce stade dans un grand délire de formalisme qui, bien souvent, nuit gravement à la compréhension de cette notion très intuitive, il est ici préféré un petit exemple qui tiendra lieu de définition (le formalisme et les équations viendront dans les autres chapitres). Soit la figure 1.3 montrant un automatique désireux d'attraper son breuvage préféré (les automaticiens sont des gens étranges, il faut le savoir).

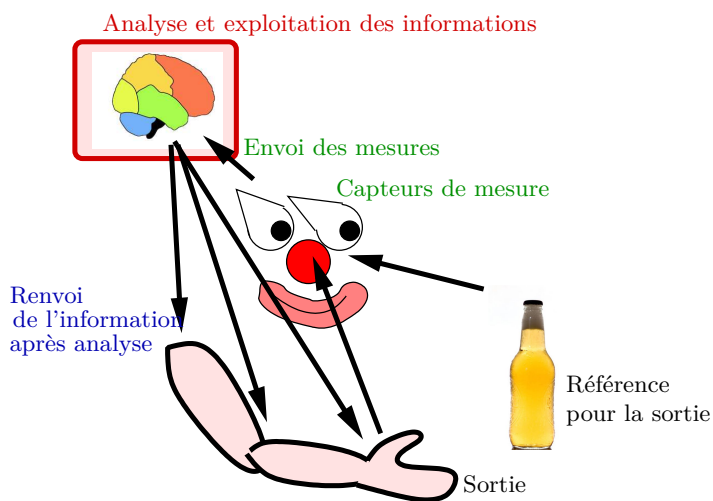


FIGURE 1.3 – Un automaticien expérimentant la notion de boucle

Le personnage cherche à faire coïncider la position de sa main (sortie) avec celle de la bouteille (référence, objectif à atteindre). Pour ce faire, il utilise ses yeux (*capteurs de mesure*) qui lui permettent d'acquérir les deux informations, en particulier l'information sur la sortie. Cette information est renvoyée au cerveau (c'est la boucle ou contre-réaction, *feedback* en anglais). Le cerveau analyse et exploite les données pour renvoyer à son tour (c'est toujours la boucle) des informations sur les muscles (*actionneurs*) qui permettent d'assurer certains angles d'articulations (épaule, coude, poignet, doigts) et faire en sorte qu'enfin la sortie atteigne son objectif. Les signaux nerveux générés par le cerveau correspondent aux commandes.

Dans un tel cas de figure, la « magie de la contre-réaction » opère de façon naturelle et intuitive et l'on parle de *boucle manuelle* en ce sens que c'est l'homme lui-même qui assure le bouclage. Le cerveau joue le rôle de *correcteur* c'est-à-dire qu'il assure toute l'intelligence de cette boucle. Dans le cas d'un robot, le cerveau doit être remplacé par un *calculateur* et l'on parle alors de *boucle automatique*. L'art de l'automaticien est de déterminer judicieusement le modèle qui doit régir la réaction du calculateur. Enfin, que la boucle soit manuelle ou automatique, le système fonctionne, dit-on, *en boucle fermée*. Par opposition, on parle étrangement de *boucle ouverte* lorsqu'il y a absence de boucle. Cela fait référence à la notion de circuit ouvert en électronique. Dans le cas présent, ceci consisterait à bander les yeux du personnage pour tester sa capacité à retrouver la bouteille. Le lecteur jugera sur cet exemple du bien fondé de la boucle (qu'il imagine que la bouteille se brise et la dramaturgie opérera!).

La boucle automatique suit la plupart du temps un modèle mathématique plus ou moins compliqué qui est appelé *loi de commande*. Elle peut permettre d'assurer deux activités essentielles en Automatique :

- **l'asservissement** qui consiste à faire en sorte que les sorties se comportent comme des références données (tout du moins autant que faire ce peut), comme illustré par l'exemple ;
- **la régulation** qui consiste à tenter de réduire l'effet sur les sorties d'éventuelles perturbations (exemples : état d'ébriété du personnage cherchant sa bouteille, violent coup de vent).

Dans les deux cas, certaines performances sont souvent requises telles que :

- **la stabilité** qui est, grossièrement, la convergence des sorties : le bras de l'automaticien ne doit pas partir brusquement vers l'arrière sans prévenir (maladie neurologique) ou l'automaticien ne doit pas se mettre à tourner sur lui-même de façon continue et sans interruption, éventuellement de plus en plus rapidement (exception faite des automaticiens derviches tourneurs) ;
- **le temps de réponse** : il ne faut pas mourir de soif avant d'attraper la bouteille mais nulle raison pour autant de se précipiter au risque de casser la bouteille ou de se froisser un muscle ;



- **l'absence d'oscillations des sorties** : en cas d'oscillation, la main ferait par exemple plusieurs passages à proximité de la bouteille avant d'atteindre une position permettant la préhension ;
- **la précision** : ce serait dommage de refermer les doigts à dix centimètres de la bouteille (note : cela peut être dû à un défaut du capteur oculaire qui recevrait deux informations au lieu d'une, un cas d'école bien connu).

Ces propriétés seront mieux explicitées au cours des divers chapitres.

## 1.4. Grandes lignes du cours

Compte tenu des connaissances préalables des étudiants, ce cours est organisé comme suit. Après un rappel sur la fonction de transfert, son origine, son intérêt, un nouveau modèle alternatif est présenté : la représentation d'état linéaire. Ses propriétés sont explicitées, en particulier le lien existant avec la fonction de transfert. Une fois ce modèle introduit, on s'intéresse à la manière de déterminer la réponse des systèmes linéaires monovariables. Ensuite, il est montré comment analyser la stabilité d'un tel modèle d'état. Bien moins familières seront les notions de commandabilité et d'observabilité d'une représentation d'état. La commande de tels modèles est abordée selon plusieurs méthodes (retour d'état, retour de sortie) avant de consacrer un chapitre au modèle d'état discret, puis un autre chapitre à une étude de cas. Un ultime chapitre est dédié à une très brève introduction à la commande optimale avant de conclure sur les perspectives d'étude en automatique. De nombreuses annexes peuvent permettre de se remémorer certains concepts utiles ou d'approfondir certaines notions présentées.

## 1.5. Exercices

*Ce chapitre propose juste quelques exemples conceptuels de bouclage. Il n'y pas d'exercice au sens académique du terme.*

### 1.5.1. La voiture : un système bouclé

Un petit exercice est proposé pour illustrer la notion de boucle. Le système considéré est une voiture dans laquelle se trouve un conducteur (cérébré, c'est important!) évoluant dans un environnement (route, météo, etc.). Le lecteur est censé être familier de la notion de boucle, d'où la simple question :

Question :

- Répertorier sur ce système, quelques exemples de boucles.

### 1.5.2. De l'art de prendre sa douche

Trois types de douche sont considérées : la douche collective, la douche classique avec un banal (mais efficace) mitigeur et la douche avec mitigeur thermostatique. La sortie à contrôler est la température de l'eau de la douche.

Question :

- Expliquer à l'aide de schémas en quoi ces trois types de douche correspondent à trois types de boucle : ouverte, manuelle et automatique.

### 1.5.3. Rétroviseur à réglage de position électronique

Deux personnes utilisent le même véhicule. L'ordinateur de bord de ce dernier propose à chacun de mémoriser une position pour le rétroviseur. Cette position est caractérisée par deux angles et chacun de ces deux angles doit être à la bonne valeur lorsque le conducteur demande sa position préférée. La rotation du rétroviseur est assurée grâce à deux

petits moteurs (un pour chaque angle). Le principe de réglage d'un angle en fonction de la position souhaitée est donné par la figure 1.4.

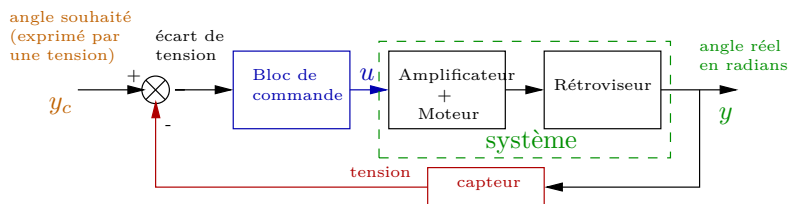


FIGURE 1.4 – Boucle de réglage d'un angle de rétroviseur

Question :

- Commenter cette boucle automatique.

#### 1.5.4. Nécessité d'une régulation étudiée

Le but de cet exercice est de montrer qu'une régulation simple, un bouclage simple, ne sont pas toujours suffisants pour commander un système. On souhaite réguler, ou plutôt asservir, la vitesse d'un ventilateur destiné à refroidir un système électronique. Le procédé est constitué tout simplement d'un petit moteur excité par une tension  $u$  et entraînant la rotation du ventilateur comme le montre la figure 1.5. La vitesse angulaire  $v$  du ventilateur est souhaitée égale à une consigne donnée  $v_c$ . Pour ce faire, une commande correspondant au schéma de la figure 1.6 est adoptée.

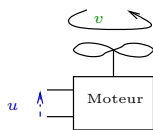


FIGURE 1.5 – Ventilateur

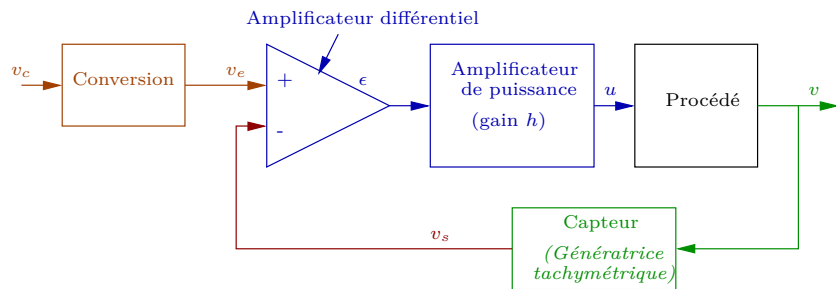


FIGURE 1.6 – Tentative de régulation de la vitesse du ventilateur

Question :

- Peut-on obtenir  $v = v_c$ , c'est-à-dire, au niveau des tensions,  $v_e = v_s$  ?

## 1.6. Correction des exercices

### 1.6.1. La voiture : un système bouclé

Pour mieux se rendre compte de l'intérêt de la boucle, il est en effet possible de prendre l'exemple d'une automobile (voir figure 1.7) qui, lors d'un trajet, fait apparaître des bouclages manuels (c'est le conducteur qui assure ces rétro-actions lui-même) ou automatiques (il est assisté par des dispositifs de sécurité ou de confort).

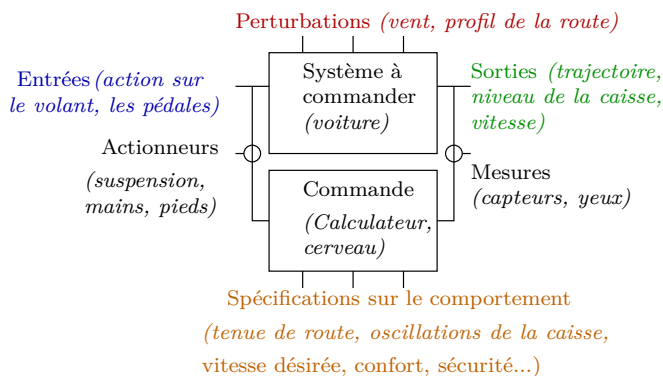


FIGURE 1.7 – Boucles possibles correspondant au fonctionnement d'une voiture

Lorsqu'un automobiliste est au volant, la voiture (avec son conducteur), en interaction avec son environnement, peut constituer un système avec de nombreuses boucles. Ainsi, lorsqu'un défaut de la route (nid-de-poule) ou un coup de vent entraîne un déplacement ponctuel latéral du véhicule (le système réagit à une perturbation), alors l'oeil de l'automobiliste (entre autres) lui permet de prendre conscience du déplacement latéral et il pourra agir en conséquence sur le volant pour rétablir la trajectoire. Il s'agit là d'une boucle manuelle. De même, si un trou génère une oscillation violente sur

l'altitude de la caisse, une suspension active peut réduire cet inconfort en agissant sur l'amortisseur. Ceci est une boucle automatique. Cette dernière suit la plupart du temps un modèle mathématique plus ou moins compliqué qui est appelé loi de commande. On dit aussi que le système fonctionne en boucle fermée.

Il existe bien d'autres exemples de boucles automatiques dans une voiture : la climatisation, l'ABS, le régulateur de vitesse (alors, stable ou pas?), certains dispositifs de réduction de consommation, etc. De plus en plus de ces systèmes apparaissent à bord des véhicules... sans compter la conduite automatique qui est aujourd'hui devenue une réalité et qui impose la résolution de quantité de problèmes de régulation et d'asservissement... voire de problèmes juridiques.

### 1.6.2. De l'art de prendre sa douche

Une douche collective est schématisée par la figure 1.8.

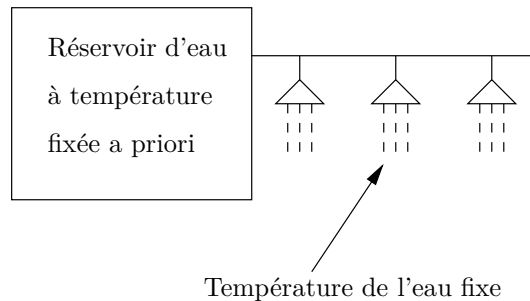


FIGURE 1.8 – Exemple de système en boucle ouverte

L'entrée du système est la température de l'eau du réservoir. L'eau s'écoule dans le système et sort des pommeaux à une température (c'est la sortie) qui n'est pas modifiable. Aucune information sur cette température de sortie n'est utilisée au niveau du réservoir. Il s'agit donc là d'un système en *boucle ouverte*, c'est-à-dire sans boucle.

Le fonctionnement d'une douche manuelle est lui représenté sur la figure 1.9 .

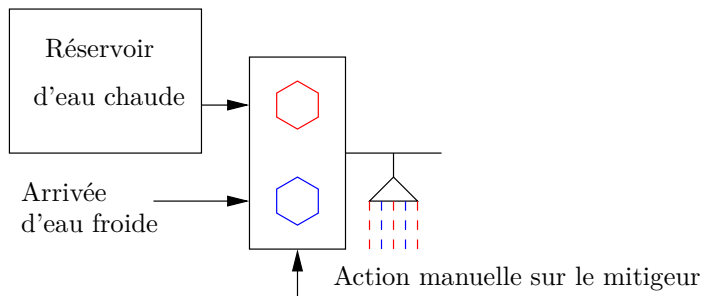


FIGURE 1.9 – Exemple de système en bouclage manuel

La personne prenant sa douche peut cette fois-ci jouer sur le mitigeur pour améliorer la température de l'eau. En fonction de sa sensation, elle actionne les robinets jusqu'au confort souhaité. Cette boucle est donc *manuelle* et *non automatique*. La réponse en température d'un tel système, c'est-à-dire l'évolution de la température de sortie au cours du temps, est généralement de la forme donnée par la figure 1.10.

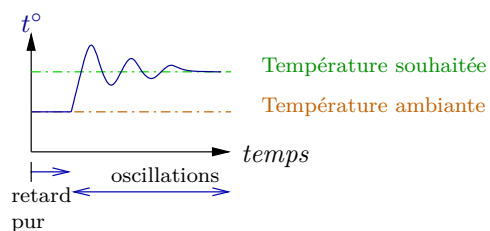


FIGURE 1.10 – Evolution de la température de l'eau au cours du temps

La température n'évolue pas dans un premier temps car les tuyaux sont remplis d'eau à température ambiante. On parle de *retard pur* du

système.

Puis, en raison des manœuvres successives de la personne sur les robinets, l'eau devient alternativement chaude et froide jusqu'à ce que la personne trouve un compromis satisfaisant. La durée des oscillations est d'autant plus longue que la personne réagit vivement et est maladroite.

**Remarque 1.2** *En Ecosse, la stratégie pour éliminer le retard pur et les oscillations consiste à fixer la température souhaitée à la valeur de la température ambiante, ce qui a aussi l'avantage de satisfaire des critères économiques.*

Pour plus de confort, le particulier peut aujourd'hui installer, au niveau de sa douche, un mitigeur thermostatique qui réalise un asservissement en température. Ce dispositif correspond à une boucle automatique qui permet à la fois de diminuer le temps de réglage (en évitant les oscillations) et de faire des économies d'eau (voir figure 1.11).

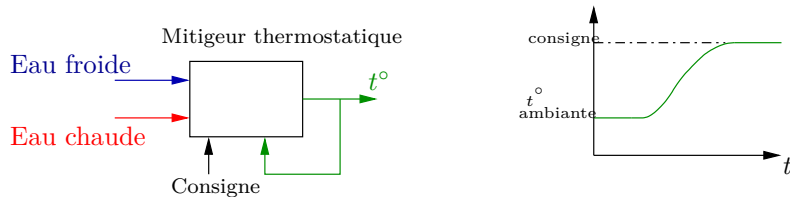


FIGURE 1.11 – Exemple de système avec boucle automatique

En pratique, ces mitigeurs thermostatiques ne sont pas aussi précis que ne le montre la figure 1.11 mais le principe est bien celui exposé. Ils peuvent engendrer, dit-on, de bonnes économies d'eau en limitant le temps de réglage, ce qui fait doucement sourire l'auteur, mais ne peuvent en aucun cas éliminer le retard pur inhérent à la longueur des canalisations.

### 1.6.3. Rétrovisseur à réglage de position électronique

Il faut noter que la sortie est ramenée sur l'entrée afin de modifier l'excitation du moteur en fonction de l'écart entre l'angle souhaité et celui obtenu. C'est donc bien une boucle. Pour calculer cet écart, il faut spécifier la valeur souhaitée par une tension et convertir l'angle effectif en tension, ce qui est le rôle du capteur. Lorsque l'angle effectif



est celui escompté, l'écart s'annule et le moteur assurant la rotation n'est plus commandé. Peuvent se cacher dans ces blocs des lois de commande assez complexes même si ce n'est pas forcément le cas ici. Tout ceci se fait sans intervention humaine (à l'exception du choix de la consigne) donc il s'agit d'une boucle automatique.

Il faut aussi rappeler que dans le cas d'un système bouclé, les entrées du système en boucle fermée sont appelées *consignes* ou *références* et généralement notées  $y_c(t)$  (ici, la tension correspondant à l'angle souhaité). Les entrées du système en boucle ouverte (c'est-à-dire le procédé composé ici de l'amplificateur, du moteur et du rétroviseur) sont appelées *commandes* et sont notées  $u(t)$  (ici, la tension d'induit du moteur).

On retrouve ce style de problème dans le cas de l'asservissement de l'inclinaison d'une antenne parabolique mais aussi dans bien d'autres applications.

#### 1.6.4. Nécessité d'une régulation étudiée

Si l'on suppose que  $v = v_c$ , alors, à la sortie de l'amplificateur différentiel, la tension est  $\epsilon = v_e - v_s = v_c - v = 0$ . De ce fait, à la sortie de l'amplificateur de puissance, aucun signal n'est délivré ( $u = h\epsilon = 0$ ) et le ventilateur ne tourne pas. Cette égalité n'est donc obtenue qu'à l'arrêt et l'on comprend qu'il est nécessaire d'envisager une boucle plus sophistiquée si l'on veut éviter ce paradoxe. C'est tout le but de l'Automatique.

De manière un peu plus explicite, la situation est résumée sur la figure 1.12.

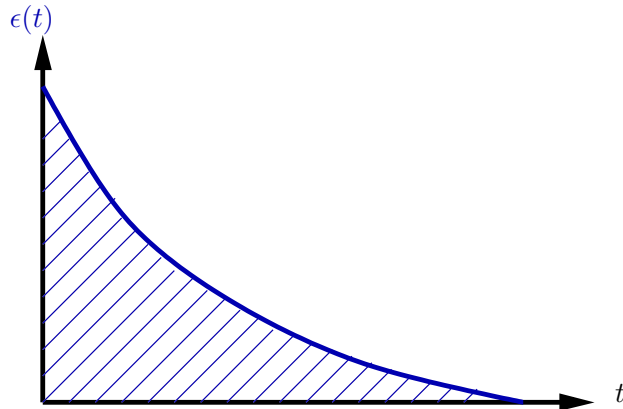


FIGURE 1.12 – Exemple de signal d'écart s'annulant

Il faudrait une commande  $u(t)$  qui, dès lors que  $\epsilon(t)$  s'est annulée (ou est proche de zéro puisque la convergence est souvent asymptotique),  $u(t)$  soit en rapport avec  $\epsilon(t)$  (sinon où serait la contre-réaction ?) mais ne soit pas nulle. Clairement, une simple règle de proportionnalité ne suffit pas, comme il vient d'être vu. Comme la dérivée du signal  $\epsilon(t)$  s'annule également, il n'est *a priori* pas plus utile de rendre  $u(t)$  proportionnelle à cette dérivée. En revanche, l'intégrale de  $\epsilon(t)$  de zéro jusqu'à  $t$ , correspondant à la surface hachurée de la figure 1.12, est intéressante. Cette dernière devient constante, mais pas nécessairement nulle, dès lors que  $\epsilon(t)$  s'annule. L'idée est peut-être d'insérer dans la commande  $u(t)$ , un terme proportionnel à cette intégrale.

Le lecteur, déjà très au fait de l'approche fréquentielle de la commande des systèmes, aura aisément reconnu un résultat familier. La précision dans un tel cas est en effet obtenue grâce à l'ajout d'un terme intégral dans la commande (attention, ce paragraphe ne propose qu'une réflexion, un élément de compréhension, mais sûrement pas une démonstration !). Bien que très classique aujourd'hui, ce problème a fait plancher des savants émérites pendant près de deux siècles, le système concerné étant celui parfois considéré (sans doute à tort) comme le premier système asservi un peu avancé, à savoir le régulateur à boules de J. Watt, servant à asservir la puissance d'une machine à vapeur. Pendant des décennies, les scientifiques cherchèrent à peaufiner

des mécanismes de régulation qui, de plus en plus sophistiqués sur le plan mécanique, apportaient une précision toujours meilleure mais jamais parfaite. Ce qu'ils ignoraient, c'est que toutes les lois de commande correspondantes étaient de la forme  $u(t) = h\epsilon(t)$  (régulateur proportionnel). Bien que le gain  $h$  fût de plus en plus élevé, il n'eut jamais l'effet d'un intégrateur. Il fallut attendre le formalisme des fonctions de transfert pour comprendre le sens de tout cela.

Dans le cas du rétroviseur (exercice précédent), le problème ne se pose pas puisque c'est la position de l'arbre du moteur électrique qui est asservi. Le passage de la vitesse à la position angulaire consiste en une intégrale. L'intégrateur est donc déjà présent dans le système et assure une précision sans qu'il soit nécessairement utile d'en ajouter un autre dans la loi de commande.

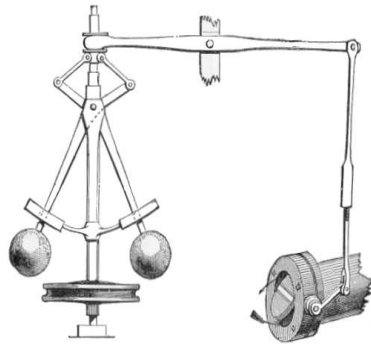


FIGURE 1.13 – Régulateur à boules de Watt

## 1.7. Notes et références

La notion de système n'est pas spécifique à l'automatique mais elle est empruntée à la physique. Celle de boucle, en revanche, est fondamentale. On ne peut dissocier l'automatique de la boucle tant la très grande majorité des applications y font appel. Les premières traces d'utilisation de systèmes bouclés remonteraient à 300 av. J. C. en Grèce et concerneraient des mécanismes de régulation de la clepsydre (horloge à eau) que Ctésibios d'Alexandrie<sup>1</sup> mit au point [1]. Les mécanismes de régulation n'étaient autres que des flotteurs comparables à ceux que l'on peut rencontrer dans une chasse d'eau même si cette application sera proposée bien plus tard par Joseph Bramah<sup>2</sup> et popularisée par la suite par Thomas Twyford<sup>3</sup>. Il eut été injuste de ne pas citer ces deux personnages. En effet, il convient de rendre hommage à Thomas Twyford pour service évident rendu à l'Humanité. Plus encore est-il juste de louer l'esprit génial de Joseph Bramah qui inventa également la tireuse à bière. Il y a fort à parier qu'elle fut à l'origine de quelques avancées en automatique. Le lecteur peut ainsi juger d'où part l'aventure de l'automatique.

Retour en Grèce antique : Ctésibios était considéré comme l'un des tous premiers mécaniciens grecs. Il fit école et son mécanisme de régulation fut ainsi utilisé vers 250 av. J. C. par un émule, Philon de Byzance<sup>4</sup>, pour la régulation du niveau d'huile dans une lampe. Un autre émule de Ctésibios, Héron d'Alexandrie<sup>5</sup>, au premier siècle ap. J. C., publia un ouvrage sur l'utilisation de ces régulateurs de niveau [1]. Faut-il y voir une première « école d'automatique » ? Sûrement pas. Ces ingénieurs grecs étaient bien des mécaniciens avant tout et l'on ne parlerait d'automatique que lorsque cette dernière aurait acquis son statut de discipline scientifique, c'est-à-dire lorsque le formalisme mathématique y aurait fait son apparition... donc bien plus tard... et il n'y a pas si longtemps du reste.

Les horloges à eau furent également étudiées et savamment utilisées dans le monde arabo-perse [2], notamment avec les trois frères Banou Moussa<sup>6</sup> et avec Badī` az-Zaman Abū al-` Iz Ibn Ismā`īl ibn al-Razāz al-Jazārī<sup>7</sup>.

En attendant, les systèmes de commande (automatiques) étaient d'astucieux montages, procédés, comprenant intrinsèquement une boucle « réglable ». Ce

---

1. ingénieur grec qui vécut autour de -270 av. J. C.

2. mécanicien et inventeur anglais particulièrement prolifique (1748-1814).

3. porcelainier anglais (1849-1921).

4. ingénieur grec.

5. ingénieur, mécanicien et mathématicien grec.

6. érudits iraniens du 9<sup>ème</sup> siècle.

7. artiste, astronome et ingénieur arabe (1136-1206).

fut le cas du système de régulation de température de Cornelis J. Drebbel<sup>8</sup>, repris rapidement par quelques autres savants de l'époque, puis de l'asservissement de position des pierres du moulin lorsque la vitesse de la roue augmente, proposé par Thomas Mead [2], ou encore de la machine à vapeur de Denis Papin<sup>9</sup> que ce dernier dota d'un régulateur de pression. En réalité, les réglages étaient plus que sommaires lorsqu'ils étaient même possibles. Les régulateurs subirent de nombreuses améliorations par quelques savants, et non des moindres, tels Christiaan Huygens<sup>10</sup> qui cherchait à réguler le mouvement des horloges mécaniques [3]. Toutefois, un premier pas vers le réglage de régulateur fut effectué grâce au dispositif emblématique de l'histoire de l'automatique, et qui conclut la série d'exercices de ce chapitre : le régulateur à boules de James Watt<sup>11</sup>, sans oublier son associé Matthew Boulton<sup>12</sup>. Ce régulateur était notamment utilisé pour asservir la vitesse des roues à aubes des bateaux entraînés par des machines à vapeur (voir §1.6.4, page 17, et surtout [1,2,4]).



FIGURE 1.14 – Hommage de la nation britannique à Boulton et Watt sur un billet de 50 livres Sterling.

8. Cornelis Jacobszoon Drebbel, physicien, mécanicien et alchimiste néerlandais (1572-1633).

9. physicien, mathématicien et inventeur français (1647-1712).

10. mathématicien, physicien et astronome néerlandais (1629-1695).

11. ingénieur écossais (1736-1819), qui a donné son nom au *Watt*, l'unité de puissance, donc à l'expression « Vas-y ! Mets les Watts ! ».

12. industriel britannique (1728-1809).

Le paragraphe 1.6.4 a évoqué le manque de solution efficace au problème du régulateur à boules de Watt, en l'absence d'effet intégral dans la commande. De manière générale, en attendant le pas décisif de la formalisation mathématique des modèles et de la boucle, les régulateurs firent de nouveau l'objet de nombreux perfectionnements pour diverses applications [5]. L'importance des outils de mesure pour la validité d'une boucle de rétro-action est bien sûr fondamentale et Elmer Sperry<sup>13</sup> fit une utilisation significative des gyroscopes pour la conception et la stabilisation des pilotes automatiques dans les domaines naval et aérien entre environ 1912 et 1935, aidé de son fils Lawrence Sperry (1892-1925) [6]. Il semble ce fut Nikolai F. Minorsky<sup>14</sup> qui, le premier, en 1922, comprit la véritable importance des différents effets aujourd'hui classiques allouables à la loi de commande (proportionnel, intégral et dérivé (PID)) [7].) Pour tout cela, un autre progrès fut auparavant nécessaire. Il survint avec l'apparition de modèles mathématiques. À cet égard, James C. Maxwell<sup>15</sup> introduisit les équations différentielles dans l'étude des régulateurs [8], une étape primordiale pour l'élaboration d'outils d'analyse de stabilité (le chapitre 5 reviendra sur ce point). L'introduction des outils symboliques (Laplace, Carson, Heaviside, etc. [9]) conduisit à transformer les équations différentielles en « fonctions de transfert » (voir chapitre 2) ce qui mena à l'« approche fréquentielle » qui fut particulièrement développée au sein des Laboratoires Bell avant et pendant la seconde guerre mondiale [10,11,12,13]. Aujourd'hui, on attribue parfois notamment à Harold S. Black<sup>16</sup>, la première formalisation rigoureuse de la boucle, plus exactement dans le cas présent, de la contre-réaction négative appliquée à l'utilisation en mode linéaire des amplificateurs opérationnels en électronique [14]. Il faut également bien comprendre que dans le même temps, les scientifiques soviétiques continuèrent de développer des approches alternatives en restant concentrés sur les équations différentielles. La notion de boucle y était également présente. L'objet du présent ouvrage, à savoir la représentation d'état, doit peut-être autant à ces contributions moins connues en occident et qui ne seront pas mentionnées ici.

Ce paragraphe prend donc une allure quelque peu historique. Si l'aspect purement « franchouillard » de l'histoire de l'Automatique intéresse le lecteur,

---

13. entrepreneur et inventeur états-unien (1860-1930).

14. Nikolai Fyodorovitch Minsorksy, ingénieur et mathématicien russe (1885-1970).

15. James Clerk Maxwell, physicien et mathématicien écossais (1831-1879), célèbre pour les équations éponymes décrivant de façon unifiée les phénomènes électromagnétiques.

16. Harold Stephen Black, ingénieur électricien états-unien (1898-1983) : voir biographie 2.3 page 42.

il peut consulter l'ouvrage très original de Patrice Remaud faisant suite à sa thèse [15], ou encore l'article [16]. Cet ouvrage évoque notamment le travail de Léon Farcot<sup>17</sup> sur les servomoteurs.

D'autres fins de chapitres reviendront sur cet aspect historique en abordant des évolutions, souvent plus récentes mais pas toujours, de l'Automatique. Ce ne sont que quelques notes inspirées de quelques lectures, mais en rien un travail d'historien, et surtout pas exhaustif.

Enfin, pour compléter les références sur ce chapitre, il faut souligner l'excellent premier chapitre de l'ouvrage didactique constamment réédité [17] (à juste titre). Les finasseries sur la difficulté de définir ce qu'est un système linéaire sont empruntées à [18]. Il faut également rendre hommage à l'excellentissime professeur Bernard Pradin pour avoir fourni quelques exemples ou idées d'exemples de ce chapitre [19].

1. **O. Mayr** : *The Origins of Feedback Control*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1970.  
*Un des premiers ouvrages d'ampleur sur l'histoire de l'Automatique.*
2. **C. C. Bissell** : A History of Automatic Control. *Springer Handbook of Automation*, Ed. S. Y. Nof, Springer, 2009, p. 56-69.  
*Article résumant avec brio l'histoire de l'automatique.*
3. **C. Huygens** : *Horlogium Oscillatorium (1673)*. Extrait des *œuvres complètes*, Nijhoff, Amsterdam, 17-18, 1932.  
*Où comment réguler le mouvement des horloges mécaniques.*
4. **F. L. Lewis** : *Applied Optimal Control and Estimation*. Prentice Hall, 1992.  
*(Voir le chapitre 1 : « Introduction to modern control theory ».)*
5. **R. Hooke** : Lamps, or Description of Some Mechanical Improvements of Lamps and Waterpones Together with Some Other Physical and Mechanical Discoveries. *Proc. Royal Society (Londres)*, 8, 1831.
6. **T. P. Hugues** : *Elmer Sperry : Inventor and Engineer*. Johns Hopkins University Press, 1971.  
*Une biographie d'Elmer Sperry.*

---

17. (Jean Joseph) Léon Farcot, ingénieur français très prolifique (1824-1908).

7. **M. Minorsky** : Directional Stability of automatically steered bodies  
*Trans. inst. Nav. Archit.*, 87, p. 123-159, 1922.  
*Une première étude du PID ?*
8. **J. C. Maxwell** : On Governors *Proc. of the Royal Society of London*, 16, 1868, également dans *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory*, coordonné par Richard Bellman et Robert Kalaba, Dover, New York, p. 270-283, 1964.  
*Première utilisation assumée des équations différentielles pour traiter de la modélisation (et de la stabilité) des premiers systèmes asservis.*
9. **F. Rotella and I. Zambetakis** : Du calcul opérationnel à l'opérateur de transfert *Actes de la Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA), Talence, France, 2006*  
*Article retraçant les diverses évolutions du calcul symbolique (ou opérationnel) et son influence en automatique dans la définition des opérateurs de transfert, avec un focus sur le travail de O. Heaviside.*
10. **H. S. Black** : Inventing the Negative Feedback Amplifier.  
*IEEE Spectrum*, Décembre 1977, p.55-60.
11. **H. W. Bode** : Network Analysis and Feedback Amplifiers. *Symposium on Networks and Feedback Systems* Van Nostrand, Princeton 1945.  
*La référence toujours citée sur le travail de H. W. Bode.*
12. **H. W. Bode** : Feedback - The Origin of an Idea. *Symposium on Networks and Feedback Systems*, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1960, également dans *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory*, coordonné par Richard Bellman et Robert Kalaba, Dover, New York, 1964, p. 106-123.
13. **M. D. Fagen** : A History of Engineering and Science on the Bell Laboratories. *Bell Telephone Laboratories*, 1978.  
*Une tentative de bilan du travail scientifique accompli aux Laboratoires Bell.*
14. **H. S. Black** : Stabilized Feed-Back Amplifiers. *Electrical Engineering*, 53, p. 114-120, 1934.  
*Sans doute l'article le plus important de Black, portant sur la conception des amplificateurs opérationnels en électronique, mais qui fait aussi un pas majeur dans la formalisation de la boucle.*
15. **P. Remaud** : *Histoire de l'automatique en France, 1850-1950*. Éditions Hermes, 2007.



Unique en son genre, cet ouvrage historique se concentre sur la contribution française chez les précurseurs de l'automatique. L'auteur insiste entre autres sur le travail de Léon Farcot relatif aux servomoteurs.

16. **P. Remaud et C. Bissell** : The Development of Automatic Control in France. *IEEE Control Systems Magazine*, 29(2), p. 108-114, 2009.  
*Un article résumant l'émergence de l'automatique en France, par notre historien national de l'automatique, accompagné d'un spécialiste international. Du bon travail!*
17. **R. C. Dorf et R. H. Bishop** : *Modern Control Systems* Neuvième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.  
*La réédition permanente de cet ouvrage en dit long sur sa popularité. Les nombreux exemples constituent une vraie mine d'exercices pour un enseignant.*
18. **T. Kailath** : *Linear Systems* Prentice Hall, 1979.  
*Un vrai ouvrage de référence, pas très facile à aborder par son style et sa forme mais redoutablement complet. Pratiquement une « bible ».*
19. **B. Pradin** : *Polycopié de cours d'Automatique : « Automatique : Notes de cours - Exercices »*. INSA de Toulouse, 3ème année spécialité AEI. 1992.  
*Là où l'essentiel est mieux expliqué que partout ailleurs!*



# Chapitre 2

## *Rappel sur la fonction de transfert*

Dans ce chapitre, on revient brièvement sur la notion *a priori* familière de fonction de transfert. D'où vient-elle ? Comment l'obtenir ? Pourquoi est-elle utilisée ?

L'auteur insiste sur le fait que ce n'est qu'un rappel nécessaire à la cohérence du document mais le lecteur doit déjà bénéficier de quelques acquis sur le sujet.

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Équations préliminaires</b> . . . . .	<b>28</b>
2.1.1	Linéarité, point de fonctionnement, caractéristique statique et linéarisation . . . . .	29
2.1.2	Modèle entrée/sortie : l'équation différentielle . . . . .	33
2.1.3	Transformation de Laplace : de l'équation différentielle à la fonction de transfert . . . . .	34
<b>2.2</b>	<b>Fonction de transfert</b> . . . . .	<b>36</b>
2.2.1	Comment obtenir la fonction de transfert ? . . . . .	36
2.2.2	Intérêt de la fonction de transfert . . . . .	38
2.2.3	Brève considération historique . . . . .	39
<b>2.3</b>	<b>Exercices</b> . . . . .	<b>45</b>
2.3.1	Petits exemples mécaniques . . . . .	45
2.3.2	Moteur à courant continu . . . . .	47

<b>2.4</b>	<b>Correction des exercices</b>	<b>50</b>
2.4.1	Petits exemples mécaniques	50
2.4.2	Moteur à courant continu	52
<b>2.5</b>	<b>Notes et références</b>	<b>56</b>

## 2.1. Équations préliminaires

Il faut d'abord noter que le système évoluant avec le temps, les grandeurs impliquées peuvent être assimilées à des signaux temporels, c'est-à-dire, mathématiquement, essentiellement des fonctions du temps. Lors de la phase de modélisation, on essaie généralement de décrire le comportement du système par un jeu d'équations, de relations mathématiques entre les signaux, qui paraît correspondre fidèlement à ce qu'est le système. Dans le cas d'un système physique, on s'appuie sur les lois de la physique (électricité, mécanique, etc...) pour déterminer plusieurs équations reliant les différentes grandeurs en jeu, en essayant de prendre en compte tous les phénomènes afin de décrire l'intégralité du système. Très souvent, ce dernier fait apparaître un comportement dynamique (et pas seulement statique) de sorte que les équations obtenues sont non seulement algébriques mais aussi différentielles.

Prenons comme exemple un circuit RLC comme celui de la figure 2.1

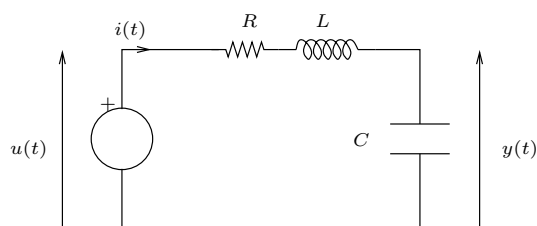


FIGURE 2.1 – Circuit RLC

Les équations issues des lois de l'électricité qui régissent le comportement du circuit RLC sont les suivantes :

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + y(t) \\ y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

### 2.1.1. Linéarité, point de fonctionnement, caractéristique statique et linéarisation

La première constatation souvent fâcheuse est que ces équations algèbro-différentielles ne sont pas linéaires en fonction des grandeurs impliquées ou de leurs dérivées successives. Or, les modèles non linéaires sont par essence difficiles à manipuler. Cela signifie en pratique qu'ils rendent ardues l'analyse du comportement du système et, plus encore, sa commande. Par conséquent, même si c'est une entorse au principe de description fidèle de la dynamique du système, on décide bien souvent de travailler dans des gammes de valeurs des grandeurs se situant autour de valeurs centrales constituant ce qu'il est convenu d'appeler un *point de fonctionnement*. Sous réserve de ne pas trop s'éloigner de ce point de fonctionnement, on peut approcher les équations non linéaires par des équations certes approximatives mais linéaires. On peut utiliser pour ce faire des développements limités ou de Taylor au premier ordre de certaines fonctions mathématiques en jeu. On parle alors du système non linéaire et de son « linéarisé tangent » qui est donc linéaire. On s'arrange également pour que les coefficients intervenant dans les équations soient indépendants du temps. On parle alors de modèle linéaire invariant dans le temps.

Concernant les équations (2.1), elles sont déjà linéaires à coefficients constants donc il est inutile de recourir à une approximation.

En revanche, la plupart du temps, comme il vient d'être dit, lorsque l'on écrit les équations algébriques ou différentielles correspondant aux lois physiques qui régissent le comportement du système, elles ne sont pas linéaires en les grandeurs qui nous intéressent et leur dérivées successives. Ainsi une grandeur physique  $z$  peut dépendre d'une autre grandeur physique  $x$  selon une loi  $z = f(x)$  où  $f(\cdot)$  n'est pas linéaire ni même affine en  $x$ . La technique habituelle consiste alors à considérer uniquement de petites variations autour d'une valeur de  $x$  et à chercher un modèle linéaire valable uniquement dans cette plage de variations. Le point de fonctionnement est ici noté  $(\bar{x}; \bar{z})$ .  $x$  doit donc être proche de  $\bar{x}$  et

$z$  proche de  $\bar{z}$ . Si c'est le cas, on désigne les variations respectives  $x$  et  $z$  autour du point de fonctionnement par

$$\delta x = x - \bar{x} \quad ; \quad \delta z = z - \bar{z}$$

et un développement de Taylor au premier ordre de  $f$  autour de  $\bar{x}$  permet d'écrire

$$\delta z \simeq k \delta x \quad \text{avec} \quad k = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}}$$

Ceci montre que  $\delta z$  suit approximativement une loi linéaire par rapport à  $\delta x$  et ce genre d'hypothèse permet d'obtenir un modèle linéaire autour d'un point de fonctionnement, modèle uniquement valable pour de petites variations autour de ce point. Les grandeurs physiques en jeu sont donc *a priori*  $\delta x$  et  $\delta y$ . Néanmoins, on a

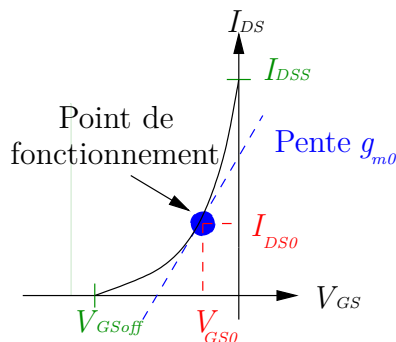
$$z \simeq \bar{z} - k\bar{x} + kx$$

et comme  $\bar{z} - k\bar{x}$  est constant,  $z$  suit une loi affine par rapport à  $x$  autour de  $\bar{x}$ . Ainsi, il est possible de raisonner soit en  $x$  et  $z$ , soit en  $\delta x$  et  $\delta z$  indifféremment dès l'instant où l'on ne s'éloigne pas du point de fonctionnement.

Un exemple connu en électronique se rencontre dans l'étude des transistors, par exemple le transistor à effet de champ (*Junction Field Effect Transistor* (*JFET*) : voir cours d'électronique analogique). L'intensité du courant Drain-Source  $I_{DS}$ , lorsque la tension Drain-Source  $V_{DS}$  est constante, s'exprime en fonction de la tension Grille-Source  $V_{GS}$  selon une loi parabolique :

$$I_{DS} = I_{DSS} \left( 1 - \frac{V_{GS}}{V_{GSoff}} \right)^2$$

où  $V_{GSoff}$ , la tension de blocage, et  $I_{DSS}$ , l'intensité du courant Drain-Source de saturation, sont des paramètres constants du transistor (cette relation est valide pour  $V_{DS} \geq V_{GS} - V_{GSoff}$ ). La courbe  $I_{DS} = f(V_{GS})$  peut être tracée ou même obtenue expérimentalement. Elle est appelée *caractéristique de transfert statique* ou simplement *caractéristique statique*. Elle est donnée par la figure 2.2. On constate sur cette figure que si l'on considère un point de fonctionnement  $(V_{GS0}; I_{DS0})$  appelé *point de polarisation* en électronique, alors des petites variations  $v_{gs}$  autour de  $V_{GS0}$  entraîneront de petites variations  $i_{ds}$  autour de  $I_{DS0}$  telles que

FIGURE 2.2 – Caractéristique statique  $I_{DS} = f(V_{GS})$  pour  $V_{DS}$  constante

$$i_{ds} \simeq g_{m0}v_{gs}$$

où  $g_{m0}$ , appelé transconductance, est le coefficient directeur de la tangente à l'arc de parabole, au point de polarisation. Cette transconductance s'exprime ainsi :

$$g_{m0} = \left. \frac{dI_{DS}}{dV_{GS}} \right|_{V_{GS}=V_{GS0}} = -\frac{2I_{DSS}}{V_{GSoff}} \left( 1 - \frac{V_{GS0}}{V_{GSoff}} \right).$$

Ceci revient à utiliser le développement de Taylor au premier ordre, au point de polarisation  $(V_{GS0}; I_{GS0})$ .

Or, en électronique, la tension Grille-Source est en réalité souvent de la forme

$$v_{GS}(t) = V_{GS0} + v_{gs}(t),$$

où  $v_{gs}(t)$  est une excitation sinusoïdale de faible amplitude. Le courant Drain-Source est alors d'intensité

$$i_{DS}(t) = I_{DS0} + i_{ds}(t) \quad \text{avec} \quad i_{ds}(t) \simeq g_{m0}v_{gs}(t).$$

Les signaux continus n'interviennent que pour polariser le transistor. Les signaux utiles  $v_{gs}$  et  $i_{ds}$  sont les petites variations sinusoïdales autour du point de fonctionnement. L'approximation présentée permet de considérer que  $i_{ds}$  est

linéaire par rapport à  $v_{gs}$ .

Cette notion de caractéristique statique est très importante en Automatique.

Un autre exemple peut être donné en supposant qu'un moteur à courant continu est soumis à deux non-linéarités. D'une part, de trop fortes valeurs de la tension d'induit  $u$  (commande) font saturer la vitesse angulaire  $y = \Omega$  (sortie); d'autre part, le moteur est sujet à des frottements secs dans sa liaison avec la charge qui font qu'une très faible valeur de  $u$  n'entraîne aucune rotation. La caractéristique statique  $Y = f(U)$  est obtenue en traçant la courbe de  $Y$ , valeur en régime permanent de  $y$ , en fonction des différentes valeurs continues  $U$  de  $u$  (voir figure 2.3).

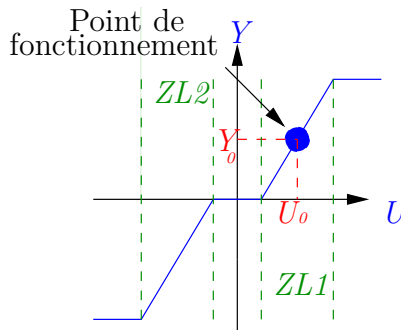


FIGURE 2.3 – Caractéristique statique du moteur

Sur cette courbe, on reconnaît aisément les deux palliers de saturation et la zone morte liée aux frottements secs. On s'aperçoit qu'il existe deux zones désignées par  $ZL1$  et  $ZL2$  pour lesquelles  $y$  varie de façon affine en fonction de  $u$ . Par abus de langage, l'automaticien parle de variation linéaire. Dans l'une ou l'autre de ces deux zones, il est possible de définir un point de fonctionnement  $(U_0; Y_0)$ . La quantité  $\delta y$ , c.-à-d. la variation de  $y$  autour de  $Y_0$ , suit alors une loi véritablement linéaire en  $\delta u$ , la variation de  $u$  autour de  $U_0$ . Que l'on considère  $\delta u$  et  $\delta y$  ou  $u$  et  $y$ , on peut chercher un modèle linéaire dès lors que les signaux  $u$  et  $y$  restent dans la zone « linéaire » choisie ( $ZL1$  ou  $ZL2$ ).

L'établissement d'une caractéristique statique et d'un point de fonctionnement



(ou d'une zone « linéaire ») est souvent une étape préliminaire à l'obtention d'un modèle. On parle de *linéarisation* ou d'*approximation linéaire*. Une approche plus systématique de linéarisation sera exposée au prochain chapitre consacré à la représentation d'état.

### 2.1.2. Modèle entrée/sortie : l'équation différentielle

Pour simplifier le modèle linéaire obtenu, pour le rendre plus compact, une tendance habituelle consiste à regrouper toutes les équations en une seule. Il s'agit d'éliminer du jeu d'équations toutes les grandeurs internes au système qui ne sont ni l'entrée, ni la sortie. On obtient alors une unique équation différentielle ne faisant apparaître comme signaux que l'entrée  $u$ , la sortie  $y$  et, éventuellement, leurs dérivées successives. Une telle équation a l'allure suivante :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t). \quad (2.2)$$

(NB : le point sur une lettre désigne un signal correspond à la dérivation par rapport au temps ; exemple :  $\dot{y}(t)$  signifie  $\frac{dy(t)}{dt}$ . De même,  $\ddot{y}$  désigne  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$ .)

Il s'agit là d'un modèle de comportement entrée/sortie, c'est-à-dire qui traduit l'évolution de la sortie en fonction de celle de l'entrée et ce, en écludant la dynamique interne du système.

Physiquement, il est inconcevable que  $m$  soit strictement supérieur à  $n$ . On peut toujours imaginer un modèle mathématique correspondant à ce cas mais en pratique, cela signifierait que la sortie du système à un instant donné dépend de la valeur de l'entrée à un instant ultérieur. C'est pourquoi l'on suppose que  $m \leq n$ . Un tel système est dit *causal* (et même *strictement causal* lorsque  $m < n$ ).

Si l'on revient à l'exemple du circuit RLC de la page 28, en regroupant les deux équations données en (2.1), on obtient, par élimination de  $i(t)$  :

$$u(t) = LC\ddot{y}(t) + RC\dot{y}(t) + y(t). \quad (2.3)$$

Cette équation différentielle unique constitue bien un modèle du lien existant entre l'entrée  $u(t)$  et la sortie  $y(t)$ .

En outre, il est clair que des valeurs élevées de  $m$  et  $n$  rendent difficile la détermination analytique de l'expression du signal  $y(t)$ . En d'autres termes, il est fastidieux, sinon impossible, de résoudre une équation différentielle d'ordre élevé. Aussi a-t-on ressenti le besoin d'introduire un nouvel outil de modélisation, plus aisé à manipuler, et plus à même d'aider l'automaticien dans les phases d'analyse et de commande : il s'agit de la fonction de transfert.

### 2.1.3. Transformation de Laplace : de l'équation différentielle à la fonction de transfert

Pour éviter d'avoir à manipuler une équation différentielle pas toujours simple, les électroniciens et à leur suite, les automaticiens, ont décidé d'exploiter un outil mathématique bien connu, la *transformation de Laplace* (parfois appelée de Carson-Laplace).

Chaque signal temporel  $f(t)$  *causal*, c'est-à-dire pour lequel  $f(t) = 0, \forall t < 0$ , peut subir une transformation dite de « Laplace », notée  $\mathcal{L}$ , et ainsi définie :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (2.4)$$

$F(p)$ , si elle existe, c'est-à-dire si l'intégrale est calculable, est appelée *transformée de Laplace* de  $f(t)$  et la variable complexe  $p = \alpha + j\beta$  (notée  $s$  dans les ouvrages de culture anglo-saxonne) est connue sous le nom de *variable de Laplace*. Cet opérateur possède les propriétés suivantes :

1. linéarité :

$$f_1(t) + kf_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(p) + kF_2(p)$$

2. théorème de la dérivation :

$$\bullet \dot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0)$$

$$\bullet \ddot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p^2F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$$

$$\bullet \frac{d^l f(t)}{dt^l} \xrightarrow{\mathcal{L}} p^l F(p) - p^{l-1} f(0) - p^{l-2} \dot{f}(0) - \dots - \frac{d^{l-1} f(0)}{dt^{l-1}}$$

$p$  correspond donc, en présence de conditions initiales nulles, à une dérivation dans le domaine de Laplace.

3. théorème de l'intégration :

$$\bullet \int_0^{t \geq 0} f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(p)}{p}$$

$1/p$  est donc l'opérateur d'intégration dans le domaine de Laplace.

4. théorème du retard :

$$\bullet f(t - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-\theta p} F(p)$$

5. théorème du décalage fréquentiel :

$$\bullet f(t)e^{-\omega t} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p + \omega)$$

6. théorème de la valeur initiale :

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

(sous réserve d'existence des deux limites)

7. théorème de la valeur finale :

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

(sous réserve d'existence des deux limites)

8. Image de la convolution :

$$\bullet f(t) * g(t) \int_0^t f(t-\theta)g(\theta)d\theta \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)G(p)$$

9. Image du produit :

$$\bullet f(t)g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\gamma-\mathbf{i}\beta}^{\gamma+\mathbf{i}\beta} F(\sigma)G(p-\sigma)d\sigma$$

(où  $\gamma \in \mathbb{R}$  est supérieur à la partie réelle de toute singularité de  $F(p)$ ).

Il existe une transformation inverse de Laplace notée  $\mathcal{L}^{-1}$  et qui est définie par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\gamma-\mathbf{i}\beta}^{\gamma+\mathbf{i}\beta} F(p)e^{pT} dp, \quad (2.5)$$

où  $\gamma \in \mathbb{R}$  est supérieur à la partie réelle de toute singularité de  $F(p)$ .

Comme il est parfois fastidieux de calculer la transformée de Laplace d'une fonction temporelle compliquée, de même que la transformée inverse, en pratique, les automaticiens disposent de tableaux de transformées. Une version très allégée d'un tel tableau est donnée en annexe à la page 706.

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (2.3), il vient :

$$U(p) = LC(p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0)) + RC(pY(p) - y(0)) + Y(p). \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) constitue un lien entre la transformée de Laplace du signal d'entrée et celle du signal de sortie.

## 2.2. Fonction de transfert

### 2.2.1. Comment obtenir la fonction de transfert ?

La fonction de transfert est un modèle de comportement entrée/sortie qui s'obtient à partir de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants. Plutôt que de chercher à obtenir  $y(t)$  en fonction de  $u(t)$ , on cherche à obtenir  $Y(p) = \mathcal{L}(y)(t)$  en fonction de  $U(p) = \mathcal{L}(u)(t)$ . Comme il s'agit de déterminer un modèle qui soit indépendant des conditions initiales, ces dernières sont

considérées nulles et l'on applique tout simplement la transformée de Laplace à l'équation différentielle (2.2), ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (2.7)$$

$G(p)$  est une fraction rationnelle dépendant de la variable de Laplace, de numérateur  $N(p)$  et de dénominateur  $D(p)$ . Elle est appelée *fonction de transfert* et se révèle très utile pour l'étude des systèmes linéaires monovariables.

$G(p)$  est dite *d'ordre  $n$*  et selon la règle de causalité évoquée à la page 33, on aura généralement  $m \leq n$ . La fonction de transfert est alors dite *propre* et même *strictement propre* en cas de stricte causalité du système ( $m < n$ ).

Les racines de  $N(p)$  sont appelées *zéros* du système, ou plus rigoureusement de  $G(p)$ , et celles de  $D(p)$  sont appelées *pôles* de  $G(p)$ . Les zéros ont une influence réelle mais quelque peu difficile à estimer sur le comportement du système. Il convient surtout de se souvenir que les pôles ont une influence encore plus grande en termes de stabilité et de régime transitoire de la réponse du système. Cette influence des pôles est beaucoup plus facile à prévoir (cf. un cours sur la fonction de transfert mais on retrouvera cette notion au chapitre 3).

Dans le cas du circuit RLC, la relation (2.6) conduit à :

$$Y(p) = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1} U(p) + \frac{LCpy(0) + LC\dot{y}(0) + RCy(0)}{LCp^2 + RCp + 1}$$

$$Y(p) = \underbrace{\frac{N(p)}{D(p)}}_{G(p)} U(p) + \frac{I(p)}{D(p)}. \quad (2.8)$$

$G(p)$  permet de déterminer le terme de  $Y(p)$  dépendant seulement de  $U(p)$  et non des conditions initiales, ici présentes au niveau du numérateur  $I(p)$ .

### 2.2.2. Intérêt de la fonction de transfert

Même dans le cas d'un modèle d'ordre élevé, la réponse du système à une excitation  $u(t)$  est plus facile à déterminer si l'on utilise la fonction de transfert. En effet, à titre d'exemples, lorsque  $u(t)$  est une impulsion de Dirac<sup>1</sup> ( $y(t)$  est alors la *réponse impulsionnelle*), ou un *échelon unitaire* ( $y(t)$  est alors la *réponse indicielle*), alors  $Y(p) = G(p)U(p)$  peut être décomposé en éléments simples faisant intervenir les pôles du système. Ainsi chaque élément simple génère un terme de la réponse  $y(t)$  par application de  $\mathcal{L}^{-1}$ . C'est ainsi que l'on voit l'influence des pôles. De ce fait, connaître la fonction de transfert, c'est *a fortiori* connaître ses pôles donc prévoir en partie le comportement du système.

Dans le cas où  $u(t)$  est un signal sinusoïdal (le régime permanent de  $y(t)$  est alors appelé *réponse harmonique*), on peut tracer, par exemple, les *lieux de Nyquist*, de *Black* ou le *diagramme de Bode* du modèle grâce à  $G(p)$  (voir cours sur la fonction de transfert). Ces diagrammes sont particulièrement utiles pour comprendre la réaction du système à des signaux et ce, selon les fréquences que ces signaux contiennent. La fonction de transfert permet donc une analyse fréquentielle du comportement du système par l'intermédiaire, par exemple, du diagramme de Bode. Le système est alors vu comme un filtre.

En outre, de  $G(p)$ , on peut déduire des lois de commande (par exemple de type régulateur PID), basées sur l'obtention de certaines *marges de gain* ou *marges de phase*, déterminables grâce, entre autres, au diagramme de Bode. De même,  $G(p)$  peut-être utilisée pour calculer une loi de commande plaçant les pôles du système en boucle fermée. Dans les deux cas, c'est la manipulation de  $G(p)$  qui conduit à l'établissement de la loi de commande, ce qui démontre la pertinence d'un tel outil.

Concernant le circuit RLC de la page 28, on peut par exemple calculer les racines de  $D(p)$  pour savoir si le signal  $y(t)$  comportera une forte oscillation ou pas. On peut aussi écrire  $G(p)$  sous la forme dite *canonique* de deuxième ordre (voir cours sur la fonction de transfert)

$$G(p) = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}.$$

---

1. du nom de Paul Adrien Maurice Dirac, physicien et mathématicien britannique (1902-1984).

La valeur de  $m$ , c'est-à-dire le *coefficient d'amortissement*, renseigne alors sur le niveau d'oscillation.

Poursuivre plus avant le détail des utilisations de la fonction de transfert sort du cadre de cet ouvrage qui se veut consacré à la représentation d'état.

### 2.2.3. Brève considération historique

Si la fonction de transfert doit beaucoup à la transformation de Laplace (Cocorico!), cette dernière ne suffit pas à expliquer l'utilisation intensive d'un tel modèle en Automatique. Il fallut attendre d'autres travaux pour que l'outil mathématique sous-jacent atteignât la maturité nécessaire à une appropriation par le monde de l'ingénierie. En particulier, il fallut attendre le développement du calcul opérationnel par Heaviside en relation avec la transformation de Laplace-Carson (une version de  $\mathcal{L}$  qui est en réalité celle présentée ici, largement privilégiée en ingénierie). Les fonctions de transfert ne sont qu'une émanation du calcul opérationnel, émanation bien utile en Automatique.

Puisque ce document ne cherche pas à détailler l'approche fréquentielle, supposée connue du lecteur, qu'il propose au moins quelques données historiques étalées pêle-mêle. L'auteur espère que le lecteur y trouvera quelque intérêt. Les notes de fin de chapitre reviennent un peu sur cet aspect.

---

**Biographie 2.1** Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (1749-1827) : *mathématicien, physicien et homme politique français.*

*Fils de cultivateur pauvre, il fut aidé par ses riches voisins qui lui payèrent son éducation. Il impressionna d'Alembert<sup>2</sup> qui l'introduisit dans le monde des sciences ou il brilla au point de gagner le soutien de Napoléon Bonaparte<sup>3</sup> qui le prit un temps comme Ministre de l'intérieur.*

*Ses contributions en physique concernent surtout la thermodynamique, l'électromagnétisme, mais surtout la mécanique, notamment céleste.*

*En mathématiques, il brilla en théorie des probabilités et dans l'étude des équations différentielles (la variation de la constante, c'est lui!). En revanche, il est possible que la fameuse transformation qui porte son nom fût plutôt due à Leonhard Euler<sup>4</sup>. Laplace n'aurait fait qu'approfondir la réflexion de ce dernier. La version présentée dans ce document n'est qu'une version monolatérale préférée en ingénierie. Elle est appelée transformation de Laplace-Carson. La variable de Laplace, notée  $p$  dans le monde francophone (version Laplace), est notée  $s$  dans le monde anglo-saxon (version Carson<sup>5</sup>). Donc ici, c'est  $p$  (parce que tout cela reste signé Laplace ! Recocorico !).*



---

2. Jean le Rond d'Alembert, mathématicien, physicien, philosophe et encyclopédiste français (1717-1783).

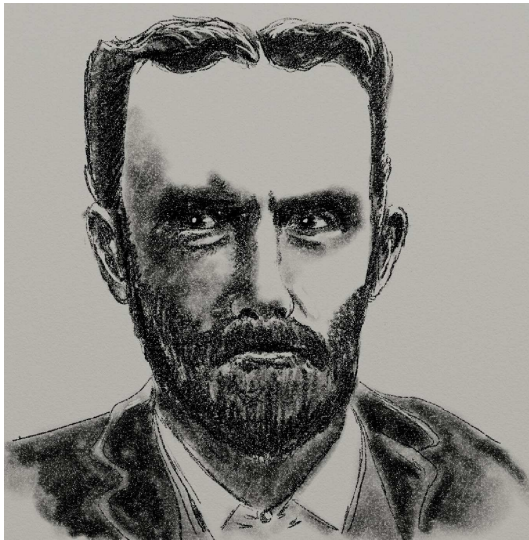
3. également appelé Napoléon Premier (1769-1821), dont la contribution à l'Automatique est difficile à cerner mais qui fut empereur de France à ses heures perdues.

4. mathématicien et physicien suisse (1707-1783).

5. John Renshaw Carson, pionnier des télécommunications et théoricien du traitement du signal états-unien (1886-1940).



---

**Biographie 2.2** Oliver Heaviside (1850-1925) : *physicien britannique autodidacte.*

Réfractaire semble-t-il à l'école, malgré d'évidentes capacités, il la quitta à seize ans pour devenir opérateur de télégraphe. Ses grandes contributions aux sciences consistent en trois points :

- simplification, en électromagnétisme, des équations de Maxwell<sup>6</sup>, aboutissant à la forme souvent retenue aujourd'hui ;
- résolution d'équations différentielles en utilisant sa création, à savoir le calcul opérationnel (un certain manque de rigueur lui fut souvent reproché par la communauté mathématicienne) ;
- prédiction de l'existence des

couches de Kennelly-Heaviside<sup>7</sup> qui, dans l'ionosphère, permettent aux ondes radio de suivre la courbure terrestre lors de leur propagation.

L'échelon unitaire  $\Gamma(t)$  porte le nom de fonction de Heaviside.

---

6. James Clerk Maxwell, physicien et mathématicien écossais (1831-1879), célèbre pour les équations éponymes décrivant de façon unifiée les phénomènes électromagnétiques.

7. Arthur Edwin Kennelly, ingénieur en électricité états-unien (1861-1939).

---

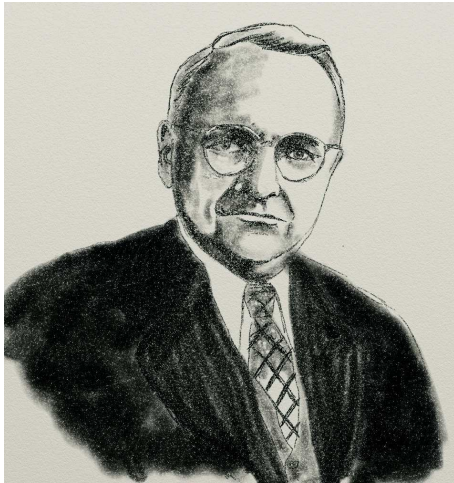
**Biographie 2.3** Harold Stephen Black (1898-1983) : *ingénieur états-unien.*

*Il est surtout connu pour ses travaux de recherche au sein des Laboratoires Bell, où il exerça de 1925 à 1963. Il fut l'inventeur de l'« amplificateur à contre-réaction négative », c'est à dire qu'il fut à la base de l'émergence des amplificateurs opérationnels, qui fonctionnent en mode linéaire lorsqu'une rétroaction est appliquée à leur entrée « moins » (inverseuse). À ce titre, et eu égard à l'utilisation intensive des amplificateurs opérationnels (AOP) par la suite, certains épistémologues le considèrent comme responsable de l'avancée technologique la plus significative du vingtième siècle. Cette invention date*



*de 1927 même si l'article de référence sur ces travaux fut publié en 1934. Non seulement, Harold Black conçut des amplificateurs en rétro-action, mais il proposa également un formalisme pour cette rétroaction (formule parfois dite « de Black » utilisée en approche fréquentielle pour passer de la boucle ouverte à la boucle fermée), à la base de nombreux développements ultérieurs en Automatique. Les progrès réalisés en électronique et en Automatique eurent une répercussion non négligeable sur le déroulement de la deuxième guerre mondiale.*

---

**Biographie 2.4** Harry Nyquist (1889-1976) : *ingénieur suédo-états-unien.*

Né en Suède, il émigra aux USA en 1907, où il obtint un doctorat de physique en 1917. Il fit une grande carrière en recherche et développement, ponctuée de nombreuses récompenses, à AT&T (qui devint un peu plus tard les Laboratoires Bell), jusqu'à sa retraite en 1954.

Ses contributions portent sur la théorie des transmissions télégraphiques, le bruit thermique dans les conducteurs électriques et, ce qui explique l'insertion de cette brève biographie, sur la stabilité des systèmes bouclés (et son histoire). Nyquist donna son nom à un critère bien connu de stabilité des sys-

tèmes bouclés, très utilisé dans l'approche fréquentielle. Le critère étant très « mathématique », ses avatars lui sont souvent préférés (critère simplifié dit du « revers », marges de gain, marges de phase, etc.)

Le nom de Nyquist est parfois associé à celui de Shannon<sup>8</sup> pour la paternité du célèbre théorème régissant les principes de l'échantillonnage d'un signal, même si c'est plus souvent Shannon seul qui est retenu.

---

8. Claude Elwood Shannon, ingénieur électricien et mathématicien états-unien (1916-2001) : voir biographie 9.2 page 492.

---

**Biographie 2.5** Hendrik Wade Bode (1905-1982) : *ingénieur états-unien d'origine hollandaise.*

Après un baccalauréat de mathématiques et deux années d'études supérieures, il intégra les équipes de recherche des Laboratoires Bell en 1929. Il y fut incité à poursuivre des études à l'Université de Columbia. Il y obtint un doctorat de Physique en 1935. C'est autour de 1938 qu'il mit au point les fameux diagrammes de Bode (représentations en deux diagrammes (de gain et de phase) de la fonction de transfert) qui non seulement permirent d'exploiter plus simplement les résultats de Nyquist, mais aussi ouvrirent les portes d'une approche fréquentielle et graphique de la synthèse de lois de commande des systèmes

bouclés. En outre, ces diagrammes se révélèrent utiles dans l'étude des filtres en électronique, sans qu'il soit forcément question d'un système bouclé (matérialisation graphique plus évidente des pics de résonance, etc.). Son livre, paru dans les années quarante, est une référence majeure en Automatique. Au même titre que Black ou Nyquist, ses travaux sont initiateurs de toute l'approche fréquentielle de l'Automatique des systèmes linéaires.

Bode est également connu pour la façon dont il mit le fruit de ses recherches au service de son pays en travaillant sur des applications militaires, dans le contexte belliqueux préfigurant la deuxième guerre mondiale.

---

## 2.3. Exercices

Il y a peu d'exercices dans ce chapitre car la fonction de transfert n'est pas le cœur des développements de ce document. Certaines réponses nécessitent un souvenir des cours sur l'approche fréquentielle des systèmes linéaires.

### 2.3.1. Petits exemples mécaniques

Soit le système mécanique donné par la figure 2.4

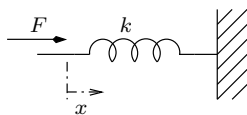


FIGURE 2.4 – Système à ressort

$F$  est la force exercée sur le ressort,  $x$  la position d'un point du ressort (par rapport à une référence initiale nulle) et  $k$  la constante de raideur de ce dernier. L'entrée du système est  $u = F$  et la sortie est  $y = x$  comme sortie. Le point est considéré de masse nulle donc son poids n'est pas pris en compte (oui, bon... c'est un peu abuser que de le supposer mais, à défaut de réalisme, cela simplifie les choses dans trois les premières parties de l'exercice!).

#### Questions :

- Déterminer la fonction de transfert d'un tel système.
- À quel comportement correspond-elle?

Soit maintenant le système mécanique donné par la figure 2.5 où le ressort est remplacé par un amortisseur associé à un coefficient de frottement visqueux  $f$ . La masse du point est toujours nulle.

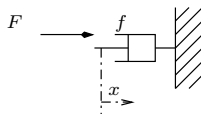


FIGURE 2.5 – Système à amortisseur

L'entrée et la sortie du cas précédent sont conservées.

Questions :

- Déterminer la fonction de transfert de ce nouveau système.
- De quel comportement s'agit-il ?

Soit maintenant une association des deux systèmes comme le montre la figure 2.6. La masse du point est toujours nulle.

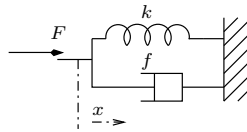


FIGURE 2.6 – Ressort + amortisseur

L'entrée et la sortie des cas précédents sont toujours conservées.

Questions :

- Déterminer la fonction de transfert de ce nouveau système.
- De quel comportement s'agit-il ?
- Quels sont les pôles et les zéros du système ?
- Quels sont le gain et la constante de temps ?

Enfin, on veut modéliser un système mécanique dont le schéma est donné figure 2.7.

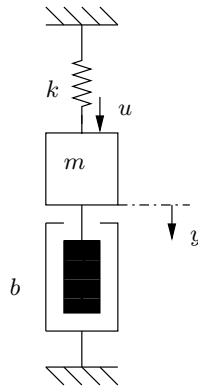


FIGURE 2.7 – Exemple de système mécanique

Un solide de masse  $m$  (ah! quand même!) est soumis à plusieurs forces. La constante de raideur du ressort est de valeur  $k$  et  $b$  est un coefficient de frottement visqueux. On peut appliquer une force  $u$  dirigée comme indiqué sur la figure 2.7. Il s'agit de l'entrée du système. La sortie est  $y$ , la variation de position de la masse par rapport à une valeur d'équilibre. La position de référence de  $y$ , considérée comme nulle, est telle qu'en cette position, les forces générées par l'amortisseur et le ressort compensent le poids associé à  $m$ . On s'intéresse alors aux variations autour de cette position d'équilibre  $y = 0$  de sorte que le poids n'intervient pas dans les équations.

Questions :

- Déterminer la fonction de transfert correspondante.
- Quels en sont le gain statique, le coefficient d'amortissement et la pulsation propre non amortie ?

### 2.3.2. Moteur à courant continu

On cherche le modèle d'état d'un moteur électrique à courant continu qui est dit « à commande d'induit ». Le schéma d'un tel procédé est donné par la figure 2.8.

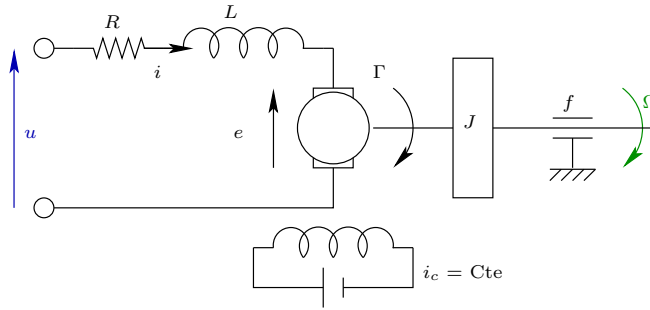


FIGURE 2.8 – Moteur à courant continu à commande d'induit

Les lois de la physique régissant le comportement de ce procédé électromécanique conduisent aux équations suivantes :

- Équation électrique au niveau de l'induit :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + e = u \quad (2.9)$$

où  $u$  est la commande d'induit,  $i$  le courant d'induit,  $R$  et  $L$  respectivement la résistance et l'inductance d'induit, et  $e$  une force électromotrice.

- Couple moteur  $\Gamma$  :

$$\Gamma = k_1 \Psi i = ki, \quad (2.10)$$

car  $\Psi$  est le flux inducteur constant donné par la constante

$$\Psi = k_c i_c \quad (2.11)$$

- La force électromotrice  $e$  est donnée par

$$e = k\Omega, \quad (2.12)$$

où  $\Omega$  est la vitesse de l'arbre du moteur.

- Enfin, la relation fondamentale de la dynamique conduit à écrire

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma - f\Omega, \quad (2.13)$$



où  $J$  est le moment d'inertie et  $f$  un coefficient relatif aux forces de frottement visqueux générant un couple résistant  $C_r = f\Omega$ .

Il convient maintenant de se fixer une entrée et une sortie. La commande d'induit  $u$  est choisie comme entrée de commande et la sortie est la vitesse angulaire du moteur ( $y = \Omega$ ).

Pour simplifier le développement, les paramètres prendront les valeurs simples (mais ô combien non réalistes) suivantes :

- $J = 1kg.m^2$
- $f = 1N.m.s$
- $R = 1\Omega$
- $L = 10mH$
- $k = 1N.m/A = 1V.s$

Questions :

- Établir une équation différentielle (littérale) unique reliant  $u(t)$  à  $y(t)$ .
- En faisant intervenir les valeurs numériques, déterminer la fonction de transfert du système reliant  $U(p)$  à  $Y(p)$ .

## 2.4. Correction des exercices

### 2.4.1. Petits exemples mécaniques

Le système de la figure 2.4, page 45, est régi par l'unique équation algébrique

$$F(t) = kx(t),$$

qui devient, compte tenu des notations de l'Automatique,

$$u(t) = ky(t).$$

Cette équation peut se déduire du principe fondamental de la dynamique qui se simplifie en notant que la masse considérée est nulle. L'application de la transformation de Laplace  $\mathcal{L}$  (pour des conditions initiales nulles... il est rappelé que cette hypothèse est toujours retenue dans la recherche d'une fonction de transfert) conduit à

$$U(p) = kY(p).$$

Donc il vient

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{k}.$$

Cette fonction de transfert est d'ordre zéro et constitue un simple gain.

Le système de la figure 2.5, page 46, est lui régi par l'unique équation différentielle, toujours potentiellement déduite du principe fondamental de la dynamique (pour une masse nulle),

$$F(t) = f \frac{dx(t)}{dt},$$

qui devient, compte tenu des notations de l'Automatique,

$$u(t) = f \frac{dy(t)}{dt}.$$

L'application de  $\mathcal{L}$  pour des conditions initiales nulles conduit à

$$U(p) = fpY(p).$$

Donc il vient

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{fp}.$$

Cette fonction de transfert est d'ordre 1 et correspond à un comportement d'intégrateur avec un gain  $1/f$ .

Dans le même esprit, le système de la figure 2.6, page 46, est régi par l'unique équation différentielle

$$F(t) = kx(t) + f \frac{dx(t)}{dt},$$

qui devient, compte tenu des notations de l'Automatique,

$$u(t) = ky(t) + f \frac{dy(t)}{dt}.$$

L'application de  $\mathcal{L}$  pour des conditions initiales nulles conduit à

$$U(p) = kY(p) + fpY(p).$$

Donc il vient

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{k + fp}.$$

Cette fonction de transfert est d'ordre 1 et correspond à un comportement de filtre passe-bas de premier ordre. Elle n'a pas de zéro (racine du numérateur) et possède un seul pôle (racine du dénominateur) égal à  $-k/f$ . L'absence de zéro rend possible la mise de cette fonction de transfert sous *forme canonique* :

$$G(p) = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{f}{k}p}.$$

Cette forme met en évidence, au numérateur de  $G(p)$ , le *gain statique* (gain en régime permanent égal à  $G(0)$  lorsqu'il est défini), à savoir

$1/k$ . De même le dénominateur ci-avant est de la forme  $1 + \tau p$  et à ce titre met en évidence la constante de temps  $\tau = f/k$ , l'opposée de l'inverse de l'unique pôle.

Le système de la figure 2.7, page 47, est régi par l'unique équation différentielle

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = u(t) - ky(t) - b \frac{dy(t)}{dt}. \quad (2.14)$$

Cette fois-ci, le solide est de masse  $m$  donc le principe fondamental de la dynamique fait intervenir non seulement  $m$  mais aussi l'accélération du solide. On rappelle toutefois que le poids n'est pas pris en compte car à  $y = 0$ , il est compensé par les forces générées « par défaut » par le ressort et l'amortisseur. On ne s'intéresse qu'aux variations autour des grandeurs d'équilibre associées à la position  $y = 0$ . L'application de  $\mathcal{L}$  pour des conditions initiales nulles conduit à

$$\begin{aligned} mp^2 Y(p) &= U(p) - kY(p) - bpY(p) \\ \Leftrightarrow (mp^2 + bp + k)Y(p) &= U(p). \end{aligned}$$

Donc il vient

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{mp^2 + bp + k}.$$

Il s'agit d'une fonction de transfert de deuxième ordre qui, ne comportant aucun zéro, peut se mettre sous *forme canonique* :

$$G(p) = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{b}{k}p + \frac{m}{k}p^2}. \quad (2.15)$$

Le gain statique est donc égal à  $1/k$ , la pulsation propre non amortie à  $\sqrt{k/m}$  et le coefficient d'amortissement à  $\frac{b}{2\sqrt{km}}$ .

### 2.4.2. Moteur à courant continu

Les équations données sont utilisées pour résumer le modèle du système par *une seule* équation différentielle reliant  $y$  à  $u$ . Les grandeurs physiques sont des fonctions du temps mais cette dépendance n'apparaît

pas explicitement dans les notations à venir. À partir de maintenant, la dérivée d'un signal par rapport au temps est désignée par un point au dessus de la lettre associée au signal et la dérivée seconde par rapport au temps est désignée par deux points au dessus de la lettre, comme déjà mentionné page 33.

Les relations (2.13) et (2.10) page 48 conduisent à écrire

$$J\dot{y} + fy = ki,$$

ce qui, après dérivation par rapport au temps, compte tenu des équations (2.9) et (2.12) page 48, s'écrit

$$J\ddot{y} + f\dot{y} = k\dot{i} = \frac{k}{L}(u - Ri - ky)$$

$$\Leftrightarrow JL\ddot{y} + fL\dot{y} + k^2y = ku - Rki$$

Or  $ki = \Gamma$  et l'on peut à nouveau utiliser (2.13) page 48 pour aboutir à

$$JL\ddot{y} + (RJ + fL)\dot{y} + (fR + k^2)y = ku. \quad (2.16)$$

Une équation différentielle unique en  $y$  dans laquelle les seules grandeurs physiques variables sont  $u$  et  $y$  est ainsi obtenue. Cette équation différentielle constitue un modèle de comportement entrée/sortie pour le procédé. Elle pourrait être résolue pour déterminer la réponse du procédé (c'est-à-dire l'évolution de  $y(t)$  au cours du temps) en fonction d'une excitation donnée sur  $u$  et de conditions initiales.

En supposant que l'inductance  $L$  est très petite, on peut envisager un modèle plus simple où elle est négligée ( $L \simeq 0$ ). L'équation (2.16) peut alors se récrire

$$RJ\dot{y} + (Rf + k^2)y = ku. \quad (2.17)$$

On comprend sur cet exemple que plusieurs modèles plus ou moins fidèles peuvent décrire le même système.

**Remarque 2.1** Pour rappel, dans cet exemple, le modèle était déjà linéaire. En effet, l'équation différentielle dépend linéairement de l'entrée, de la sortie et de leurs dérivées successives. Ce n'est pas toujours le cas. Lorsque ce n'est pas le cas, il convient de recourir à quelque approximation pour que les éléments non linéaires soient remplacés par des éléments linéaires. Ces approximations ne sont généralement justifiées que dans une gamme de valeurs correspondant à de petites variations autour d'un point de fonctionnement au voisinage duquel le comportement du système correspond à peu près à un modèle linéaire. Ces aspects ont été évoqués au paragraphe 2.1.1, page 29, et le seront encore au prochain chapitre consacré à la représentation d'état.

Compte tenu des valeurs numériques irréalistes proposées, l'équation (2.16) s'écrit :

$$\begin{aligned} 10^{-2}\ddot{y} + 1,01\dot{y} + 2y &= u \\ \Leftrightarrow \ddot{y} + 101\dot{y} + 200y &= 100u. \end{aligned}$$

En appliquant  $\mathcal{L}$ , il vient (pour l'instant, les conditions initiales sont préservées mais il est possible de les omettre dès cette étape)

$$\begin{aligned} p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 101pY(p) - 101y(0) + 200Y(p) &= 100U(p) \\ \Leftrightarrow \underbrace{(p^2 + 101p + 200)}_{D(p)} Y(p) &= \underbrace{100}_{N(p)} U(p) + \underbrace{(p + 101)y(0) + \dot{y}(0)}_{I(p)} \\ Y(p) &= \underbrace{\frac{N(p)}{D(p)}}_{G(p)} U(p) + \frac{I(p)}{D(p)}. \end{aligned}$$

Le second terme de  $Y(p)$  dépend des conditions initiales. Il peut être nul si le système est initialement au repos. Il ne traduit pas des propriétés constantes du comportement entrée/sortie. En revanche,  $G(p)$  est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes en  $p$ . Elle est indépendante des conditions initiales.  $G(p)$  est donc la fonction de transfert et elle peut s'écrire

$$G(p) = \frac{100}{p^2 + 101p + 200} = \frac{100}{(p + p_1)(p + p_2)}$$

avec  $p_1 \simeq -2$  et  $p_2 \simeq -99$ .  $p_1$  et  $p_2$  sont les pôles du système qui n'a pas de zéro.

Mais  $G(p)$  peut aussi s'écrire

$$G(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \quad \text{avec}$$

$$\tau_1 = -\frac{1}{p_1} \simeq 0,5, \quad \tau_2 = -\frac{1}{p_2} \simeq 0,01 \quad \text{et} \quad K \simeq 0,5.$$

$\tau_1$  et  $\tau_2$ , que l'on ne peut faire apparaître que lorsque les pôles sont réels, sont les constantes de temps du système. La constante  $\tau_1$  est beaucoup plus élevée et correspond approximativement à la dynamique des phénomènes mécaniques alors que  $\tau_2$  est davantage liée aux phénomènes électriques.

Si  $L$  est négligée, la transformation de Laplace peut être appliquée à l'équation différentielle (2.17) et en éliminant les termes liés aux conditions initiales, il vient

$$G(p) = \frac{1}{p+2} = \frac{0,5}{1+0,5p}.$$

Dans ce modèle simplifié, il ne reste qu'un pôle égal à  $-2$  ou une seule constante de temps égale à  $0,5$ . Ceci revient grossièrement à ne prendre en compte que la dynamique (plus lente) des phénomènes mécaniques.

## 2.5. Notes et références

La transformation de Laplace, quoique ce soit parfois contesté, est en toute probabilité, attribuable à Pierre-Simon de Laplace<sup>9</sup>. « En toute probabilité » est sans doute l'expression appropriée puisqu'il développa cet opérateur dans les années 1780, sous une forme un peu différente de celle présentée de nos jours, dans le cadre de son étude sur la résolution de certaines équations mais beaucoup d'auteurs notent que Léonhard Euler<sup>10</sup> avait proposé en 1744 des intégrales ressemblant beaucoup à celle utilisée dans la définition de la transformation de Laplace, dans son étude sur les probabilités. Il en fut de même, mais plus tard, pour l'émule d'Euler, le mathématicien et astronome italien Joseph-Louis Lagrange<sup>11</sup>. Laplace s'en inspira « probablement ». Laplace fut un des premiers à comprendre que le développement en séries de Fourier<sup>12</sup> étant limité aux fonctions périodiques, il fallait, envisager des outils plus performants pour généraliser la classes d'équations traitées et sa transformation généralise celle de Fourier, et de fait, le développement en séries de Fourier. Elle est à variable complexe, prend en compte les conditions initiales et de ce fait, les régimes transitoires des solutions aux équations différentielles (cet aspect a son importance en Automatique).

Comme il a été vu au chapitre précédent, c'est James. C. Maxwell<sup>13</sup> qui introduisit une approche plus générale de la modélisation des systèmes par des équations différentielles, comprenant par la même les problèmes de stabilité engendrés par les systèmes bouclés [1,2,3]. Il le fit en menant l'étude des régulateurs chargés d'asservir la position des télescopes dont l'astronome royal britannique George B. Airy<sup>14</sup> avait bien noté la propension à dévier sous l'effet de la rotation de la Terre [4]. Mais ceci ne conduisit pas de suite à la fonction de transfert.

Il peut s'avérer en réalité très délicat de s'aventurer à définir rigoureusement ce qu'est une fonction de transfert. La définition donnée dans ce chapitre est loin d'être rigoureuse et encore plus loin d'être universelle. Elle se prête bien

---

9. voir biographie 2.1 page 40.

10. très célèbre mathématicien suisse (1707-1783).

11. *Giuseppe Lodovico Lagrangia*, Comte de Lagrange, mathématicien, mécanicien et astronome italien naturalisé français (1736-1813).

12. Baron Joseph (ou Jean Baptiste Joseph) Fourier, mathématicien et physicien français (1768-1830).

13. James Clerk Maxwell, physicien et mathématicien écossais (1831-1879), célèbre pour les équations éponymes décrivant de façon unifiée les phénomènes électromagnétiques.

14. mathématicien, astronome, géodésien et physicien britannique (1801-1892).



à une introduction à l'Automatique et se veut simple (elle est peut-être même franchement simpliste). L'auteur s'adresse ici particulièrement aux étudiants des filières proches de l'EEA (électronique-électrotechnique-Automatique) qui voient souvent l'Automatique avec une vision « électronique ». On peut aborder la fonction de transfert encore plus simplement en s'inspirant des circuits électriques et de leurs *impédances complexes* : il suffit d'imaginer, par généralisation, que des systèmes non électriques puissent avoir des impédances complexes. On obtient alors des fonctions de transfert, non pas en  $p$  mais en  $i\omega$ ,  $\omega$  étant la pulsation et  $i$  étant l'unité imaginaire. Une approche bien plus rigoureuse, plus proche du traitement du signal, consiste à associer les signaux d'entrée et de sortie à leurs transformées de Fourier [5] respectives. Les signaux originaux temporels étant liées par l'équation différentielle ordinaire (linéaire dans le cas présent), l'opérateur mathématique qui permet de calculer l'expression de la sortie à partir de l'entrée est le *produit de convolution*. Comme il n'est pas forcément facilement manipulable, on préfère souvent établir un lien entre les transformées de Fourier de l'entrée et de la sortie, obtenant ainsi la fonction de transfert en  $i\omega$ . Cette logique très « fréquentielle » relève initialement plus du filtrage que de l'Automatique. Il n'en reste pas moins que le système peut être vu comme un filtre et réciproquement. Pour passer de la fonction de transfert en  $i\omega$  à celle en  $p$ , il suffit juste de remplacer  $i\omega$  par  $p$ . Il est bien question de la même chose dans les deux cas mais avec deux points de vue ou deux objectifs différents, un angle de vue pouvant servir l'autre. Cet ouvrage n'est pas le lieu pour épiloguer sur le filtrage et le traitement du signal. D'autres le font bien mieux et ils sont suffisamment nombreux pour que l'auteur ne puisse choisir de référence appropriée. Cependant, en Français, on peut citer [6] qui est assez facile d'accès tout en étant rigoureux. Un certain nombre de photocopiés en ligne traitent du sujet. Une version introductive très simple peut être obtenue avec [7] alors qu'un excellent et bien plus complet ouvrage [8] est également accessible en ligne.

Toutefois, si le point de vue des « systèmes » est privilégié, et non celui des « filtres », les signaux ne sont plus simplement vus comme des sommes (au sens continu ou discret) de sinusoides à diverses fréquences. De ce fait, comme il a été dit plus avant, la transformation de Laplace est préférée à celle de Fourier. On revient alors à une définition se rapprochant de celle donnée dans ce chapitre. Pour être plus précis, d'après [19], ce sont T. J. Bromwich<sup>15</sup> et J. R. Carson<sup>16</sup>, vers le début du vingtième siècle (et d'autres un peu plus tard), qui

15. mathématicien anglais (1987-1929).

16. ingénieur états-unien, théoricien des télécommunications (1886-1940).

établirent un lien entre la transformation de Fourier et le calcul opérationnel de Heaviside [10,11,12]<sup>17</sup> conduisant à la transformation de Laplace-Carson, plus communément appelée transformation de Laplace en France, ainsi qu'à des opérateurs de transfert, dont la fonction de transfert telle qu'elle apparaît simplement dans ce document. Il semble que Bromwich et Carson aient apporté plus de rigueur aux travaux de Laplace et surtout d'Heaviside, complétant ainsi une approche déjà bien avancée. C'est sur ce travail analytique rigoureux que s'appuyèrent notamment des ingénieurs des Laboratoires Bell et des chercheurs du célèbre *Massachusetts Institute of Technology (MIT)* (entre autres), dans les années 1930-1940, pour développer l'approche fréquentielle de la rétroaction, donc de l'automatique. Les principaux furent H. Nyquist, H. S. Black, H. W. Bode<sup>18</sup>, A. C. Hall<sup>19</sup>, N. B. Nichols<sup>20</sup> [13,14,15,16,17,18,19].

Hall semble avoir été le premier à écrire formellement la fameuse formule qui donne la fonction de transfert en boucle fermée  $H(p)$  lorsque la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  est soumise à une contre-réaction négative accompagnée d'un gain  $K$ , à savoir

$$H(p) = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)}. \quad (2.18)$$

Si ce n'est que les fonctions de transfert étaient exprimées en  $i\omega$ , ce qui ne change rien à la logique de cette formule. Elle pourrait être appelée formule de Hall mais elle reste souvent anonyme dans les cours tant la démonstration en est facile une fois le formalisme posé. Elle est parfois appelée *formule de Black* car Black en avait compris la logique en étudiant les amplificateurs opérationnels, sans forcément l'avoir clairement exprimée avec sa dépendance fréquentielle. Si l'on étudie la publication de Black [14], on y trouve la formule suivante, qui donne la sensibilité de l'amplification en boucle fermée  $A_F$  en fonction de l'amplification en boucle ouverte  $\mu$  et du gain de retour  $\beta$  :

$$\left[ \frac{\partial A_F}{A_F} \right] = \frac{\mu\beta}{1 - \mu\beta} \left[ \frac{\partial \beta}{\beta} \right]. \quad (2.19)$$

Dans cette expression, on voit apparaître une sorte de version « statique » de la loi proposée par Hall.

---

17. cf. biographie 2.2 page 41.

18. cf. biographies 2.4,2.3 et 2.5, page 42.

19. ingénieur états-unien (1914-1992).

20. ingénieur états-unien (1914-1997).

Le présent document ne visant pas à détailler l'approche fréquentielle, le lecteur est renvoyé à des ouvrages de référence parmi lesquels on peut citer, en langue anglaise, [20,21,22,23,24,25,26]. Mais il en existe bien d'autres que l'auteur ne peut tous les mentionner. Si des références en français sont privilégiées, alors [27,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41] peuvent être citées (puisque l'auteur les a peut-être regardées plus que d'autres), mais on ne saurait trop conseiller le livre de Bernard Pradin et Germain Garcia [42]. En effet, tant ses qualités scientifiques et didactiques que son prix modique en font un ouvrage à part dont tout étudiant désireux d'apprendre l'automatique profitera énormément. Pour une rapide introduction à l'approche fréquentielle, l'auteur, en tout manque de modestie, se permet de pointer du doigt deux photocopiés de notes de cours qu'il a produits, honteusement redondants [43,44]. Mais attention, il n'y a pas de quoi se prétendre automaticien après la lecture de ces deux cours. Tout juste peut-on espérer y comprendre les notions de base. Pour un beau panel d'exercices sur l'approche fréquentielle, le livre de Christian Burgat est bien indiqué [45]. Puisque de nombreux photocopiés sont accessibles sur Internet, l'auteur tient à en citer un particulièrement bien fait et agréable tant sur le fond que sur la forme : celui de Denis Arzelier [46]. Il ne traite que d'analyse (pas de commande) mais il est excellent. On y trouve entre autres une très bel « album chronologique » de l'Automatique, agréablement illustré. Encore une fois, l'auteur doit rendre à Bernard ce qui lui appartient, à savoir quelques (nombreuses ?) idées pour rédiger ce chapitre [47,48].

1. **O. Mayr** : *The Origins of Feedback Control*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1970.  
*Un des premiers ouvrages d'ampleur sur l'histoire de l'Automatique.*
2. **C. C. Bissell** : A History of Automatic Control. *Springer Handbook of Automation*, Ed. S. Y. Nof, Springer, 2009, p. 56-69.  
*Article résumant avec brio l'histoire de l'Automatique.*
3. **J. C. Maxwell** : On Governors *Proc. of the Royal Society of London*, 16, 1868, également dans *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory*, coordonné par Richard Bellman et Robert Kalaba, Dover, New York, p. 270-283, 1964.  
*Première utilisation assumée des équations différentielles pour traiter de la modélisation (et de la stabilité) des premiers systèmes asservis.*
4. **G. B. Airy** : On the regulator of the clock-work for effecting uniform movement of equatorials. *Memoirs of the Royal Astronomical Society*,

- vol. II, p.249-267, 1840.  
*Peut-être une des toutes premières applications des régulateurs en astronomie.*
5. **M. Lecomte** : *Transformation de Fourier - Cours et exercices*. École des Mines Douai, 2001  
*Polycopié concis, bien fait et facile à lire.*
  6. **F. Cottet** : *Aide-Mémoire de traitement du signal*. Deuxième édition. Editions Dunod, 2011.  
*Un livre très abordable et précis, en Français!*
  7. **O. Bachelier** : *Un premier pas en traitement du signal*. Notes de cours, IUT de Poitiers-Châtelleraut-Niort, département de Mesures Physiques (MP), deuxième année de DUT, 2014. Téléchargeable à l'adresse : <http://www.lias-lab.fr/perso/olivierbachelier/teachings.php>  
*Si vous aimez la façon de voir de l'auteur...*
  8. **G. Scorletti** : *Traitement du signal* Polycopié de notes de Cours de l'École Centrale de Lyon, 2014.  
*Notes de cours extrêmement complètes, précises et rigoureuses qui valent largement un bon livre.*
  9. **S. Bennett** : *A History of Control Engineering - 1800-1930*. Peregrinus, Stevenage, 1979.  
*Premier tome d'un ouvrage historique précis.*
  10. **J. J. Bromwich** : Normal Coordinates in Dynamical Systems. *Proc. London Math. Soc*, 15, 1916.  
*Complément à l'approche de Heaviside sur le calcul symbolique.*
  11. **J. R. Carson** : Notes on the Heaviside Operational Calculus. *The Bell System Technical Journal*, 9(1), p.150-162, 1930.  
*Autre complément à l'approche de Heaviside sur le calcul symbolique.*
  12. **F. Rotella et I. Zambetakis** : Du calcul opérationnel à l'opérateur de transfert. *Actes de la Conférence internationale francophone d'Automatique (CIFA)*, Talence, 2006.  
*Article retraçant les diverses évolutions du calcul symbolique (ou opérationnel) et son influence en Automatique dans la définition des opérateurs de transfert, avec un focus sur le travail de O. Heaviside.*
  13. **H. Nyquist** : Regeneration Theory. *The Bell System Technical Journal*, 11, p.126-147, 1932.  
*L'origine du critère de Nyquist.*

14. **H. S. Black** : Stabilized Feedback Amplifiers. *The Bell System Technical Journal*, 13, p.1-18, 1934.  
*Sans doute l'article le plus important de Black, portant sur la conception des amplificateurs opérationnels en électronique, mais qui fait aussi un pas majeur dans la formalisation de la boucle.*
15. **H. W. Bode** : Relations between amplitude and phase in feedback amplifier design. *The Bell System Technical Journal*, 19, p.421-454, 1940.  
*Bode explique le principe du diagramme éponyme.*
16. **H. W. Bode** : *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand, Princeton, 1945.  
*Une vision plus large et plus didactique du travail de Bode avec le principe des correcteurs par avance ou retard de phase. Toutefois, il vaut mieux lire un ouvrage récent pour s'en faire une idée.*
17. **A. C. Hall** : *The Analysis and Synthesis of Linear Servomechanisms*. The Technology Press, Cambridge, 1943.  
*Là où l'on trouve la « vraie » formule de la boucle fermée avec contre-réaction unitaire.*
18. **H. J. James, N. B. Nichols, R. S. Philipps** : *Theory of Servomechanisms*. Radiation Laboratory vol. 25, McGraw Hill, New York 1947.
19. **S. Bennett** : *A History of Control Engineering - 1830-1955*. Peregrinus, Stevenage, 1993.  
*Second tome d'un ouvrage historique précis.*
20. **B. Kuo** : *Automatic Control Systems - Quatrième édition*. Prentice Hall, 1982 (première édition en 1962).  
*Un ouvrage d'Automatique qui commence à prendre de l'âge mais qui a le mérite d'être apparu avant bien d'autres.*
21. **J. J. DiStefano III, A. R. Stuberrud, I. J. Williams** : *Theory and Problems of Feedback and Control Systems*. Schaum's outline series, McGraw-Hill, 1967.  
*Bon répertoire de petits exemples assez académiques (trop peut-être).*
22. **T. Kailath** : *Linear Systems*. Prentice Hall, 1979.  
*Un vrai ouvrage de référence, pas très facile à aborder par son style et sa forme mais redoutablement complet. Pratiquement une « bible ».*
23. **R. C. Dorf et R. H. Bishop** : *Modern Control Systems*. Neuvième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.  
*La réédition permanente de cet ouvrage en dit long sur sa popularité.*

Les nombreux exemples constituent une vraie mine d'exercices pour un enseignant.

24. **G. F. Franklin, J. D. Powell et A. Emami-Naemi** : *Feedback Control of Dynamic Systems*. Quatrième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.  
*Assez riche en exemples et agréable dans la forme. Plutôt didactique.*
25. **K. Ogata** : *Modern Control Engineering* Troisième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.  
*Ouvrage de référence qui semble en avoir inspiré plus d'un. L'auteur a un petit faible pour cette référence dont la première édition date de 1970.*
26. **P. J. Antsaklis et A. N. Michel** : *Linear Systems*. McGraw-Hill, 1997.  
*Fanchement pas le plus accessible mais très rigoureux mathématiquement. Très bien mais déconseillé pour une première approche.*
27. **J. C. Gille, P. Decaulne et M. Pellegrin** : *Technique de l'Automatisme : Théorie et Calcul des Asservissements*. Deuxième édition. Éditions Dunod, 1958.  
*L'ouvrage de référence en enseignement de langue française pendant longtemps.*
28. **P. Naslin** : *Technologie et calcul pratique des systèmes asservis*. Éditions Dunod, 1968.  
*Pierre Naslin est l'un des pionniers de l'Automatique en France.*
29. **P. Faure et M. Robin** : *Éléments d'Automatique*. Éditions Dunod, 1984.  
*Bon ouvrage en Français couvrant un large spectre, ce qui n'est pas si courant.*
30. **Y. Thomas** : *Signaux et systèmes linéaires*. Éditions Masson, 1994.
31. **Y. Thomas** : *Signaux et systèmes linéaires : exercices corrigés*. Éditions Masson, 1993.
32. **M. Rivoire et J.-L. Ferrier** : *Cours d'automatique tome 1 : traitement du signal, systèmes*. Éditions Eyrolles, 1992.
33. **M. Rivoire et J.-L. Ferrier** : *Cours d'automatique tome 2 : asservissement, régulation, commande analogique*. Éditions Eyrolles, 1996.
34. **A. Rachid et D. Mehdi** : *Réalisation, réduction et commande des systèmes linéaires*. Scientifika, 1993.  
*Plutôt facile d'accès mais non sans originalité puisqu'il aborde, par exemple, la réduction de modèle.*

35. **H. Bourles** : *Systèmes linéaires - De la modélisation à la commande*. Éditions Hermes, 2006.  
*Un pour tour d'horizon des principales notions d'Automatique. De nombreux exercices.*
36. **P. Codron et S. Leballois** : *Automatique : systèmes linéaires continus*. Éditions Dunod, 1998.
37. **C. Foulard, J.-M. Flaus, et M. Jacomino** : *Automatique pour les classes préparatoires : cours et exercices corrigés*. Éditions Hermes, 1997.
38. **Ph. de Larminat** : *Automatique*. Éditions Hermes, 2000.  
*Le point de vue de Ph. de Larminat est toujours intéressant car de nombreux commentaires accompagnent la rigueur du formalisme mathématique et l'auteur, qui ne cède pas aux phénomènes de mode, garde toujours un sens critique.*
39. **Y. Granjon** : *Automatique, systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état*. Éditions Dunod, 2001.  
*Ouvrage abordant les points classiques avec rigueur.*
40. **R. Husson, C. Iung, J.-F. Aubry, J. Daafouz, D. Wolf** : *Automatique : du cahier des charges à la réalisation des systèmes*. Éditions Dunod, 2007.  
*Avec la participation de Jamal Daafouz, ce n'est pas rien quand même !*
41. **E. Godoy et collectif** : *Régulation industrielle*. Éditions Dunod, L'Usine Nouvelle, 2007.  
*Ouvrage assez complet écrit par un collectif d'enseignants ou chercheurs de Supélec couvrant de nombreux aspects de l'Automatique dont les aspects fréquentiels.*
42. **B. Pradin et G. Garcia** : *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Presses Universitaires du Mirail, 2010.  
*Que dire de cet ouvrage si ce n'est que c'est celui qu'il faut acheter ! Incontestablement le meilleur rapport qualité/prix.*
43. **O. Bachelier** : *Sensibilisation à des concepts de l'Automatique*. Notes de cours, IUT de Poitiers-Châtelleraut-Niort, département de Génie Électrique et Informatique Industrielle (GEII), Licence professionnelle « Technologies Avancées Appliquées aux Véhicules » (TAAV), 2005. Téléchargeable à l'adresse :  
<http://www.lias-lab.fr/perso/olivierbachelier/teachings.php>  
*Si vous aimez la façon de voir de l'auteur...*

44. **O. Bachelier** : *Un premier pas an Automatique*. Notes de cours, IUT de Poitiers-Châtelleraut-Niort, département de Mesures Physiques (MP), deuxième année de DUT, 2014. Téléchargeable à l'adresse : <http://www.lias-lab.fr/perso/olivierbachelier/teachings.php>  
*Si vous aimez la façon de voir de l'auteur...*
45. **C. Burgat** : *Problèmes résolus d'Automatique*. Editions Ellipses, 2001. *Recueil de petits exercices, idéal pour s'initier et s'entraîner à l'approche fréquentielle. Parfait aussi pour un enseignant cherchant de nouveaux exercices.*
46. **D. Arzelier** : *Représentation et analyse des systèmes linéaires - Notes de cours*. ENSICA, Toulouse, 2013. Téléchargeable à l'adresse : <http://homepages.laas.fr/arzelier/cours.html>  
*Excellentes notes de cours, assez complètes. Belle plume, références originales et jolies illustrations.*
47. **B. Pradin** : *Polycopié de cours d'Automatique : « Automatique : Notes de cours - Exercices »*. INSA de Toulouse, 3ème année spécialité AEI. 1992.  
*Là où l'essentiel est mieux expliqué que partout ailleurs pour un étudiant ! si ce n'est dans [42].*
48. **B. Pradin** : *Notes de cours d'Automatique* ». INSA de Toulouse, 3ème année spécialité II.  
*Une version allégée de la précédente référence.*



# Chapitre 3

## *La représentation d'état*

Devant la complexité croissante des systèmes, la fonction de transfert peut parfois sembler ne pas être le modèle le plus approprié pour décrire les comportements considérés. La recherche de performances toujours plus fines peut conduire à la même conclusion. Ceci est particulièrement vrai si l'on sort du cadre de ce cours et si l'on envisage l'étude de systèmes multivariables. Peut-être encore plus vrai si l'on envisage l'implantation numérique de lois de commande un tant soit peu sophistiquées. Pour ces raisons, d'autres modèles sont utilisés et apparaissent comme une alternative à la fonction de transfert. Le plus célèbre d'entre eux est la *représentation d'état* ou *équation d'état* ou encore *modèle d'état*. Il fut popularisé dans les années 1960 même si son origine est plus lointaine. Il s'agit d'un modèle qui prend en compte la dynamique interne du système et ne se limite pas à la description d'un comportement de type entrée/sortie. Ce chapitre présente les principes de base d'un tel modèle en se restreignant néanmoins, comme pour la fonction de transfert, au cas linéaire monovariable continu et stationnaire.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Principe général</b>	<b>67</b>
<b>3.2</b>	<b>De la non-linéarité à la linéarité</b>	<b>70</b>
<b>3.3</b>	<b>Historique de la représentation d'état</b>	<b>74</b>

<b>3.4</b>	<b>Comment obtenir un modèle d'état ?</b>	<b>78</b>
3.4.1	Par le jeu d'équations	78
3.4.2	Par l'équation différentielle unique	78
<b>3.5</b>	<b>De la fonction de transfert à la représentation d'état</b>	<b>80</b>
3.5.1	Cas d'une fonction de transfert strictement propre ( $m < n$ )	81
3.5.2	Cas d'une fonction de transfert non strictement propre ( $m = n$ )	86
3.5.3	Cas d'une fonction de transfert non propre ( $m > n$ )	87
<b>3.6</b>	<b>De la représentation d'état à la fonction de transfert</b>	<b>87</b>
<b>3.7</b>	<b>D'une réalisation à l'autre</b>	<b>88</b>
3.7.1	Changement de base	89
3.7.2	Obtention d'une forme compagne horizontale	90
3.7.3	Obtention d'une forme compagne verticale	91
3.7.4	Obtention d'une forme de Jordan	91
<b>3.8</b>	<b>Associations de représentations d'état</b>	<b>94</b>
3.8.1	Modèles en parallèle	95
3.8.2	Modèles en série	96
3.8.3	Interconnexion de modèles	97
<b>3.9</b>	<b>Exercices</b>	<b>100</b>
3.9.1	Promenons nous dans les bois ...	100
3.9.2	Et les poissons, alors ?	107
3.9.3	Après la forêt et l'eau, promenons nous dans les airs	109
3.9.4	Modélisation simplifiée d'un bâtiment soumis à des secousses sismiques	111
3.9.5	Petit exemple mécanique	113
3.9.6	Système à deux chariots	113
3.9.7	Bille sur rail	114
3.9.8	Fomulation hamiltonienne de la loi de Newton	114
3.9.9	L'incontournable	115
3.9.10	Un peu d'électronique analogique	117
3.9.11	Moteur à courant continu	118
3.9.12	Rendez-vous à la salle des fêtes	119
3.9.13	Modélisation d'un lecteur de disque dur	121
3.9.14	Système hydraulique	122
3.9.15	Niveau de fluide et température dans une cuve	123
3.9.16	Maquette d'hélicoptère	125
3.9.17	Choix d'une réalisation	129

3.9.18 « Jordanisation » d'une réalisation . . . . .	130
3.9.19 Associations de systèmes . . . . .	130
<b>3.10 Correction des exercices . . . . .</b>	<b>131</b>
3.10.1 Promenons nous dans les bois ... . . . .	131
3.10.2 Et les poissons, alors? . . . . .	132
3.10.3 Après la forêt et l'eau, promenons nous dans les airs . . . . .	133
3.10.4 Modélisation simplifiée d'un bâtiment soumis à des secousses sismiques . . . . .	134
3.10.5 Petit exemple mécanique . . . . .	135
3.10.6 Système à deux chariots . . . . .	136
3.10.7 Bille sur rail . . . . .	136
3.10.8 Formulation hamiltonienne de la loi de Newton . . . . .	137
3.10.9 L'incontournable . . . . .	138
3.10.10 Un peu d'électronique analogique . . . . .	142
3.10.11 Moteur à courant continu . . . . .	145
3.10.12 Rendez-vous à la salle des fêtes . . . . .	146
3.10.13 Modélisation d'un lecteur de disque dur . . . . .	147
3.10.14 Système hydraulique . . . . .	149
3.10.15 Niveau de fluide et température dans une cuve . . . . .	149
3.10.16 Maquette d'hélicoptère . . . . .	153
3.10.17 Choix d'une réalisation . . . . .	156
3.10.18 « Jordanisation » d'une réalisation . . . . .	157
3.10.19 Associations de systèmes . . . . .	159
<b>3.11 Notes et références . . . . .</b>	<b>161</b>

## 3.1. Principe général

Comme précisé dans le préambule ci-avant, il s'agit de décrire un système en considérant sa dynamique interne et pas seulement une relation entre son entrée et sa sortie. Ainsi, il convient de « redonner de l'importance » à des grandeurs qui ne sont ni l'entrée, ni la sortie, tout en prenant en compte l'ensemble des phénomènes dynamiques et statiques qui confèrent au système son comportement. Une telle préoccupation conduit aux définitions suivantes :

État : l'état d'un système dynamique est le plus petit ensemble de variables, de grandeurs, tel que la connaissance de cet ensemble à l'instant  $t = t_0$ , ainsi que celle du signal d'entrée pour  $t \geq t_0$ , suffit à déterminer complètement le comportement du système pour  $t \geq t_0$ .

L'évolution de l'état à partir de l'instant  $t_0$  n'est donc pas déterminée par son évolution avant l'instant  $t_0$ . Seuls importent l'état à  $t_0$  et l'entrée à partir de  $t_0$ , comme l'illustre la figure 3.1 où plusieurs trajectoires de  $x(t)$  avant l'instant  $t_0$  aboutissant en  $x(t_0)$  sont compatibles avec la même trajectoire de  $x(t)$  après  $t_0$ .

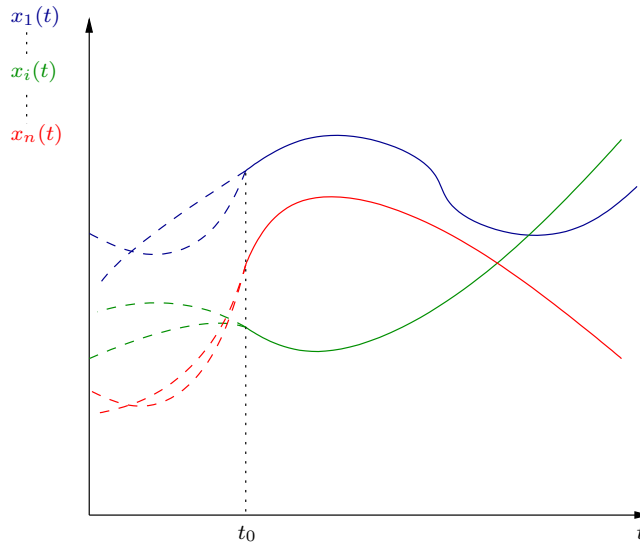


FIGURE 3.1 – L'évolution des composantes de  $x(t)$  après  $t_0$  (trait plein) est indépendante de leur évolution avant  $t_0$  (pointillés)

Variables d'état : ce sont les variables, grandeurs qui constituent l'état du système.

On considère traditionnellement que ces variables sont au nombre de  $n$  et notées

$x_1, x_2, \dots, x_n$ . Cette valeur de  $n$  est l'*ordre* du modèle. Chacune de ses variables est associée à un signal temporel. L'ensemble  $\{x_1, \dots, x_n\}$  constitue donc l'état. Les grandeurs  $x_i$  ne sont pas nécessairement des grandeurs physiques.

Vecteur d'état : de manière plus mathématique, on représente l'état par une concaténation de l'ensemble des variables d'état en un vecteur, *a priori* réel, de dimension  $n$ , que l'on note  $x = [x_1, \dots, x_n]'$ .

Il va de soi que les expressions *état* et *vecteur d'état* sont fréquemment utilisées l'une pour l'autre sans que cela n'altère fondamentalement le propos.

Espace d'état : Il s'agit tout simplement de l'espace vectoriel dans lequel le vecteur d'état  $x$  est susceptible d'évoluer, chaque instance de  $x$  étant associée à un point de cet espace.

Pour des systèmes linéaires tels que ceux étudiés ici, cet ensemble n'est autre que  $\mathbb{R}^n$ .

On dit souvent de la représentation d'état que c'est une modélisation dans l'espace d'état.

Pour un système dynamique, le vecteur d'état n'est pas unique. Plusieurs choix sont possibles. Mais pour que  $x$  soit effectivement vecteur d'état, il importe que chacune des variables d'état apparaissent, de manière explicite ou implicite, sous forme dérivée dans le jeu d'équations décrivant le système. Dans le cas contraire, il sera difficile de se servir de cette variable pour prévoir l'évolution du système. Cette constatation conduit à un système d'équations différentielles auquel s'ajoute une équation algébrique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = f(x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x(t), u(t), t) \end{bmatrix}, \\ y(t) = g(x(t), u(t), t). \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions susceptibles de prendre presque n'importe quelles formes. Cependant, on ne parle de représentation d'état que si la fonction vectorielle  $f$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$  est Lipschitzienne en  $x^1$ , continue en  $u$  et continue par morceaux en  $t$ . On rappelle que la notation  $\dot{x}(t)$  signifie  $\frac{dx(t)}{dt}$ .

Le système différentiel apparaissant dans (3.1) est appelé *équation dynamique* ou *équation d'évolution* alors que l'équation algébrique est dite *équation de mesure* ou *équation de sortie*, la préférence de l'auteur allant au second vocable.

### 3.2. De la non-linéarité à la linéarité

(Ce paragraphe reprend le propos du paragraphe 2.1.1 page 29, mais dans le contexte de l'obtention d'un modèle d'état.)

Bien entendu,  $f$  et  $g$  sont des fonctions éventuellement très complexes, généralement non linéaires et il convient, dans le cadre de ce cours, de recourir à une approximation linéaire. Pour ce faire, on considère souvent que l'état du système ainsi que son entrée évoluent au voisinage d'un *point d'équilibre*, ou plutôt *point de fonctionnement* et l'on fait l'hypothèse que toutes les variations autour de ce point sont faibles. Ainsi, en supposant que ce point d'équilibre est caractérisé par des valeurs respectives d'état, de commande et de sortie  $x_e$ ,  $u_e$ , et  $y_e$ , on peut considérer la variation d'état  $\xi(t) = x(t) - x_e$ , celle d'entrée  $v(t) = u(t) - u_e$  et celle de sortie  $z(t) = y(t) - y_e$ . Si les valeurs de  $v(t)$  et des composantes  $\xi_i(t)$  de  $\xi(t)$  restent faibles (donc approximativement assimilables aux différentielles correspondantes), on peut calculer les matrices jacobiennes suivantes

---

1. Une application scalaire  $f$  de variable scalaire, définie de  $\mathbf{I}$  sur  $\mathbb{R}$  est dite  $k$ -Lipschitzienne si  $\forall \{x_1, x_2\} \in \mathbf{I}^2, |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$ , où  $|\cdot|$  représente la valeur absolue. L'application  $f$  est dite simplement Lipschitzienne s'il existe un  $k > 0$  fini telle que  $f$  est  $k$ -Lipschitzienne (et contractante si, en outre,  $k < 1$ ). Une application vectorielle dans  $\mathbb{R}^n$  est dite Lipschitzienne si, par exemple, chaque composante s'exprime par une application Lipschitzienne. Il est aussi possible de faire appel à une distance ou à des normes sur l'ensemble du vecteur : voir cours de mathématiques. Quoi qu'il en soit cette propriété représente intuitivement une sorte de régularité un peu plus forte que la continuité.

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \end{bmatrix}; \quad B(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_e, u_e, t) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u}(x_e, u_e, t) \end{bmatrix}; \\
 C(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \end{bmatrix}; \quad D(t) = \frac{\partial g}{\partial u}(x_e, u_e, t).
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Ainsi, si l'on considère que  $\xi(t)$  et  $v(t)$  sont respectivement le nouveau vecteur d'état et la nouvelle entrée du modèle « linéarisé tangent » autour du point d'équilibre, il vient :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + B(t)v(t) \\ z(t) = C(t)\xi(t) + D(t)v(t). \end{cases}
 \tag{3.3}$$

L'approximation linéaire au premier ordre consiste donc à supposer que  $\xi(t)$  et  $v(t)$  restent faibles et à décrire le comportement du système par (3.3). Comme  $x(t)$ ,  $u(t)$  et  $y(t)$  sont les notations habituelles de l'état, de l'entrée et de la sortie, on écrira plutôt

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases}
 \tag{3.4}$$

d'autant plus qu'il n'est pas rare que l'origine soit le point d'équilibre ( $\xi = x$ ), que l'on s'intéresse au système autonome, voire que le modèle soit obtenu directement sous forme linéaire, sans avoir à recourir à une approximation. Par ailleurs, les signaux  $u(t)$ ,  $y(t)$  et  $x_i(t)$  sont de toute évidence des signaux temporels. De plus, il est assez fréquent, comme il a déjà été mentionné, que les fonctions non-linéaires  $f$  et  $g$  ne dépendent pas explicitement du temps. On parle alors de modèle *stationnaire*. On peut alors très souvent omettre la dépendance en  $t$  de manière à obtenir la représentation d'état suivante, qui correspond à un système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du. \end{cases}
 \tag{3.5}$$

Les relations données en (3.5) constituent une *représentation d'état linéaire invariante dans le temps* d'un système. Par abus de langage, on parle souvent de système **LTI** (acronyme anglais pour *Linear Time-Invariant*, c'est-à-dire linéaire invariant dans le temps). Un système LTI est un exemple de modèle stationnaire. C'est ce type de modèle qui fait l'objet du document.

La matrice  $A$  est appelée *matrice d'état* ou *d'évolution*. On la nomme aussi parfois *matrice dynamique*.  $B$  est appelée *vecteur d'entrée* ou de *commande* (d'où une ambiguïté avec le vecteur  $u$ ).  $C$  est le *vecteur de sortie*, *d'observation* ou de *mesure* (d'où une ambiguïté avec le vecteur  $y$  d'un modèle multivariable). Quant à  $D$ , c'est un scalaire dit de *transmission directe*, qui est nul s'il n'existe aucun lien statique direct entre le signal d'entrée et celui de sortie. La représentation d'état peut être associée au schéma-bloc donné par la figure 3.2.

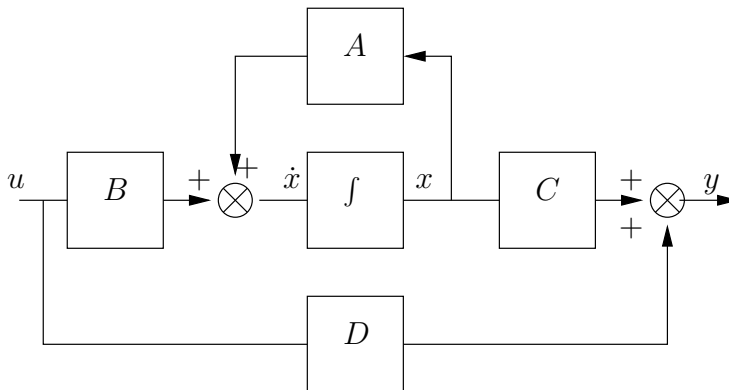


FIGURE 3.2 – Schéma-bloc d'une représentation d'état

### Exemple :

On considère le mouvement du pendule autonome représenté sur la figure 3.3. L'application de la relation fondamentale de la dynamique et le choix d'un vecteur d'état  $x$  tel que  $x' = [\theta \ \dot{\theta}]$  conduit à instancier l'équation (3.1) page 69 ainsi :



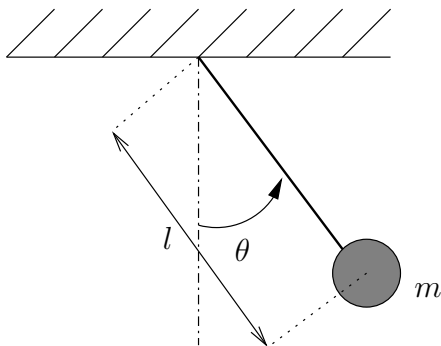


FIGURE 3.3 – Pendule en mouvement libre

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 & = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

où  $g$  est la constante gravitationnelle,  $l$  la longueur du pendule,  $m$  sa masse et  $k$  sa raideur. Le système étant autonome, c.-à-d. sans commande, les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  ne dépendent pas d'une entrée  $u$ . Le point de fonctionnement considéré est le seul des deux points d'équilibre (c.-à-d.  $\dot{x} = 0$ ) physiquement atteignable, à savoir  $x'_e = [0 \ 0]$ , l'autre étant  $x'_e = [\pi \ 0]$ .

Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e) &= 0 & ; & \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_e) = 1 & ; \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_e) &= -\frac{g}{l} \cos(x_{e1}) = -\frac{g}{l} & ; & \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_e) = -\frac{k}{m} & . \end{aligned}$$

Cette approximation conduit à la représentation LTI du système autonome

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} x$$

### 3.3. Historique de la représentation d'état

Bien que la fonction de transfert fût popularisée dans les années 1930 et 1940 alors que la représentation d'état le fut dans les années 1960, il n'est pourtant pas exact de dire que cette dernière est ultérieure. En réalité, la notion d'état était définie depuis le XIX<sup>ème</sup> siècle et apparaissait par exemple en mécanique (la formulation de la loi de I. Newton<sup>2</sup> par W. R. Hamilton<sup>3</sup> utilise implicitement la notion d'état) ainsi qu'en thermodynamique au travers des contributions de H. Poincaré<sup>4</sup>. Elle est particulièrement présente dans les travaux d'A. M. Liapounov<sup>5</sup> relatifs à la stabilité du mouvement en mécanique (1892). Ces travaux eurent d'importantes répercussions, entre autres dans la perception de certains modèles d'astronomie mais aussi dans bien d'autres domaines. Cependant, malgré deux traductions françaises en 1902 et 1907 puis une anglaise en 1949, ils ne restèrent un centre d'intérêt que dans les milieux scientifiques soviétiques. Pendant ce temps, en occident, ces méthodes dites temporelles (parce que basées sur des modèles faisant intervenir des dérivées par rapport au temps) furent supplantées par l'approche dite fréquentielle. En effet, le formalisme de la contre-réaction et les théories connexes furent progressivement développées dans les années 1930 et 1940 par des électroniciens<sup>6</sup> qui virent les systèmes d'abord comme des filtres et privilégièrent donc l'étude du comportement d'un système en fonction de la fréquence du signal d'entrée. Par ailleurs, certains outils mathématiques disponibles depuis longtemps (travaux de J. Fourier<sup>7</sup>, P.-S. de Laplace, O. Heaviside, C. Hermite, E. J. Routh, A. Hurwitz, I. S. Schur<sup>8</sup>, A. Cohn<sup>9 10</sup>) semblaient convenir parfaitement à leurs besoins ce qui conduisit tout naturellement à une prééminence de la fonction de transfert en tant que modèle de système linéaire. En outre, les progrès de l'électronique et les nécessités d'accroître le développement de technologies usant d'Automatique en temps de guerre

---

2. Philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome...(et peut-être même plombier, qui sait ?) britannique (1642 ou 1643-1727).

3. mathématicien, physicien, mécanicien et astronome irlandais, mais a priori ni philosophe, ni plombier (1805-1865) : voir sa biographie 3.3 page 138.

4. mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français (1854-1912).

5. mathématicien et physicien russe (1857-1918) : voir sa biographie en annexe page 772.

6. H. S Black, H. W. Bode, aidés tout de même d'ingénieurs bons mathématiciens tel H. Nyquist : voir leurs biographies page 42 ainsi que les notes de la fin du chapitre 2, §2.5, page 56.

7. mathématicien et physicien français (1768-1830).

8. mathématicien d'origine russe (1875-1941).

9. un élève de I. Schur.

10. voir les biographies de Laplace et Heaviside page 40 et celles de Routh et Hurwitz page 214.

aidèrent à la popularisation de cet outil, particulièrement aux USA. La France fut partie prenante de cette évolution, surtout après la guerre. De fait, il est vrai que la fonction de transfert s'avéra un outil très utile.

Néanmoins, pendant ce temps, les scientifiques soviétiques continuèrent d'accorder une grande importance à la notion d'état et aux travaux de A. M. Liapounov, grâce, entre autres, à N. G. Chetayev<sup>11</sup> et A. I. Lur'e<sup>12</sup> qui s'intéressaient à des problèmes aéronautiques ou militaires, sans évoquer ici les travaux de L. S. Pontryaguine<sup>13</sup>. L'occident ne prêta pas forcément beaucoup d'attention à ce clivage scientifique jusqu'en 1957 ou le premier satellite artificiel, Spoutnik 1, fut mis en orbite par les scientifiques de l'est.

Il apparut donc clairement que si l'approche fréquentielle était utile, il y avait aussi à gagner à développer l'approche temporelle, en particulier dans le domaine spatial. C'est pourquoi le professeur S. Lefschetz organisa une équipe de recherche, aux USA, chargée de promouvoir en occident la théorie de Liapounov. Parmi ces chercheurs figuraient entre autres J. P. LaSalle<sup>14</sup>, J. E. Bertram, J. R. Ragazzini (qui, lui, appartenait à un autre organisme), et surtout R. E. Bellman et R. E. Kálmán (R. E. ne veut pas dire « représentation d'état » ☺!)<sup>15</sup>. Ce dernier fut le grand initiateur de la représentation d'état linéaire et sut mettre en évidence l'intérêt de cette dernière au regard des outils de l'algèbre linéaire. Il introduisit les notions de commandabilité et d'observabilité et, grâce à ses travaux, la théorie de Liapounov fit un retour significatif dans la communauté des automaticiens occidentaux. Des projets à caractère spatial tels qu'Apollo ou Polaris bénéficièrent directement de ce regain d'intérêt.

Il est à noter, enfin, que, sans remplacer la fonction de transfert qui continue d'être utilisée efficacement pour de nombreuses applications, la représentation d'état se prête particulièrement bien à l'étude des systèmes multivariables (plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties) fréquemment rencontrés dans le domaine aérospatial. Selon certaines nomenclatures anglo-saxonnes, la branche de l'Automatique basée sur le concept de représentation d'état est qualifiée

---

11. Nikolai Gurevitch Chetayev, scientifique soviétique, spécialiste de la mécanique (1902-1959).

12. Anatoliy Isakovitch Lur'e, ingénieur et mathématicien appliqué soviétique, spécialiste des systèmes non linéaires (1901-1980).

13. mathématicien soviétique (1908-1988).

14. ingénieur états-unien spécialiste des systèmes dynamiques (1916-1983).

15. voir les biographies de S. Lefschetz et R. E. Bellman ci-après cette note historique, celle de J. R. Ragazzini au chapitre 9 à la page 483 et celle de R. E. Kálmán en annexe I à la page 777.

de « moderne » , par opposition à la branche fréquentielle parfois qualifiée de « classique ». De fait, l'approche temporelle ou interne basée sur les travaux de Kálmán est celle qui procure le plus d'outils novateurs de nos jours. Les notions de base de cette approche étant cependant maintenant bien connus, le qualificatif de « moderne » n'est pas toujours considéré comme approprié ou tout du moins communément admis. V. M. Popov<sup>16</sup> et H. H. Rosenbrock<sup>17</sup> ont d'ailleurs commencé dès 1963 à montrer l'intérêt qu'il y a de continuer les recherches sur l'approche fréquentielle et ses liens avec l'approche temporelle, même dans le cas des systèmes multivariables. (Ce document ne cherche pas à faire l'apologie de l'approche temporelle au détriment de l'approche fréquentielle.)

---

**Biographie 3.1** Solomon Lefschetz (1884-1972) : *mathématicien russe d'origine turque.*



*Il étudia à l'École Centrale de Paris avant de migrer aux USA où, malgré un grave accident qui le priva de ses deux mains, il obtint un doctorat en géométrie algébrique à l'Université Clark en 1911. Après plusieurs postes, il se fixa à Princeton en 1924, ce jusqu'en 1953.*

*Il s'illustra dans divers domaines des mathématiques, en particulier en topologie algébrique et en théorie des équations différentielles ordinaires non linéaires.*

*Il sortit de sa retraite en 1958, suite au lancement de Spoutnik 1, pour participer aux ac-*

*tivités du Glenn L. Martin Company's Research Institute for Advanced Studies (RIAS) à Baltimore. C'est durant cette période qu'il encadra bon nombre de chercheurs dont les travaux ont contribué à la diffusion des connaissances présentées dans ce document et de tant d'autres, travaillant notamment au projet Apollo.*

*En 1964, il forma son propre groupe de recherche à Providence, le Lefschetz Center for Dynamic Systems.*

---

16. ingénieur roumain théoricien des systèmes (1928-) : voir sa biographie page 275.

17. ingénieur états-unien spécialiste de l'Automatique (1920-2010).

**Biographie 3.2** Richard Ernest Bellman (1820-1984) : mathématicien états-unien.

Bien que grandissant en partie dans une famille ruinée par la crise de 1929, il reçut une bonne éducation et montra rapidement son intérêt marqué pour les sciences et toutes formes de culture. Après avoir hésité à se lancer dans la Physique théorique, il étudia brillamment les mathématiques au Brooklyn College pour entrer à Johns Hopkins University. Il participa ensuite à l'effort de guerre en enseignant l'électronique aux militaires et, en parallèle, obtint son master de mathématiques à l'Université du Wisconsin. Il continua son travail pour l'armée jusqu'en 1946 en passant par l'Université de Princeton et par Los Alamos où il prit part

au projet Manhattan.

Par la suite, il fut encadré par S. Lefschetz lors de sa thèse de doctorat consacrée à la théorie de la stabilité des équations différentielles (1953). Ensuite, il fit l'essentiel de sa carrière à RAND (Research ANd Development) corporation et consacra ses efforts à l'étude de la stabilité des équations différentielles, à la programmation dynamique, aux processus markoviens, stochastiques, etc. Il publia un nombre considérable d'ouvrages et d'articles, souvent de référence. Son œuvre changea la façon d'étudier les systèmes dynamiques. En 1965, il accepta un poste de professeur à l'Université de Californie Sud où il continua ses efforts dans divers domaines tels que les mathématiques pour le calcul numérique, pour la médecine, efforts toujours illustrés par de nombreux articles.

Des biographies de A. M. Liapounov et R. E. Kálmán, plus complètes, sont fournies en annexe I.

### 3.4. Comment obtenir un modèle d'état ?

On peut obtenir une représentation d'état linéaire en manipulant le jeu d'équations préliminaires ou en opérant à partir de l'équation différentielle unique.

#### 3.4.1. Par le jeu d'équations

On suppose ici que les équations manipulées sont déjà linéaires. Par souci de simplicité, on considère l'exemple du circuit RLC modélisé par les équations (2.1), page 29. Les deux grandeurs dont la dérivée intervient sont  $i$  et  $y$  (à partir de maintenant, la dépendance en le temps est omise pour alléger les notations). Soient donc les deux variables d'état  $x_1 = i$  et  $x_2 = y$ . Les équations de (2.1) peuvent se récrire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1, \end{cases}$$

ce qui conduit au modèle (3.5) page 71 avec :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad C = [0 \quad 1] ; \quad D = 0. \quad (3.6)$$

#### 3.4.2. Par l'équation différentielle unique

La technique consiste à considérer l'équation différentielle globale (2.2) page 33. On suppose d'abord que  $m = 0$ . On suppose également, sans perte de généralité, que  $a_n = 1$  et l'on pose, sans se soucier de la signification du vecteur d'état, les variables d'état suivantes :

$$x_1 = y ; \quad x_2 = \dot{y} ; \quad x_3 = \ddot{y} ; \quad \dots ; \quad x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}.$$

On peut alors montrer que :

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} ; & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} ; \\
 C &= [ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 ] ; & D &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

La technique ci-dessus appliquée à l'équation (2.3) page 34 conduit à récrire cette dernière ainsi :

$$\ddot{y} + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{LC}u.$$

On obtient alors

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} ; \quad C = [ 1 \ 0 ] ; \quad D = 0. \tag{3.8}$$

qui est un quadruplet de matrices différent de celui trouvé précédemment et donné en (3.6).

Ceci permet de constater que le modèle d'état obtenu dépend du choix des variables d'état. Il n'est donc pas unique, contrairement à la fonction de transfert. En effet, cette dernière est un modèle externe et non interne, c'est-à-dire un modèle entrée/sortie. Or, la sortie et l'entrée étant uniques, il n'existe qu'une fonction de transfert.

Dans le cas où  $m \neq 0$ , la procédure est un peu plus complexe mais répond au même principe. On suppose que  $m = n$  sans perte de généralité (il suffit de considérer  $b_j = 0 \forall j \mid m < j \leq n$ ). Le coefficient  $a_n$  est toujours supposé égal à 1. On définit :

$$\begin{cases} \beta_n = b_n, \\ \beta_{n-j} = b_{n-j} - \sum_{k=0}^{j-1} a_{n-j+k} \beta_{n-k} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Les variables d'état peuvent alors être ainsi choisies :

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_n u, \\ x_2 = \dot{x}_1 - \beta_{n-1} u, \\ x_3 = \dot{x}_2 - \beta_{n-2} u, \\ x_n = \dot{x}_{n-1} - \beta_1 u. \end{cases}$$

Il vient

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} ; \quad (3.9)$$

$$C = [ 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 ] \quad ; \quad D = \beta_n.$$

Pour le circuit RLC, les quatre matrices données en (3.8) sont recouvrées.

### 3.5. De la fonction de transfert à la représentation d'état

Comme il vient d'être vu, s'il existe une seule et unique fonction de transfert décrivant un système linéaire, il peut en revanche exister plusieurs représentations d'état dites *réalisations* du système. Dans cette partie, il est montré comment passer de l'unique fonction de transfert à plusieurs formes de réalisations.

Dans un premier temps, il est supposé que  $n > m$  (fonction de transfert strictement propre), c'est-à-dire qu'il n'existe pas de transmission directe ( $D = 0$ ) ou encore que le système est strictement causal. Il existe alors des méthodes pour déterminer des réalisations *diagonales* (ou *de Jordan*), ou des réalisations dites *compagnes*.

Ensuite, le cas  $m = n$  est envisagé. Il est alors montré que l'on peut néanmoins bénéficier des résultats obtenus dans le cas où  $n > m$ .



### 3.5.1. Cas d'une fonction de transfert strictement propre ( $m < n$ )

#### 3.5.1.1. Réalisation diagonale ou quasi diagonale de Jordan

On suppose sans perte de généralité que  $a_n = 1$  de sorte que la fonction de transfert  $G(p)$  peut s'écrire :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} = \frac{N(p)}{\prod_{i=1}^n (p - \lambda_i)}.$$

L'expression ci-dessus fait apparaître les pôles du système, c'est-à-dire les racines  $\lambda_i$  du dénominateur  $D(p)$ .

#### Pôles distincts

Dans le cas où tous les pôles  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont distincts, il est facile de réaliser la décomposition en éléments simples de  $Y(p) = G(p)U(p)$  et il vient :

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \frac{\alpha_i}{p - \lambda_i} U(p) \right)}_{X_i(p)}.$$

Si l'on focalise son attention sur chaque terme  $X_i(p)$ , on déduit que

$$pX_i(p) = \alpha_i U(p) + \lambda_i X_i(p),$$

ce qui se traduit dans le domaine temporel, en appliquant la transformation de Laplace inverse  $\mathcal{L}^{-1}$ , par

$$\dot{x}_i = \alpha_i u + \lambda_i x_i.$$

En choisissant le vecteur d'état  $x = [x_1 \ \dots \ x_n]'$ , il vient aisément la réalisation suivante, dite diagonale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 1 \ \dots \ 1] x, \end{array} \right. \quad (3.10)$$

laquelle peut également être modifiée en remplaçant  $B$  par  $C'$  et  $C$  par  $B'$ . De manière plus générale, dans une réalisation diagonale,  $B = [\beta_1 \dots \beta_n]'$  et  $C = [\gamma_1 \dots \gamma_n]$  doivent être tels que  $\beta_i \gamma_i = \alpha_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Une réalisation de la forme (3.10) est dite diagonale car la matrice d'évolution  $A$  est diagonale.

Par exemple, la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)(p-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2(p-1)}$$

peut conduire à la réalisation

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} u \\ y = [-1 \quad 1 \quad 2] x. \end{cases}$$

### Pôles multiples

Dans le cas où  $G(p)$  possède un pôle d'ordre de multiplicité supérieur à 1, la diagonalisation de  $A$  n'est pas forcément possible. Pour comprendre ce qui peut être envisagé dans cette situation, on peut tout simplement considérer une fonction de transfert  $G(p)$  ne possédant qu'un seul pôle  $\lambda$  de multiplicité  $n$ . On peut alors avoir

$$Y(p) = G(p)U(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\frac{U(p)}{(p-\lambda)^i}}_{X_{n+1-i}(p)}$$

(Il est aussi possible que  $Y(p)$  soit une somme de plusieurs termes en  $\Sigma$  de ce type.)

On voit bien, sur cette expression, que le premier terme est tel que

$$X_n(p) = \frac{U(p)}{p-\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{x}_n = \lambda x_n + u.$$

Quant aux autres termes, ils sont tels que

$$X_{j-1}(p) = \frac{U(p)}{(p-\lambda)^j} = \frac{X_j(p)}{p-\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{x}_{j-1} = \lambda x_{j-1} + x_j, \forall j \in \{2, \dots, n\}.$$

Ceci conduit à la réalisation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [\alpha_n \quad \alpha_{n-1} \quad \alpha_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_2 \quad \alpha_1] x. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Dans la réalisation ci-dessus, on constate que la matrice d'évolution  $A$  est quasi diagonale c.-à-d. constitue un bloc de Jordan<sup>18</sup>.

Pour le cas où  $G(p)$  contient des pôles d'ordre de multiplicité divers, il suffit d'associer les deux cas répertoriés précédemment comme le montre l'exemple ci-après :

$$G(p) = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p(p+1)^2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Il apparaît un pôle simple nul et un pôle double de Jordan égal à -1. Ceci conduit à la réalisation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 1 \quad 1] x. \end{array} \right.$$

**Remarque 3.1** *Il est clair que ces formes de Jordan font apparaître les pôles de  $G(p)$  sur la diagonale de  $A$ . Ainsi, ces pôles sont aussi les valeurs propres de  $A$ . Lorsque les pôles sont multiples, la matrice peut ne pas être diagonale, mais ce n'est pas systématique. En effet, il est possible qu'une matrice carrée ayant des valeurs propres multiples puissent être diagonalisée (voir cours de mathématiques).*

---

18. du nom de Camille (ou Marie Ennemond Camille) Jordan, mathématicien français (1838-1922).

### 3.5.1.2. Réalisation de forme compagne

Il existe plusieurs réalisations de forme compagne qui peuvent être facilement obtenues à partir de la fonction de transfert. Ce paragraphe est restreint aux formes compagnes les plus classiques. Pour ce faire,  $G(p)$  est supposée de la forme (2.7) page 37 avec  $a_n = 1$ . Les deux formes dites « compagnes » les plus communément rencontrées sont :

◊ Forme compagne horizontale (réalisation canonique de commande) :

Il suffit de raisonner par rapport à l'équation différentielle (2.2) page 33, que l'on peut retrouver en appliquant la transformation de Laplace inverse  $\mathcal{L}^{-1}$  à  $G(p)$ , et de poser

$$\begin{cases} x_1 = y, \\ x_2 = \dot{y}, \\ \vdots \\ x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 0] x. \end{cases} \quad (3.12)$$

Il existe une autre réalisation compagne horizontale que l'on appelle *réalisation canonique de commandabilité* et qui n'est pas présentée ici.

◊ Forme compagne verticale (réalisation canonique d'observation) : Il est de nouveau possible de raisonner par rapport à l'équation différentielle (2.2) page 33 mais la définition du vecteur est un peu plus subtile. En effet, on pose

$$\begin{cases} x_1 &= y, \\ x_2 &= q_{n-1}y + \dot{y}, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= a_2y + a_3\dot{y} + \dots + \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} - \left( b_2u + \dots + b_m \frac{d^{m-2}u}{dt^{m-2}} \right), \\ x_n &= a_1y + a_2\dot{y} + \dots + \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} - \left( b_1u + \dots + b_m \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} \right). \end{cases}$$

On obtient alors

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \ddots & & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & -a_1 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ & & -a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u, \\ y &= [ 1 \ 0 \ \dots \ \dots \ \dots \ 0 ] x. \end{cases} \quad (3.13)$$

Il existe une autre réalisation compagne verticale que l'on appelle *réalisation canonique d'observabilité* et qui n'est pas présentée ici.

Les expressions *réalisation canonique de commande* et *réalisation canonique d'observation* seront justifiées au chapitre 6.

Reprenant le dernier exemple de fonction de transfert, il vient

$$G(p) = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p(p+1)^2} = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p^3 + 2p^2 + p},$$

qui peut correspondre à la forme compagne horizontale

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= [ 1 \ 4 \ 2 ] x. \end{cases} \quad (3.14)$$

Mais  $G(p)$  peut aussi de réaliser sous la forme compagne verticale

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = [1 \ 0 \ 0] x. \end{cases} \quad (3.15)$$

### 3.5.2. Cas d'une fonction de transfert non strictement propre ( $m = n$ )

Dans le cas où  $m = n$ , il est impossible d'appliquer directement les techniques présentées ci-avant pour obtenir une réalisation du système. Cependant, on peut se ramener au cas d'une fonction de transfert strictement propre en opérant une division polynomiale de la façon suivante :

$$\begin{aligned} G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} &= \frac{\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 p + \dots + \mathbf{b}_n p^n}{D(p)} = \frac{R(p)}{D(p)} + Q = G_{spr}(p) + Q = \\ &= \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n}{D(p)} + Q. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Comme  $m = n$ , le quotient  $Q$  est une constante et le reste  $R(p)$  est un polynôme de degré strictement inférieur à celui du diviseur  $D(p)$ . Ainsi,  $G_{spr}(p)$  est une fonction de transfert strictement propre.

Les coefficients du numérateur  $N(p)$  de la fonction de transfert globale  $G(p)$  sont notés  $\mathbf{b}_i$  pour les distinguer des coefficients  $b_i$  du numérateur  $R(p)$  du transfert strictement propre  $G_{spr}(p)$  extrait de  $G(p)$ .

Par ailleurs, on a  $Y(p) = G(p)U(p) = G_{spr}U(p) + QU(p) = Y_{spr}(p) + QU(p)$ . Donc, si l'on prend  $y_{spr}$  comme sortie, la fonction de transfert associée au système obtenu est  $G_{spr}$  dont on peut déterminer une réalisation  $(A, B, C)$ . Il vient alors

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y_{spr} = Cx. \end{cases}$$

En posant  $D = Q$  et en réalisant le changement de variable inverse (dans le domaine temporel cette fois-ci)  $y = y_{spr} + Du$ , il vient

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du. \end{cases}$$

Par exemple, soit la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{p^3 + 4p^2 + 5p + 1}{p^3 + 2p^2 + p} = \frac{(p^3 + 2p^2 + p) + (2p^2 + 4p + 1)}{p^3 + 2p^2 + p} = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p^3 + 2p^2 + p} + 1 = G_{spr}(p) + 1.$$

$G_{spr}(p)$  correspond à la fonction de transfert du dernier cas traité. Il suffit donc de conserver les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  données en (3.14) en y ajoutant la transmission directe  $D = 1$ .

### 3.5.3. Cas d'une fonction de transfert non propre ( $m > n$ )

C'est très simple : si  $m > n$ , il n'y a pas de réalisation correspondante car la représentation d'état linéaire est par essence un modèle causal. Ainsi, par exemple, un régulateur PID (Proportionnel-intégral-dérivé), simple, c'est-à-dire non filtré, qui s'écrit

$$R(p) = k_1 + \frac{k_2}{p} + k_3p = \frac{k_3p^2 + k_1p + k_2}{p},$$

ou un régulateur PD (Proportionnel-dérivé), qui s'écrit

$$R(p) = k_1 + k_3p,$$

n'admettent pas de représentation d'état, en tout cas telle que définie dans ce document, parce qu'ils ne sont pas causaux. Dans la même veine, un dérivateur  $p$  n'admet pas de modèle d'état. Il est toutefois possible de proposer d'autres « représentations d'état étendues » ou « généralisées » de systèmes non causaux en introduisant le formalisme *descripteur*, également appelé *implicite* ou encore improprement *singulier*. Mais ceci sort du cadre du présent ouvrage.

## 3.6. De la représentation d'état à la fonction de transfert

S'il existe plusieurs manières d'obtenir une réalisation à partir de la fonction de transfert, cette dernière étant unique, il n'existe qu'une façon d'obtenir la fonction de transfert à partir d'une équation d'état. Pour cela, il faut noter

que la transformation de Laplace  $\mathcal{L}$  est un opérateur linéaire qui peut donc s'appliquer aux matrices. Partant de l'équation (3.5) page 71, il vient

$$\begin{cases} pX(p) &= AX(p) + BU(p) \\ Y(p) &= CX(p) + DU(p), \end{cases} \Leftrightarrow X(p) = (pI - A)^{-1}BU(p)$$

les conditions initiales étant considérées nulles puisqu'il s'agit de déterminer  $G(p)$ . De toute évidence, ceci amène

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D. \quad (3.17)$$

Le dénominateur  $D(p)$  de la fonction de transfert est souvent appelé *polynôme caractéristique* de  $A$ . Il est facile de voir qu'il est, dans l'expression ci-dessus, engendré par l'inversion matricielle et égal à (cf. §A.1.9 page 650 et §A.1.12.1 page 652 en annexe A) :

$$D(p) = \det(pI - A). \quad (3.18)$$

### 3.7. D'une réalisation à l'autre

Il a été vu qu'une fonction de transfert pouvait correspondre à plusieurs réalisations. En réalité, elle en admet même une infinité comme le montre le paragraphe qui suit.



### 3.7.1. Changement de base

On peut passer d'une réalisation à une autre tout simplement par un changement de base dans l'espace d'état  $\mathbb{R}^n$ . En effet, si l'on considère l'équation d'état (3.5) page 71, on peut appliquer au vecteur d'état un changement de repère de sorte à obtenir un nouveau vecteur d'état  $\tilde{x}$ . Ainsi, soit le changement de base  $x = M\tilde{x}$  où  $M$  est une matrice carrée de rang plein, il vient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= \underbrace{M^{-1}AM}_{\tilde{A}}\tilde{x} + \underbrace{M^{-1}B}_{\tilde{B}}u, \\ y &= \underbrace{CM}_{\tilde{C}}\tilde{x} + Du. \end{cases} \quad (3.19)$$

Le quadruplet de matrices obtenu est donc

$$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) = (M^{-1}AM, M^{-1}B, CM, D). \quad (3.20)$$

Comme il existe une infinité de matrices de passage  $M$  utilisables, il existe aussi une infinité de réalisations équivalentes qui correspondent toutes à la même fonction de transfert. En effet,

$$\tilde{G}(p) = CM(pI - M^{-1}AM)^{-1}M^{-1}B + D =$$

$$CM(M^{-1}(pI - A)M)^{-1}M^{-1}B + D = C(pI - A)^{-1}B + D = G(p).$$

En outre, puisque  $M^{-1}AM$  est semblable à  $A$ , les valeurs propres de  $A$  sont les mêmes quelle que soit la réalisation considérée. De ce fait, ce sont toujours les pôles de  $G(p)$  c'est-à-dire les racines du polynôme caractéristique  $D(p)$  donné en (3.18) (même si l'on sera plus tard amené à porter une nuance à ce propos : voir chapitre 6).

Les racines du polynôme caractéristique  $D(p)$ , c'est-à-dire les pôles du système, sont valeurs propres de la matrice d'état  $A$  quelle que soit la réalisation choisie.

Il est possible de passer d'une réalisation à une autre ce qui peut se révéler utile quand la seconde a une forme particulière. Le principe est de déterminer la matrice de passage.

### 3.7.2. Obtention d'une forme compagne horizontale

Soit un quadruplet de matrices  $(A, B, C, D)$  constituant une représentation d'état d'un système. Il s'agit alors de déterminer  $M$ , une matrice de passage à une autre réalisation  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) = (M^{-1}AM, M^{-1}B, CM, D)$  qui soit compagne horizontale.

◇ On s'attache d'abord à exprimer les colonnes de  $M$  :

On note que  $\tilde{A}$  est de la forme (3.12) page 84 où les composantes  $a_i$  sont les coefficients du polynôme caractéristique  $P(\lambda)$  qui peut être calculé :

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i \lambda^i).$$

Ceci permet d'obtenir  $\tilde{A}$ . Si l'on décompose la matrice  $M$  en  $M = [m_1, \dots, m_n]$ , alors l'égalité  $AM = M\tilde{A}$  conduit à écrire

$$\begin{cases} Am_1 & = & -a_0 m_n & \text{colonne 1} \\ Am_2 & = & v_1 - a_1 m_n & \text{colonne 2} \\ & \vdots & & \vdots \\ Am_{n-1} & = & m_{n-2} - a_{n-2} m_n & \text{colonne } n-1 \\ Am_n & = & m_{n-1} - a_{n-1} m_n & \text{colonne } n. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{n-1} & = & (A + a_{n-1}I)m_n \\ m_{n-2} & = & (A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I)m_n \\ & \vdots & \\ m_1 & = & (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_2A + a_1I)m_n \end{cases} \quad (3.21)$$

◇ On constate que  $M$  est fonction de  $m_n$ . Comment déterminer  $m_n$  ?

Compte tenu de  $Am_1 = -a_0 m_n$ , il vient :

$$(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_2A^2 + a_1A + a_0I)m_n = 0.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton<sup>19</sup>, toute matrice  $A$  vérifie son propre polynôme caractéristique, c.-à-d.

$$P(A) = \det(A - \lambda I) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_2A^2 + a_1A + a_0I = 0, \quad (3.22)$$

ce qui signifie que l'égalité précédente est vérifiée quelle que soit  $A$  et quel que soit  $m_n$ .

Toutefois, pour obtenir une réalisation canonique de commande complète, il faut aussi satisfaire  $B = M\tilde{B}$  ce qui conduit au choix  $m_n = B$ .

◇ *Procédure pratique :*

Il est donc possible de fixer arbitrairement  $m_n = B$  et de déterminer la matrice de changement de base  $M$  grâce à (3.21).

### 3.7.3. Obtention d'une forme compagne verticale

La réalisation canonique d'observation  $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D})$  est obtenue par le changement de base  $x = N\underline{x}$ . Selon un raisonnement similaire (quasiment dual) de celui du paragraphe précédent, il est possible de déterminer la matrice  $N$  ainsi :

$$(N')^{-1} = [ \ n_1 \quad \dots \quad n_n \ ] \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} n_1 &= C' \\ n_2 &= (A' + a_{n-1}I)C' \\ n_3 &= ((A')^2 + a_{n-1}A' + a_{n-2}I)C' \\ &\vdots \\ n_n &= ((A')^{n-1} + a_{n-1}(A')^{n-2} + \dots + a_1I)C' \end{cases} \quad (3.23)$$

### 3.7.4. Obtention d'une forme de Jordan

Le problème est le même que celui du paragraphe précédent mais la matrice  $M$  doit être telle que  $\tilde{A}$  est diagonale ou de Jordan.

---

19. du nom du mathématicien britannique Arthur Cayley (1821-1895) et de Sir William Rowan Hamilton dont une biographie est proposée à la page 138.

### 3.7.4.1. Les valeurs propres $\lambda_i$ de $A$ sont distinctes

Il suffit de déterminer  $n$  vecteurs non nuls linéairement indépendants  $v_i$  tels que

$$Av_i = \lambda_i v_i.$$

Les vecteurs  $v_i$  sont appelés *vecteurs propres*. On a alors  $M = V = [v_1, \dots, v_n]$ . La matrice  $\Lambda = V^{-1}AV$  est diagonale et sa diagonale contient les valeurs propres de  $A$ .

### 3.7.4.2. Les valeurs propres $\lambda_i$ de $A$ sont multiples

Dans ce cas,  $A$  peut ne pas toujours être diagonalisable mais on peut lui associer une matrice de Jordan. Pour simplifier, on suppose ici que  $A$  n'a qu'une valeur propre  $\lambda$ , d'ordre de multiplicité  $n$ . Il convient de déterminer le nombre de blocs de Jordan dans  $J = V^{-1}AV$ . Ce nombre est donné par

$$q = n - \text{rang}(\lambda I - A).$$

Pour comprendre comment déterminer les vecteurs propres généralisés, il est plus facile d'envisager les deux cas extrêmes,  $q = 1$  (un seul bloc de Jordan) et  $q = n$  (matrice  $J$  diagonale). Les cas intermédiaires ne correspondent qu'à une association de ces deux cas comme il est expliqué par la suite.

◇  $q = 1$  :

La relation

$$AV = A[v_1, \dots, v_n] = VJ = [v_1, \dots, v_n] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

conduit aux égalités suivantes (une égalité par colonne) :

$$\begin{cases} Av_1 & = & \lambda v_1 \\ Av_2 & = & v_1 + \lambda v_2 \\ & \vdots & \\ Av_{p-1} & = & v_{p-2} + \lambda v_{p-1} \\ Av_p & = & v_{p-1} + \lambda v_p. \end{cases}$$

Il faut donc procéder à une résolution séquentielle de toutes ces équations linéaires en s'assurant toujours que les  $v_i$  sont bien linéairement indépendants.

◇  $q = n$  :

Dans ce cas, on détermine simplement  $n$  vecteurs  $v_i$  linéairement indépendants tels que

$$Av_i = \lambda v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

◇  $q \neq n$  et  $q \neq 1$  :

Dans ce cas là, il y a plusieurs blocs de Jordan et il convient d'associer les deux techniques expliquées ci-avant.

**Remarque 3.2** *Il peut exister une ambiguïté sur la taille des blocs de Jordan ; si cela se produit, on peut envisager tous les cas possibles sachant qu'un seul conduira à une solution. Ainsi, la première solution rencontrée est recevable.*

Dans le cas où il y a plusieurs valeurs propres multiples, il faut procéder comme ci-dessus, mais ce, pour chaque valeur propre.

Exemple :

Soit la matrice d'état

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a :

$$P(\lambda) = \det \left( \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda(\lambda - 1)^2$$

$\lambda_1 = 0$  est une valeur propre simple. En résolvant  $Av_1 = \lambda_1 v_1$ , on peut voir que  $v_1 = [0 \ 1 \ -1]'$  est une solution.

$\lambda_2 = 1$  est valeur propre double. Or,  $q = n - \text{rang}(I - A) = 3 - 1 = 2$  donc l'on sait que  $A$  est diagonalisable. En résolvant  $Av = \lambda v$ , on trouve

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b,$$

où  $a$  et  $b$  sont deux degrés de liberté. En choisissant  $[a \ b] = [0 \ 1]$  et  $[a \ b] = [1 \ 0]$ , on obtient les deux derniers vecteurs propres et

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Lambda = V^{-1}AV = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

**Remarque 3.3** Dans l'exemple ci-avant, la matrice  $A$  est diagonalisable malgré la présence d'une valeur propre multiple, à savoir 1. Il s'agit là d'une distinction entre multiplicité algébrique et multiplicité géométrique (voir cours de mathématiques).

### 3.8. Associations de représentations d'état

Dans cette partie, les trois règles fondamentales d'associations des modèles d'état sont présentées : modèles en parallèle, modèles en série et bouclage d'un modèle par un autre (interconnection). Dans les trois cas, les deux sous-systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  ont pour entrées respectives  $u_1$  et  $u_2$ , pour sorties respectives  $y_1$  et  $y_2$ . Ils admettent pour représentations d'état respectives

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1, \\ y_1 = C_1x_1 + D_1u_1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2, \\ y_2 = C_2x_2 + D_2u_2. \end{cases}$$

Ainsi, sont-ils aussi respectivement associés aux fonctions de transfert

$$G_1(p) = C_1(pI - A_1)^{-1}B_1 + D_1 \quad \text{et} \quad G_2(p) = C_2(pI - A_2)^{-1}B_2 + D_2.$$

En outre, on note  $x$  la concaténation vectorielle  $x = [x'_1 \ x'_2]'$  qui est le vecteur d'état correspondant à une réalisation  $(A, B, C, D)$  du système global  $\Sigma$ .

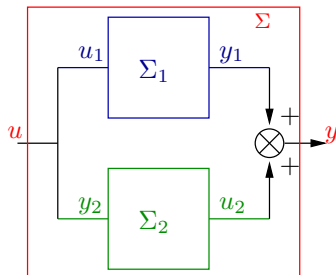


FIGURE 3.4 – Systèmes en parallèle

### 3.8.1. Modèles en parallèle

Les systèmes linéaires  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  de réalisations respectives  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$  et  $(A_2, B_2, C_2, D_2)$ , sont placés en parallèle comme indiqué par la figure 3.4. Une possibilité pour établir une réalisation globale  $(A, B, C, D)$  de cette mise en parallèle  $\Sigma$  est de considérer le vecteur d'état global  $x$ . Il est alors facile de voir que

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}; & B &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}; \\ C &= [C_1 \quad C_2]; & D &= D_1 + D_2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Il est en outre tout aussi facile de vérifier qu'il vient

$$\begin{aligned} G(p) &= C(pI - A)^{-1}B + D = \\ &= (D_1 + D_2) + [C_1 \quad C_2] \left( pI - \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow G(p) &= (D_1 + D_2) + C_1(pI - A_1)^{-1}B_1 + C_2(pI - A_2)^{-1}B_2 \\ &\Leftrightarrow G(p) = G_1(p) + G_2(p). \end{aligned}$$

Le résultat sur les fonctions de transfert en parallèle est donc recouvré.

### 3.8.2. Modèles en série

Les systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont maintenant connectés en série comme le montre la figure 3.5.

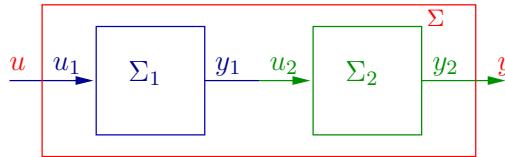


FIGURE 3.5 – Systèmes en série

Il vient alors

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1 = A_1x_1 + B_1u.$$

De plus,

$$\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2 = A_2x_2 + B_2y_1 = A_2x_2 + B_2C_1x_1 + B_2D_1u_1$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_2 = B_2C_1x_1 + A_2x_2 + B_2D_1u.$$

Enfin,

$$y = y_2 = C_2x_2 + D_2u_2 = C_2x_2 + D_2y_1 = C_2x_2 + D_2C_1x_1 + D_2D_1u_2$$

$$\Leftrightarrow y = D_2C_1x_1 + C_2x_2 + D_2D_1u.$$

Ces équations permettent de déduire qu'une réalisation  $(A, B, C, D)$  de la mise en série  $\Sigma$  correspondant à l'état  $x$  se résume à

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix}; & B &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix}; \\ C &= \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix}; & D &= D_2D_1. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La fonction de transfert  $G(p)$  associée à  $\Sigma$  s'exprime

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D =$$



$$\begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p - A_1 & 0 \\ -B_2C_1 & p - A_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} + D_2D_1.$$

L'inversion matricielle se résoud facilement à l'aide du système

$$\begin{cases} X(pI - A_1) - YB_2C_1 & = I \\ Y(pI - A_2) & = 0 \\ Z(pI - A_1) - TB_2C_1 & = 0 \\ T(pI - A_2) & = I \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X & = (pI - A_1)^{-1} \\ Y & = 0 \\ Z & = (pI - A_2)^{-1}B_2C_1(pI - A_1)^{-1} \\ T & = (pI - A_2)^{-1} \end{cases}$$

qui permet de déduire que

$$\begin{bmatrix} p - A_1 & 0 \\ -B_2C_1 & p - A_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (pI - A_1)^{-1} & 0 \\ (pI - A_2)^{-1}B_2C_1(pI - A_1)^{-1} & (p - A_2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Ainsi,  $G(p)$  devient

$$G(p) = D_2C_1(pI - A_1)^{-1}B_1 + C_2(pI - A_2)^{-1}B_2C_1(pI - A_1)^{-1}B_1 + \\ C_2(pI - A_2)^{-1}B_2D_1 + D_2D_1$$

$$\Leftrightarrow G(p) = (C_2(pI - A_2)^{-1}B_2 + D_2)(C_1(pI - A_1)^{-1}B_1 + D_1) = G_2(p)G_1(p).$$

Le résultat connu sur les fonctions de transfert en série est vérifié.

### 3.8.3. Interconnexion de modèles

Les deux systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont maintenant interconnectés, c.-à-d. associés par un bouclage tel que celui représenté sur la figure 3.6. On suppose que  $D_2D_1 \neq 1$  (condition dite de *bien posé de l'interconnexion*).

La commande  $u_1$  s'écrit

$$u_1 = u + y_2 = u + C_2x_2 + D_2y_1$$

$$\Leftrightarrow u_1 = u + C_2x_2 + D_2(C_1x_1 + D_1u_1) = u + C_2x_2 + D_2C_1x_1 + D_2D_1u_1$$

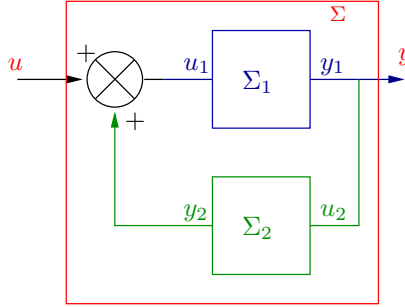


FIGURE 3.6 – Systèmes interconnectés

$$\Leftrightarrow (1 - D_2D_1)u_1 = D_2C_1x_1 + C_2x_2 + u$$

$$\Leftrightarrow u_1 = (1 - D_2D_1)^{-1}D_2C_1x_1 + (1 - D_2D_1)^{-1}C_2x_2 + (1 - D_2D_1)^{-1}u.$$

La condition de bien posé permet d'assurer que l'inversion est possible. Le vecteur d'état de  $\Sigma_1$  se dérive ainsi :

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1 \Leftrightarrow$$

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1(1 - D_2D_1)^{-1}D_2C_1x_1 + B_1(1 - D_2D_1)^{-1}C_2x_2 + B_1(1 - D_2D_1)^{-1}u.$$

Le vecteur d'état  $x_2$  se dérive quant à lui ainsi :

$$\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2 = A_2x_2 + B_2y_1$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2C_1x_1 + B_2D_1u_1$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_2 = B_2C_1x_1 + A_2x_2 + B_2D_1(1 - D_2D_1)^{-1}D_2C_1x_1 +$$

$$B_2D_1(1 - D_2D_1)^{-1}C_2x_2 + B_2D_1(1 - D_2D_1)^{-1}u$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_2 = B_2(I + D_1(1 - D_2D_1)^{-1}D_2)C_1x_1 + (A_2 + B_2D_1(1 - D_2D_1)^{-1}C_2)x_2 +$$

$$B_2D_1(1 - D_2D_1)^{-1}u.$$

De plus, l'expression de  $y$  est

$$y = C_1x_1 + D_1u_1 =$$

$$C_1x_1 + D_1(1 - D_2D_1)^{-1}D_2C_1x_1 + D_1(1 - D_2D_1)^{-1}C_2x_2 + D_1(1 - D_2D_1)^{-1}u.$$

Une réalisation de  $\Sigma$  correspondant à l'état  $x$  est donc

$$A = \begin{bmatrix} A_1 + B_1(1 - D_2D_1)^{-1}D_2C_1 & B_1(1 - D_2D_1)^{-1}C_2 \\ B_2(I + D_1(1 - D_2D_1)^{-1}D_2)C_1 & (A_2 + B_2D_1(1 - D_2D_1)^{-1}C_2) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1(1 - D_2D_1)^{-1} \\ B_2D_1(1 - D_2D_1)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$C = \begin{bmatrix} (C_1 + D_1(1 - D_2D_1)^{-1}D_2C_1) & D_1(1 - D_2D_1)^{-1}C_2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$D = D_1(1 - D_2D_1)^{-1}. \quad (3.29)$$

Il est assez fastidieux, voire non trivial, de retrouver, à partir de cette représentation d'état, la célèbre formule de Black (dont on a vu au paragraphe 1.7 page 20 qu'il était peut-être plus juste de l'attribuer à Hall) :

$$G(p) = \frac{G_1(p)}{1 - G_1(p)G_2(p)}. \quad (3.30)$$

**Remarque 3.4** *Certaines quantités scalaires peuvent être déplacées dans les équations (3.24), (3.25) et (3.26-3.29) telles que  $D_1$ ,  $D_2$  ou encore  $(1 - D_2D_1)^{-1}$ . Toutefois, il est conseillé de conserver ces écritures car dans le cas de représentations multivariées (qui sortent un peu du cadre de ce document), c'est-à-dire impliquant plusieurs entrées ou plusieurs sorties, ces quantités deviennent matricielles. Ainsi, certaines réécritures valides en monovarié deviennent fausses en multivarié car il n'y a pas commutativité du produit matriciel. En revanche, les équations (3.24), (3.25) et (3.26-3.29) restent valides en multivarié.*

## 3.9. Exercices

*Ce chapitre est celui qui comporte le plus d'exercices car il est essentiel de comprendre ce qu'est vraiment une représentation d'état et de voir que tous les domaines sont susceptibles d'en faire intervenir lors d'une modélisation. Il ne s'agit pas ici de se focaliser sur les exemples utilisés eux-mêmes (souvent simplifiés pour se restreindre au cadre linéaire stationnaire) mais de voir comment un modèle d'état peut s'obtenir à partir de quelques données, d'un jeu d'équations. Les corrections des exercices exposés sont proposées dans la partie suivante. Les notes de l'auteur apparaissant parfois à la fin des exercices sont totalement dénuées de bon sens et d'intérêt.*

### 3.9.1. Promenons nous dans les bois ...

*... pendant que les lapins n'y sont pas.*

Cet exercice a pour but de montrer que tout peut être modélisé, même des phénomènes peu réalistes. Le lecteur peut apprécier ou non le ton du texte, mais il ne doit pas se méprendre, il s'agit bien d'un exercice avec son lot de questions visant à tester la compréhension des étudiants.

Il existe un petit bois proche du campus de l'Université de Poitiers où trois populations d'animaux doivent cohabiter. Les premiers animaux sont des lapins. La population de lapins à un instant  $t$  est notée  $l(t)$ . Le bois est supposé clos de sorte que les animaux ne peuvent ni entrer ni sortir (certes ce n'est pas ordinaire mais cela simplifie les équations!). Cette population présente un taux de natalité  $n_l$  et un taux de mortalité naturelle  $m_l$ . Par ailleurs, les lapins sont soumis à la prédation d'une population  $r(t)$  de renards. Le nombre de lapins est considéré largement suffisant pour que la prédation soit essentiellement lié au nombre  $r(t)$  de renards. Le taux de prédation est noté  $q$ . Ainsi l'évolution du nombre de lapins est, en première approche, traduite par l'équation différentielle

$$\frac{dl(t)}{dt} = n_l l(t) - m_l l(t) - qr(t). \quad (3.31)$$

Questions :

- Choisir un vecteur d'état et établir une représentation d'état liant la commande  $u(t) = r(t)$  à la sortie  $y(t) = l(t)$ .
- De quel ordre est ce modèle ?

En fait, ce n'est pas si simple. La troisième population est celle des chasseurs. Un chasseur tire sur tout ce qui bouge, renards et lapins (et parfois même, l'alcool aidant, d'autres chasseurs, mais ce phénomène n'intervient pas encore dans les calculs). Si l'on note  $c(t)$  la population moyenne de chasseurs, l'équation (3.31) se transforme en

$$\frac{dl(t)}{dt} = n_l l(t) - m_l l(t) - qr(t) - t_l c(t), \quad (3.32)$$

où  $t_l$  est le taux de massacre de lapins par les chasseurs alcoolisés.

De plus, il faut prendre en compte l'évolution de la population de renards  $r(t)$ . La mortalité naturelle des renards est notée  $m_r$ . L'accroissement de leur population est essentiellement liée à la présence des lapins par un facteur  $n_r$  (mieux vaut offrir le restaurant à sa belle...), ainsi qu'à celle des chasseurs. Une seconde équation doit donc être prise en compte :

$$\frac{dr(t)}{dt} = n_r l(t) - m_r r(t) - t_r c(t). \quad (3.33)$$

Dans cette équation,  $t_r$  est le taux de massacre de renards par les chasseurs alcoolisés.

Questions :

- Choisir un vecteur d'état et établir une représentation d'état liant la commande  $u(t) = c(t)$  à la sortie  $y(t) = l(t)$ .
- Dédire une fonction de transfert.

Oui mais voilà, la population des chasseurs alcoolisés est elle-même sujete à des variations. Il convient de considérer la mortalité des chasseurs suite aux accidents de tir. Elle n'est pas aussi négligeable que prévue. Par ailleurs, d'autres risques doivent aussi être pris en compte. Une étude sociologique menée par d'éminents chercheurs montre que la population de chasseurs  $c(t)$  évolue, en première approximation, de la façon suivante :

$$\frac{dc(t)}{dt} = -hb(t) - er(t) - sc(t), \quad (3.34)$$

où  $b(t)$  est le nombre de bouteilles posées sur la table lors du repas de midi. Le nombre  $s$  représente le taux d'accidents de tirs, alors que  $h$  représente le taux d'accidents mortels, vasculaires ou par reflux d'aliments dans les poumons, taux qui est fort logiquement lié au nombre de bouteilles. Le scalaire  $e$  est lié aux morsures que subissent les chasseurs de la part des renards enragés (le lecteur peut sourire mais est-il vacciné?).

Cependant, encore une fois, ce n'est pas aussi simple. En 1977, une scientifique française, Chantal Goya, peaufine le modèle précédent. En effet, elle démontre l'existence d'une petite proportion de lapins armés de fusils et capables d'abattre des chasseurs. (Il se murmure que Chantal Goya (1942-) serait en fait plutôt chanteuse... on raconte vraiment n'importe quoi.) Ainsi l'équation (3.34) est réactualisée en

$$\frac{dc(t)}{dt} = -hb(t) - er(t) - sc(t) - gl(t), \quad (3.35)$$

où  $g$  est le coefficient dit « de Goya » (*a priori* très faible mais bon...), caractérisant la mortalité des chasseurs liée aux tirs des lapins. De plus, le nombre de bouteilles sur la table,  $b(t)$ , subit lui-même une évolution liée à la présence des femmes des chasseurs. Elles sont les seules créatures à pouvoir entrer et sortir du bois. Leur population est notée  $f(t)$ . Le signal  $b(t)$  répond à l'équation

$$\frac{db(t)}{dt} = kf(t). \quad (3.36)$$

### Questions :

- Choisir un vecteur d'état et établir une représentation d'état liant la commande  $u(t) = f(t)$  à la sortie  $y(t) = l(t)$ .
- De quel ordre est le modèle obtenu ?
- Déterminer au moins une valeur propre de la matrice d'état.

**Remarque 3.5** Si le lecteur doute de la véracité d'un tel modèle, il faut lui concéder qu'il a raison. C'est un modèle approximatif fortement linéarisé. Ainsi la mortalité des lapins due aux tirs réussis par les chasseurs est en réalité lié aux rencontres entre ces derniers et les chasseurs et l'on pourrait remplacer  $t_1c(t)$  par  $t_1l(t)c(t)$ . De même  $t_r c(t)$  serait remplacé par  $t_r r(t)c(t)$ . La natalité et la mortalité des renards, à savoir  $n_r(t)$  et  $m_r(t)$  pourraient être également associées au produit  $l(t)r(t)$ . Selon cette même logique, il serait peut-être pertinent de remplacer :

- $er(t)$  par  $er(t)c(t)$ ,
- $gl(t)$  par  $gl(t)c(t)$ ,
- $sl(t)$  par  $sl(t)c(t)$ .

Par ailleurs, les femmes des chasseurs ont, c'est bien connu, la curieuse habitude de se vêtir de survêtement fuschia contrastant dangereusement avec les treillis kaki de leur maris, auprès desquels elles gambadent amoureusement. De ce fait, la vision des lapins tireurs s'en trouve améliorée, ce qui se traduit par une augmentation du coefficient de Goya  $g$  qui devient alors une fonction de  $f$ , et qui pourrait être remplacé par  $g(1 + \alpha f)$ ,  $\alpha > 0$ . De plus, les lapins proies perçoivent plus tôt la présence des chasseurs grâce à ce fuschia qui tranche avec le vert environnant. Ils se protègent donc mieux. Ceci conduit à une diminution de  $t_1$  qui devient aussi une fonction de  $f$  et qui pourrait être remplacé par  $t_1 f(1 - \beta)$ ,  $0 < \beta < 1$ . Le même phénomène se produit avec les renards et  $t_r$  pourrait être remplacé par  $t_r f(1 - \gamma)$ ,  $0 < \gamma < 1$ . En revanche, il faut reconnaître aux chasseurs et à leurs femmes que le fuschia limite les accidents de tirs et contribue à baisser  $s$  qui pourrait être remplacé par  $sf(1 - \delta)$ ,  $0 < \delta < 1$ . Les renards enragés peuvent néanmoins repérer un peu mieux leurs proies donc  $e$  pourrait être remplacé par  $e(1 + \mu f)$ ,  $\mu > 0$ . Sans évoquer la possible perte de pourvoyeuses de bouteilles, abattues ou mordues, trop visibles qu'elle sont dans leur tenue fuschia.

Ainsi, de nombreuses et fortes non-linéarités ont été sauvagement négligées et le lecteur jugera de ce à quoi il a échappé lors de la résolution de cet exercice.

En outre, il faut savoir qu'il existe une probabilité non nulle de blessures par balle des chasseurs par des tirs de renards comme en témoigne cette « coupure de presse » donnée ci-après et extraite du site internet [Zigonet.com](http://www.zigonet.com).

Enfin, si le lecteur doute aussi de la dangerosité des lapins et ne voit en cet exercice qu'un prétexte à transformer des équations différentielles en modèles d'état, il ne saurait être trop judicieux de le renvoyer à deux références de qualité sur la nocivité potentielle des lapins **blancs**, à savoir :

- l'animation ultra réaliste Big Buck Bunny (voir fig. 3.7) téléchargeable sur la toile : <http://bbb3d.renderfarming.net/download.html> ;
- le documentaire historique à caractère hautement didactique Monty Python and the Holy Grail, réalisé en 1975 par Terry Gilliam et Terry Jones.

En s'approchant d'un renard qu'il venait de blesser, un chasseur a été blessé d'une balle dans la jambe tirée par... sa proie.

Dans la région de Grodno, en Biélorussie, les renards savent se défendre contre les chasseurs. Ils vont même jusqu'à retourner l'arme du prédateur contre lui pour réussir à s'enfuir ! En effet, selon les médias russes, un chasseur s'est fait tirer dessus par un renard qu'il venait de blesser.

Après s'en être approché et l'avoir touché, il a vu l'animal réagir et lui sauter dessus. Durant la bataille, il aurait déclenché la gâchette du fusil, tirant alors une balle dans le genou de son prédateur. La douleur ayant fait lâcher prise le chasseur, le renard en a alors profité pour s'échapper en s'enfonçant dans les bois.

La victime a elle dû se rendre aux urgences pour se faire retirer la balle du genou et soigner sa plaie.



FIGURE 3.7 – Big Buck Bunny





FIGURE 3.8 – Photographie d'archive d'une battue tournant mal



FIGURE 3.9 – Illustration d'une partie de l'équation (3.34)



### Note de l'auteur



L'auteur de ce document ne cherche en aucun cas à dénigrer une quelconque catégorie de personnes et il s'agit juste d'un énoncé qui se veut humoristique (avec succès ou non). Toute ressemblance avec des personnes existant ou ayant existé serait purement fortuite... sauf au moins pour deux personnes. Un jour un chasseur ivre a tiré sur un lapin alors que ce dernier s'était réfugié dans le poulailler d'un ancien voisin de l'auteur. Quelque peu énervé par la remarque pourtant fort justifiée d'un autre voisin adolescent sorti en entendant les coups de feu, le chasseur a argué qu'étant muni d'un fusil, il remporterait ce débat, largement soutenu en ce sens par sa femme en survêtement fuschia. L'auteur, également adolescent à l'époque, et son voisin, constatant l'évidente ébriété du chasseur, ont préféré adhérer à ce point de vue. C'est donc en hommage à ce couple mémorable que cet énoncé a été rédigé. Pour le reste des chasseurs, qu'ils oublient cette fantaisie douteuse. Et longue vie à tous bien sûr !

**Remarque 3.6** (*Plus sérieuse!*) Les modèles où apparaissent ces problèmes de prédation sont appelés modèles proies-prédateurs. Comme il a été dit précédemment, ces modèles sont en réalité fortement non linéaires car ils font intervenir des produits de variables d'état, ce qui est assez difficile à linéariser de façon raisonnable. Les exemples varient au gré des humeurs des auteurs. Tantôt des loups attaquent des moutons, tantôt des renards attaquent des lapins, des lièvres ou des mulots. Les populations bactériennes peuvent aussi donner lieu à de nombreux exercices mais le grand classique reste la prédation de ces nuisibles que sont les pucerons par nos alliées, les coccinelles. Tout cela est très sérieux car il existe des recherches visant à minimiser l'effet néfaste des pucerons sur les récoltes grâce à des coccinelles. Ce genre de modèles proies-prédateurs semble remonter à certaines considérations de Nicolas Bernoulli, mathématicien suisse (1687-1759), qui proposa des modèles linéaires assez simplistes. Cependant, la référence retenue dans le domaine est celle des travaux du mathématicien statisticien états-unien, spécialiste de la dynamique des populations, James Lotka (1880-1949) et ceux développés indépendamment par Vito Volterra, mathématicien et physicien italien (1860-1940). C'est pourquoi l'on parle de modèles (non linéaires) de Lotka-Volterra. Ces modèles sont néanmoins, sans doute encore, de bien grossières approximations.

## 3.9.2. Et les poissons, alors ?

Il serait bien restrictif de ne s'intéresser qu'aux forêts et aux lapins alors que les poissons nous tendent les nageoires pour que leur population soit modélisée. De nouveau, une redoutable approximation linéaire est opérée dans cet exercice pour décrire le comportement d'un stock de poissons répartis en classes d'âge. Ainsi, on considère un bassin d'élevage dans lequel prolifère une seule variété de poissons non cannibales (ce détail est important car ainsi, il n'est nul besoin d'envisager la prédation). Les classes d'âge sont indicées de 0 à  $(n-1)$ , divisant ainsi la population  $p(t)$  de poissons en  $p_0(t), p_1(t), \dots, p_{n-1}(t)$ . Le stock global de poissons subit un effort de pêche supposé constant et noté  $E$  (ah, ces pêcheurs, toujours d'attaque dès potron-minet!). La population  $p_0(t)$  est enrichie volontairement par l'introduction permanente d'une quantité d'alevins. Ce débit entrant, qui est la commande du système halieutique considéré, est noté  $a(t)$ . Trois équations différentielles peuvent suffire pour décrire le comportement du système :

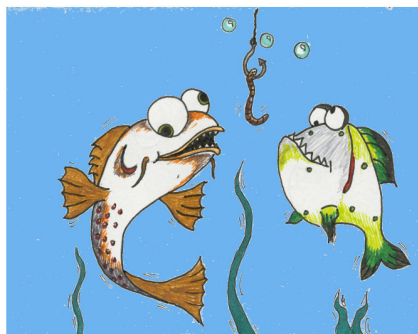
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_0(t) = \underbrace{-\alpha p_0(t)}_{\text{passage classe suivante}} - \underbrace{m_0 p_0(t)}_{\text{mortalité}} \\ \quad + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} f_i e_i p_i(t)}_{\text{ponte}} + \underbrace{a(t)}_{\text{alevins}}, \\ \dot{p}_i(t) = \underbrace{\alpha p_{i-1}(t)}_{\text{apport classe précédente}} - \underbrace{\alpha p_i(t)}_{\text{passage classe suivante}} \\ \quad - \underbrace{m_i p_i(t)}_{\text{mortalité}} - \underbrace{q_i E p_i(t)}_{\text{pêche}}, \\ \dot{p}_{n-1}(t) = \underbrace{\alpha p_{n-2}(t)}_{\text{apport classe précédente}} - \underbrace{m_{n-1} p_{n-1}(t)}_{\text{mortalité}} \\ \quad - \underbrace{q_{n-1} E p_{n-1}(t)}_{\text{pêche}} \end{array} \right.$$

$\forall i \in \{1, \dots, n-2\}$ . Dans ces équations, les paramètres intervenant dans le modèle sont les suivants :

- $\alpha$  : coefficient dit « de passage linéaire » qui traduit le passage d'une classe d'âge à une autre (identique pour toutes les classes);
- $m_i$  : coefficient de mortalité naturelle de la classe  $i$ ;
- $f_i$  : taux de fécondité de la classe  $i$  (la classe 0 est trop jeune pour féconder);
- $e_i$  : efficacité reproductive de la classe  $i$ ;
- $q_i$  : capturabilité de la classe  $i$  (la classe 0 n'est pas pêchée car le menu fretin passe à travers les mailles du filet et la taille critique pour la capture n'est atteinte qu'à partir de la classe 1).

Questions :

- En considérant comme entrée de commande le débit d'alevins  $a(t)$  et comme sortie la pêche totale sur les classes de 1 à  $(n - 1)$ , écrire une représentation d'état pour  $n = 3$ .
- Répéter le même développement pour  $n = 2$  (oui, c'est plus simple!) et déduire la fonction de transfert.
- Toujours pour  $n = 2$ , proposer une forme compagne (réalisation canonique de commande ou d'observation).
- Expliquer comment retrouver la matrice de changement de base permettant de passer à cette forme canonique (ne pas faire le calcul... sauf en cas de grosse envie).





### Note de l'auteur



Attention, ce document ne doit pas tomber entre toutes les mains. Si un ministre de l'éducation nationale aux visées budgétaires préconçues ou un quelconque chef de cabinet soucieux de plaire au dit ministre venait à lire cet énoncé, il serait tenté d'adapter le modèle au contingent d'élèves et d'étudiants en remplaçant chaque classe d'âge par une année d'école, la mortalité (de grâce) par le simple abandon de l'école, le passage linéaire par l'admission en classe supérieure, le débit d'alevins par l'arrivée des chérubins en petite section de maternelle (sans couche-culotte, Monsieur le Ministre), la capturabilité par le taux d'entrée sur le marché du travail et donc la pêche globale par l'insertion professionnelle. Toutefois, il faudrait compliquer ce modèle car  $\alpha$  (le passage linéaire) deviendrait pour ce cas une fonction de  $x_i$  et du temps (ben oui, c'est pas gagné à tous les coups, le passage en classe supérieure, ça se mérite, si si!). De peur de complexifier le modèle et donc afin de garder  $\alpha$  constant, il pourrait être décidé de supprimer les redoublements. Mais d'ailleurs, n'est-ce pas déjà fait? Et d'ajouter les populations d'enseignants dans les équations et de commander ce gros système afin de minimiser un critère financier, etc. Non, l'auteur n'ose imaginer de pareilles tentatives. Cependant, il conseille de préserver la confidentialité du document. L'Automatique n'est pas à la portée de tout le monde.

#### 3.9.3. Après la forêt et l'eau, promenons nous dans les airs

Il s'agit d'un exercice facile visant à obtenir une représentation d'état très simplifiée décrivant l'évolution de l'altitude d'un aérostat, plus précisément d'une montgolfière.

Sans entrer dans le détail des équations de la physique, après linéarisation autour d'un point de fonctionnement caractérisant une altitude constante, les équations différentielles obtenues ont la structure

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \alpha\theta + u, \\ \dot{v} &= \beta v + \sigma\theta, \\ \dot{h} &= v. \end{cases}$$

Dans ces équations,  $u$  est une entrée de commande proportionnelle à la variation d'énergie de chauffage par rapport à l'énergie au point de

fonctionnement,  $\theta$  est l'écart de température de l'air dans le ballon par rapport à la température d'équilibre au point de fonctionnement,  $v$  est la vitesse ascensionnelle et  $h$  est la variation d'altitude par rapport à l'altitude au point de fonctionnement. Les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\sigma$  sont des constantes dont la signification n'est pas détaillée ici.

Questions :

- En considérant l'entrée  $u$  et la sortie  $y = h$ , déterminer une représentation d'état du système linéarisé tangent décrit ci-avant.
- Quelles sont les valeurs propres de la matrice d'état ?
- En déduire les pôles du système (racines du dénominateur de la fonction de transfert).



### 3.9.4. Modélisation simplifiée d'un bâtiment soumis à des secousses sismiques

Il s'agit de modéliser de façon simplifiée le comportement d'une structure d'immeuble soumise à un tremblement de terre.

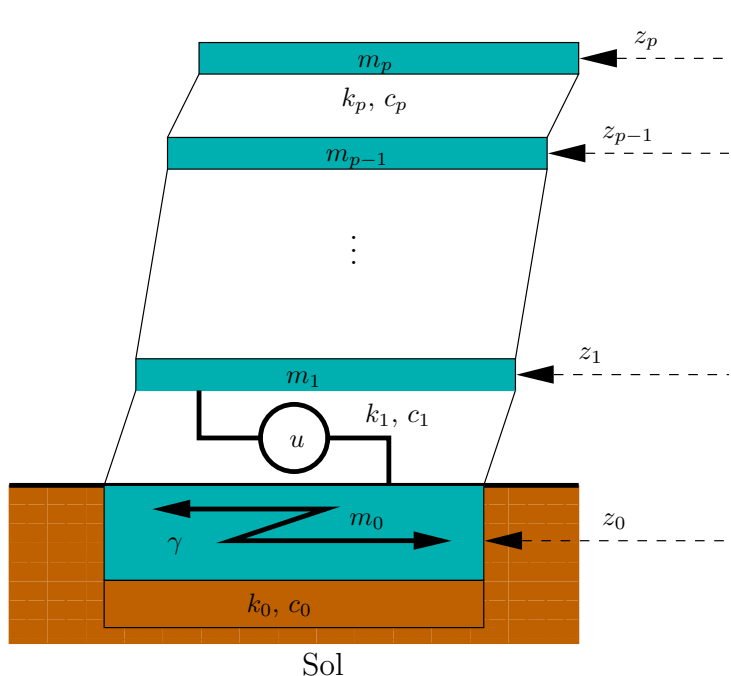


FIGURE 3.10 – Schéma d'un immeuble subissant une secousse sismique

Cette structure repose sur une base fondatrice associée à une masse  $m_0$ . Cette base doit être « ancrée » dans le sol qui lui sert de réceptacle. Mais cette liaison fait en réalité intervenir une raideur  $k_0$  et un coefficient d'amortissement (au sens mécanique du terme)  $c_0$ . De même, chaque étage de l'immeuble, d'indice  $i$ , est de masse  $m_i$  et fait apparaître un amortissement  $c_i$  et une raideur  $k_i$  avec avec l'étage immédiatement inférieur d'indice  $(i - 1)$ . Le dernier étage est d'indice  $p$  et, comme une numérotation anglosaxonne est utilisée, le rez-de-chaussée (*rather known*

as the ground floor) est l'étage d'indice 1. L'indice 0 correspond au sous-sol, c'est-à-dire à la base fondatrice.

Bien que le modèle des fondations (étage 0) présente des non-linéarités compliquées et pour tout dire plutôt méconnues, il est ici supposé par souci de simplicité (cela se fait en pratique) que  $m_0$ ,  $k_0$  et  $c_0$  suffisent à exprimer le comportement passif de cet étage fondateur. Les secousses sismiques sont supposées agir sur cet étage au travers d'un signal  $\gamma$  qui correspond à une accélération. Le signal  $u$  est une force active (que l'on peut contrôler) qui agit à la fois sur l'étage 0 et sur l'étage 1 de manière opposée. Cette force est issue d'un actionneur appelé *amortisseur rhéologique actif*. Lorsque le bâtiment est secoué, chaque étage subit un déplacement horizontal, dangereux pour la structure, qui est repéré par rapport à une référence nominale, elle même fixe par rapport au sol. Cette référence peut correspondre à un déplacement nul en cas de calme plat. Les mesures de déplacement sont notées  $z_i$ . Ces informations sont résumées par la figure 3.10.

Pour simplifier, on se contente de considérer une structure de deux étages (ce qui n'est pas plus mal en cas de séisme). Donc,  $p$  est égal à 2. Les équations que nous livrent les lois de la mécanique (principe fondamental de la dynamique) sont les suivantes :

$$\begin{cases} m_0 \ddot{z}_0 + c_0 \dot{z}_0 + k_0 z_0 - c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_0) - k_1 (z_1 - z_0) = -u + \gamma, \\ m_1 \ddot{z}_1 + c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_0) + k_1 (z_1 - z_0) - c_2 (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - k_2 (z_2 - z_1) = u, \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2 (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_2 (z_2 - z_1) = 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

Un indicateur pertinent de la dangerosité de la secousse est l'évolution de la position  $z_p = z_2$ .

Question :

- En considérant la commande  $u$  et la perturbation  $\gamma$  (cela fait donc deux entrées donc deux colonnes pour  $B$ ) ainsi que la sortie  $y = z_2$ , déterminer une représentation d'état  $(A, B, C, D)$  du système décrit ci-avant.



### 3.9.5. Petit exemple mécanique

Le système étudié est celui de la figure 2.7 (cf. §2.3.1 page 45). L'entrée est  $u$  et la sortie est  $y$ .

#### Questions :

- Déterminer une représentation d'état  $(A, B, C, D)$  du système en s'appuyant sur l'équation différentielle exprimant le principe fondamental de la dynamique (équation (2.14)).
- De quelle structure de réalisation s'agit-il ?
- Retrouver sans calcul (ou presque) la fonction de transfert établie au paragraphe 2.3.1.

### 3.9.6. Système à deux chariots

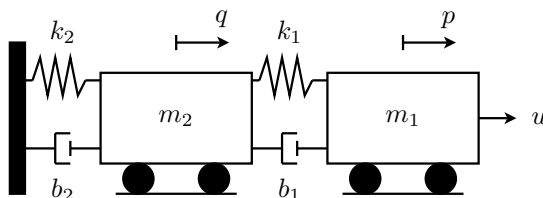


FIGURE 3.11 – Système de deux chariots couplés.

On considère le système représenté Figure 3.11. Il s'agit de deux chariots roulants reliés par des amortisseurs et des ressorts. La masse du chariot  $i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , est notée  $m_i$ . La position du chariot 1 est notée  $p$  alors que  $q$  est utilisée pour le second chariot. On note  $k_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , la constante de raideur du ressort  $i$  tandis que  $b_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , est le coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur  $i$ . La force extérieure agissant sur le procédé est notée  $u$ . C'est la commande du procédé. La sortie est  $y = p$ .

A l'aide du principe fondamental de la dynamique, on montre que

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{p} &= u - k_1(p - q) - b_1(\dot{p} - \dot{q}) \\ m_2 \ddot{q} &= k_1(p - q) + b_1(\dot{p} - \dot{q}) - k_2q - b_2\dot{q}. \end{aligned}$$

#### Question :

- Établir une représentation d'état du procédé mécanique.

### 3.9.7. Bille sur rail

Dans ce problème, On s'intéresse à la modélisation d'un système de bille sur rail représenté Figure 3.12. L'objectif est généralement d'imposer la position de la bille sur une règle dont l'inclinaison est commandable. On dispose d'un actionneur (moteur magnétique commandé par la tension  $u$  qui est donc la commande) et d'un capteur de position résistif convertissant la position de la bille en une tension  $y$  qui sert de sortie.

Dans ce chapitre, seule la modélisation importe.

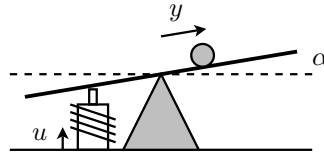


FIGURE 3.12 – Système bille sur rail.

Ce système vérifie classiquement l'équation fondamentale de la dynamique. Ainsi, on montre aisément que

$$m\ddot{y} = mg \sin(\alpha) - f\dot{y}, \quad (3.38)$$

où  $m$  est la masse de la bille,  $f$  un coefficient de frottement visqueux et  $\alpha$  l'angle entre le rail et l'axe horizontal.

Question :

- En supposant que
  - les débattements sont faibles, c'est-à-dire,  $\sin(\alpha) \approx \alpha$ ,
  - les conditions initiales sont nulles,
  - l'actionneur est à caractéristique linéaire, c'est-à-dire,

$$\alpha = ku, \quad (3.39)$$

déterminer une représentation d'état du système « bille sur rail ».

### 3.9.8. Formulation hamiltonienne de la loi de Newton

Soit la loi de Newton (également appelée Principe ou Relation fondamentale) de la dynamique) appliquée à un solide en translation :

$$m\ddot{z} = F, \quad (3.40)$$

où  $m$  est la masse du solide,  $z$  sa position (donc  $\ddot{z}$  son accélération) et  $F$  est la résultante des forces mécaniques exogènes s'exerçant sur ce même solide.

Le vecteur suivant,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ p \end{bmatrix},$$

où  $p = m\dot{z}$  désigne la *quantité de mouvement* du solide, est choisi comme vecteur d'état.

Question :

- Établir une représentation d'état de la forme  $\dot{x} = Ax + Bu$  en considérant comme entrée la somme des forces extérieures  $u = F$ .

### 3.9.9. L'incontournable

Il n'est de bon ouvrage d'automatique des systèmes linéaires qui ne traite à un moment où un autre du problème du pendule inverse (du moins le dit-on !). Ce paragraphe se prête à la tradition, ne serait-ce que pour honorer la première de couverture du document.

Un chariot roulant de masse  $M$  est soumis à une force motrice  $f$  qui lui permet de se mouvoir en translation. Cette force est la commande du système. Elle peut-être considérée, en pratique, comme approximativement proportionnelle à la tension d'excitation d'un moteur qui fait avancer le chariot. Par ailleurs, une tige métallique de longueur  $l$  est articulée sur le dessus du chariot de sorte qu'elle peut se mouvoir dans un plan. À son extrémité se trouve une boule de masse  $m$ . Le poids de la tige est considéré comme négligeable (la masse  $m$  peut être vue comme une masse fictive prenant en compte celle de la tige). À chaque instant, la tige forme un angle  $\theta$  avec la verticale. Cet angle est la sortie du système que l'on souhaite conserver nulle. L'ensemble du procédé est représenté figure 3.13.

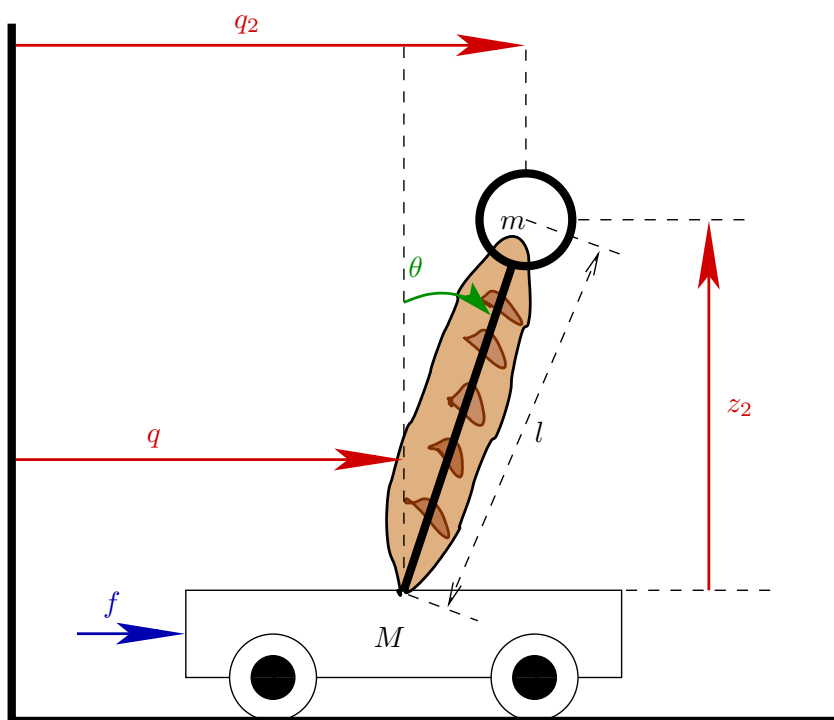


FIGURE 3.13 – Schéma d'un pendule inverse sur chariot

Questions :

- La première est brutale : utiliser le formalisme lagrangien pour établir des équations non linéaires décrivant le comportement du procédé (pas de panique, il y a la correction!).
- Faire une approximation pour obtenir un modèle d'état linéaire.

**Remarque 3.7** *La tige métallique et la boule réunies ont le même rôle que la baguette de pain figurant en couverture. Il n'est pas nécessaire de faire apparaître cette baguette de pain sur le schéma mais culturellement, c'est conseillé.*

*Le problème du pendule inverse peut sembler irréaliste mais le lecteur peut réfléchir au mouvement d'une fusée décollant parfaitement verticalement sous la poussée de quatre boosters, malgré les rafales de vent... Et bien oui ! on retrouve le pendule inverse mais avec des perturbations et non limité à un seul plan, ce qui rapproche d'ailleurs encore un peu plus le maintien de l'équilibre de la baguette de pain d'un problème réaliste.*

*Enfin, on peut citer deux applications qui font appel à la notion de pendule inverse.*

*La première n'est autre que la marche bipède. À chaque pas réalisé par un bipède, il existe toute une chaîne musculaire qui va maintenir, pendant quelque temps très bref, le corps en quasi-équilibre. Les robots qui cherchent à reproduire cette marche sont parfois conçus de sorte à intégrer des notions de commande d'un pendule inverse.*

*La seconde application est celle du gyropode ou transporteur personnel tels que ceux de la marque emblématique SEGWAY<sup>©</sup> et, aujourd'hui, les hoverboards, gyroroues, trotinettes électriques. La commande de ce genre d'appareils fait appel à la notion de pendule inverse.*

### 3.9.10. Un peu d'électronique analogique

Soient les quatre montages de la figure 3.14. Pour chaque montage,  $u$  désigne la commande du système et  $y$  sa sortie.

Questions :

- En prenant comme variables d'état les différences de potentiel  $v_{c_i}$  aux bornes des condensateurs, déterminer les représentations d'état de ces quatre systèmes lorsque cela est possible.
- Identifier quels montages correspondent aux actions intégrale (I), proportionnelle intégrale (PI) et proportionnelle dérivée (PD).

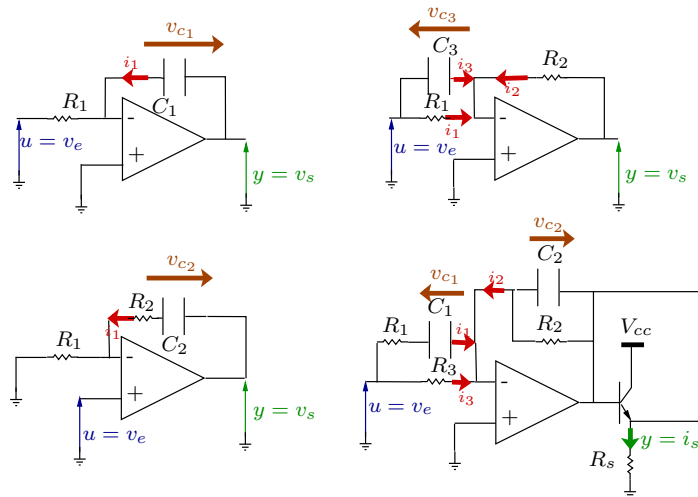


FIGURE 3.14 – Quatre montages à base d'amplificateur opérationnel

Petite aide : un peu d'électronique (Beurk !)

Lorsqu'un amplificateur opérationnel, plus connu sous le diminutif affectueux d'« ampli-op » ou « AOP », présente un bouclage sur l'entrée inverseuse (moins) mais pas sur l'entrée non inverseuse (plus), il est possible de faire l'approximation que les potentiels sur ces entrées (respectivement notés  $e^-$  et  $e^+$ ) sont égaux. Par ailleurs, l'intensité des courants entrant dans l'ampli-op au niveau de ces entrées est considérée comme nulle car l'ampli-op présente une résistance d'entrée très grande et donc assimilée à une valeur infinie.

**3.9.11. Moteur à courant continu**

Le système est le moteur à courant continu « à commande d'induit » schématisé sur la figure 2.8 page 48. Les équations décrivant son comportement sont données au paragraphe 2.3.2 page 47.

Questions :

- Déterminer une représentation d'état du système d'entrée  $u$  et de sortie  $y = \Omega$ .
- Faire de même en considérant comme nouvelle sortie la position angulaire  $\theta$  de l'arbre du moteur.
- Pourquoi y a-t-il une colonne de zéros dans la matrice d'évolution de ce nouveau modèle ?

## 3.9.12. Rendez-vous à la salle des fêtes

... c'est (mal) chauffé.

Il s'agit de modéliser le transfert de chaleur entre l'environnement extérieur et une salle des fêtes telle que celle schématisée par la figure 3.15 (une seule pièce avec un grenier, c'est plus simple!). La température de la pièce principale est  $T_i$ , celle de l'extérieur est  $T_o$  et celle du grenier est  $T_g$ . Le transfert de chaleur entre l'extérieur et la salle principale se fait à travers l'ensemble des 4 murs dont la résistance thermique globale est notée  $R_m$ . Le transfert entre l'extérieur et le grenier se fait à travers le toit de résistance thermique  $R_t$ . Le plafond, de résistance thermique  $R_p$ , permet le transfert de chaleur entre la salle et le grenier. Les capacités calorifiques de la salle et du grenier sont respectivement notées  $C_i$  et  $C_g$ . En s'aidant des lois de la thermique, il est possible d'établir un modèle d'état du système dont l'entrée est la température extérieure  $T_o$  et dont la sortie est la température  $T_i$  à l'intérieur de la salle (attention, un individu mal (ou bien) intentionné a saboté le chauffage de la salle des fêtes ce qui permet d'éviter quelques équations).

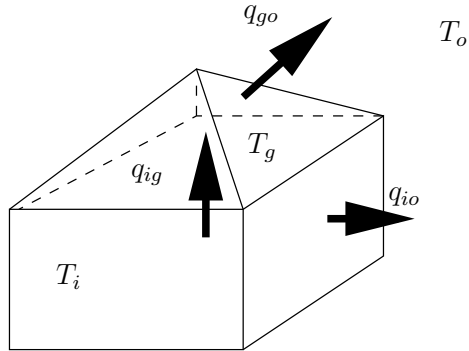


FIGURE 3.15 – Salle des fêtes mal chauffée

Questions :

- Écrire les équations différentielles issues des lois de la physique.
- Montrer que la représentation d'état peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{x} = \left[ \begin{array}{c|c} \alpha = -\frac{1}{C_i}(a+b) & \beta \\ \hline \gamma & \delta = -\frac{1}{C_g}(c+d) \end{array} \right] x + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} u, \\ y = [g \mid h] x, \end{cases}$$

(donner l'expression des différentes inconnues).

- Déterminer la fonction de transfert du système à partir de la représentation établie précédemment en fonction des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $e$  et  $f$ .
- Proposer une réalisation canonique (forme compagne).

Petite aide : un peu de thermique (Beurk !)

La quantité de chaleur  $q_{21}$  passant d'un environnement  $\mathcal{E}_2$  de température  $T_2$  à un environnement  $\mathcal{E}_1$  de température  $T_1$  est donnée par

$$q_{21} = \frac{1}{R}(T_2 - T_1),$$



où  $R$  est la résistance thermique de la frontière entre les deux environnements. Par ailleurs,  $C_1$  étant la capacité calorifique de l'environnement étudié ( $\mathcal{E}_1$ ), il faut aussi prendre en compte

$$\dot{T}_1 = \frac{1}{C_1} q_{21}$$

(dans le cas d'un seul transfert de chaleur impliquant  $\mathcal{E}_1$ ).

### 3.9.13. Modélisation d'un lecteur de disque dur

L'objectif de ce problème est d'étudier, de façon simplifiée, le système de lecture d'un disque dur. La figure 3.16 donne une version très édulcorée du fonctionnement d'un tel procédé. Lorsque le moteur exerce un couple  $M$  sur la tige en tournant à une vitesse  $\theta_1$ , cette tige, caractérisée par une raideur  $k$  et un amortissement  $b$ , entraîne la tête de lecture qui tourne à une vitesse  $\theta_2$ . Maîtriser  $\theta_2$  permet d'envisager la lecture des pistes du disque.

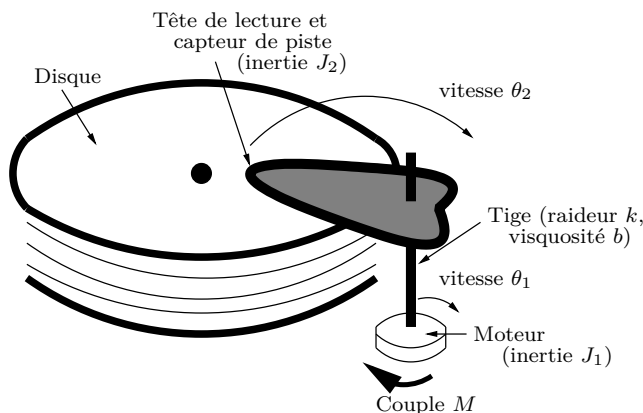


FIGURE 3.16 – Disque dur et sa tête de lecture

Le comportement de ce procédé peut être modélisé à l'aide du système différentiel

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1(t) &= M(t) + k(\theta_2(t) - \theta_1(t)) + b(\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t)) \\ J_2 \ddot{\theta}_2(t) &= k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + b(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t)) \end{aligned}$$

Il a pour entrée  $M$  et pour sortie  $\theta_2$ .

Questions :

- Déterminer une représentation d'état du procédé.
- En supposant que le frottement est négligeable, c'est-à-dire que  $b = 0$ , et en posant  $J_1 = J_2$ , calculer les valeurs propres de la matrice dynamique.

### 3.9.14. Système hydraulique

Soit le système hydraulique schématisé par la figure 3.17.

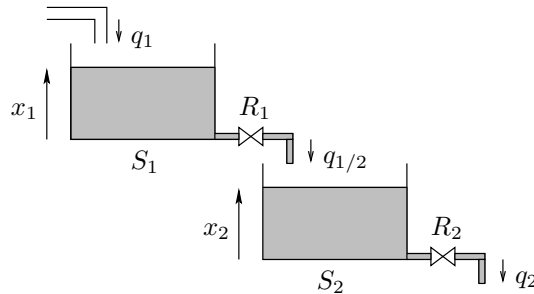


FIGURE 3.17 – Système hydraulique à deux cuves

Un débit entrant de fluide  $q_1$  permet de remplir la cuve 1 (de section  $S_1$ ). La cuve peut se vider à travers la vanne 1 (associée au réglage d'ouverture  $R_1$  - on peut parler de *résistance*). Ceci entraîne un débit de fluide  $q_{1/2}$  permettant de remplir la cuve 2 (de section  $S_2$ ). Enfin, un réglage d'ouverture  $R_2$  de la vanne 2 permet de créer un débit sortant de fluide  $q_2$  qui permet de vider la cuve 2. Les niveaux de fluide dans les cuves 1 et 2 sont respectivement notés  $x_1$  et  $x_2$ . La commande du procédé est  $u(t) = q_1(t)$  et sa sortie est  $y(t) = x_2(t)$ .

L'équation de variation de niveau de la cuve 1 est

$$S_1 \frac{dx_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_{1/2}(t), \quad \text{avec} \quad q_{1/2}(t) = \frac{x_1(t)}{R_1}.$$

L'équation d'évolution de niveau dans la cuve 2 est

$$S_2 \frac{dx_2(t)}{dt} = q_{1/2}(t) - q_2(t), \quad \text{avec} \quad q_2(t) = \frac{x_2(t)}{R_2}.$$

Question :

1. Établir une représentation d'état du système.

### 3.9.15. Niveau de fluide et température dans une cuve

Attention, cet exercice est de nouveau une petite escapade dans le monde des systèmes multivariables.

En vue de pouvoir disposer d'un volume constant de fluide à température désirée, un procédé hydraulique et thermique schématisé sur la figure 3.18 est constitué d'un réservoir de section  $S$  équipé d'une résistance chauffante.

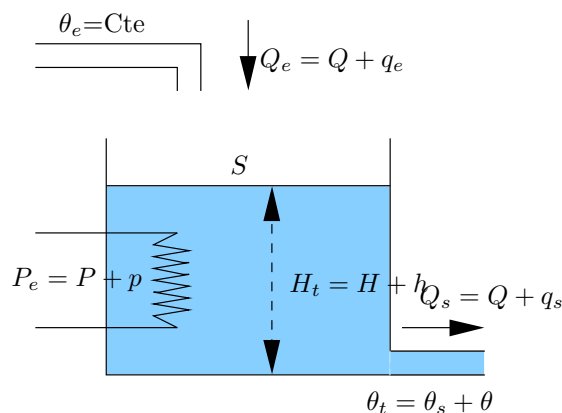


FIGURE 3.18 – Schéma du procédé

Les entrées du système sont la variation de débit d'entrée du fluide  $q_e$  autour d'une valeur de fonctionnement  $Q$  et la variation de puissance électrique de chauffage  $p$  autour d'une valeur de fonctionnement  $P$ . Les sorties sont la variation de niveau  $h$  dans le réservoir (autour de  $H$ ) et

la variation de température  $\theta$  à la sortie du réservoir (autour de  $\theta_s$ ). Le débit de sortie du fluide est régi par un écoulement par gravité de type turbulent  $Q = \alpha\sqrt{H}$ .

Afin de modéliser le procédé en vue de son éventuelle commande, Les hypothèses suivantes sont faites :

- la température d'arrivée du fluide  $\theta_e$  est constante ;
- le réservoir est parfaitement calorifugé et sa capacité thermique est négligeable ;
- l'échange de chaleur entre la résistance chauffante et le fluide est instantané.

Questions :

- Écrire les équations de conservation du volume et de la quantité de chaleur pendant un intervalle de temps élémentaire  $dt$  et déduire deux équations différentielles décrivant le système.
- On considère le vecteur d'état  $X = [H_t, \theta_t]'$  et le vecteur de commande  $U = [Q_e, P_e]'$ . Écrire une représentation d'état non linéaire (pour les grandeurs physiques dans leur globalité).
- Linéariser l'équation d'état précédemment obtenue en considérant de petites variations autour du régime nominal caractérisé par  $Q$ ,  $P$ ,  $H$  et  $\theta_s$ . Montrer que l'on peut obtenir, pour ce procédé, un modèle d'état de la forme :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{Q}{2SH} & 0 \\ 0 & -\frac{Q}{SH} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 \\ \frac{\theta_e - \theta_s}{SH} & \frac{Q(\theta_s - \theta_e)}{SHP} \end{bmatrix} u \quad (3.41)$$

avec :

$$x = \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} q_e \\ p \end{bmatrix}$$

- Réaliser l'application numérique avec les unités de base du système international pour

$$\theta_e = 20^\circ C ; Q = 20l/mn ; \theta_s = 50^\circ C ;$$

$$H = 600mm ; P = 20kW ; S = 1m^2.$$

- Serait-il raisonnable de tracer la réponse indicielle au sens strict de ce modèle ? Pourquoi ?

### 3.9.16. Maquette d'hélicoptère

On considère la maquette d'hélicoptère à trois degrés de liberté fabriquée par ADAPTECH<sup>©</sup>, dont la photo est donnée par la figure 3.19. L'objectif est de proposer un modèle approximatif sous forme de représentation d'état linéaire de cette maquette. Cet exercice est loin d'exposer au lecteur toutes les possibilités subtiles de modélisation qu'offre la maquette. En outre, l'hélicoptère en question ne suit pas exactement les mêmes principes de vol qu'un véritable engin de transport.

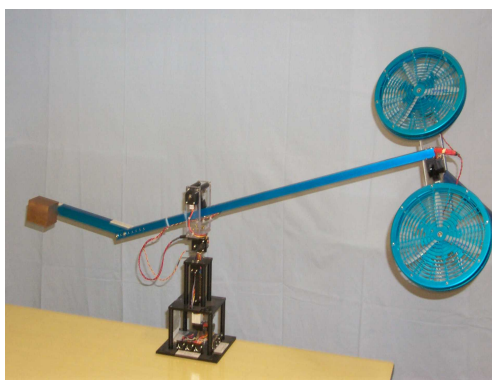


FIGURE 3.19 – Maquette d'hélicoptère 3 ddl par ADAPTECH<sup>©</sup>

L'hélicoptère en lui-même est constitué d'un ensemble solide de deux hélices identiques et solidaires. Cet ensemble est relié à une base par l'intermédiaire d'un bras mécanique. À l'autre extrémité du bras mécanique se trouve un contrepoids destiné à favoriser l'ascension de l'hélicoptère. Cette élévation est assurée par la force que peuvent générer les deux moteurs à courant continu permettant la rotation des hélices.

L'hélicoptère est dit à 3 degrés de liberté (ddl) car il est possible de le mouvoir en agissant, grâce aux deux moteurs électriques, sur trois grandeurs :

- l'angle d'élevation  $\epsilon$  : il s'agit de l'angle que fait le bras mécanique par rapport à l'horizontale;
- l'angle de tangage  $p$  : il s'agit de l'angle que fait l'ensemble des deux hélices par rapport à l'horizontale (l'une peut être plus élevée que l'autre);
- la vitesse de déplacement  $r$  : il s'agit de la vitesse angulaire du bras mécanique dans le plan horizontal.

L'hélicoptère peut donc changer d'altitude par variation de  $\epsilon$ . Il peut tourner autour de la base. Cette rotation s'exécute à une vitesse angulaire  $r$  qui ne peut être générée qu'en agissant sur  $p$ , comme détaillé ci-après.

### 1. Principe d'élévation

Le principe d'action sur l'angle d'élevation  $\epsilon$  est illustré par la figure 3.20.

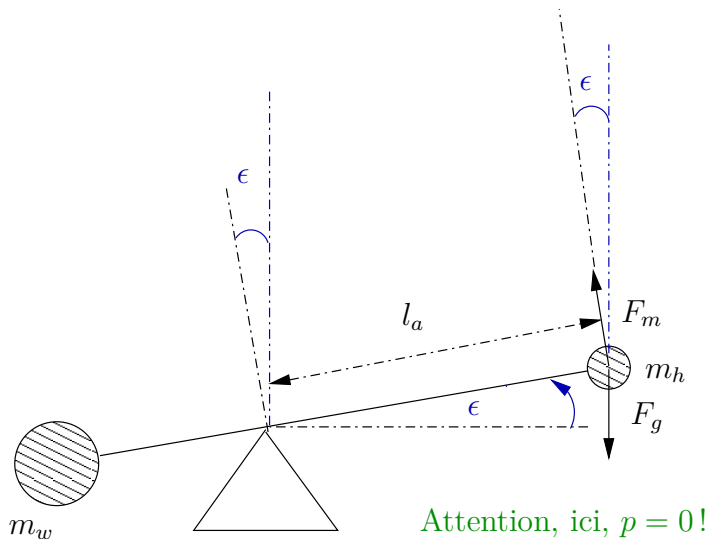


FIGURE 3.20 – Principe d'élévation de l'hélicoptère : schéma à tangage nul

On considère que les forces agissant sur les hélices de l'hélicoptère sont notées  $F_f$  an  $F_b$  (l'indice  $f$  peut signifier *front* ou *forward* et désigne l'hélice avant alors que l'indice  $b$  peut signifier *back* ou *backward* et désigne l'hélice arrière). Elles sont toujours dirigées perpendiculairement au bras.

Cette direction se situe dans le plan d'élévation si le tangage est nul. Si le tangage est non nul, il convient de considérer que ses forces sont inclinées d'un angle  $p$  par rapport à la verticale. La somme des deux forces  $F_f$  et  $F_b$  correspond à une force équivalente  $F_m$ . Le moment d'inertie du système relativement à l'axe d'élévation est noté  $J_e$ . La distance entre la base du système et l'hélicoptère est notée  $l_a$ . Le contrepoids dû à la masse  $m_w$  et le poids dû à la masse  $m_h$  de l'hélicoptère constituent un poids équivalent correspondant à une masse virtuelle  $m_g$  de l'hélicoptère.

Question :

- En supposant que  $F_f$  et  $F_b$  sont respectivement proportionnelles aux tensions de commande des moteurs électriques  $V_f$  et  $V_b$ , selon un facteur  $q$ , écrire l'équation différentielle reliant  $\epsilon$  à  $V_f$  et  $V_b$ .

## 2. Principe de tangage

Le principe d'action sur l'angle de tangage de l'hélicoptère (inclinaison vers l'avant ou vers l'arrière) est illustrée sur la figure 3.21.

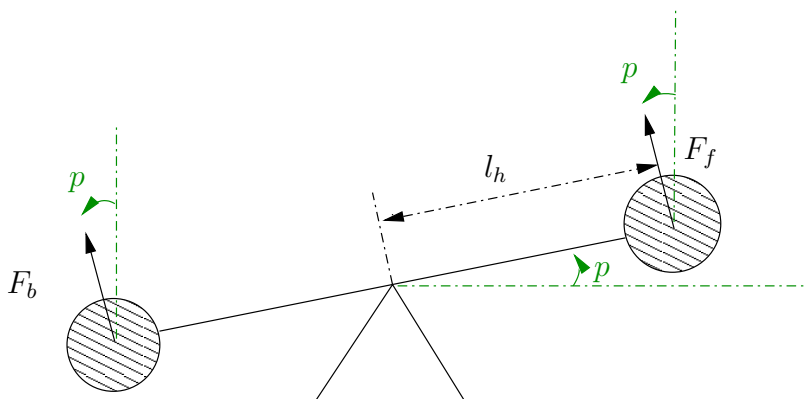


FIGURE 3.21 – Principe du tangage de l'hélicoptère (dans le plan de ce dernier)

La demi-longueur de l'hélicoptère (qui est symétrique) est notée  $l_h$ . Le moment d'inertie de l'hélicoptère relativement à l'axe de tangage est noté  $J_p$ .

Questions :

- Les hélices étant de masses identiques, écrire l'équation différentielle reliant  $p$  à  $V_f$  et  $V_b$ .
- Quelle est la condition pour que l'hélicoptère pointe l'avant vers le sol ?
- Quel est alors le sens voulu du déplacement ? Interpréter la réponse en donnant une condition sur  $r$ .

**3. Principe de déplacement**

Le principe d'action sur la vitesse de déplacement est illustré par la figure 3.22. Il s'agit d'une figure en perspective dans laquelle le plan de tangage est en réalité orthogonal à l'axe du bras mécanique. On pose l'hypothèse que le déplacement se fait toujours à élévation constante (ce qui signifie en pratique, que l'on ajuste d'abord  $\epsilon$  avant de jouer sur  $p$  pour faire varier  $r$ ).

On désigne par  $J_t$ , l'inertie de l'ensemble bras-hélicoptère, relativement à l'axe de rotation correspondant au voyage.

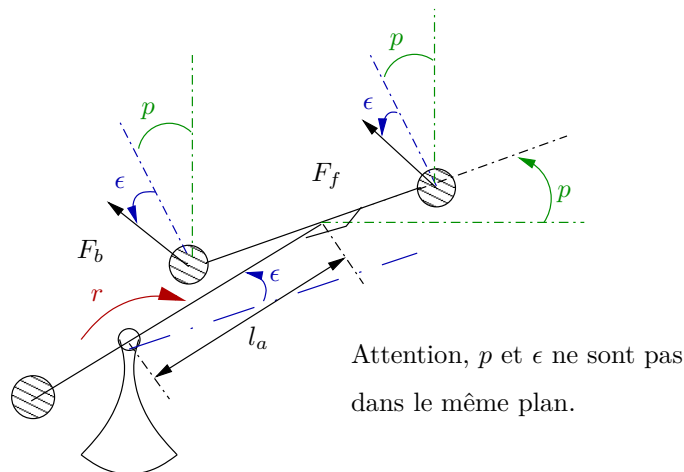


FIGURE 3.22 – Principe d'avancée de l'hélicoptère



Question :

- En considérant que la force nécessaire à maintenir l'hélicoptère en élévation est  $F_g$  (c'est vrai pour de petits angles), déterminer une équation différentielle décrivant l'évolution de la vitesse angulaire  $r$ .

**4. Obtention d'un modèle d'état**

On suppose que les tensions  $V_f$  et  $V_b$  s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} V_f = V + v_f, \\ V_b = V + v_b, \end{cases}$$

où  $V$  est la tension à appliquer sur les deux moteurs électriques pour que l'altitude de l'hélicoptère reste constante et où  $v_f$  et  $v_b$  sont de petites variations autour de  $V$  (une telle hypothèse suppose en réalité un petit angle  $\epsilon$ ).

Question :

- Sur la base des trois équations différentielles établies précédemment, déterminer une représentation d'état *linéaire* du système ayant pour entrées  $v_f$  et  $v_b$  et pour sortie  $\epsilon$ ,  $p$  et  $r$ . La réalisation devra dépendre de  $J_e$ ,  $J_p$ ,  $J_t$ ,  $l_a$ ,  $l_h$  et  $q$ .

**Remarque 3.8** *Tout acquéreur de la maquette ADAPTECH<sup>©</sup> constatera que le dispositif est un peu plus complexe et subtil que ne le laissent entendre les équations proposées dans cet exercice mais nul besoin ici de trop compliquer les choses.*

**3.9.17. Choix d'une réalisation**

Soit la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{6p^3 + 8p^2 + 4p + 8}{3p^3 + 4p^2 + 2p + 1}.$$

Question :

- Proposer, sans trop de calcul, une réalisation correspondant à cette fonction de transfert.

### 3.9.18. « Jordanisation » d'une réalisation

Soit un système de réalisation  $(A, B, C, D)$  où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 4 \quad 3], \quad D = 5.$$

Question :

- Calculer une réalisation canonique de Jordan pour ce système.

### 3.9.19. Associations de systèmes

Soient deux systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  respectivement associés à deux réalisations  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$  et  $(A_2, B_2, C_2, D_2)$  avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \quad 0], \quad D_1 = 0,$$

$$A_2 = -2, \quad B_2 = 3, \quad C_2 = 4, \quad D_2 = 1.$$

Question :

- En se référant au paragraphe 3.8 page 94, établir des modèles d'état  $(A, B, C, D)$  pour les trois types d'association étudiés (parallèle, série, interconnection).

## 3.10. Correction des exercices

### 3.10.1. Promenons nous dans les bois ...

L'équation (3.31) est elle-même une représentation d'état et il suffit de prendre  $x = l$ . Le modèle d'état (évidemment d'ordre 1 puisque  $x \in \mathbb{R}$ ) est alors, pour  $u = r$  et  $y = l$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} &= (n_l - m_l)x + (-q)u, \\ y &= x. \end{cases}$$

L'équation (3.32) et l'équation (3.33) conduisent naturellement à prendre comme vecteur d'état  $x = [l \ r]'$ , qui regroupe en fait les signaux apparaissant sous forme dérivée dans (3.32,3.33). Il vient alors, pour  $u = c$  et  $y = l$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} (n_l - m_l) & -q \\ n_r & -m_r \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -t_l \\ -t_r \end{bmatrix} u, \\ y &= [1 \ 0] x. \end{cases}$$

La fonction de transfert correspondante se calcule selon la formule (3.17) page 88 :

$$G(p) = C(pI_n - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\det(pI_n - A)} [1 \ 0] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -t_l \\ -t_r \end{bmatrix},$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont deux composantes de  $\text{adj}(A)$  à calculer (voir §A.1.9 page 650) alors que '\*' désigne des composantes qu'il n'est pas utile de calculer. Il vient donc

$$G(p) = \frac{-t_l p - m_r t_l - q t_r}{p^2 + (m_l + m_r - n_l)p + (m_r(m_l - n_l) + q n_r)}.$$

Enfin, si toutes les équations sont prises en compte, le vecteur d'état qui s'impose naturellement regroupe toutes les grandeurs dérivées :  $x = [l \ r \ c \ b]'$ . Ceci conduit à un modèle d'état d'ordre 4, qui, pour  $u = f$  et  $y = l$ , est

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} (n_l - m_l) & -q & -t_l & 0 \\ n_r & -m_r & -t_r & 0 \\ -g & -e & -s & -h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} u, \\ y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x. \end{cases}$$

La matrice d'évolution présente une ligne de zéros qui traduit l'existence d'une valeur propre nulle (présence d'un intégrateur dans le modèle : cet intégrateur correspond à l'équation (3.36)).

### 3.10.2. Et les poissons, alors ?

Les équations différentielles constituent déjà une représentation d'état. Il suffit de proposer une écriture matricielle de ces équations. Pour  $n = 3$ , le vecteur d'état qui s'impose naturellement est  $x = [p_0 \ p_1 \ p_2]'$  et le modèle d'état qui en découle est

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -(\alpha + m_0) & f_1 e_1 & f_2 e_2 \\ \alpha & -(\alpha + m_1 + q_1 E) & 0 \\ 0 & \alpha & -(\alpha + m_2 + q_2 E) \end{bmatrix} x \\ + \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = [0 \ q_1 E \ q_2 E] x. \end{cases}$$

Le modèle est simplifié si l'on ne considère que deux classes d'âge ( $n = 2$ ). Le vecteur d'état est alors  $x = [p_0 \ p_1]'$  et l'équation d'état devient

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -(\alpha + m_0) & f_1 e_1 \\ \alpha & -(\alpha + m_1 + q_1 E) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = [0 \ q_1 E] x. \end{cases}$$

La fonction de transfert correspondante se calcule selon la formule (3.17) :

$$G(p) = C(pI_n - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\det(pI_n - A)} [0 \ q_1 E] \begin{bmatrix} * & * \\ k & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix},$$

où  $k$  est une composante de  $\text{adj}(A)$  à calculer (voir §A.1.9 page 650) alors que '\*' désigne des composantes qu'il n'est pas utile de calculer. Il vient donc

$$G(p) = \frac{aq_1 E}{p^2 + (2\alpha + m_0 + m_1 + q_1 E)p + ((\alpha + m_0)(\alpha + m_1 + q_1 E) - \alpha f_1 e_1)}.$$

Les coefficients du numérateur et du dénominateur de  $G(p)$  permettent de proposer une réalisation canonique de commande (forme compagne horizontale : cf. §3.5.1.2 page 84)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -(\alpha + m_0)(\alpha + m_1 + q_1 E) + \alpha f_1 e_1 & -(2\alpha + m_0 + m_1 + q_1 E) \end{array} \right] \tilde{x} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} aq_1 E & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}, \end{array} \right.$$

ou, de manière duale, une réalisation canonique d'observation (forme compagne verticale : cf. §3.5.1.2 page 84)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = \left[ \begin{array}{c|c} -(2\alpha + m_0 + m_1 + q_1 E) & 1 \\ \hline -(\alpha + m_0)(\alpha + m_1 + q_1 E) + \alpha f_1 e_1 & 0 \end{array} \right] \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ aq_1 E \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}, \end{array} \right.$$

Pour exprimer clairement la matrice de changement de base  $M$  telle que  $x = M\tilde{x}$ , il faut se référer au paragraphe 3.7.2 page 90.

Pour exprimer clairement la matrice de changement de base  $N$  telle que  $x = N\underline{x}$ , il faut se référer au paragraphe 3.7.3 page 91.

### 3.10.3. Après la forêt et l'eau, promenons nous dans les airs

Les équations différentielles sont suffisamment explicites pour qu'un vecteur d'état s'impose :  $x = [\theta \ v \ h]'$ . Il vient alors la réalisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \sigma & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x. \end{array} \right.$$

La matrice d'état est triangulaire inférieure. Ses valeurs propres se situent donc sur sa diagonale :  $\alpha$ ,  $\beta$  et 0. Elles sont les racines du polynôme caractéristique

$$\det(pI - A) = p(p - \alpha)(p - \beta),$$

qui est aussi le dénominateur de la fonction de transfert associée au système. Ces trois valeurs propres sont donc les pôles du système.

La valeur propre nulle est liée au fait que l'altitude est l'intégrale de la vitesse ascensionnelle.

### 3.10.4. Modélisation simplifiée d'un bâtiment soumis à des secousses sismiques

Il suffit de fixer, comme vecteur d'état,

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]' = [z_0 \ \dot{z}_0 \ z_1 \ \dot{z}_1 \ z_2 \ \dot{z}_2]'$$

Les trois équations (3.37) deviennent

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{1}{m_0}(k_0 + k_1)x_1 - \frac{1}{m_0}(c_0 + c_1)x_2 + \frac{k_1}{m_0}x_3 + \frac{c_1}{m_0}x_4 - \frac{u}{m_0} + \frac{\gamma}{m_0}, \\ \dot{x}_4 = \frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{c_1}{m_1}x_2 - \frac{1}{m_1}(k_1 + k_2)x_3 - \frac{1}{m_1}(c_1 + c_2)x_4 + \\ \quad \frac{k_2}{m_1}x_5 + \frac{c_2}{m_1}x_6 + \frac{u}{m_1}, \\ \dot{x}_3 = \frac{k_2}{m_2}x_3 + \frac{c_2}{m_2}x_4 - \frac{k_2}{m_2}x_5 - \frac{c_2}{m_2}x_6. \end{cases}$$

À ces équations, il convient d'ajouter, étant donnée la structure de particulière de  $x$ ,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_5 = x_6. \end{cases}$$

Enfin, s'ajoute l'équation de sortie  $y = z_2 = x_5$ . L'ensemble de ces équations constitue une représentation d'état :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_0+k_1}{m_0} & -\frac{c_0+c_1}{m_0} & \frac{k_1}{m_0} & \frac{c_1}{m_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{c_1+c_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix} x \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_0} & \frac{1}{m_0} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \gamma \end{bmatrix} \\ y = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] x \end{array} \right.$$

### 3.10.5. Petit exemple mécanique

Le système de la figure 2.7, page 47, est décrit mathématiquement par l'équation (2.14), page 52. Il suffit de retenir comme vecteur d'état  $x = [x_1 \ x_2]' = [y \ \dot{y}]'$ . Il vient alors les deux équations

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{u}{m}. \end{cases}$$

L'écriture matricielle de ces équations conduit à la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \\ y = [1 \ 0] x. \end{cases}$$

Il s'agit d'une réalisation canonique de commande (forme compagne horizontale : cf. §3.7.2, page 90) qui permet d'exprimer directement la fonction de transfert correspondante, à savoir

$$G(p) = \frac{\frac{1}{m}}{p^2 + \frac{b}{m}p + \frac{k}{m}},$$

expression qui se ramène de manière triviale à celle donnée en (2.15), page 52.

### 3.10.6. Système à deux chariots

On pose comme vecteur d'état

$$x = \begin{bmatrix} p \\ q \\ \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix},$$

Il vient évidemment

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4. \end{aligned}$$

Puis les équations différentielles données conduisent à

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_1}{m_1}x_2 - \frac{b_1}{m_1}x_3 + \frac{b_1}{m_1}x_4 + \frac{1}{m_1}u \\ \dot{x}_4 &= \frac{k_1}{m_2}x_1 - \frac{k_1+k_2}{m_2}x_2 + \frac{b_1}{m_2}x_3 - \frac{b_1+b_2}{m_2}x_4. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1+b_2}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [ 1 \ 0 \ 0 \ 0 ], \quad D = 0.$$

### 3.10.7. Bille sur rail

Le vecteur d'état le plus évident à prendre est



$$x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}.$$

On sait que

$$m\ddot{y} = mg \sin(\alpha) - f\dot{y}.$$

En supposant que les débattements sont faibles, on obtient

$$m\ddot{y} = mg\alpha - f\dot{y} = mgku - f\dot{y}.$$

Il vient donc

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \text{et} \quad \dot{x}_2 = -\frac{f}{m}x_2 + gku.$$

On obtient alors

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ gk \end{bmatrix}$$

$$C = [ 1 \quad 0 ] \quad D = 0.$$

### 3.10.8. Formulation hamiltonienne de la loi de Newton

Il suffit, une nouvelle fois, de dériver les variables d'état. La première équation différentielle s'écrit simplement

$$\dot{x}_1 = \dot{z} = \frac{x_2}{m}. \quad (3.42)$$

Quant à la seconde, elle s'écrit

$$\dot{x}_2 = m\ddot{z} = F = u \quad (3.43)$$

Ces deux équations conduisent à  $\dot{x} = Ax + Bu$  avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

À quelques nuances d'écriture près, ceci correspond à la formulation par Hamilton de la loi de Newton. Comme  $x$  contient la quantité minimale (mais suffisante) de grandeurs pour décrire la dynamique du solide, il est raisonnable de dire qu'Hamilton utilisait déjà la notion

d'état.

---

**Biographie 3.3** William Rowan Hamilton (1805-1865) : *mathématicien, physicien, mécanicien et astronome irlandais.*



*Il était un génie ! Parlant le Latin, le Grec et l'Hébreu à l'âge de 7 ans, il étudiait aussi d'autres langues, à savoir le Persan, l'Arabe, l'Hindousthâni, le Sanskrit et le Malais, sous la houlette de son linguiste d'oncle. Il s'intéressait déjà à l'Algèbre à 12 ans, ainsi qu'aux travaux de Laplace<sup>a</sup> et Newton<sup>b</sup>. Ses études furent bien entendu brillantes et il obtint un poste de professeur d'astronomie au Trinity College à 21 ans. Il s'illustra entre autres en optique géométrique. Il montra la possibilité*

*d'exploiter les méthodes dynamiques dans le cadre des systèmes optiques. Mais il est surtout célèbre pour sa théorie mathématique des quaternions qu'il appliqua à la mécanique, à la géométrie et à la résolution d'équations polynomiales.*

---

a. voir biographie 2.1 page 40.

b. Sir Isaac Newton, philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien britannique (1642 ou 1643-1727).

### 3.10.9. L'incontournable

Il faut commencer par faire le bilan des énergies cinétique et potentielle du procédé. L'énergie cinétique du chariot est donnée par

$$E_1 = \frac{1}{2}M\dot{q}^2.$$

De la même façon, l'énergie cinétique de la boule est donnée par

$$E_2 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_2^2 + \dot{z}_2^2).$$

(Il est rappelé que la masse de la tige est négligée donc il est inutile de calculer une énergie cinétique pour cette tige). Les dimensions de la tige rigide sont telles que l'on peut écrire

$$\begin{cases} q_2 = q + l \sin \theta & \Rightarrow & \dot{q}_2 = \dot{q} + l\dot{\theta} \cos \theta, \\ z_2 = l \cos \theta & \Rightarrow & \dot{z}_2 = -l\dot{\theta} \sin \theta. \end{cases}$$

Ainsi, l'énergie cinétique totale s'écrit

$$\begin{aligned} E = E_1 + E_2 &= \frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{q} + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + l^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta] \\ \Leftrightarrow E &= \frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{q}^2 + 2\dot{q}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)] \\ \Leftrightarrow E &= \frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{q}^2 + 2\dot{q}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2]. \end{aligned}$$

Le poids du chariot étant compensé par la réaction du support sur lequel il se meut, la seule énergie potentielle est liée au poids de la boule et est donnée par

$$V = mgz_2 = mgl \cos \theta.$$

Le lagrangien est un mot savant utilisé par les mécaniciens et qui désigne la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Il est ici donné par

$$L = E - V = \frac{1}{2}(M + m)\dot{q}^2 + ml \cos \theta \dot{q} \dot{\theta} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta.$$

L'intérêt du lagrangien est qu'il permet de trouver les équations qui régissent le comportement d'un système mécanique, ce en utilisant les équations de Lagrange, à savoir :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = f, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \end{cases}$$

où  $q$  et  $\theta$ , dans ces équations, sont les coordonnées généralisées, sélectionnées comme telles car elles ont le bon goût d'apparaître sous forme dérivée dans le lagrangien. Les termes de droite correspondent

aux forces agissant sur le système. La première équation décrit la translation du chariot tandis que la seconde décrit la rotation du pendule. Pour mieux exprimer ces équations, il convient de calculer les quantités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (M + m)\dot{q} + ml\dot{\theta} \cos \theta \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = (M + m)\ddot{q} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta, \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0, \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml\dot{q} \cos \theta + ml^2\dot{\theta} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml\ddot{q} \cos \theta - ml\dot{q}\dot{\theta} \sin \theta + ml^2\ddot{\theta}, \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = mgl \sin \theta - ml\dot{q}\dot{\theta} \sin \theta. \end{array} \right.$$

Ainsi, les équations de Lagrange se récrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} (M + m)\ddot{q} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = f, \\ ml\ddot{q} \cos \theta + ml^2\ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0. \end{array} \right.$$

Ces équations forment un modèle non linéaire du comportement du procédé et il faut maintenant recourir à une (ou des) approximation(s) linéaire(s). Le principe est classique et simple : on approche  $\sin \theta$  par  $\theta$  et  $\cos \theta$  par 1. En effet, lorsqu'il est asservi, le pendule est tel que  $\theta$  est proche de 0 (même si la commande qui réalise ce petit exploit n'est pas présentée ici). En outre, la quantité  $\dot{\theta}$  est supposée également assez faible de sorte que le terme en  $\dot{\theta}^2$  est aussi négligé (ce qui, très honnêtement, est un peu plus contestable mais fort heureusement, le terme impliquant  $\dot{\theta}^2$  fait aussi apparaître  $\sin \theta$  qui est faible). Compte tenu de ces approximations, les équations de Lagrange deviennent (en divisant la seconde par  $ml$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} (M + m)\ddot{q} + ml\ddot{\theta} = f, \\ \ddot{q} + \ddot{\theta} - g\theta = 0. \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Le modèle consiste maintenant en deux équations différentielles linéaires du second degré à coefficients constants, dont il faut tirer quatre

variables d'état. Assez naturellement, le choix se porte sur les grandeurs qui apparaissent sous forme dérivée dans les équations précédents :

$$x = [ q \quad \dot{q} \quad \theta \quad \dot{\theta} ]'. \quad (3.46)$$

À ce choix s'ajoute celui de la commande et de la sortie, à savoir  $u = f$  et  $y = \theta$ . De ce choix résultent entre autres deux équations évidentes :

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \text{et} \quad \dot{x}_3 = x_4.$$

La seconde équation de Lagrange dans (3.45) conduit à

$$\ddot{q} = g\theta - l\ddot{\theta}, \quad (3.47)$$

qui, injectée dans la première équation de Lagrange dans (3.45), amène

$$\begin{aligned} (M+m)g\theta - Ml\ddot{\theta} &= f \\ \Leftrightarrow Ml\ddot{\theta} &= (M+m)g\theta - f \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} &= \frac{M+m}{Ml}g\theta - \frac{f}{Ml}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Cette expression de  $\ddot{\theta}$  utilisée dans (3.47) conduit à

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= g\theta - \frac{M+m}{Ml}g\theta + \frac{f}{M} \\ \Leftrightarrow \ddot{q} &= -\frac{mg}{M}\theta + \frac{f}{M}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Compte tenu du choix (3.46) et de  $u = f$ , (3.48) et (3.49) deviennent

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \ddot{q} = \frac{f}{M} - \frac{mg\theta}{M} &= \frac{mg}{M}x_3 + \frac{1}{M}u, \\ \dot{x}_4 = \ddot{\theta} = -\frac{f}{Ml} + \left(\frac{M+m}{Ml}\right)g\theta &= \left(\frac{M+m}{Ml}\right)gx_3 - \frac{1}{Ml}u. \end{cases}$$

L'équation de sortie est donnée par  $y = x_3$ . En résumé, la réalisation obtenue est constituée des quatre matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix},$$

$$C = [ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 ], \quad D = 0.$$

### 3.10.10. Un peu d'électronique analogique

• Soit le premier schéma en haut à gauche de la figure 3.14, page 118. Le courant  $i_1$  traversant le condensateur n'entre pas dans l'ampli-op donc il traverse  $R_1$  de sorte qu'il vient

$$e^- = v_e + R_1 i_1 = u + R_1 i_1.$$

Or,  $e^- = e^+ = 0$  ce qui implique que

$$u = -R_1 i_1.$$

De plus,

$$y - v_{c_1} = e^- = e^+ = 0 \Leftrightarrow y = v_{c_1}.$$

Enfin, le courant  $i_1$  dans le condensateur s'exprime

$$i = C_1 \frac{dv_{c_1}}{dt} = C_1 \frac{dy}{dt}.$$

En prenant comme scalaire d'état  $x = y$ , il vient

$$\dot{x} = \dot{y} = \frac{1}{C_1} i_1 = -\frac{1}{R_1 C_1} u.$$

Ceci conduit aisément à la réalisation

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{RC}, \quad C = 1, \quad D = 0.$$

La fonction de transfert correspondante est

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D = -\frac{1}{RCp}$$

et traduit donc un comportement d'intégrateur (I).

• Soit le deuxième schéma en haut à droite de la figure 3.14. Il faut d'abord noter que

$$e^- = e^+ = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = v_{c_3}, \\ y = R_2 i_2. \end{cases}$$

Le courant  $i^-$  entrant dans l'amplificateur par la borne inverseuse est d'intensité nulle donc

$$i^- = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{u}{R_1} + C_3 \dot{u} + \frac{y}{R_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{R_2}{R_1} u - R_2 C_3 \dot{u}.$$

On voit clairement que le système décrit par cette équation différentielle n'est pas causal et une représentation d'état ne peut être obtenue. Toutefois, il est facile, par application de la transformation de Laplace, d'obtenir la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{Y}{U(p)} = -\frac{R_2}{R_1} - R_2 C_3 p$$

qui correspond à une action proportionnelle dérivée (PD). C'est l'action dérivée qui conduit à la non-causalité de la relation entre  $u$  et  $y$ .

- Soit le troisième schéma en bas à gauche de la figure 3.14. Il est clair que

$$u = e^+ = e^-.$$

Le courant d'intensité  $i_1$  traversant le condensateur et  $R_2$  n'entre pas dans l'amplificateur donc il traverse aussi  $R_1$  (d'où son indice!). Ainsi  $i_1$  peut s'exprimer

$$i_1 = C_2 \dot{v}_{c_2}.$$

Or,

$$u = e^- = R_1 i_1 = R_1 C_2 \dot{v}_{c_2} \Rightarrow \dot{v}_{c_2} = \frac{u}{R_1 C_2}.$$

Si l'on choisit comme unique variable d'état  $x = v_{c_2}$ , il vient

$$\dot{x} = \frac{u}{R_1 C_2} \Rightarrow A = 0, \quad B = \frac{1}{R_1 C_2}.$$

Il reste à établir l'équation de sortie. La tension  $y$  peut s'exprimer

$$y = v_c + R_2 i_1 + u = x + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u.$$

Il en résulte que

$$C = 1, \quad D = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

De cette réalisation, la fonction de transfert suivante est déduite :

$$G(p) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{R_1 C_2 p}.$$

Elle correspond à une action proportionnelle intégrale (PI). Les trois actions ont été identifiées et il reste à étudier le dernier schéma.

- Soit le quatrième schéma en bas à droite de la figure 3.14, page 118. La contre-réaction sur  $e^-$  entraîne

$$e^- = e^+ = 0.$$

Une fois de plus, la somme  $i^-$  des intensités des courants arrivant en  $e^-$  est nulle donc

$$\begin{aligned} i^- = i_1 + i_2 + i_3 &= \frac{u - v_{c1}}{R_1} + \frac{v_{c2}}{R_2} + C_2 \dot{v}_{c2} + \frac{u}{R_3} = 0 \\ \Leftrightarrow \dot{v}_{c2} &= \frac{v_{c1}}{R_1 C_2} - \frac{v_{c2}}{R_2 C_2} - \left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_3 C_2}\right) u. \end{aligned} \quad (3.50)$$

En outre,

$$\begin{aligned} i_1 = C_1 \dot{v}_{c1} &\Rightarrow \dot{v}_{c1} = \frac{i_1}{C_1} = \frac{u - v_{c1}}{R_1 C_1} \\ &\Rightarrow \dot{v}_{c1} = -\frac{1}{R_1 C_1} v_{c1} + \frac{1}{R_1 C_1} u. \end{aligned} \quad (3.51)$$

En choisissant comme vecteur d'état  $x = [v_{c1} \ v_{c2}]'$ , les équations (3.51) et (3.50), l'équation dynamique  $\dot{x} = Ax + Bu$  est instanciée par

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_3 C_2}\right) \end{bmatrix}.$$

Enfin, l'intensité du courant de sortie s'exprime

$$y = i_s = \frac{v_{c2}}{R_s},$$

ce qui conduit à

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_s} \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$



### 3.10.11. Moteur à courant continu

La représentation d'état doit être *a priori* d'ordre 2 puisque la fonction de transfert du moteur est d'ordre 2 (voir §2.4.2, page 52). Il sera vu ultérieurement que cette logique peut se révéler trompeuse (cf. chapitre 6). Cela étant, il suffit aussi de voir que deux grandeurs sont dérivées dans les équations du paragraphe 2.3.2, page 47 :  $i$  et  $\Omega$ . Il est alors naturel de les choisir comme variables d'état :  $x = [x_1 \ x_2]' = [i \ \Omega]'$ . Les équations conduisent alors aisément à la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = [0 \ 1] x. \end{cases}$$

Si l'on prend comme sortie  $y = \theta$ , c'est-à-dire la position angulaire de l'arbre du moteur, plutôt que sa vitesse angulaire, il faut ajouter une équation au jeu existant, à savoir

$$\dot{\theta} = \Omega.$$

Une troisième grandeur apparaît sous forme dérivée dans les équations ce qui conduit à considérer une troisième composante au vecteur d'état qui devient

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ \Omega \\ \theta \end{bmatrix}.$$

La réalisation qui en découle est

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} & 0 \\ \frac{k}{J} & -\frac{f}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = [1 \ 0 \ 0] x. \end{cases}$$

Elle fait apparaître une colonne de zéros dans la matrice d'état, ce qui implique une valeur propre nulle (donc un pôle nul), symptomatique de l'intégration entre la vitesse angulaire et la position angulaire.

### 3.10.12. Rendez-vous à la salle des fêtes

Les règles de la thermique montrent que les équations correspondant au système sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{T}_i &= -\frac{1}{C_i}(q_{ig} + q_{io}), \\ \dot{T}_g &= \frac{1}{C_g}(q_{ig} + q_{og}), \end{cases}$$

(le signe '-' dans la première équation provient du fait que les chaleurs sont considérées comme sortantes) avec

$$\begin{cases} q_{ig} &= \frac{1}{R_p}(T_i - T_g), \\ q_{io} &= \frac{1}{R_m}(T_i - T_o), \\ q_{og} &= \frac{1}{R_t}(T_o - T_g). \end{cases}$$

Puisque  $T_o$  correspond à la commande  $u$ , les deux autres températures, qui apparaissent dans les équations au travers de leurs dérivées, peuvent être prises comme variables d'état :  $x = [x_1 \ x_2]' = [T_i \ T_g]'$ . La représentation d'état qui est alors obtenue correspond bien à

$$\begin{cases} \dot{x} = \left[ \begin{array}{c|c} \alpha = -\frac{1}{C_i}(a+b) & \beta \\ \hline \gamma & \delta = -\frac{1}{C_g}(c+d) \end{array} \right] x + \left[ \begin{array}{c} e \\ f \end{array} \right] u, \\ y = [g \ | \ h] x, \end{cases}$$

avec

$$a = \frac{1}{R_m}, \quad b = \frac{1}{R_p}, \quad \beta = \frac{1}{C_i R_p}, \quad \gamma = \frac{1}{C_g R_p}, \quad c = b, \quad d = \frac{1}{R_t},$$

$$e = \frac{1}{C_i R_m}, f = \frac{1}{C_g R_t}, g = 1, h = 0.$$

La fonction de transfert correspondante se calcule grâce à la formule (3.17) page 88, ce qui conduit à

$$G(p) = \frac{1}{\det(pI - A)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p - \delta & \beta \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix},$$

où '\*' indique des composantes dont le calcul n'est pas nécessaire. Il vient

$$G(p) = \frac{ep + (\beta f - \delta e)}{p^2 - (\alpha + \delta)p + \alpha\delta - \beta\gamma}.$$

De cette fonction de transfert, il est facile, en se référant au paragraphe 3.5.1.2 page 84, de déduire respectivement des formes canoniques de commande et d'observation :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (\beta\gamma - \alpha\delta) & (\alpha + \delta) \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} (\beta f - \delta e) & e \end{bmatrix} \tilde{x}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} (\alpha + \delta) & 1 \\ (\beta\gamma - \alpha\delta) & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} e \\ (\beta f - \delta e) \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}, \end{cases}$$

Quoi qu'il en soit, pour garder les gens dans la salle par temps froid, il est préférable de considérer  $T_o$  non pas comme une commande mais comme une perturbation et d'introduire une nouvelle commande  $u$  qui soit par exemple une quantité de chaleur apportée par un dispositif de chauffage.

### 3.10.13. Modélisation d'un lecteur de disque dur

Les grandeurs dérivées dans les équations sont  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$ . Il est donc possible de prendre comme vecteur d'état

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}.$$

Ce vecteur d'état conduit, pour une entrée de commande  $u = M$  et une sortie  $y = \theta_2$ , à la réalisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_1} & -\frac{b}{J_1} & \frac{k}{J_1} & \frac{b}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_2} & \frac{b}{J_2} & -\frac{k}{J_2} & -\frac{b}{J_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = [0 \ 0 \ 1 \ 0] x. \end{array} \right.$$

En prenant en compte les hypothèses simplificatrices  $J_1 = J_2$  et  $b \simeq 0$ , la matrice d'évolution devient

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J} & 0 & \frac{k}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique

$$D(p) = \det(pI - A).$$

Il est donc nécessaire d'exprimer  $D(p)$ , ce qui peut se faire à l'aide des indications du paragraphe A.1.7, page 646 en annexe :

$$D(p) = p^2 \left( p^2 + 2\frac{k}{J} \right).$$

Les racines sont 0 (multiplicité algébrique double), et  $\pm j\sqrt{\frac{2k}{J}}$ .

### 3.10.14. Système hydraulique

Il suffit de considérer le vecteur d'état (pas de piège dans les notations !)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Compte tenu du choix de l'entrée, la première équation différentielle se réécrit

$$S_1 \dot{x}_1 = u - \frac{x_1}{R_1} \Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{x_1}{R_1 S_1} + \frac{u}{S_1}.$$

La seconde équation différentielle se réécrit

$$S_2 \dot{x}_2 = \frac{x_1}{R_1} - \frac{x_2}{R_2} \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{x_1}{R_1 S_2} - \frac{x_2}{R_2 S_2}.$$

Il est facile d'associer ces équations en une représentation d'état telle que (3.5), en notant que  $y = x_2$ . Les matrices du modèle sont alors données par

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 S_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1 S_2} & -\frac{1}{R_2 S_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [ 0 \quad 1 ], \quad D = 0.$$

### 3.10.15. Niveau de fluide et température dans une cuve

Pour l'instant, il convient de raisonner sur les grandeurs physiques globales, sans évoquer les variations autour des valeurs de fonctionnement. Il y a deux grandeurs à réguler :

- le niveau total de fluide dans la cuve :  $H_t = H + h$  ;
- la température de sortie :  $\theta_t = \theta_s + \theta$ .

Pour ce faire, deux commandes sont à disposition :

- le débit total de fluide entrant :  $Q_e = Q + q_e$  ;
- La puissance totale fournie pour chauffer le fluide :  $P_e = P + p$ .

Il s'agit donc d'un système à deux entrées et deux sorties, donc multivariable.

À ces entrées et ces sorties, s'ajoutent une autre variable interne qui est le débit total de sortie :  $Q_s = Q + q_s$ .

L'écoulement est de type « turbulent » ce qui signifie que  $Q_s$  s'exprime ainsi :

$$Q_s = \alpha\sqrt{H_t}.$$

Bilan volumique :

Sur un intervalle infinitésimal de temps  $dt$ , la variation de niveau total  $dV_t$  s'exprime

$$\begin{aligned} dV_t &= SdH_t = (Q_e - Q_s)dt \\ \Leftrightarrow \frac{dH_t}{dt} &= -\frac{\alpha}{S}\sqrt{H_t} + \frac{1}{S}Q_e = f_1(H_t, Q_e). \end{aligned}$$

Bilan calorimétrique :

L'énergie de chauffage dépensée dans l'intervalle  $dt$  est

$$W_t = P_e dt.$$

L'énergie nécessaire pour amener le fluide entré pendant cet intervalle de temps de  $\theta_e$  à  $\theta_t$  est donnée par

$$W_1 = Q_e \mu c (\theta_t - \theta_e),$$

où  $\mu$  est la masse volumique du fluide et  $c$  est sa chaleur spécifique. L'énergie nécessaire pour faire subir au fluide déjà présent dans la cuve une variation de température  $d\theta_t$  est donnée par

$$W_2 = SH_t \mu c d\theta_t.$$

Le bilan énergétique se traduit donc par l'égalité

$$W_t = W_1 + W_2$$

$$\Leftrightarrow P_e dt = Q_e \mu c (\theta_t - \theta_e) + SH_t \mu c d\theta_t$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\theta_t}{dt} = \frac{P_e}{SH_t \mu c} - \frac{\theta_t - \theta_e}{SH_t} Q_e = f_2(H_t, \theta_t, Q_e, P_e).$$

Deux équations différentielles non linéaires ont été obtenues. Elles décrivent le comportement du procédé. Si l'on suppose un vecteur de deux sorties, identique au vecteur d'état, ainsi qu'un vecteur de deux commandes, les deux vecteurs étant respectivement donnés par

$$Y = X = \begin{bmatrix} H_t \\ \theta_t \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} Q_e \\ P_e \end{bmatrix},$$

le modèle d'état non linéaire s'exprime

$$\begin{cases} \dot{X} &= f(X, U), \\ Y &= X, \end{cases} \quad (3.52)$$

où  $f$  est la fonction vectorielle

$$f(X, U) = \begin{bmatrix} f_1(X, U) = f_1(H_t, Q_e) \\ f_2(X, U) = f_2(H_t, \theta_t, Q_e, P_e) \end{bmatrix}.$$

Si maintenant les grandeurs en jeu sont les variations autour du point de fonctionnement, les vecteurs considérés sont

$$y = x = \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} q_e \\ p \end{bmatrix}.$$

Pour procéder à la linéarisation du modèle (3.52), on se réfère au paragraphe 3.2 page 70 mais, si le principe du développement de Taylor<sup>20</sup> est toujours de mise, il faut reprendre un peu les équations pour prendre en compte la seconde entrée de commande. La réalisation obtenue est notée  $(A, B, C, D)$  :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H_t}(H, \theta_s) & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_t}(H, \theta_s) \\ \frac{\partial f_2}{\partial H_t}(H, \theta_s, Q, P) & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_t}(H, \theta_s, Q, P) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q_e}(H, \theta_s) & \frac{\partial f_1}{\partial P_e}(H, \theta_s) \\ \frac{\partial f_2}{\partial Q_e}(H, \theta_s, Q, P) & \frac{\partial f_2}{\partial P_e}(H, \theta_s, Q, P) \end{bmatrix}.$$

Le calcul de  $A$  conduit à

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2S\sqrt{H}} & 0 \\ -\frac{1}{SH^2} \left( \frac{P}{\mu c} - (\theta_s - \theta_e)Q \right) & -\frac{Q}{SH} \end{bmatrix}.$$

Or, le bilan calorimétrique au point de fonctionnement (en l'absence de variations), s'écrit

$$Pdt = Q\mu c(\theta_s - \theta_e) \Leftrightarrow \mu c = \frac{P}{(\theta_s - \theta_e)Q}.$$

Par ailleurs, toujours au point de fonctionnement,

$$Q = \alpha\sqrt{H} \Leftrightarrow \alpha = \frac{Q}{\sqrt{H}}.$$

Ainsi la matrice d'état  $A$  se simplifie en

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{Q}{2SH} & 0 \\ 0 & -\frac{Q}{SH} \end{bmatrix}.$$

Le calcul de  $B$  conduit à

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{S} & 0 \\ -\frac{\theta_e - \theta_s}{SH} & -\frac{Q(\theta_s - \theta_e)}{SHP} \end{bmatrix}.$$

Bien sûr, la matrice d'observation est  $C = I_2$  puisque  $y = x$ .

L'application numérique amène la représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3600} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1800} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -50 & \frac{5}{6} \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$



Il n'est pas raisonnable de simuler une réponse indicielle *au sens strict*, c'est-à-dire en utilisant comme entrée un échelon unitaire. En effet, les unités utilisées sont les unités de base du système international ce qui signifie qu'un échelon unitaire de débit d'entrée correspond à une variation soudaine de  $1\text{m}^3/\text{s}$ . Non seulement, cette simulation du modèle linéaire ne rendrait pas compte du débordement quasi instantané de la cuve, mais, en outre, l'hypothèse de petites variations autour du point de fonctionnement, qui est la à la base de la justification du modèle linéaire obtenu, serait singulièrement violée. En d'autres termes, pour un tel échelon unitaire, le modèle linéaire peut être simulé mais il n'a aucune validité pour décrire le comportement du procédé. En revanche, il serait possible d'envisager des simulations de réponses à des échelons d'amplitudes beaucoup plus faibles.

### 3.10.16. Maquette d'hélicoptère

#### 1. Principe d'élévation

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un solide en rotation conduit à écrire l'équation différentielle suivante :

$$J_e \ddot{\epsilon} = l_a F_m \cos(p) - l_a F_g \cos(\epsilon). \quad (3.53)$$

Or,  $F_m$  consitute la résultante des forces  $F_f$  et  $F_b$  associées aux deux hélices, ces forces étant proportionnelles aux tensions  $V_f$  et  $V_b$  d'excitation des deux moteurs. Ainsi,

$$F_m = F_f + F_b = q(V_f + V_b),$$

ce qui implique

$$\ddot{\epsilon} = \frac{l_a q}{J_e} \cos(p)(V_b + V_f) - \frac{l_a F_g}{J_e} \cos(\epsilon) = f_\epsilon(\epsilon, p, V_f, V_b). \quad (3.54)$$

#### 2. Principe de tangage

Là encore, il faut appliquer le principe fondamental de la dynamique qui conduit à

$$J_p \ddot{p} = l_h (V_f - V_b)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{p} = \frac{q l_h}{J_p} (V_f - V_b) = f_p(V_f, V_b). \quad (3.55)$$

L'hélicoptère pointe son nez vers le bas quand l'hélice *forward* est plus basse c'est-à-dire quand  $p$  est négatif. La condition est donc  $p < 0$ . Le sens voulu de déplacement est alors « vers l'avant ». En effet, la composante horizontale de  $F_m$  correspond alors au sens positif de déplacement. En d'autres termes, l'accélération tend à faire avancer l'hélicoptère. Si la situation perdure, l'hélicoptère finit forcément par avancer ce qui se traduit par  $r > 0$ .

### 3. Principe de déplacement

C'est la partie la plus délicate à interpréter géométriquement. Il faut d'abord se souvenir que  $r$  est une vitesse et non un angle ou une distance. Se référant à la figure 3.22, le principe fondamental de la dynamique conduit à

$$J_t \dot{r} = -l_a F_m \sin(p) \cos(\epsilon).$$

Or, l'élévation est supposée constante lors du déplacement. Ainsi, en posant  $\dot{\epsilon} = 0 (\Rightarrow \ddot{\epsilon} = 0)$  dans l'équation (3.53), il vient

$$F_m \cos(p) = F_g \cos(\epsilon) \Leftrightarrow F_m = \frac{F_g \cos(\epsilon)}{\cos(p)}.$$

L'équation différentielle devient donc

$$\dot{r} = -\frac{l_a F_g \sin(p) \cos^2(\epsilon)}{J_t \cos(p)} = f_r(\epsilon, p). \quad (3.56)$$

### 4. Obtention d'un modèle d'état

Tout d'abord,  $V_f = V + v_f$  et  $V_b = V + v_b$  où  $V$  correspond à la tension à appliquer sur les deux moteurs pour compenser le poids de l'hélicoptère (maintien de l'élévation constante, ce qui implique  $\dot{\epsilon} = 0 \Rightarrow \ddot{\epsilon} = 0$ ). Ainsi, de l'équation (3.54), on tire, pour  $V_f = V_b = V$ ,

$$2qV \cos(p) = F_g \cos(\epsilon). \quad (3.57)$$

Il faut ensuite linéariser les trois équations (3.54), (3.55) et (3.56). Le principe de cette approximation est simple. La maquette est prévue pour fonctionner avec une faible élévation, et un faible tangage suffit à engendrer un déplacement. De ce fait, les cosinus sont proches de 1 et l'on fait l'approximation classique  $\sin(x) \simeq x$  lorsque  $x$  est proche de zéro. Les trois fonctions non linéaires sont alors remplacées par des expressions linéaires :

$$\begin{cases} \ddot{\epsilon} &= f_{\epsilon}(V, v_f, v_b) \simeq \frac{l_a q}{J_e} (2V + v_b + v_f) - \frac{l_a F_g}{J_e}, \\ \ddot{p} &= f_p(v_f, v_b) = \frac{q l_h}{J_p} (v_f - v_b), \\ \dot{r} &= f_r(\epsilon, p) \simeq -\frac{l_a F_g p}{J_t}. \end{cases}$$

Par ailleurs, l'équation (3.57) devient

$$2qV \simeq F_g,$$

ce qui permet de simplifier encore  $f_{\epsilon}$  en

$$f_{\epsilon}(v_f, v_b) \simeq \frac{l_a q}{J_e} (v_b + v_f).$$

Pour établir un modèle d'état, le choix du vecteur d'état se porte naturellement sur

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \dot{\epsilon} \\ p \\ \dot{p} \\ r \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs de commande et de sortie sont

$$u = x = \begin{bmatrix} v_f \\ v_b \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \epsilon \\ p \\ r \end{bmatrix}.$$

Les trois nouvelles expressions définissant  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ , ainsi que les deux équations différentielles évidentes  $\dot{x}_1 = x_2$  et  $\dot{x}_3 = x_4$  conduisent ensemble à la représentation d'état

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l_a F_g}{J_t} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{l_a q}{J_e} & \frac{l_a q}{J_e} \\ 0 & 0 \\ \frac{l_h q}{J_p} & -\frac{l_h q}{J_p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x. \end{array} \right.$$

Ce modèle d'état est multivariable puisqu'il comporte deux entrées. La matrice de commande  $B$  n'est pas un simple vecteur mais comporte deux colonnes.

### 3.10.17. Choix d'une réalisation

La fonction de transfert  $G(p)$  peut s'écrire (à l'aide d'une division polynomiale)

$$G(p) = \frac{6}{3p^3 + 4p^2 + 2p + 1} + 2$$

$$\Leftrightarrow G(p) = \frac{2}{p^3 + \frac{4}{3}p^2 + \frac{2}{3}p + \frac{1}{3}} + 2.$$

Le quotient de la division polynomiale (ici 2), n'est autre que la transmission directe  $D$ . Donc  $D = 2$  et il n'y a pas d'autre choix. Pour déterminer  $A$ ,  $B$  et  $C$ , il peut y avoir plusieurs possibilités (il ne faut pas oublier qu'il existe une infinité de réalisations pour une seule fonction de transfert). Mais le plus simple est de chercher une structure compagne qui se déduit directement des paramètres de  $G(p)$ . En se référant au paragraphe 3.5.1.2, page 84, la réalisation canonique de commande est

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = [2 \ 0 \ 0] x + 2u. \end{cases}$$

La réalisation canonique d'observation est

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y = [1 \ 0 \ 0] x + 2u. \end{cases}$$

### 3.10.18. « Jordanisation » d'une réalisation

La réalisation à déterminer est notée  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ . Elle est associée à l'état  $\bar{x}$  alors que la réalisation originale est associée à l'état  $x$ . Avant de calculer ces matrices, il faut déterminer les valeurs propres de  $A$ . Pour cela, il faut calculer le polynôme caractéristique

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda + 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \right) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2.$$

Ses racines, qui sont les valeurs propres de  $A$ , sont  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  (racine double c.-à-d. de multiplicité algébrique 2)  $\lambda_3 = 2$  (racine simple c.-à-d. de multiplicité 1). Par ailleurs,

$$q = n - \text{rang}(A - \lambda_1 I_3) = 3 - \text{rang} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) = 3 - 2 = 1.$$

Donc, il n'y a qu'un seul bloc de Jordan pour la valeur propre  $\lambda_1 = -1$  (elle est donc de multiplicité géométrique 1).

Il faut maintenant déterminer la matrice de passage, c'est-à-dire les vecteurs propres à droite. Soient  $v_1$  et  $v_2$ , deux vecteurs propres à

droite associés à  $\lambda_1$ . Soit aussi  $v_3$ , le vecteur propre à droite associé à  $\lambda_2$ . La première équation à satisfaire est

$$Av_1 = \lambda_1 v_1.$$

Cette équation conduit à un système d'équations dont une solution simple est

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sur la base de ce premier vecteur propre,  $v_2$  est recherché ; il doit vérifier

$$Av_2 = v_1 + \lambda_1 v_2.$$

Cette équation conduit à un système d'équations dont une solution simple est

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Enfin, le troisième vecteur propre à droite doit vérifier

$$Av_3 = \lambda_1 v_3$$

Cette équation conduit à un système d'équations dont une solution simple est

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Les trois vecteurs obtenus sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base de  $\mathbb{R}^3$  et peuvent constituer les colonnes d'une matrice de passage

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

telle que  $x = V\bar{x}$ .

Bien entendu, la matrice d'évolution dans cette nouvelle base est

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Elle peut se retrouver (mais c'est inutile) en calculant  $V^{-1}AV$ . Le vecteur  $\bar{B}$  est donné par

$$\bar{B} = V^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La nouvelle matrice d'observation est

$$\bar{C} = CV = [ -4 \quad 0 \quad 3 ].$$

Enfin, la transmission directe est indépendante de la base donc

$$\bar{D} = D = 5.$$

### 3.10.19. Associations de systèmes

Tout d'abord,  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont supposés associés en parallèle selon la figure 3.4 page 95. La formule (3.24) permet de déduire la réalisation du système qui en résulte :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = [ 1 \quad 0 \quad 4 ], \quad D = 1.$$

Puis,  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont supposés associés en série selon la figure 3.5 page 96. La formule (3.25) permet de déduire la réalisation du système qui en résulte :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [ 1 \quad 0 \quad 4 ], \quad D = 0.$$

Enfin,  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont supposés associés en série selon la figure 3.6 page 98. Les formules (3.26-3.29) permettent de déduire la réalisation du système qui en résulte :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [ 1 \ 0 \ 0 ], \quad D = 0.$$

Dans ce dernier cas, le calcul est grandement facilité par le fait que  $D_1 = 0$ .



### 3.11. Notes et références

Sans revenir sur le petit historique non référencé du paragraphe 3.3 page 74, il est rappelé ici que la notion d'état apparaissait déjà dans les travaux de mécanique de Sir William R. Hamilton<sup>21</sup> et les travaux de thermodynamique de Henri Poincaré<sup>22</sup>. Ce sont toutefois les travaux d'A. M. Liapounov<sup>23</sup> qui suscitèrent l'intérêt de la communauté occidentale pour l'approche temporelle et la représentation d'état [1]. Une petite biographie de ce formidable savant est proposée en annexe au chapitre I, page 771. Comme il sera vu au chapitre 5, la seconde méthode de Lyapunov permet d'obtenir des tests de stabilité des systèmes linéaires mais elle ne fut initialement pas spécifiquement élaborée pour l'étude de ces systèmes, loin s'en faut. Bien au contraire, elle peut permettre d'analyser des représentations non linéaires telles que (3.1) page 69. Pour l'étude des systèmes non linéaires, qui sort du cadre du présent document comme clairement annoncé par le titre, le lecteur peut consulter deux ouvrages de référence, à savoir [2,3] et [4]. Mais ce sont les systèmes linéaires qui sont étudiés ici.

Le paragraphe 3.3 page 74 a aussi mis en évidence l'importance du travail de Bellman<sup>24</sup>, Kálmán<sup>25</sup>, Bertram, etc. dans le renouveau de l'approche temporelle et la popularisation du modèle d'état en occident. L'idée initiale était donc de reprendre les travaux de Liapounov, entre autres pour optimiser les trajectoires des engins spatiaux. On peut citer le livre de Richard Bellman [5] pendant que Lev. S. Pontryaguine<sup>26</sup> développait son « principe du maximum » en 1958 [6], qui permettrait à Kálmán et consorts d'avancer dans leurs travaux [7]. Mais pour se focaliser sur le sujet de ce chapitre, et le propos de ce paragraphe et de §3.3 page 74, il convient probablement de citer [8,9,10] pour évoquer l'étude du travail de Liapounov et [11,12] pour retrouver vraiment la formulation du modèle d'état tel qu'introduit dans le présent document. Le passage de la fonction de transfert à la représentation d'état exposé en §3.5, page 80, est abordé dans [13]. La contribution de Kálmán est immense et les chapitres ultérieurs y reviendront.

Pour ce qui est des documents qui ont vraiment été utiles à la rédaction de ce chapitre et qui peuvent permettre au lecteur d'aller plus loin, un certain nombre de références déjà citées au précédent chapitre semblent indiquées, à

---

21. cf. biographie 3.3 page 138.

22. mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français (1854-1912).

23. mathématicien, physicien, mécanicien russe (1857-1918).

24. cf. biographie 3.2 page 77.

25. cf. biographie en annexe I.2 page 777.

26. mathématicien soviétique (1908-1988).

savoir, en anglais, [14,15,16,17,18], auxquelles on peut ajouter d'autres livres plus anciens où est traité spécifiquement le modèle d'état [19,2021,22]. Il en existe beaucoup d'autres qui ne peuvent toutes être citées ici mais il serait inconvenant de ne pas mentionner l'excellent et très complet [23]. Les ouvrages anglophones sont souvent plus volumineux et plus complets que les ouvrages francophones. Par ailleurs, c'est sans doute le fait de l'histoire, les auteurs anglophones accordent une place plus importante que les auteurs francophones à la représentation d'état. Toutefois, il existe des ouvrages français qui se focalisent sur le modèle d'état. C'est le cas du quasi introuvable [24] ou du bien plus récent et bien plus facilement acquérable [25]. Il faut également citer l'ouvrage qui, un peu à l'anglo-saxonne, ne privilégie ni l'approche fréquentielle, ni l'approche temporelle, à savoir le livre [26], écrit par l'*ex duo de choc de l'Automatique*, alias Bernard Pradin et Germain Garcia, duo qui fit le bonheur de quelques promotions d'ingénieurs de l'INSA de Toulouse dans les années 1990. À ce stade, le lecteur aura certainement compris toute l'estime que l'auteur du présent document porte à ces deux enseignants-chercheurs de qualité. Le livre [27] peut aussi être mentionné. Il est aussi bien sûr possible de se procurer de nombreux photocopiés de cours en ligne. En toute absence de modestie et sans vergogne, l'auteur vous propose de consulter la version très allégée du présent document [28] ainsi que [29].

Concernant les quelques exemples de ce chapitre, ils ont été empruntés essentiellement à l'incontournable [30] ainsi qu'aux références anglo-saxonnes citées ci-dessus auxquelles il convient d'ajouter un autre ouvrage de Katsuhiko Ogata : [31]. Certaines sont sans doute inspirées de diverses lectures sur Internet. D'autres, enfin, sont nées de l'esprit abîmé, malade et tortueux de l'auteur.

1. **A. M. Lyapunov** : *Problème général de stabilité du mouvement*. Annales de la faculté de sciences de Toulouse, vol 9. p.203-474, 197. Traduit du texte original russe, publié dans Comm. Soc. Math., Kharkov, 1892. *Une véritable mine d'idées à la fois simples mais très fortes, très puissantes, qui inspirèrent et inspirent encore de très nombreux automaticiens mais aussi bien des chercheurs d'autres disciplines scientifiques. C'est essentiellement sa « seconde méthode » ou « méthode directe » qui génère (toujours) de nombreux travaux sur la stabilité des systèmes.*

2. **M. Vidyasagar** : *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, 1978.  
*Première édition d'un ouvrage assez prisé des « non-linéaristes », et des étudiants découvrant le sujet.*
3. **M. Vidyasagar** : *Nonlinear Systems Analysis*. SIAM Editions, collection « Classics in Applied mathematics », 1982.  
*Seconde édition de l'ouvrage précédent plutôt bien actualisée.*
4. **H. Khalil** : *Nonlinear Systems*. Troisième édition Prentice Hall, 1981.  
*L'autre grosse référence sur les systèmes non linéaires.*
5. **R. Bellman** : *Dynamic Programming* Princeton University Press, New Jersey, 1957.  
*Introduction à l'optimisation dynamique, au principe d'optimalité. « Vraie naissance de la commande optimale » dans la communauté automatisée occidentale.*
6. **L. S. Pontryagin, V. G. Boltyansky, R. V. Gamkrelidze et E. F. Mishchenko** : *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley, New York, 1962.  
*Un livre en anglais pour connaître le travail de Pontryaguine.*
7. **R. E. Kálmán** : Contributions to the Theory of Optimal Control *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 5, p. 102-119, 1960.  
*Article de Kálmán souvent cité, relatif à la commande optimale.*
8. **R. E. Kálmán and J. E. Bertram** : Control System Analysis and Design via the "second method" of Lyapunov I. Continuous-time Systems. *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 82(2), p. 371-393, 1960.  
*Premier article expliquant l'intérêt de la seconde méthode de Lyapunov pour l'étude des systèmes continus.*
9. **R. E. Kálmán and J. E. Bertram** : Control System Analysis and Design via the "second method" of Lyapunov II. Discrete-time Systems. *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 82(2), p. 394-400, 1960.  
*La suite du précédent article mais pour l'étude des systèmes discrets.*
10. **J.-P. LaSalle et S. Lefschetz** : *Stability by Lyapunov Direct Method with Applications* Academic Press, New York, 1961.  
*LaSalle a apporté sa propre définition et son propre critère de stabilité « étendant » en quelque sorte celui de Liapounov.*

11. **R. E. Kálmán** : On the General Theory of Control Systems. *Proc. First World IFAC Congress*, Moscou, 1960.  
*Probablement l'article fondateur de la représentation d'état linéaire.*
12. **R. E. Kálmán** : Mathematical Description of Linear Dynamical Systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics (Series A Control)*, 1(2), p.152-192, 1963.  
*En complément du précédent, un article de revue, avec peut-être un peu plus de recul (si c'est possible!).*
13. **B. L. Ho et R. E. Kálmán** : Effective construction of linear state-variable models from input/output functions. *Automatisierungstechnik*, vol. 14, 1966.  
*Passage de la fonction de transfert à la représentation d'état.*
14. **T. Kailath** : *Linear Systems*. Prentice Hall, 1979.  
*Un vrai ouvrage de référence, pas très facile à aborder par son style et sa forme mais redoutablement complet. Pratiquement une « bible ».*
15. **R. C. Dorf et R. H. Bishop** : *Modern Control Systems*. Neuvième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.  
*La réédition permanente de cet ouvrage en dit long sur sa popularité. Les nombreux exemples constituent une vraie mine d'exercices pour un enseignant.*
16. **G. F. Franklin, J. D. Powell et A. Emami-Naemi** : *Feedback Control of Dynamic Systems*. Quatrième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.  
*Assez riche en exemples et agréable dans la forme. Plutôt didactique.*
17. **K. Ogata** : *Modern Control Engineering*. Troisième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.  
*Ouvrage de référence qui semble en avoir inspiré plus d'un. L'auteur a un petit faible pour cette référence dont la première édition date de 1970.*
18. **P. J. Antsaklis et A. N. Michel** : *Linear Systems*. McGraw-Hill, 1997.  
*Fanchement pas le plus accessible mais très rigoureux mathématiquement. Très bien mais déconseillé pour une première approche.*
19. **L. A. Zadeh et C. A. Desoer** : *Linear System Theory : The State Space Approach*. McGraw-Hill Education, 1963.  
*Vraiment un livre à valeur historique car précurseur pour divulguer l'ap-*

- proche par modèle d'état. Cependant, il reste assez difficile d'accès. À noter que Zadeh devint plus tard le « père » de la logique floue.<sup>27</sup>
20. **K. Ogata** : *State-Space Analysis of Control Systems* Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1963.  
*Katsuhiko Oagata, auteur de plusieurs ouvrages de référence en automatique linéaire, se concentre sur l'espace d'état.*
  21. **L. K. Timothy et B. E. Bona** : *State Space Analysis : An Introduction*. McGraw-Hill, New York, 1968.  
*Un des premiers livres sur le modèle d'état qui présente donc, à titre quasi historique, un intérêt. Difficile à se procurer mais on peut trouver plus didactique aujourd'hui.*
  22. **D. G. Luenberger** : *Introduction to dynamic systems*. John Wiley and sons, New York, 1979.  
*Un livre écrit par la « star des observateurs » mais qui est surtout intéressant par l'originalité de beaucoup d'exemples proposés.*
  23. **B. Friedland** : *Control System Design - An Introduction to State-Space Methods*. Dover, Mineola, New York, 1985.  
*Cet ouvrage se concentre uniquement sur la représentation d'état et de ce fait, vu sa taille importante, traite bien plus d'aspects que beaucoup d'autres. Les exemples y sont nombreux et bien choisis. Il est parfois un peu dense. Son prix est très raisonnable.*
  24. **J. Lifermann** : *Systèmes linéaires - Variables d'état*. Éditions Masson, 1972.  
*Ce livre brille aujourd'hui par sa rareté pour deux raisons : premièrement, il est consacré uniquement à la représentation d'état, secondement, l'auteur du présent document n'a jamais pu le consulter... ce qui lui aurait permis d'en dire un peu plus au lecteur.*
  25. **L. Jaulin** : *Représentation d'état pour la modélisation et la commande des systèmes*. Éditions Hermes, 2005.  
*Ce livre est également spécifiquement consacré au modèle d'état et, bien que didactique, n'en propose pas moins des études de cas assez sophistiquées.*
  26. **B. Pradin et G. Garcia** : *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Presses Universitaires du Mirail, 2010.

---

27. Lotfi Aliasker Zadeh, mathématicien et ingénieur d'origine azéri et russe, spécialiste d'électricité, d'informatique et d'intelligence artificielle (1921-2017).

- Que dire de cet ouvrage si ce n'est que c'est celui qu'il faut acheter!  
Incontestablement le meilleur rapport qualité/prix.
27. **E. Godoy et collectif** : *Régulation industrielle*. Éditions Dunod, L'Usine Nouvelle, 2007.  
Ouvrage assez complet écrit par un collectif d'enseignants ou chercheurs de Supélec couvrant de nombreux aspects de l'Automatique dont l'approche par représentation d'état.
28. **O. Bachelier** : *Cours d'automatique - Représentation d'état linéaires des systèmes monovariabiles*. Notes de cours, Université de Poitiers, École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers (ENSIP), deuxième de cycle ingénieur, spécialité Maîtrise de l'Énergie Électrique (MEE), 2012. Téléchargeable à l'adresse :  
<http://www.lias-lab.fr/perso/olivierbachelier/teachings.php>  
Si vous aimez la façon de voir de l'auteur... et si le présent document vous paraît trop volumineux.
29. **D. Arzelier** : *Représentation et analyse des systèmes linéaires - Notes de cours*. ENSICA, Toulouse, 2013. Téléchargeable à l'adresse :  
<http://homepages.laas.fr/arzelier/cours.html>  
Excellentes notes de cours, assez complètes. Belle plume, références originales et jolies illustrations.
30. **B. Pradin** : *Polycopié de cours d'Automatique : « Automatique : Notes de cours - Exercices »*. INSA de Toulouse, 3ème année spécialité AEI. 1992.  
Là où l'essentiel est mieux expliqué que partout ailleurs! si ce n'est dans [26].
31. **K. Ogata** : *System dynamics* Prentice Hall, 1994.  
Un bon ouvrage un peu redondant avec [17] mais qui le complète tout de même bien en termes d'exemples. Il existe des rééditions plus récentes.

# Chapitre 4

## *Réponse d'un modèle d'état*

Dans ce chapitre, il s'agit d'utiliser un modèle d'état pour déterminer la réponse d'un système linéaire à une excitation classique (impulsion, échelon, sinusoïde). Par réponse on entend la forme (ou l'expression) de la sortie  $y(t)$  du système délivrée sous l'effet d'une excitation  $u(t)$ .

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Solution du système autonome</b>	<b>168</b>
4.1.1	Matrice de transition d'état	168
4.1.2	Solution de l'équation homogène	169
<b>4.2</b>	<b>Solution de l'équation d'état complète</b>	<b>170</b>
<b>4.3</b>	<b>Calcul de <math>e^{At}</math></b>	<b>172</b>
4.3.1	Méthode des séries	172
4.3.2	Par la transformation de Laplace	174
4.3.3	Méthodes des modes	175
4.3.4	Méthode Cayley-Hamilton	176
<b>4.4</b>	<b>Régime transitoire : influence des modes</b>	<b>178</b>
<b>4.5</b>	<b>Réponse impulsionnelle</b>	<b>181</b>
<b>4.6</b>	<b>Réponse indicielle</b>	<b>181</b>
<b>4.7</b>	<b>Réponse harmonique</b>	<b>183</b>

<b>4.8 Exercices</b>	<b>185</b>
4.8.1 Exponentielle de $At$	185
4.8.2 Calcul d'une réponse à un signal composé	185
4.8.3 Préambule au chapitre suivant	186
4.8.4 Réponse fréquentielle	186
4.8.5 Opération tape-cul	187
<b>4.9 Correction des exercices</b>	<b>190</b>
4.9.1 Exponentielle de $At$	190
4.9.2 Calcul d'une réponse à un signal composé	191
4.9.3 Préambule au chapitre suivant	194
4.9.4 Réponse fréquentielle	194
4.9.5 Opération tape-cul	197
<b>4.10 Notes et références</b>	<b>199</b>

## 4.1. Solution du système autonome

Avant d'envisager une solution à l'équation d'état complète, on peut s'attarder un peu sur la réponse du système autonome (c.-à-d. sans entrée de commande). Un tel système se décrit ainsi :

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.1)$$

Le vecteur  $x_0$  constitue l'ensemble des conditions « initiales » sur l'état à l'instant  $t_0$ . Il s'agit ici de voir comment le système réagit librement, en l'absence d'entrée, à cette condition initiale.

### 4.1.1. Matrice de transition d'état

On recherche la solution au problème posé sous la forme suivante :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0. \quad (4.2)$$

La matrice  $\Phi(t, t_0)$  est dite *matrice de transition d'état* puisqu'elle permet de passer de l'état  $x_0$  à l'état  $x(t)$ . En dérivant  $x$  par rapport au temps, on obtient

$$\dot{x}(t) = Ax(t) = A\Phi(t, t_0)x_0, \quad (4.3)$$



par injection de (4.2) dans (4.1). Par ailleurs, la dérivation de cette même équation (4.2) mène à

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t, t_0)x_0. \quad (4.4)$$

L'identification de (4.3) et (4.4) conduit aux équations

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t, t_0) = A\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) = I, \end{cases} \quad (4.5)$$

puisque la transition de  $x_0$  à  $x_0$  est bien sûr l'identité. Les propriétés de cette matrice de transition sont notables. En effet,

$$\left. \begin{array}{l} x(t_2) = \Phi(t_2, t_1)x(t_1) \\ x(t_3) = \Phi(t_3, t_2)x(t_2) \\ x(t_3) = \Phi(t_3, t_1)x(t_1) \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi(t_3, t_1) = \Phi(t_3, t_2)\Phi(t_2, t_1) \quad \forall \{t_1; t_2; t_3\} \in \mathbb{R}^3 \quad (4.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} x(t_1) = \Phi(t_1, t_2)x(t_2) \\ x(t_1) = \Phi^{-1}(t_2, t_1)x(t_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi^{-1}(t_2, t_1) = \Phi(t_1, t_2) \quad \forall \{t_1; t_2\} \in \mathbb{R}^2. \quad (4.7)$$

#### 4.1.2. Solution de l'équation homogène

La solution d'un tel système matriciel (c.-à-d. (4.5)) est analogue à celle obtenue dans le cas scalaire donc il vient :

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}. \quad (4.8)$$

Pour s'en convaincre, on peut rappeler qu'une exponentielle de matrice peut se calculer grâce au développement en série :

$$e^{A(t-t_0)} = I + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2!} + \frac{A^3(t-t_0)^3}{3!} + \dots \quad (4.9)$$

Si l'on dérive l'expression ci-dessus par rapport au temps, on obtient

$$\frac{d(e^{A(t-t_0)})}{dt} = A + A^2(t-t_0) + \frac{A^3(t-t_0)^2}{2!} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{d(e^{A(t-t_0)})}{dt} = A(I + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2!} + \frac{A^3(t-t_0)^3}{3!} + \dots) = Ae^{A(t-t_0)}. \quad (4.10)$$

En outre,

$$e^{A(t_0-t_0)} = e^0 = I. \quad (4.11)$$

Les équations (4.10) et (4.11) montrent bien que  $\Phi(t, t_0) = (e^{A(t-t_0)})$  est solution de (4.5). La réponse du système autonome à une condition initiale  $x_0$  est donc :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0. \quad (4.12)$$

## 4.2. Solution de l'équation d'état complète

On recherche maintenant une solution en  $x$  puis  $y$  à l'équation (3.5), page 71. On suppose que cette solution est de la forme :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)z(t) \quad \text{avec} \quad z(t_0) = x_0. \quad (4.13)$$

Il vient alors, par dérivation,

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t, t_0)z(t) + \Phi(t, t_0)\dot{z}(t),$$

qui, en appliquant (4.5), donne

$$\dot{x}(t) = A\Phi(t, t_0)z(t) + \Phi(t, t_0)\dot{z}(t) = Ax(t) + \Phi(t, t_0)\dot{z}(t).$$

Mais, d'après (3.5) page 71,  $\dot{x}(t)$  est aussi donné par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Par identification des deux expressions de  $\dot{x}(t)$ , on a

$$\dot{z}(t) = \Phi^{-1}(t, t_0)Bu(t)$$

qui, compte tenu de la propriété (4.7), devient

$$\dot{z}(t) = \Phi(t_0, t)Bu(t).$$

En intégrant cette équation, on exprime  $z(t)$  :

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)Bu(\tau)d\tau = x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)Bu(\tau)d\tau.$$

D'après (4.13), il vient

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)Bu(\tau)d\tau,$$

qui, par application de (4.6), devient

$$\Leftrightarrow x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Compte tenu de l'expression de la matrice  $\Phi$  donnée en (4.8), il vient

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (4.14)$$

Bien entendu, l'expression de  $x(t)$  dépend ensuite de celle  $u(t)$ . Si l'on donne la solution en  $y$  de l'équation d'état, l'égalité (4.14) amène :

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C \left( \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right) + Du(t). \quad (4.15)$$

Dans l'égalité ci-avant, on peut faire une distinction utile dans le membre de droite (déjà étudiée dans le cours sur l'approche fréquentielle) et faire apparaître deux régimes dans la réponse :

- ◇ *Le régime libre* : il correspond au premier terme et ne dépend que du modèle du système et de la condition initiale. Il ne dépend pas de l'action de l'environnement extérieur pendant la réponse.
- ◇ *Le régime forcé* : il est associé aux deux derniers termes et correspond en fait à la réaction du système à l'excitation  $u(t)$ . Il dépend du modèle du système mais aussi de la nature du signal  $u(t)$ .

En outre, lorsque la réponse tend asymptotiquement vers une valeur constante de  $y(t)$  ou vers un comportement périodique de ce signal, on peut distinguer :

- ◇ *Le régime transitoire* qui correspond au signal  $y(t)$  restreint à un temps durant lequel il subit une évolution avant de se rapprocher d'une valeur constante ou d'un comportement périodique. La durée du régime transitoire correspond à un temps appelé *temps de réponse* et noté  $t_r$ .
- ◇ *Le régime permanent* ou *le régime statique* qui succède au régime transitoire, qui commence donc à  $t_r$  et qui correspond à l'intervalle de temps durant lequel  $y(t)$  est considéré comme restant toujours proche de sa valeur finale (généralement à moins de 5% de la variation totale de  $y(t)$ ) ou comme ayant un comportement périodique.

### 4.3. Calcul de $e^{At}$

Pour calculer  $x(t)$  ou  $y(t)$ , il est nécessaire de savoir calculer une *exponentielle de matrice*. Plusieurs méthodes sont ici présentées.

#### 4.3.1. Méthode des séries

Il suffit pour cette méthode d'utiliser le développement en série donnée en (4.9) page 169. Lorsque le calcul est effectué manuellement, cette méthode n'est envisageable que pour des matrices nilpotentes c'est-à-dire des matrices pour lesquelles il existe un  $k$  fini tel que  $A^l = 0$  quel que soit  $l$  supérieur à  $k$ .

En revanche, il est tout à fait raisonnable d'utiliser cette technique lorsque le calcul est effectué numériquement, le développement convergeant de manière

absolue.

Le théorème de Cayley-Hamilton<sup>1</sup> peut être utilisé pour calculer plus facilement les différentes puissances de  $A$  à partir de  $A^n$ . En effet, ce théorème stipule que la matrice  $A$  vérifie sa propre équation caractéristique  $P(A) = 0$  où  $P$  désigne le polynôme caractéristique de  $A$  (cf. équation (3.22) page 91 ainsi que le paragraphe A.1.10 en annexe, page 651). Il vient donc

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^n a_i A^i = 0 \quad \text{avec} \quad a_n = 1 \\ &\Leftrightarrow A^n = - \sum_{i=1}^{n-1} a_i A^i \\ &\Rightarrow A^{n+k} = - \sum_{i=1+k}^{n+k-1} a_{i-k} A^i. \end{aligned}$$

Exemple :

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2. \quad (4.16)$$

Le théorème de Cayley-Hamilton conduit à

$$A^2 + 3A + 2I = 0 \Leftrightarrow A^2 = -3A - 2I.$$

Ceci permet donc de déduire  $A^2$  plus aisément, mais aussi

$$A^3 = A^2 \cdot A = -3A^2 - 2A = -3(-3A - 2I) - 2A = 7A + 6I$$

ainsi que les puissances successives de  $A$  de façon analogue.

---

1. du nom du mathématicien britannique Arthur Cayley (1821-1895) et de Sir William Rowan Hamilton dont une biographie est proposée à la page 138.

### 4.3.2. Par la transformation de Laplace

Soit le système autonome (4.1), page 168, avec  $t_0 = 0$ . La solution d'un tel système pour une condition initiale  $x(0) = x_0$  est donnée par  $x(t) = e^{At}x_0$ . Or, si l'on applique  $\mathcal{L}$  à (4.1), on a (voir les propriétés de  $\mathcal{L}$  au paragraphe 2.1.3 page 34)

$$\begin{aligned} pX(p) - x_0 &= AX(p) \Leftrightarrow X(p) = (pI - A)^{-1}x_0 \\ \Leftrightarrow x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[(pI - A)^{-1}]x_0. \end{aligned}$$

Par identification avec (4.12), l'exponentielle de matrice peut donc s'écrire (on rappelle qu'ici,  $t_0 = 0$ )

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(pI - A)^{-1}].$$

Reprenons comme exemple la matrice la matrice utilisée dans la paragraphe précédent, à savoir

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow pI - A &= \begin{bmatrix} p & -1 \\ 2 & p+3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'inversion de la matrice ci-dessus amène à

$$(pI - A)^{-1} = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} \begin{bmatrix} p+3 & 1 \\ -2 & p \end{bmatrix}.$$

Une décomposition en éléments simples conduit à

$$(pI - A)^{-1} = \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2} & & \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} & \\ & & & \\ \hline -\frac{2}{p+1} + \frac{2}{p+2} & & -\frac{1}{p+1} + \frac{2}{p+2} & \end{array} \right]$$

qui, par application de  $\mathcal{L}^{-1}$ , donne

$$e^{At} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 2e^{-t} - e^{-2t} & & e^{-t} - e^{-2t} & \\ & & & \\ \hline -2e^{-t} + 2e^{-2t} & & -e^{-t} + 2e^{-2t} & \end{array} \right]. \quad (4.17)$$

### 4.3.3. Méthodes des modes

Il est bien connu que si  $J$  est une forme de Jordan semblable à  $A$  telle que  $A = MJM^{-1}$ , où  $M$  est une matrice de passage (ou matrice de changement de base) alors

$$A^k = MJ^kM^{-1} \quad \forall k \geq 0.$$

Ceci s'applique à chaque terme du développement (4.9) de sorte que

$$e^{At} = Me^{Jt}M^{-1}. \quad (4.18)$$

Dans le cas où

$$J = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

(forme strictement diagonale) alors il est facile de voir que

$$e^{At} = M \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} M^{-1}. \quad (4.19)$$

Si l'on reprend l'exemple du paragraphe précédent, le polynôme caractéristique de  $A$ , donné en (4.16), a pour racines simples  $(-1)$  et  $(-2)$ , qui sont aussi les valeurs propres de  $A$ . Ceci conduit à

$$J = \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Une matrice de passage à la forme diagonale est

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il reste à appliquer (4.18), ce qui permet de retrouver la même expression de  $e^{At}$  que celle donnée en (4.17).

Dans le cas où  $J$  est une forme de Jordan non strictement diagonale et comportant  $p$  blocs de Jordan, on a

$$J = \text{blocdiag}\{J_1; \dots; J_p\}$$

avec

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}.$$

L'exponentielle de matrice s'écrit

$$e^{At} = Me^{Jt}M^{-1} = M \text{blocdiag}\{e^{J_k t}\}M^{-1}$$

avec

$$e^{J_k t} = e^{\lambda_k t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} & \frac{t^{n_k}}{n_k!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n_k-3}}{(n_k-3)!} & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il existe également une quatrième méthode dite de Cayley-Hamilton qui n'est pas complètement détaillée dans ce document mais dont le paragraphe suivant donne une idée.

#### 4.3.4. Méthode Cayley-Hamilton

Cette méthode n'est ici donnée que pour des matrices aux valeurs propres distinctes.

On a vu que l'exponentielle de matrice  $e^{At}$  admet un développement en séries (voir expression (4.9) page 169). C'est donc une fonction analytique en  $A$ ,



que l'on peut noter  $f(A)$ . Elle n'est autre qu'un polynôme en  $A$  de degré potentiellement infini (dont les coefficients dépendent de  $t$ ) et l'on peut donc faire la division polynomiale de  $f(X)$  par  $P(X)$  où  $P$  désigne le polynôme caractéristique de  $A$ . Ainsi,  $f(X)$  s'écrit :

$$f(X) = q(X)P(X) + r(X), \quad (4.20)$$

où  $q(X)$  est un polynôme quotient qu'il n'est nécessaire ici de connaître et où  $r(X)$  est un polynôme reste, plus intéressant, dont le degré n'excède pas  $(n-1)$ . Or, le théorème de Cayley-Hamilton (cf. équation (3.22) page 91) stipule que la matrice  $A$  vérifie l'équation caractéristique  $P(A) = 0$ . En instanciant l'équation (4.20) avec  $X = A$ , il vient

$$f(A) = e^{At} = r(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k, \quad (4.21)$$

où les coefficients  $\alpha_k$  du polynôme  $r$  dépendent évidemment de  $t$  qui est un paramètre dans le présent raisonnement. On passe donc, pour l'expression de  $e^{At}$ , d'un polynôme en  $A$  de degré infini à un polynôme en  $A$  de degré au plus  $(n-1)$ . Pour calculer  $e^{At}$ , il faut déterminer ces coefficients  $\alpha_k(t)$ .

La matrice  $A$  n'est pas la seule à vérifier l'équation caractéristique qui lui est associée. Ce sont d'abord ses valeurs propres qui, par définition, la vérifient. Ainsi pour chaque valeur propre  $\lambda_i$  de  $A$ , on instancie l'équation (4.20) avec  $X = \lambda_i$  pour obtenir

$$e^{\lambda_i t} = r(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\lambda_i^k, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.22)$$

Ce jeu de  $n$  équations à  $n$  inconnues permet de déterminer les expressions des coefficients  $\alpha_i(t)$  et ainsi de connaître complètement l'expression (4.21).

Pour une matrice dont les valeurs propres sont multiples (au sens algébrique), le système (4.22) est sous-déterminé et la technique ainsi présentée échoue. Il faut avoir recours à une approche plus sophistiquée basée sur l'interpolation de Lagrange-Sylvester<sup>2</sup>. Ceci n'est pas détaillé dans le présent document. Toutefois, il faut noter que même dans le cas de valeurs propres multiples de  $A$ ,

---

2. du nom de *Giuseppe Lodovico Lagrangia*, Comte de Lagrange, mathématicien, mécanicien et astronome italien naturalisé français (1736-1813) et du mathématicien anglais James Joseph Sylvester (1814-1897)... en bref une histoire de Josephs.

l'expression de  $e^{At}$  donnée en (4.21) reste vraie, que l'on connaisse ou non les coefficients  $\alpha_i(t)$ . Cette expression sera utilisée au chapitre 6.

Reprenons une dernière fois l'exemple des paragraphes précédents. La matrice  $A$  possède deux valeurs propres distinctes (-1) et (-2) (Ouf!). Ceci signifie que le reste  $r(X)$  est un polynôme de degré 1 et, en utilisant (4.21),  $e^{At}$  peut s'exprimer ainsi :

$$e^{At} = \alpha_0(t)I_2 + \alpha_1(t)A. \quad (4.23)$$

L'instanciation de (4.22) avec  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -2$  conduit au système

$$\begin{cases} e^{-t} &= \alpha_0(t) - \alpha_1(t), \\ e^{-2t} &= \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t). \end{cases}$$

En retranchant la seconde équation de ce système à la première, on obtient

$$\alpha_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Puis, en injectant cette expression dans la première équation du système, il vient

$$\alpha_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}.$$

Il suffit alors de reprendre l'équation (4.23) pour obtenir

$$\begin{aligned} e^{At} &= (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow e^{At} &= \left[ \begin{array}{c|c} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat qu'avec les méthodes précédemment appliquées.

## 4.4. Régime transitoire : influence des modes

On suppose que l'on s'intéresse à la réponse du modèle (3.5), page 71, pour lequel la transmission directe  $D$  est considérée nulle par souci de simplicité des expressions. Les conditions initiales sur les variables d'état sont concaténées dans un vecteur  $x_0 = x(0)$ . La réponse d'un tel système est donc donnée par la relation (cf. équation (4.15) page 171)

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (4.24)$$

où le premier terme constitue le régime libre de la réponse ne dépendant que des conditions initiales et où le second terme est le régime forcé dépendant du signal d'entrée  $u(t)$ . Ces deux termes font tous deux apparaître  $e^{At}$ . Cette exponentielle de matrice est donc fondamentale pour comprendre l'allure de la réponse du système. Elle peut s'écrire, sous l'hypothèse de  $n$  valeurs propres distinctes, en partant de (4.19),

$$e^{At} = \sum_{i=1}^n N_i e^{\lambda_i t},$$

où les scalaires  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $A$  et où  $N_i = w_i v_i$ , les vecteurs  $v_i$  et  $w_i$  étant respectivement la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice de passage diagonalisante  $M$  et la  $i^{\text{ème}}$  ligne de son inverse  $M^{-1}$ . Si les coefficients  $N_i$  ont bien entendu une influence sur la forme de  $y(t)$ , ce sont surtout les facteurs  $e^{\lambda_i t}$  qui en déterminent les caractéristiques principales.

**Remarque 4.1** Les modes d'un système sont les termes de son régime libre. Chaque mode est donc lié à une valeur propre. Aussi, par abus de langage, parle-t-on parfois du mode  $\lambda_i$ .

- Ainsi, lorsqu'une valeur de  $\lambda_i$  est à partie réelle strictement négative, le terme correspondant est évanescant et disparaît asymptotiquement. Si tous les  $\lambda_i$  sont ainsi, et si  $u(t)$  converge vers une valeur finie avec le temps, alors la réponse de  $y(t)$  converge elle aussi vers une valeur finie. Il est alors possible de mesurer  $t_r$ , le temps de réponse, et de distinguer clairement le régime transitoire et le régime permanent.
- Lorsque  $\lambda_i$  n'est pas à partie réelle strictement négative, il est impossible que l'exponentielle correspondante disparaisse. Elle peut même croître avec le temps si la partie réelle de  $\lambda_i$  est strictement positive. Il est alors impossible que  $y(t)$  converge vers une valeur finie, même si  $u(t)$  est fini.  $y(t)$  peut même diverger infiniment. Dans ce dernier cas, il est impropre de parler de régime permanent.
- Par ailleurs, si  $\lambda_i$  et  $\lambda_j$  sont des valeurs propres complexes conjuguées non réelles (voir les propriétés des valeurs propres en §A.1.14.2 en annexe page 663),

leurs parties imaginaires vont engendrer des termes sinusoïdaux dans l'expression de  $y(t)$  ce qui est susceptible de générer des oscillations dans la réponse.

- Lorsque les termes exponentiels sont convergents ( $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ), la convergence est d'autant plus rapide que  $|\text{Re}(\lambda_i)|$  est grande, ce qui correspond donc à une diminution du temps de réponse  $t_r$ .

En résumé :

- ◊ C'est le plus ou moins grand ratio entre partie imaginaire et partie réelle d'un pôle qui caractérise le comportement oscillatoire lié à ce pôle ;
- ◊ Ce sont les pôles dominants (ceux dont la partie réelle est la plus grande au sens algébrique) qui ont le plus d'influence sur la forme de la réponse.

L'influence des valeurs propres de  $A$  sur le régime libre de  $y(t)$  est illustrée sur la figure 4.1.

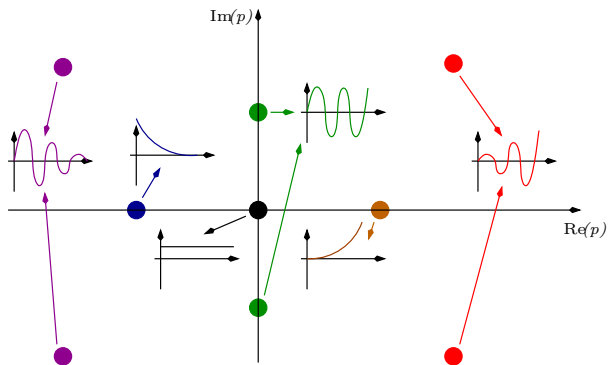


FIGURE 4.1 – Influence des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$  sur le régime libre

Les comportements indiqués sur la figure 4.1 se retrouvent aussi en présence de  $u(t)$ , c'est-à-dire sur le régime forcé de la réponse. Même si les pôles sont prépondérants pour analyser ou prévoir le comportement d'un système (comme

il apparaîtra d'ailleurs davantage au chapitre suivant), il existe bien sûr d'autres éléments qui peuvent influencer ce régime transitoire et c'est pourquoi l'on revient sur ces diverses influences dans l'annexe B page 675.

## 4.5. Réponse impulsionnelle

Sans détailler ce type de réponse, il est rappelé qu'il s'agit de la réponse à une impulsion de Dirac  $u(t) = \delta(t)$ . Le calcul aboutit, en l'absence de transmission directe ( $D = 0$ ), à :

$$y(t) = Ce^{At}(x_0 + B), \quad t \geq 0. \quad (4.25)$$

C'est dans ce cas-ci que l'influence des valeurs propres de  $A$  apparaît clairement telle qu'elle est illustrée par la figure 4.1.

**Remarque 4.2** *La forme de cette réponse correspond à une réponse en régime libre d'un système dont la condition initiale serait  $(x_0 + B)$ . C'est pourquoi l'on perçoit souvent la réponse libre et la réponse impulsionnelle comme apportant les mêmes informations sur le système.*

## 4.6. Réponse indicielle

Dans ce cas de figure, l'entrée est un échelon unitaire ( $u(t) = \Gamma(t)$ ) également appelé fonction de Heaviside<sup>3</sup>. L'expression de  $y(t)$  est alors

$$y(t) = Ce^{At}(x_0 + A^{-1}B) - CA^{-1}B, \quad t \geq 0 \quad (4.26)$$

3. physicien britannique autodidacte : voir biographie 2.2 page 41.

ce qui suppose ici que  $A$  est inversible. C'est le cas si la réponse est convergente ( $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ). On voit clairement que le régime permanent est égal à  $-CA^{-1}B$ . Ceci est cohérent avec la définition du gain statique d'une fonction de transfert :

$$G(0) = C(0 \times I - A)^{-1}B (+D) = -CA^{-1}B (+D).$$

Soit l'exemple du circuit RC de la figure 4.2.

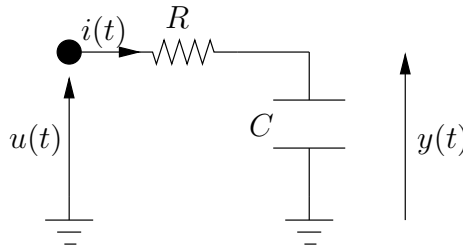


FIGURE 4.2 – Circuit RC

Les équations qui régissent le comportement de ce système RC sont :

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}, \\ u(t) = Ri(t) + y(t). \end{cases}$$

En prenant l'unique variable d'état  $x = y$ , on obtient

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u, \\ y = x. \end{cases}$$

L'application de (4.26) pour un système initialement au repos conduit à l'équation bien connue :

$$y(t) = 1 - e^{-t/RC}.$$

Les résultats obtenus sont évidemment les mêmes que ceux issus de l'approche fréquentielle et le lecteur est invité à se reporter aux formes de réponses des systèmes de premier et deuxième ordre données dans un cours sur la fonction de transfert.

## 4.7. Réponse harmonique

Il s'agit là de la réponse à une excitation sinusoïdale  $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ . On peut d'abord noter que  $u(t) = \text{Im}(U_m e^{i\omega t})$  où  $\text{Im}$  désigne la partie imaginaire. L'expression de  $y(t)$  est alors

$$\begin{aligned} y(t) &= C e^{At} x_0 + \text{Im} \left( \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B U_m e^{i\omega\tau} d\tau \right) \\ y(t) &= C e^{At} x_0 + \text{Im} \left( \int_0^t C e^{At} e^{(i\omega I - A)\tau} B U_m d\tau \right) \\ y(t) &= C e^{At} x_0 + \text{Im} \left( [C e^{At} e^{(i\omega I - A)\tau} (i\omega I - A)^{-1} B U_m]_0^t \right) \\ y(t) &= C e^{At} x_0 + \text{Im} \left( C e^{At} (e^{(i\omega I - A)t} - I) (i\omega I - A)^{-1} B U_m \right) \\ y(t) &= C e^{At} [x_0 - \text{Im} ((i\omega I - A)^{-1} B U_m)] + \text{Im} [C (i\omega I - A)^{-1} B U_m e^{i\omega t}]. \end{aligned}$$

C'est essentiellement le régime permanent qui importe dans une réponse harmonique. Or si  $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , alors le premier terme de l'expression de  $y(t)$  ci-dessus tend asymptotiquement vers zéro et constitue le régime transitoire. Le second terme correspond alors à ce qu'il est convenu d'appeler le régime permanent et est ici noté  $y_\infty(t)$ .

En observant l'expression de  $y_\infty(t)$ , on constate qu'il est possible de l'écrire

$$y_\infty(t) = \text{Im}(G(i\omega) U_m e^{i\omega t})$$

où  $G(p)$  désigne bien sûr la fonction de transfert du système (on rappelle que, pour simplifier, ici,  $D = 0$ ).

On définit :

<p>Le gain harmonique : <math>\rho(\omega) =  G(i\omega) ;</math>          Le déphasage harmonique : <math>\phi(\omega) = \angle(G(i\omega)).</math></p>	(4.27)
--	--------

Le régime permanent apparaît alors comme un signal sinusoïdal. En effet,

$$y_\infty(t) = \text{Im}(\rho(\omega)e^{i\phi(\omega)}U_m e^{i\omega t})$$

$$y_\infty(t) = \text{Im}\left(\rho(\omega)U_m e^{i(\omega t + \phi(\omega))}\right)$$

$$y_\infty(t) = \rho(\omega)U_m \sin(\omega t + \phi(\omega)). \quad (4.28)$$

Ce signal sinusoïdal conserve la même pulsation que le signal d'entrée mais possède une amplitude et un déphasage qui sont fonctions de cette pulsation. Ils peuvent être déterminés grâce à la fonction de transfert.

Comme il est impossible de représenter toutes les réponses (c'est-à-dire  $y_\infty(t)$  pour toutes les valeurs de  $\omega$ ), on préfère donner une représentation graphique de l'évolution de  $\rho(\omega)$  et de  $\phi(\omega)$  en fonction de  $\omega$ . Il existe plusieurs façons de représenter cette dépendance. Les plus célèbres sont le lieu de Nyquist, celui de Black, ainsi que les diagrammes de Bode. Tous les résultats bien connus de l'approche fréquentielle sont donc ici retrouvés par résolution de l'équation d'état.



## 4.8. Exercices

Il y a, une nouvelle fois, peu d'exercices dans ce chapitre car les outils numériques de simulation autorisent aujourd'hui bien souvent l'étude de la réponse des systèmes LTI à des signaux parfois complexes par voie informatique. Cependant, quelques petits exemples académiques, permettent ici de s'assurer d'une compréhension minimale.

### 4.8.1. Exponentielle de $At$

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Question :

- Calculer  $e^{At}$  en utilisant la méthode de Cayley-Hamilton.

La matrice  $A$  prend une autre valeur :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Questions :

- Calculer  $e^{At}$  en utilisant la méthode de Cayley-Hamilton.
- Reconnaître la transformation associée à  $e^{At}$ .

### 4.8.2. Calcul d'une réponse à un signal composé

Soit un système décrit par une représentation d'état linéaire dont une réalisation est donnée par

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, & B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, & D = 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

Questions :

- Déterminer la réponse indicielle du système pour une condition initiale nulle sur l'état.
- Que devient cette réponse si un signal de forme  $e^{-t}$  vient s'ajouter, au niveau de la commande, à la fonction de Heaviside ?
- Répondre à la même question que la précédente, mais avec  $D = 2$ .
- Répondre toujours à la même question ( $D = 2$ ) mais avec  $x_0 = x(0) = [2 \ 1]'$ .

### 4.8.3. Préambule au chapitre suivant

Les réponses exprimées dans l'exercice précédent font apparaître

- des termes de la forme  $\alpha e^{-t}$  ;
- des termes de la forme  $\beta e^{-3t}$  ;
- des termes constants,

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels.

Questions :

- Expliquer sans faire trop de calculs pourquoi de tels termes apparaissent.
- Expliquer pourquoi une commande finie conduira à une sortie finie.

### 4.8.4. Réponse fréquentielle

Le système considéré ici est celui celui modélisé par (4.29) et la condition initiale est nulle ( $x_0 = 0$ ). Le signal de commande est un simple signal sinusoïdal,  $u(t) = \sin(\omega t)$ , où  $\omega$  désigne bien sûr une pulsation.

Questions :

- Déterminer la réponse du système à ce signal.
- Ce peut-il qu'une réponse présente des oscillations même si la commande n'en présente pas ?

- Calculer la fonction du transfert du système. Y a-t-il quelque chose de troublant à constater ?
- Calculer la réponse fréquentielle (harmonique) du système.
- Faire le lien avec la réponse à la première question de l'exercice.

#### 4.8.5. Opération tape-cul

Soit le schéma de la suspension assurant l'amortissement des secousses pour le quart d'un véhicule (figure 4.3).

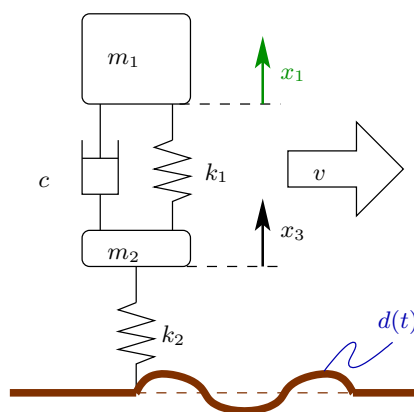


FIGURE 4.3 – Modèle mécanique d'une suspension dite « quart de véhicule ».

Les données numériques correspondant à ce schéma sont :

- la masse du quart du véhicule :  $m_1 = 375\text{kg}$  ;
- la masse d'une roue :  $m_2 = 30\text{kg}$  ;
- la constante de raideur de l'amortisseur :  $k_1 = 1500\text{N.m}^{-1}$  ;
- la constante de raideur du pneu :  $k_2 = 6500\text{N.m}^{-1}$  ;
- la constante d'amortissement de la suspension :  $c = 0$ ,  $c = 125\text{N.s.m}^{-1}$  ou  $c = 1125\text{N.s.m}^{-1}$  ;
- la variation d'altitude de la caisse par rapport au repos (en mètres) :  $x_1$  ;
- la variation d'altitude de la roue par rapport au repos (en mètres) :  $x_3$  ;
- la vitesse du véhicule :  $v = 27\text{m.s}^{-1}$ .

L'objectif n'est pas ici de modéliser le système. En prenant comme entrée le profil de route  $d$  exprimé en mètres (voir figure 4.3), comme vecteur d'état

$$x = [ x_1 \quad (x_2 = \dot{x}_1) \quad x_3 \quad (x_4 = \dot{x}_3) ]',$$

et comme sortie  $y = x_1$ , le modèle d'état obtenu correspond aux quatre matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_1} & \frac{c}{m_2} & -\frac{k_1 + k_2}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$C = [ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ], \quad D = 0.$$

Selon la valeur de  $c$ , les valeurs propres de  $A$  changent :

- $c = 0 \Rightarrow \{\lambda_i\} = \{0 \pm 1, 9847i; 0 \pm 16, 3318i\}$  ;
- $c = 125\text{N.s.m}^{-1} \Rightarrow \{\lambda_i\} = \{-0.1333 \pm 1, 9845i; -2.1167 \pm 16, 1586i\}$  ;
- $c = 1125\text{N.s.m}^{-1} \Rightarrow \{\lambda_i\} = \{-32, 9903; -3, 6004; -1, 9546 \pm 2, 2417i\}$ .

Le profil de route est supposé de la forme

$$d(t) = \frac{1}{6} \sin(0, 1\pi vt)$$

sur 10s, puis  $d(t) = 0$  sur encore 10s. En fait, dans ce modèle,  $d$  n'est pas une commande, mais plutôt une perturbation d'où la notation  $d$  au lieu de  $u$ . La figure 4.4 montre en haut le profil de route et en bas la réponse du système en  $y = x_1$  pour les trois valeurs de  $c$  (en traits pointillés bleus pour  $c = 0$ , en trait plein fin et rouge pour  $c = 125\text{N.s.m}^{-1}$  et en trait plein épais et vert pour  $c = 1125\text{N.s.m}^{-1}$ ).

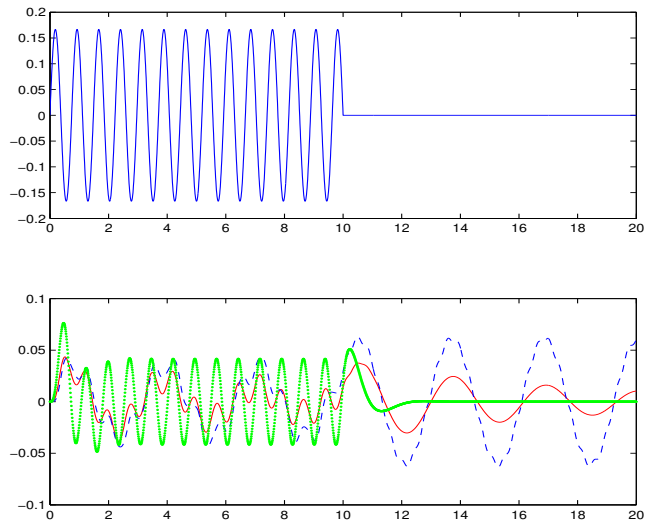


FIGURE 4.4 – Mouvement du bas de caisse en réponse au profil de route pour les différentes valeurs de  $c$  (courbe du haut : profil de route ; courbes du bas : variations de  $x_1$ )

Question :

Commenter ces réponses.

## 4.9. Correction des exercices

### 4.9.1. Exponentielle de $At$

La matrice  $A$  possède deux valeurs propres distinctes, à savoir 1 et 3, qui figurent sur sa diagonale puisqu' $A$  est triangulaire supérieure. En appliquant la méthode de Cayley-Hamilton telle que partiellement présentée en §4.3.4, page 176, il est aisé de voir que le reste  $r(X)$  est un polynôme de degré 1. En utilisant (4.21),  $e^{At}$  peut s'exprimer ainsi :

$$e^{At} = \alpha_0(t)I_2 + \alpha_1(t)A. \quad (4.30)$$

L'instanciation de (4.22) avec  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 3$  conduit au système

$$\begin{cases} e^t &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t), \\ e^{3t} &= \alpha_0(t) + 3\alpha_1(t). \end{cases}$$

En retranchant la première équation de ce système à la seconde, on obtient

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t).$$

Puis, en injectant cette expression dans la première équation du système, il vient

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{2}(3e^t - e^{3t}).$$

Il suffit alors de reprendre l'équation (4.30) pour obtenir

$$\begin{aligned} e^{At} &= \frac{1}{2}(3e^t - e^{3t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow e^{At} &= \left[ \begin{array}{c|c} e^t & e^{3t} - e^t \\ \hline 0 & e^{3t} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Si, maintenant,  $A$  est égale à  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ , on peut conserver l'expression (4.30) (elle n'est dépendante que de la dimension de  $A$ ). La matrice  $A$  a toujours deux valeurs propres distinctes (cette fois-ci complexes) :  $i$

et  $-i$ . Ce sont les racines de l'équation caractéristique  $p^2 + 1 = 0$ . L'instanciation de (4.22) avec  $\lambda_1 = i$  et  $\lambda_2 = -i$  conduit au système

$$\begin{cases} e^{it} &= \alpha_0(t) + i\alpha_1(t), \\ e^{-it} &= \alpha_0(t) - i\alpha_1(t). \end{cases}$$

En retranchant la seconde équation à la première, on obtient

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \sin t.$$

En réutilisant la première équation, il vient

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos t.$$

Il suffit une nouvelle fois de reprendre l'équation (4.30) pour obtenir

$$\begin{aligned} e^{At} &= \cos t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow e^{At} &= \left[ \begin{array}{c|c} \cos t & \sin t \\ \hline -\sin t & \cos t \end{array} \right], \end{aligned}$$

qui correspond, géométriquement, à une rotation d'angle  $t$ .

#### 4.9.2. Calcul d'une réponse à un signal composé

Si l'on se réfère à l'expression générale de la réponse d'un modèle d'état donnée en (4.15) page 171, la nécessité d'exprimer  $e^{At}$  est claire. Pour ce faire, il faut revenir au paragraphe 4.3. La méthode utilisant la transformation de Laplace (cf. §4.3.2 page 174) est retenue. En suivant la procédure, les calculs suivant sont menés :

$$pI - A = \begin{bmatrix} p+4 & 1 \\ -3 & p \end{bmatrix} \Rightarrow (pI - A)^{-1} = \frac{1}{p^2 + 4p + 3} \begin{bmatrix} p & -1 \\ 3 & p+4 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

La décomposition en éléments simples de toutes les composantes conduit à

$$(pI - A)^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{(-1/2)}{p+1} + \frac{(3/2)}{p+3} & \frac{(-1/2)}{p+1} + \frac{(1/2)}{p+3} \\ \hline \frac{(3/2)}{p+1} + \frac{(-3/2)}{p+3} & \frac{(3/2)}{p+1} + \frac{(-1/2)}{p+3} \end{array} \right].$$

Il vient donc (cf. les tableaux du paragraphe E.3 en annexe, page 706)

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(pI - A)^{-1}] = \left[ \begin{array}{c|c} -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \\ \hline \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \end{array} \right].$$

Dès lors, il est possible de poursuivre le calcul de  $y(t)$  en notant que la réponse indicielle est la réponse à l'échelon unitaire ( $u(t) = 1 \forall t \geq 0$ ) et en procédant ainsi :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-3(t-\tau)} \\ e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau \\ &\Leftrightarrow y_1(t) = \int_0^t 2e^{-3(t-\tau)} d\tau = \left[ \frac{2}{3} e^{-3(t-\tau)} \right]_0^t \\ &\Leftrightarrow y_1(t) = \frac{2}{3}(1 - e^{-3t}), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

**Remarque 4.3** Cette expression n'est autre que la réponse indicielle d'un système d'ordre 1 alors que le modèle d'état est d'ordre 2. Il y a là un paradoxe apparent puisqu'une partie de la dynamique du modèle semble perdue. Ce paradoxe sera résolu au chapitre 6... patience !

Si maintenant la commande considérée n'est plus l'échelon unitaire mais le signal de décroissance exponentielle  $u(t) = e^{-t}$ , alors le calcul précédent est modifié de la façon suivante :

$$\begin{aligned} y_2(t) &= C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^t C \begin{bmatrix} -e^{-3(t-\tau)} e^{-\tau} \\ e^{-3(t-\tau)} e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau \\ &\Leftrightarrow y_2(t) = \int_0^t 2e^{-3(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau = \int_0^t 2e^{-3t+2\tau} d\tau \\ &\Leftrightarrow y_2(t) = \left[ e^{-3t+2\tau} \right]_0^t \\ &\Leftrightarrow y_2(t) = e^{-t} - e^{-3t}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$



Mais la question précise que la commande est la somme de l'échelon unitaire et de l'exponentielle décroissante. Il faut donc invoquer la linéarité du modèle du système (cf. §1.2 page 3) qui permet d'affirmer que la réponse à déterminer est donnée par la somme des réponses données en (4.32) et (4.33), à savoir

$$y_{x_0=0, D=0}(t) = y_1(t) + y_2(t) = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}e^{-3t} + e^{-t}, \quad t \geq 0. \quad (4.34)$$

En supposant maintenant qu'il existe une transmission directe  $D = 2$ , il faut donc ajouter à cette réponse un terme proportionnel à la commande et la réponse devient

$$\begin{aligned} y_{x_0=0, D \neq 0}(t) &= y_{x_0=0, D=0}(t) + 2(1 + e^{-t}), \quad t \geq 0 \\ \Leftrightarrow y_{x_0=0, D \neq 0}(t) &= \frac{8}{3} - \frac{5}{3}e^{-3t} + 3e^{-t}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Enfin, si la condition initiale sur l'état devient  $x_0 = [2 \ 1]'$ , il faut également ajouter un terme lié à cette condition sur  $x_0$  et il vient

$$\begin{aligned} y_{x_0 \neq 0, D \neq 0}(t) &= y_{x_0=0, D \neq 0}(t) + Ce^{At}x_0, \quad t \geq 0 \\ y_{x_0 \neq 0, D \neq 0}(t) &= \frac{8}{3} - \frac{5}{3}e^{-3t} + 3e^{-t} + \\ & \left[ \begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} & & \\ \hline \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \\ & \frac{8}{3} - \frac{5}{3}e^{-3t} + 3e^{-t} + 6e^{-t} - 7e^{-3t}, \quad t \geq 0 \\ \Leftrightarrow y_{x_0 \neq 0, D \neq 0}(t) &= \frac{8}{3} - \frac{26}{3}e^{-3t} + 9e^{-t}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

### 4.9.3. Préambule au chapitre suivant

Les termes en  $\beta e^{-3t}$  sont liés au pôle (-3) du système qui génère ce genre d'exponentielle décroissante. Ceci est à rapprocher des développements du paragraphe 4.4 page 178.

Les termes en  $\alpha e^{-t}$  sont liés pour la plupart au régime forcé par le terme de commande en  $e^{-t}$ . Il en existe aussi dans l'expression de  $y_{x_0 \neq 0, D \neq 0}(t)$  donnée en (4.36) qui sont liés au régime libre inhérent à la condition initiale non nulle, et au pôle à (-1). Là encore, cela est à rapprocher des développements du paragraphe 4.4.

Enfin les termes constants sont liés aux exponentielles de zéro et à la présence d'un signal constant en entrée.

Quelle que soit la commande envisagée, la réponse fait apparaître des expressions constantes et des exponentielles décroissantes. Dès lors, si le signal de commande en lui-même converge vers une valeur finie, la tendance « naturelle » du système est de faire en sorte que la sortie converge elle aussi vers une valeur finie.

Cette petite discussion ne tient pas lieu de généralité ni de raisonnement rigoureux. Elle a juste pour but d'introduire une notion absolument fondamentale, celle de *stabilité*, qui sera vue au chapitre suivant.

### 4.9.4. Réponse fréquentielle

Comme dans les exercices précédents, il convient de procéder ainsi :

$$y(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^t 2e^{-3(t-\tau)} \sin(\omega\tau) d\tau$$

En utilisant la formule d'Euler

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad (4.37)$$

$y(t)$  s'exprime

$$y(t) = \frac{2}{2i} \int_0^t e^{-3t+3\tau} (e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}) d\tau$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow y(t) &= \frac{1}{\mathbf{i}} \int_0^t \left( e^{-3t+(3+\mathbf{i}\omega)\tau} - e^{-3t+(3-\mathbf{i}\omega)\tau} \right) d\tau \\
\Leftrightarrow y(t) &= \frac{1}{\mathbf{i}} \left[ \frac{e^{-3t+(3+\mathbf{i}\omega)\tau}}{3+\mathbf{i}\omega} - \frac{e^{-3t+(3-\mathbf{i}\omega)\tau}}{3-\mathbf{i}\omega} \right]_0^t \\
\Leftrightarrow y(t) &= \frac{1}{\mathbf{i}} \left( \frac{(3-\mathbf{i}\omega)}{9+\omega^2} (e^{\mathbf{i}\omega t} - e^{-3t}) - \frac{(3+\mathbf{i}\omega)}{9+\omega^2} (e^{-\mathbf{i}\omega t} - e^{-3t}) \right) \\
\Leftrightarrow y(t) &= \frac{1}{(9+\omega^2)\mathbf{i}} (3e^{\mathbf{i}\omega t} - 3e^{-3t} - \mathbf{i}\omega e^{\mathbf{i}\omega t} + \\
&\quad \mathbf{i}\omega e^{-3t} - 3e^{-\mathbf{i}\omega t} + 3e^{-3t} - \mathbf{i}\omega e^{-\mathbf{i}\omega t} + \mathbf{i}\omega e^{-3t}) \\
\Leftrightarrow y(t) &= \frac{1}{(9+\omega^2)} \left( 2\frac{\mathbf{i}\omega e^{-3t}}{\mathbf{i}} + 3\frac{(e^{\mathbf{i}\omega t} - e^{-\mathbf{i}\omega t})}{\mathbf{i}} - \frac{\mathbf{i}\omega(e^{\mathbf{i}\omega t} + e^{-\mathbf{i}\omega t})}{\mathbf{i}} \right).
\end{aligned}$$

En utilisant encore (4.37) ainsi que l'autre formule d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{\mathbf{i}x} + e^{-\mathbf{i}x}}{2}, \quad (4.38)$$

il vient

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{9+\omega^2} (2\omega e^{-3t} + 6 \sin(\omega t) - 2\omega \cos(\omega t)) \\
\Leftrightarrow y(t) &= \frac{2}{9+\omega^2} (\omega e^{-3t} + 3 \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)), \quad t \geq 0 \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Cette réponse présente évidemment des oscillations entretenues qui sont inhérentes à la présence du signal sinusoïdal en entrée. Même si le terme en décroissance exponentielle est évanescent, les termes en  $\sin(\omega t)$  et  $\cos(\omega t)$  persistent.

Il est possible que la sortie d'un système LTI puisse osciller même si le signal de commande ne présente pas d'oscillation. Ceci serait alors dû à la présence de pôles complexes (conjugués) dont les parties imaginaires sont significatives au regard des pertes réelles. Ceci est à rapprocher des discussions du paragraphe 4.4 page 178 et de l'annexe B page 675.

La fonction de transfert du système s'exprime selon la formule (3.17) page 88 :

$$G(p) = D + C(pI - A)^{-1}B = \frac{2}{p+3}.$$

(On note que  $(pI - A)^{-1}$  a déjà été calculée à l'exercice 4.8.2 et est donné en (4.31) page 191.)

Cette fonction de transfert est de premier ordre c'est à dire que le pôle (-1) (l'une des deux racines de  $\det(pI - A)$ ) a disparu de cette expression. Ceci est lié au constat déjà effectué à l'exercice 4.8.2, constat selon lequel la réponse indicielle est identique à celle d'un système de premier ordre. Le chapitre 6 reviendra sur cet apparent paradoxe sur l'ordre du système.

À partir de cette fonction de transfert, il est possible de calculer la réponse harmonique du système grâce à la relation (4.28) page 184,

$$y_\infty(t) = \rho(\omega)U_m \sin(\omega t + \phi(\omega)),$$

où  $\rho(\omega)$  et  $\phi(\omega)$  sont donnés par les formules (4.27) et  $U_m = 1$ . Ainsi,

$$\rho(\omega) = |G(\mathbf{i}\omega)| = \left| \frac{2}{3 + \mathbf{i}\omega} \right| = \frac{2}{\sqrt{\omega^2 + 9}}.$$

$$\phi(\omega) = \angle(G(\mathbf{i}\omega)) = -\arctan\left(\frac{\omega}{3}\right) = \arctan\left(\frac{-\omega}{3}\right).$$

La réponse harmonique devient donc

$$y_\infty(t) = \frac{2}{\sqrt{\omega^2 + 9}} \sin\left(\omega t + \arctan\left(\frac{-\omega}{3}\right)\right). \quad (4.40)$$

Il s'agit de faire le lien avec l'expression donnée en (4.39). Pour cela, la sortie  $y_\infty(t)$  peut être réexprimée en notant que

$$\sin(\omega t + \phi(\omega)) = \sin(\omega t) \cos(\phi(\omega)) + \cos(\omega t) \sin(\phi(\omega)).$$

Or,

$$\cos(\phi(\omega)) = \cos\left(\arctan\left(\frac{-\omega}{3}\right)\right) = \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{9}}}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\phi(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{\omega^2 + 9}}.$$

Mais, aussi :

$$\sin(\phi(\omega)) = \sin\left(\arctan\left(\frac{-\omega}{3}\right)\right) = \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{-\omega}{3}\right)\right)}{\sqrt{1 + \tan^2\left(\arctan\left(\frac{-\omega}{3}\right)\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\phi(\omega)) = -\frac{\frac{-\omega}{3}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{9}}} = \frac{-\omega}{\sqrt{\omega^2 + 9}}.$$

Compte tenu des expressions de  $\cos(\phi(\omega))$  et  $\sin(\phi(\omega))$  ainsi déterminées, la réponse harmonique peut être écrite :

$$y_\infty(t) = \frac{2}{\omega^2 + 9} (3 \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)).$$

Or, il est clair, grâce à cette nouvelle expression que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_\infty(t),$$

ce qui signifie bien que la la réponse harmonique  $y_\infty(t)$  correspond au régime permanent sinusoïdal de la réponse globale  $y(t)$ .

#### 4.9.5. Opération tape-cul

Le profil de route est composé de deux phases : une première phase sinusoïdale qui est là pour simuler une zone de perturbations (qui peuvent être vues comme une idéalisation de nids de poules harmonieusement agencés) et une seconde zone de plat durant laquelle l'amortissement est plus facile à analyser.

Pour faire cette analyse, il faut essentiellement se fier aux valeurs propres de  $A$ .

- Dans le cas  $c = 0$ , les pôles sont à partie réelle nulle mais à partie imaginaire non nulle. Ceci signifie que d'une part le système est en limite de stabilité (il y a stabilité simple, mais tout ceci sera étudié au chapitre suivant) mais surtout que la partie imaginaire est grande devant la partie réelle ce qui induit, selon les critères donnés par la figure 4.1 page 180, une oscillation générée par le système lui-même. Ainsi, dans la première phase, on retrouve la perturbation sinusoidale à laquelle s'ajoute une oscillation inhérente à la suspension très mal amortie. Durant la seconde phase, cette oscillation persiste et le bas de caisse ne cesse de bouger indéfiniment. Ceci est bien sûr irréaliste puisque, même très mauvais, l'amortisseur présente toujours une valeur strictement positive de  $c$ .
- Dans le cas  $c = 125\text{N.s.m}^{-1}$ , l'amortisseur est assez mauvais mais il est bien là. Les pôles présentent une partie réelle strictement négative, et la partie imaginaire est sensiblement la même que dans le cas précédent. Ainsi, toujours en se fiant à la figure 4.1, il peut être compris que si le système continue de générer lui-même une oscillation en plus de celle inhérente au profil de route, cette oscillation s'estompe, certes lentement, mais s'estompe dans la phase de calme.
- Dans le dernier cas où  $c = 1125\text{N.s.m}^{-1}$ , l'amortisseur amortit beaucoup (trop?). Dans la phase de perturbations, l'oscillation visible reprend la forme du profil de route et il y a moins d'oscillations qui s'ajoutent à ce profil et qui sont liées à la réaction propre au système. Ceci vient du fait que seuls deux pôles sur quatre sont complexes et que par ailleurs, leur partie réelle a pris de l'importance par rapport à la partie imaginaire en comparaison des cas précédents. De plus, les deux pôles réels ne génèrent pas d'oscillation (cf. figure 4.1). Enfin, dans la seconde phase, le système étant ainsi grandement amorti, les oscillations sont évanescences.

**Remarque 4.4** *Le système étudié dans cet exercice est en boucle ouverte. Cependant, il est possible d'installer un dispositif qui ajoute une force sur le bas de caisse et sur la roue, force que l'on contrôle, et qui module les réactions de l'amortisseur. C'est le principe de la suspension active. Ceci nécessite bien sûr de calculer une loi de commande, ce qui fait l'objet de chapitres ultérieurs.*

## 4.10. Notes et références

L'essentiel de ce chapitre consiste à résoudre un système différentiel, c'est-à-dire à appliquer des cours de mathématiques. Donc de nombreux cours pourraient être cités en références. Mais puisque ces équations différentielles sont un peu spécifiques à l'automatique, une fois de plus, les ouvrages anglo-saxons sont mis en exergue [1,2,3,4,5,6]. Parmi eux, pour la rigueur mathématique, [5] est très bien mais son aspect parfois un peu rébarbatif amène l'auteur à plutôt conseiller le « traditionnel Ogata » [4] ou encore [2,3] vers lesquels il revient souvent. Le photocopié [7] reste évidemment une source d'inspiration ainsi que [8]. Un ouvrage de mathématiques particulièrement bien construit et qui conviendra parfaitement à un étudiant de mathématiques désireux de s'initier à l'automatique est [9]. Le langage utilisé est celui des mathématiques, mais progressivement, on en vient à la notion de systèmes. On y insiste entre autres sur les notions d'existence et d'unicité qui sont pour tout dire plutôt bâclées dans le présent document. (Un automaticien a parfois du mal à se poser ces questions : l'inexistence de la solution revient à se dire que le système (le procédé) n'existe pas et la non-unicité des solutions revient à dire qu'il réagira de plusieurs façons simultanément à une commande. Toutefois, ces questions ne sont pas sans intérêt puisqu'elles suggèrent qu'un modèle puisse ne pas être approprié à la description du système physique.)

La façon d'évoquer l'influence des pôles est inspirée de [3,7] mais de très bonnes explications pourront être trouvées dans [4,2,6,1]. L'exemple de la suspension est emprunté à [3]. Pour le reste, c'est essentiellement un petit entraînement au calcul.

1. **T. Kailath** : *Linear Systems*. Prentice Hall, 1979.  
*Un vrai ouvrage de référence, pas très facile à aborder par son style et sa forme mais redoutablement complet. Pratiquement une « bible ».*
2. **R. C. Dorf et R. H. Bishop** : *Modern Control Systems*. Neuvième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.  
*La réédition permanente de cet ouvrage en dit long sur sa popularité. Les nombreux exemples constituent une vraie mine d'exercices pour un enseignant.*
3. **G. F. Franklin, J. D. Powell et A. Emami-Naemi** : *Feedback Control of Dynamic Systems*. Quatrième édition, Prentice Hall, Upper

- Saddle River, New Jersey, 2002.  
Assez riche en exemples et agréable dans la forme. Plutôt didactique.
4. **K. Ogata** : *Modern Control Engineering*. Troisième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.  
Ouvrage de référence qui semble en avoir inspiré plus d'un. L'auteur a un petit faible pour cette référence dont la première édition date de 1970.
  5. **P. J. Antsaklis et A. N. Michel** : *Linear Systems*. McGraw-Hill, 1997.  
Fanchement pas le plus accessible mais très rigoureux mathématiquement. Très bien mais déconseillé pour une première approche.
  6. **B. Friedland** : *Control System Design - An Introduction to State-Space Methods*. Dover, Mineola, New York, 1986.  
Cet ouvrage se concentre uniquement sur la représentation d'état et de ce fait, vu sa taille importante, traite bien plus d'aspects que beaucoup d'autres. Les exemples y sont nombreux et bien choisis. Il est parfois un peu dense. Son prix est très raisonnable.
  7. **B. Pradin** : *Polycopié de cours d'Automatique : « Automatique : Notes de cours - Exercices »*. INSA de Toulouse, 3ème année spécialité AEI. 1992.  
Là où l'essentiel est mieux expliqué que partout ailleurs ! si ce n'est dans [8].
  8. **B. Pradin et G. Garcia** : *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Presses Universitaires du Mirail, 2010.  
Que dire de cet ouvrage si ce n'est que c'est celui qu'il faut acheter ! Incontestablement le meilleur rapport qualité/prix.
  9. **H. Logeman et E. P. Ryan** : *Ordinary Differential Equations : Analysis, Qualitative Theory and Control*. Springer Undergraduate Series, 2014.  
Cet ouvrage utilise une approche mathématique rigoureuse pour proposer entre autres des solutions aux équations d'état (pas forcément linéaires). Les notions de commandabilité et d'observabilité (voir chapitre 6) y sont particulièrement bien amenées. Il est en outre très abordable.



# Chapitre 5

## *Stabilité des modèles d'état*

Ce chapitre traite de la stabilité des représentations d'état linéaires. De ce fait, certaines notions sont communes avec les enseignements relatifs à l'approche fréquentielle.

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Une approche quasi intuitive : la stabilité BIBO . . .</b>	<b>202</b>
<b>5.2</b>	<b>Stabilité d'un état d'équilibre . . . . .</b>	<b>204</b>
5.2.1	Définition et recherche d'un état d'équilibre . . . . .	204
5.2.2	Stabilité . . . . .	205
<b>5.3</b>	<b>Critères de stabilité . . . . .</b>	<b>205</b>
5.3.1	Critère des racines . . . . .	206
5.3.2	Critère de Routh-Hurwitz . . . . .	211
5.3.3	Méthode de Liapounov . . . . .	216
<b>5.4</b>	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>220</b>
5.4.1	C'est stable une montgolfière? . . . . .	220
5.4.2	Niveau de fluide et température dans une cuve . . . . .	220
5.4.3	Stabilité dans les airs... ou presque . . . . .	220
5.4.4	Équilibre précaire . . . . .	221
5.4.5	Critère de Hurwitz pour des ordres faibles . . . . .	221

<b>5.5</b>	<b>Correction des exercices</b>	<b>223</b>
5.5.1	C'est stable une montgolfière?	223
5.5.2	Niveau de fluide et température dans une cuve	224
5.5.3	Stabilité dans les airs... ou presque	225
5.5.4	Équilibre précaire	226
5.5.5	Critère de Hurwitz pour des ordres faibles	226
<b>5.6</b>	<b>Notes et références</b>	<b>229</b>

---

La notion de stabilité est bien entendu fondamentale dans l'étude des systèmes et, à quelques rares exceptions près, les systèmes ne vérifiant pas cette qualité sont inutilisables voire dangereux. Si la notion de stabilité peut sembler assez intuitive, il n'est pourtant pas trivial d'en donner une définition mathématique uniforme pour tous les systèmes aussi existe-t-il de nombreuses « stabilités » différentes. Une approche intuitive conduit à la notion de stabilité externe ou celle de stabilité BIBO qui est succinctement présentée et qui découle naturellement de l'approche fréquentielle. Dans l'espace d'état il faut avoir une approche interne de la stabilité et c'est cette approche qui est privilégiée au cours du chapitre.

## 5.1. Une approche quasi intuitive : la stabilité BIBO

Comme il est dit en préambule de ce chapitre, la stabilité d'un système est une notion qui peut sembler assez intuitive. On comprend que si un système est excité par une entrée, l'opérateur utilisant ce système a sans doute peu envie de voir la sortie dudit système diverger brutalement. Cette façon assez simple d'envisager la stabilité donne naissance à une définition plus rigoureuse qui est celle de la stabilité BIBO (de l'acronyme anglais *Bounded input bounded output*, c.-à-d. entrée bornée, sortie bornée).

Un système est stable au sens BIBO (ou encore au sens entrée/sortie) si et seulement si, quelle que soit l'état initial  $x_0 = x(0)$ , pour toute entrée  $u$  bornée, la sortie  $y$  l'est aussi.

Une autre définition de la BIBO-stabilité, plus mathématique et « philosophiquement » quelque peu différente, peut être donnée : en notant  $y^*(t)$  la réponse

impulsionnelle du modèle, ce dernier est BIBO-stable si et seulement s'il existe un scalaire  $k$  vérifiant  $0 < k < \infty$  et <sup>1</sup>

$$\int_0^{\infty} |y^*(\tau)| d\tau \leq k.$$

Un modèle BIBO-stable peut donc être interprété, dans cette seconde définition, comme un modèle dont la réponse impulsionnelle est un signal d'énergie finie. Il n'est pas facile d'exploiter directement cette dernière formulation. Aussi a-t-on recours, en particulier dans l'espace d'état, à l'étude de stabilité d'un système au travers de la notion de stabilité des états d'équilibre.

**Remarque 5.1** *La stabilité BIBO est une manière d'envisager la stabilité d'un système au sens de son comportement entrée/sortie c'est-à-dire dans ses interactions avec l'environnement extérieur. On parle donc de stabilité externe. Dans les développements qui suivent, la stabilité est étudiée au travers du modèle interne que constitue la représentation d'état. La stabilité est alors qualifiée d'interne.*

Exemple :

un moteur à courant continu est excité par une tension d'entrée  $u(t)$ . La sortie considérée est la vitesse angulaire de l'arbre du moteur. Si l'on impose un signal borné sur l'induit du moteur, on sait que la vitesse reste bornée donc le moteur est BIBO-stable au sens de la première définition. De même, toute impulsion au niveau de cette tension d'induit entraîne une évolution de la vitesse telle que celle-ci augmente transitoirement pour s'annuler ensuite, son intégrale étant ainsi finie. Le moteur est donc BIBO-stable au sens de la définition alternative.

On suppose maintenant que la sortie est la position angulaire de l'arbre. Un échelon appliqué sur l'induit du moteur engendre, en régime permanent, une vitesse constante, donc la position angulaire augmente indéfiniment (en éludant l'aspect « modulo  $2\pi$  » puisqu'une charge mobile peut être entraînée en translation via une crémaillère). Le moteur (associé à cette nouvelle sortie) est alors BIBO-instable. Si une impulsion intervient sur l'induit, l'arbre va tourner et ne reviendra pas à sa position angulaire initiale donc l'intégrale de la position dans ce cas n'est pas finie. Le moteur est BIBO-instable.

---

1. L'intégrale qui suit est la norme dite  $L_1$  de la réponse impulsionnelle.

## 5.2. Stabilité d'un état d'équilibre

Pour envisager d'étudier rigoureusement la stabilité d'un système, il faut d'abord définir la notion d'état d'équilibre puis celle de stabilité d'un état d'équilibre.

### 5.2.1. Définition et recherche d'un état d'équilibre

Un système se trouve dans un *état d'équilibre* (par état, on entend un point de l'espace d'état c.-à-d. une instance du vecteur d'état) si cet état n'est pas modifié lorsque le système est abandonné à lui-même.

Un tel état d'équilibre se détermine en posant à la fois  $u = 0$  (« livré à lui-même ») et  $\dot{x} = 0$  (« pas modifié »). La recherche des états d'équilibre possibles d'un système modélisé par la représentation (3.5) page 71 revient donc à résoudre

$$Ax = 0. \quad (5.1)$$

De cette équation, on comprend qu'il peut exister un seul ou plusieurs états d'équilibre selon le rang de  $A$ . Soit  $\text{rang}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$  (ceci signifie que  $A$  n'a pas de valeur propre nulle) et le seul point d'équilibre est l'origine  $x_e = 0$ . Soit  $\text{rang}(A) < n \Leftrightarrow \det(A) = 0$  (ceci implique l'existence d'au moins une valeur propre nulle de  $A$ ) alors il existe une infinité d'états d'équilibre.

**Remarque 5.2** *Même s'il est plus rigoureux de parler de stabilité d'un état d'équilibre, il s'avère que, quel que soit l'état d'équilibre d'un système linéaire, sa stabilité dépend de la matrice  $A$ . Ainsi parle-t-on toujours de la stabilité du système.*

### 5.2.2. Stabilité

Un état d'équilibre est dit **asymptotiquement stable** si, lorsque le système est écarté de cet état sous l'effet d'une perturbation, il y revient (en un temps infini).

L'état d'équilibre est dit **instable** si, après perturbation, le système s'éloigne davantage.

L'état d'équilibre est dit **simplement stable** si, après perturbation, le système reste dans un voisinage du point d'équilibre.

Pour illustrer ces trois cas, on procède très souvent à une analogie mécanique. Cette dernière consiste à décrire l'état d'équilibre d'une bille dans trois positions différentes comme le montre la figure 5.1.

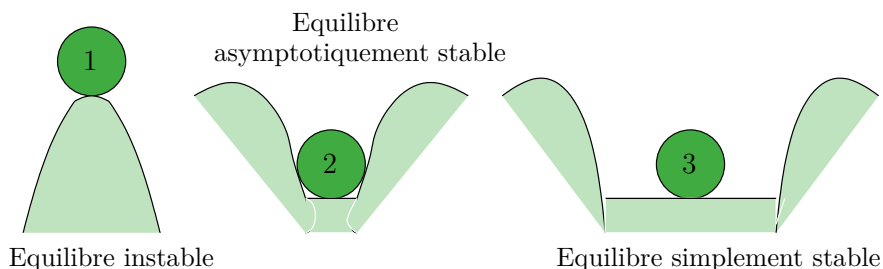


FIGURE 5.1 – Les trois états d'équilibre possibles d'une bille

## 5.3. Critères de stabilité

Analyser la stabilité d'un système revient donc à rechercher ses états d'équilibre et à déterminer leur stabilité. Pour ce faire, il faut disposer de critères de stabilité. La présentation de certains de ces critères fait l'objet de cette partie.

5.3.1. Critère des racines

On rappelle que la réponse du système autonome est  $x(t) = e^{At}x_0$  pour  $x_0 = x(t_0)$  et  $t_0 = 0$  (voir §4.1 page 168). Si l'on décompose la matrice de passage  $M$  qui diagonalise ou « jordanise »  $A$  et son inverse  $M^{-1}$  de la façon suivante

$$M = [ v_1 \quad \dots \quad v_n ] \quad ; \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

alors il devient possible d'exprimer  $x(t)$  de deux façons, selon l'ordre de multiplicité des valeurs propres de  $A$ .

◇ Les valeurs propres de  $A$  sont distinctes

$$x(t) = \sum_{i=1}^n v_i w_i x_0 e^{\lambda_i t} = \left( \sum_{i=1}^n N_i e^{\lambda_i t} \right) x_0.$$

◇ Les valeurs propres de  $A$  sont multiples

On a alors, en supposant que  $J$  fait apparaître  $r$  valeurs propres différentes et  $p \geq r$  blocs de Jordan :

$$e^{Jt} = \text{blocdiag}\{e^{J_k t}\} \quad \text{avec} \quad e^{J_k t} = e^{\lambda_k t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} & \frac{t^{n_k}}{n_k!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n_k-3}}{(n_k-3)!} & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

Ceci conduit à déduire que  $x(t)$  répond à la formulation suivante :

$$x(t) = Me^{Jt}M^{-1} = \left( \sum_{i=1}^r N_i(t)e^{\lambda_i t} \right) x_0 \quad (5.3)$$

### 5.3.1.1. rang( $A$ ) = $n$

Dans ce cas, il n'existe qu'un point d'équilibre : l'origine de l'espace d'état  $x_e = 0$ . On parle donc indifféremment de stabilité de l'origine ou de stabilité du système. En analysant les formes (5.2) et (5.3), on déduit que trois cas se présentent.

- $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$  : tous les modes (c.-à-d. tous les termes de  $x(t)$ ) sont évanescents  $\Rightarrow$  le système est asymptotiquement stable ;
- $\exists j \mid \text{Re}(\lambda_j) > 0$  : Il existe au moins un mode qui diverge  $\Rightarrow$  le système est instable ;
- $\exists j \mid \text{Re}(\lambda_j) = 0$  et  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i$  :
  - $\lambda_j = 0$  (impossible par hypothèse) ;
  - $\lambda_{j,l} = \pm j\omega \Rightarrow$  deux modes associés à deux valeurs propres complexes conjuguées de  $A$  se combinent en un terme sinusoïdal d'amplitude constante par application des formules d'Euler (4.37) page 194 et (4.38) page 195  $\Rightarrow$  comportement oscillatoire d'amplitude constante  $\Rightarrow$  système simplement stable.

### 5.3.1.2. rang( $A$ ) < $n$

Dans ce cas, il existe plusieurs états d'équilibre dont l'origine. Comme au moins une valeur propre est nulle, la stabilité asymptotique est impossible. Toujours en analysant (5.2) et (5.3) selon les mêmes principes que précédemment (en éludant quelques subtilités), on déduit que deux cas se présentent.

- $\exists j \mid \text{Re}(\lambda_j) > 0$  : le système est instable ;
- $\nexists j \mid \text{Re}(\lambda_j) > 0$  :

- Les blocs de Jordan relatifs aux éventuelles valeurs propres à partie réelle nulle sont tous scalaires (la multiplicité géométrique de ces valeurs propres est égale à leur multiplicité algébrique)  $\Rightarrow$  le système est simplement stable ;
- Il existe un bloc de Jordan non scalaire associé à une valeur propre à partie réelle nulle (la multiplicité géométrique de cette valeur propre est strictement inférieure à sa multiplicité algébrique)  $\Rightarrow$  le système est instable.

### 5.3.1.3. En résumé

- $\exists j \mid \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$  : le système est instable ;
- $\nexists j \mid \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$  :
  - $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$  : le système est asymptotiquement stable ;
  - La multiplicité géométrique des valeurs propres à partie réelle nulle est égale à leur multiplicité algébrique  $\Rightarrow$  le système est simplement stable ;
  - La multiplicité géométrique d'une valeur propre à partie réelle nulle est strictement inférieure à sa multiplicité algébrique  $\Rightarrow$  le système est instable.

En réalité, la propriété souvent recherchée est la stabilité asymptotique. La condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique d'un système et les propriétés associées se résument à ceci :



Soit le système modélisé par (3.5) page 71. Ce dernier est dit asymptotiquement stable si et seulement si le système autonome associé  $\dot{x} = Ax$  est asymptotiquement stable, c'est-à-dire si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle strictement négative et donc appartiennent au demi-plan gauche ouvert.

#### 5.3.1.4. Stabilité interne et stabilité BIBO

On peut déduire, par exemple grâce à l'équation (4.15) page 171, la relation existant entre la stabilité interne et la stabilité BIBO.

Si  $A$  possède une valeur propre à partie réelle strictement positive et si l'on suppose que l'entrée  $u(t)$  est nulle, tout état initial  $x_0$  conduit à un état non borné (et donc potentiellement à une sortie non bornée).

Au contraire, si  $A$  ne possède que des valeurs propres négatives, dès lors que  $u(t)$  est un signal borné, tous les termes de la réponse  $x(t)$ , et *a fortiori* ceux de  $y(t)$ , convergent vers une valeur finie.

Le système décrit par une représentation (3.5) d'ordre  $n$  et de fonction de transfert  $G(p)$  d'ordre  $n$  (cf. page 71) est BIBO-stable si il est asymptotiquement stable.  
Il est BIBO instable si il est instable de manière interne.

(En cas de stabilité simple, l'existence d'une borne sur la sortie dépend de l'entrée  $u(t)$ .)

Dans la proposition ci-avant, l'équivalence entre les deux stabilités n'est pas mentionnée. À choisir entre les deux propriétés, c'est la stabilité interne qui doit être privilégiée. Elle assure de la stabilité BIBO. Il faut noter que deux hypothèses sont quasi implicites dans cette assertion. La première est la linéarité du modèle. Une telle proposition ne peut être formulée pour un modèle non linéaire. La seconde est la dimension commune du modèle interne et du modèle externe, à savoir  $n$ . Il s'agit là d'une différence entre l'approche interne temporelle et l'approche externe fréquentielle sur laquelle il sera revenu au chapitre 6. Les deux stabilités ne sont ainsi pas équivalentes. En effet, le système statique  $y = u$  est de toute évidence BIBO-stable (si la commande  $u$  est bornée, la sortie

$y = u$  l'est aussi) mais ce système étant d'ordre zéro, il n'a pas de réalisation d'ordre zéro (cela n'existe pas!) donc pas de point d'équilibre. Si on lève l'hypothèse du même ordre et qu'on associe au système la réalisation  $(0, 0, 0, 1)$ , il est clair que cette réalisation n'a pas de point d'équilibre asymptotiquement stable.

**Remarque 5.3** *À propos de la non-équivalence des instabilités interne et externe : un intégrateur  $1/p$  est-il instable ? On l'entend souvent dire mais est-ce exact ? La réponse est **oui et non**. Si l'on applique le critère des racines détaillé ci-avant, un intégrateur est un modèle (interne ou externe) d'ordre 1 ayant un pôle nul unique donc le bloc de Jordan associé est scalaire. Le système est donc **simplement stable** mais non asymptotiquement stable. En revanche il est **BIBO-instable** puisqu'il répond à un échelon par une rampe. En résumé : **Un intégrateur est stable (mais pas asymptotiquement stable) au sens de la stabilité interne et instable au sens de la stabilité externe.** On peut en revanche noter qu'un double intégrateur  $1/p^2$  est instable de manière interne comme de manière externe.*

#### 5.3.1.5. Les marges de stabilité

Par analogie avec les systèmes de second ordre qui possèdent soit deux pôles réels, soit deux pôles complexes conjugués, on peut définir une *marge de stabilité absolue* et une *marge de stabilité relative*.

Soit un système asymptotiquement stable dont le comportement est décrit par (3.5) page 71. Les valeurs propres de  $A$  sont toutes à partie réelle strictement négative. Les marges absolue et relative sont ainsi définies :

Marge de stabilité absolue : distance minimale, dans le plan complexe, entre un point dont l'affixe est une valeur propre de  $A$  et l'axe imaginaire. Mathématiquement, elle s'exprime ainsi :

$$\sigma = \min_i |\operatorname{Re}(\lambda_i)|. \quad (5.4)$$

Marge de stabilité relative : angle minimal, dans le plan complexe, formé par l'axe imaginaire et par l'axe reliant l'origine et un point dont l'affixe est une valeur propre de  $A$ . Mathématiquement, elle s'exprime

$$\psi = \min_i \left( \arctan \left( \left| \frac{\operatorname{Re}(\lambda_i)}{\operatorname{Im}(\lambda_i)} \right| \right) \right). \quad (5.5)$$

La marge absolue quantifie la stabilité asymptotique alors que la marge relative est liée aux pôles complexes donc permet de quantifier le caractère plus ou moins oscillatoire induit par les pôles et est, à ce titre, reliée au coefficient d'amortissement. Ces marges sont illustrées sur la figure 5.2.

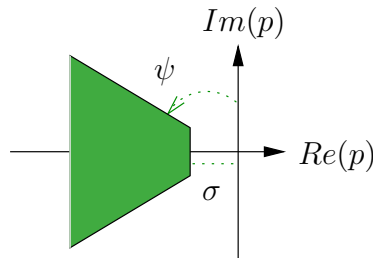


FIGURE 5.2 – Marges de stabilité absolue et relative

### 5.3.2. Critère de Routh-Hurwitz

Le critère de Routh-Hurwitz (ou encore ceux, très proches, de Schur<sup>2</sup> ou de Liénard-Chipart<sup>3</sup>), permet d'attester ou non de la stabilité asymptotique d'un

2. du nom d'Issaï Sadi Schur, mathématicien d'origine russe (1875-1941).

3. Alfred-Marie Liénard, physicien et ingénieur français (1869-1958) et M. H. Chipart (?-?).

modèle grâce au polynôme caractéristique  $D(p)$  de  $A$ . Ce critère algébrique est plutôt utilisé lorsqu'une approche fréquentielle est privilégiée puisque  $D(p)$  est le dénominateur de la fonction de transfert. Cependant, il convient de rappeler que  $D(p)$  s'exprime aussi  $D(p) = \det(pI - A)$  et qu'il peut, de ce fait, être déduit de  $A$ . En outre, si  $A$  est de forme compagne (cf. §3.5.1.2 page 84), les coefficients de  $D(p)$  sont directement lisibles sur la dernière ligne ou la première colonne de  $A$ , ce qui permet de dresser directement une table dite « table de Routh » et d'appliquer ainsi le critère.

Ce critère est en effet généralement donné tel que formulé par J. E. Routh<sup>4</sup> via la table éponyme (formulation non rappelée ici mais classiquement donnée dans les cours sur l'approche fréquentielle). Ici, il est préféré la formulation alternative et équivalente proposée par A. Hurwitz<sup>5</sup>, car elle est plus « matricielle ».

Soit une matrice  $A$  dont le polynôme caractéristique s'exprime sous la forme

$$D(p) = \det(pI - A) = h_0 p^n + h_1 p^{n-1} + h_2 p^{n-2} + \dots + h_{n-1} p + h_n \quad (5.6)$$

(Le changement de notation et d'indices par rapport à la notation usuelle facilite l'expression du critère). Par souci de simplicité et sans perte de généralité,  $h_0$  est **supposé strictement positif**.

Des coefficients additionnels fictifs sont également définis :

$$h_j = 0 \quad \forall j \in \{n+1, \dots, 2n-1\}. \quad (5.7)$$

Soit enfin la matrice  $H$  carrée d'ordre  $n$  définie par (la logique de construction est implicite) :

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_3 & h_5 & \dots & \dots & \dots & h_{2n-1} \\ h_0 & h_2 & h_4 & \dots & \dots & \dots & h_{2n-2} \\ 0 & h_1 & h_3 & \dots & \dots & \dots & h_{2n-3} \\ 0 & h_2 & h_4 & \dots & \dots & \dots & h_{2n-4} \\ 0 & 0 & h_1 & \dots & \dots & \dots & h_{2n-5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{h} & \dots & h_n \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

4. voir biographie 5.1 page 214.

5. voir biographie 5.2 page 215.

où  $\mathbf{h}$  désigne  $h_0$  ou  $h_1$  selon la parité de  $n$ .

Le critère de Hurwitz s'exprime ainsi :

**Critère de Hurwitz**

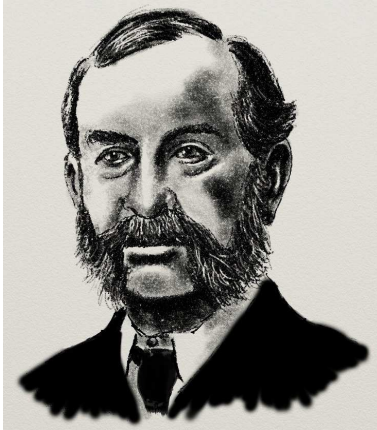
La matrice  $A$  est dite *Hurwitz*, *hurwitzienne*, *stable au sens de Hurwitz* ou simplement *stable* si toutes ses valeurs ont toutes une partie réelle strictement négative (c'est-à-dire que toute représentation admettant  $A$  comme matrice d'évolution est asymptotiquement stable conformément au critère des racines) ou, de manière équivalente, si et seulement si tous les mineurs principaux dominants de  $H$  sont positifs *i.e.*

$$\Delta_k(H) > 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad (5.9)$$

(Les mineurs principaux dominants d'une matrice sont définis en annexe au paragraphe A.1.8 page 648.)

Il est possible de définir une condition nécessaire de stabilité au sens de Hurwitz. Elle est très simple et se résume à  $h_i > 0, \forall i \in \{0, \dots, n\}$  mais cette condition n'est que nécessaire, et généralement pas suffisante sauf pour  $n \leq 2$ .

---

**Biographie 5.1** John Edward Routh (1831-1907) : mathématicien anglais.


Né fils d'un notable anglais ayant combattu à la bataille de Waterloo (« C'est où ça déjà ? C'est comme Alésia<sup>6</sup> ou Alégia<sup>7</sup>, personne c'est où c'est ! », dixit un descendant d'Abbaracourcix), il fit de brillantes études au University College de Londres jusqu'à son « Master of Arts » (1853). Clairement, il se destinait à une carrière mathématique. Il étudia également à Cambridge où il fut ensuite enseignant. Sa scolarité fut ponctuée de prix et récompenses et il est aujourd'hui connu pour avoir, entre autres, devancé J. C. Maxwell<sup>8</sup> lors des concours. Il s'illustra par une approche mathématique de la mécanique et,

pour ce qui concerne l'Automatique, il est l'auteur, au même titre que A. Hurwitz, mais sans concertation, du critère de stabilité de Routh-Hurwitz (en fait un critère relatif au signe des parties réelles des racines d'un polynôme), qui est présenté ci-avant dans une version plus proche de celle de Hurwitz.

---



---

6. « ALÉSIA ! CONNAIS PAS ALÉSIA ! JE NE SAIS OÙ SE TROUVE ALÉSIA ! PERSONNE NE SAIT OÙ SE TROUVE ALÉSIA ! » (Abbaracourcix, chef gaulois, 1<sup>er</sup> siècle avant J. C.).

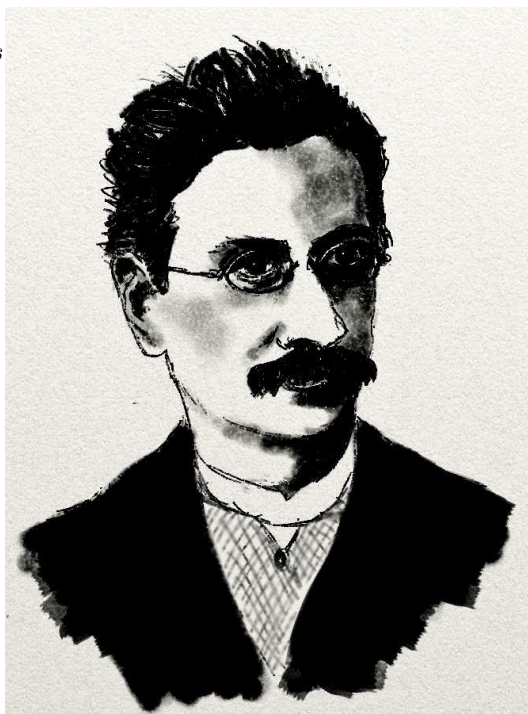
7. « ALÉGIA ! NOUS NE CHAVONS PAS OÙ CH'EST, ALÉGIA ! » (Alambix, arverne de Gergovie (ça, tout le monde c'est où ça se trouve), commerçant en vins et charbon, 1<sup>er</sup> siècle avant J. C.).

8. James Clerk Maxwell, physicien et mathématicien écossais (1831-1879) qui révolutionna l'électromagnétisme par les règles qui portent son nom.

---

**Biographie 5.2** Adolf Hurwitz (1859-1919) : *mathématicien allemand.*

Figure notable des mathématiques de la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, il obtint son doctorat en 1881 à l'Université de Leipzig pour prendre, quelque temps, après un poste de professeur à l'Université de Königsberg où il aurait grandement influencé le célèbre D. Hilbert<sup>9</sup>. À partir de 1892, il occupa une chaire de mathématiques à l'École Polytechnique Fédérale de Zurich jusqu'à sa mort. Ses contributions aux mathématiques sont nombreuses et substantielles. Le détail ne peut en être fait ici. C'est pour un résultat somme toute assez anecdotique dans l'ensemble de son œuvre qu'il apparaît ici. En effet, quelques années après Routh, il formula de manière totalement indépendante un critère analogue à celui du mathématicien anglais. C'est une version proche de celle de Hurwitz qui est présentée dans ce paragraphe.



**Remarque 5.4** Il faut noter que le critère de Routh-Hurwitz avait en fait déjà été formulé par C. Hermite<sup>a</sup> qui s'intéressait de façon purement mathématique, ce sans penser aux applications en termes de stabilité des systèmes, à la répartition des racines d'un polynôme par rapport à l'axe imaginaire.

a. Charles Hermite, mathématicien français (1822-1901).

9. David Hilbert, mathématicien allemand (1862-1943).

### 5.3.3. Méthode de Liapounov

Comme il a été dit précédemment, la popularisation de la représentation d'état est née d'une volonté de certains chercheurs de promouvoir la théorie de Liapounov<sup>10</sup>. Liapounov s'intéressait à la stabilité d'un système mécanique en mouvement. Son étude se révèle néanmoins fort utile pour l'étude de la stabilité de n'importe quel système.

La théorie de Liapounov est très complète et parfois assez sophistiquée. Il n'est pas utile, dans le cadre de ce cours, de la détailler. Il faudrait de toute façon beaucoup de temps et d'efforts pour y parvenir. Cependant, on peut en extraire des résultats intéressants. Ils sont empruntés à ce qu'il est convenu d'appeler « seconde méthode » (ou « méthode directe ») de Liapounov. En voici, de manière résumée, la teneur.

Soit le modèle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ f_i(0, \dots, 0) = 0 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow x = 0 \text{ état d'équilibre,} \end{cases}$$

où les  $f_i$  sont des fonctions potentiellement non linéaires en les composantes  $x_i$  du vecteur d'état. Il s'agit là d'un modèle de système autonome qui possède l'origine pour état d'équilibre. Liapounov propose une condition suffisante pour vérifier la stabilité de cet état d'équilibre. S'il existe une fonction  $V$ , dite *fonction de Liapounov* telle que  $V(x) > 0 \forall x \neq 0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \subset \Omega$ ,  $V(0) = 0$ , et telle que

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega, x \neq 0$$

alors le modèle d'état non linéaire est asymptotiquement stable pour des conditions initiales dans un voisinage  $\Omega$  de 0.

Si l'on s'intéresse à la stabilité asymptotique d'un système linéaire autonome

$$\dot{x} = Ax,$$

la seconde méthode permet de voir qu'un tel système est asymptotiquement stable **si et seulement si** il existe une fonction de Liapounov (quadratique)

---

10. Alexandre Mikhaïlovitch Liapounov, mathématicien et physicien russe (1857-1918) : voir sa biographie en annexe page 772.



$$\begin{aligned}
 V = x'Px > 0 \quad (\Leftrightarrow P = P' > 0) \text{ telle que } \dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0 \\
 \Leftrightarrow x'(A'P + PA)x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \\
 \Leftrightarrow A'P + PA < 0 \quad (5.10) \\
 \Leftrightarrow \exists Q = Q' < 0 \text{ et } P = P' > 0 \mid A'P + PA = Q. \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

Plusieurs points sont notables dans ce résultat. En premier lieu, il n'est plus question de faire référence à l'origine de  $\mathbb{R}^n$  qui est de toute façon l'unique point d'équilibre. En deuxième lieu, la condition devient nécessaire et suffisante. En troisième lieu, il n'est pas restrictif de supposer que  $V(x)$  est une fonction quadratique de  $x$  ce qui permet d'aboutir, soit à une inégalité matricielle donnée en (5.10) dont l'inconnue est une *matrice symétrique strictement définie positive*  $P$ , soit à une égalité matricielle donnée en (5.11), dont les inconnues sont deux *matrices symétriques*,  $P$  et  $Q$ , la première étant *strictement définie positive* et la seconde étant *strictement définie négative*. La matrice  $P$  est appelée *Matrice de Liapounov*.

Résoudre une inégalité matricielle linéaire telle que (5.10) est possible depuis le début des années 1990 grâce à des outils numériques. Toutefois, on préfère, lorsqu'aucun outil numérique sophistiqué n'est disponible, manipuler l'égalité (5.11). Or le système linéaire qui en résulte est sous-déterminé. La difficulté peut alors sembler, *a priori*, de choisir  $Q = Q' < 0$  pour rendre le système déterminé et pour que la solution  $P = P'$  existe et soit définie positive. En fait, plus tard, certains auteurs prouvèrent qu'un choix arbitraire de la matrice  $Q$  était possible (cf. §5.6 page 229 et annexe F page 709). On peut donc résumer la présente application de la théorie de Liapounov à ceci :

Le modèle d'état linéaire (3.5) page 71 est asymptotiquement stable si et seulement si, quelle que soit la matrice symétrique définie négative  $Q$ , l'unique solution de l'équation

$$A'P + PA = Q \quad (5.12)$$

est définie positive.

La matrice  $P$ , solution de l'équation de Liapounov (5.12), est alors donnée par

$$P = - \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt,$$

mais, numériquement, mieux vaut résoudre l'équation (5.12) qu'utiliser cette intégrale pour obtenir  $P$ .

L'habitude consiste à choisir  $Q = -I$  pour effectuer le test. Il est possible sous quelques réserves de considérer une matrice  $Q$  semi-définie négative (voir en annexe le paragraphe F.4 page 713). De façon générale, l'annexe F reprend quelques aspects évoqués ci-avant.

Lorsque le système (3.5) page 71 est le linéarisé tangent d'un système non linéaire, le test ci-dessus peut permettre d'affirmer que le modèle initial non linéaire est aussi asymptotiquement stable dans un voisinage autour du point de fonctionnement (le point d'équilibre du modèle linéaire est alors l'origine et celui du modèle non linéaire est le point de fonctionnement). En effet, sans détailler ces concepts, lorsque le linéarisé tangent est tel que  $\text{rang}(A) = n$ , alors le point de fonctionnement est qualifié de point d'équilibre *hyperbolique*. Pour ce genre de points d'équilibre, il y a *équivalence topologique* entre le modèle non linéaire et son linéarisé tangent (théorème de Hartman-Grobman). De ce fait, la stabilité du modèle non linéaire peut se déduire de celle du linéarisé tangent dans un voisinage du point de fonctionnement. Plus précisément, tout modèle linéarisé asymptotiquement stable correspond à un point d'équilibre hyperbolique pour le modèle non linéaire original qui est alors lui aussi asymptotiquement stable dans un voisinage du point de fonctionnement.

Il existe un résultat similaire qui montre que si le linéarisé tangent en un point d'équilibre hyperbolique est instable alors le modèle non-linéaire est instable dans un voisinage autour de ce point. En revanche, si le modèle non linéaire fait apparaître un point d'équilibre non hyperbolique alors on ne peut déduire la stabilité du modèle non linéaire à partir de son linéarisé tangent.

**Remarque 5.5** *Puisqu'il est question en cette fin de chapitre de stabilité des systèmes non linéaires, on peut profiter de cette parenthèse pour consacrer cette remarque à la simple évocation d'une notion très utilisée dans l'étude des systèmes non linéaires, celle la stabilité exponentielle. Un point d'équilibre  $x_e$  est dit **exponentiellement stable** s'il existe deux scalaires strictement positifs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que*

$$\|x(t) - x_e\|_2 \leq \alpha \|x_0 - x_e\|_2 e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (5.13)$$

où  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme vectorielle euclidienne induite<sup>a</sup> (c.-à-d. ici la distance entre  $x(t)$  et  $x_e$  dans l'espace d'état à  $n$  dimensions) et  $x_0$  désigne l'état initial. Lorsque le système est LTI et asymptotiquement stable, son unique point d'équilibre  $x_e = 0$  est tel que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\|_2 = 0$ , ce qui implique la stabilité exponentielle. Il y a alors équivalence entre stabilité asymptotique et stabilité exponentielle.

a. La norme vectorielle euclidienne induite  $\|x\|_2$  du vecteur  $x$  désigne  $\sqrt{x^T x}$ .

**En conclusion**, il faut noter que tous ces critères de stabilité ne font intervenir que  $A$ . Ainsi, seule la matrice d'évolution détermine la stabilité du système.

## 5.4. Exercices

### 5.4.1. C'est stable une montgolfière ?

Le modèle simplifié (linéarisé autour d'un point de fonctionnement) de l'évolution d'altitude d'une montgolfière est donné au paragraphe 3.9.3 page 109.

Questions :

- Ce modèle correspond-il à un comportement asymptotiquement stable ?
- Donner une interprétation « physique » de la réponse à la question précédente.

### 5.4.2. Niveau de fluide et température dans une cuve

Soit le modèle linéarisé des variations de niveau de fluide et de température dans une cuve donné par (3.41) page 124.

Questions :

- Prouver qu'il s'agit d'un comportement stable.
- Déterminer facilement une fonction de Liapounov pour le modèle.

### 5.4.3. Stabilité dans les airs... ou presque

Soit le modèle d'état obtenu en §3.10.16 page 153 par linéarisation des équations décrivant le comportement d'une maquette d'hélicoptère, et rappelé ci-après :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l_a F_g}{J_t} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{l_a q}{J_e} & \frac{l_a q}{J_e} \\ 0 & 0 \\ \frac{l_h q}{J_p} & -\frac{l_h q}{J_p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x. \end{array} \right.$$

Questions :

- Étudier la stabilité du système.
- Faire de même en ne regardant que la dynamique de tangage (états  $x_3$  et  $x_4$ ).

#### 5.4.4. Équilibre précaire

Le système étudié ici est celui présenté au paragraphe 3.9.9 page 115, à savoir le pendule inverse. Intuitivement, on se doute qu'un tel système laissé livré à lui-même ne maintient pas le pendule à la verticale.

Question :

En utilisant le modèle d'état du procédé établi au paragraphe 3.10.9 page 138, vérifier scientifiquement l'intuition.

#### 5.4.5. Critère de Hurwitz pour des ordres faibles

Il s'agit ici d'appliquer le critère de Routh-Hurwitz, plus précisément tel que formulé par Hurwitz, et donné au paragraphe 5.3.2 page 211.

Question :

Donner les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité asymptotique issues du critère de Hurwitz pour des systèmes ayant des polynômes caractéristiques de degré 2, 3 ou 4.

## 5.5. Correction des exercices

### 5.5.1. C'est stable une montgolfière ?

En se référant au paragraphe 3.9.3, page 109, ou plutôt à la correction donnée au paragraphe 3.10.3 page 133, la matrice d'état du modèle s'écrit

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \sigma & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Toujours au paragraphe 3.10.3, il est aussi écrit que les valeurs propres de cette matrice sont  $\alpha$ ,  $\beta$  et 0, arguant que la matrice étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont égales à ses éléments diagonaux. Puisque  $\alpha$  et  $\beta$  sont strictement positifs, il est clair qu'il est impossible d'affirmer que toutes les valeurs propres de  $A$  présentent une partie réelle négative. De ce fait, il n'y a pas stabilité asymptotique.

Quant à l'interprétation physique, elle est assez simple. Il est clair que si l'on se met à augmenter la puissance de chauffage d'une certaine quantité, la montgolfière prendra inéluctablement de l'altitude et ce presque indéfiniment. Bien sûr, ce ne peut être tout à fait vrai puisque l'on ne restera pas dans le cadre de l'approximation linéaire et que les conditions atmosphériques finiront par changer au point de devoir revoir les équations. Cela étant, il est clair qu'il n'y a pas stabilité BIBO donc, par contraposition, il n'y a pas non plus stabilité asymptotique.



### Note de l'auteur



*Attention, le lecteur pourrait hâtivement conclure qu'il ne doit jamais monter dans une montgolfière. L'instabilité relevée ici caractérise un comportement en boucle ouverte. Or, la montgolfière est pilotée (c'est une forme de boucle fermée). Le modèle est par ailleurs simplifié ; il ne prend pas en compte les détails technologiques d'une montgolfière. Il ne faut voir ici que prétexte à exercice.*

### 5.5.2. Niveau de fluide et température dans une cuve

La matrice d'évolution du modèle d'état donnée en (3.41) est

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{Q}{2SH} & 0 \\ 0 & -\frac{Q}{SH} \end{bmatrix}.$$

Elle est diagonale donc les composantes qui apparaissent sur sa diagonale sont aussi ses valeurs propres. Elles sont de toute évidence réelles négatives donc le critère des racines permet de conclure qu'il s'agit d'un comportement asymptotiquement stable.

Pour déterminer une fonction de Liapounov prouvant de manière alternative la stabilité du modèle, il faut se référer au paragraphe 5.3.3 page 216 qui stipule que le système étant linéaire, il n'y a pas de perte de généralité à considérer que la fonction de Liapounov à déterminer est une forme quadratique en l'état :

$$V(x) = x'Px.$$

$P$  est une matrice symétrique définie positive (voir §A.2.2 page 668 en annexe) telle qu'il existe  $Q$ , symétrique définie négative, vérifiant l'égalité de Liapounov (5.11) page 217, à savoir

$$A'P + PA = Q.$$

Il est possible de choisir arbitrairement  $Q$  dans ce cas mais l'argument est inutile ici. En effet, pour alléger les notations, les éléments diagonaux de  $A$  sont notés  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 = 2\lambda_1$  (rappel : ils sont négatifs). Si l'on prend  $P = I$  (la matrice identité, ici d'ordre 2), on a bien  $P = P' > 0$  et il vient aussi

$$A'P + PA = 2A = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_2 \end{bmatrix} = -Q.$$

Or la matrice  $Q$  est clairement diagonale (donc symétrique) et ses composantes diagonales sont négatives. Elle est donc définie négative. Ainsi,  $P = I$  est une matrice de Liapounov pour le modèle. Plus exactement, la fonction  $V(x) = x'x$  est une fonction de Liapounov



pour le modèle qui est asymptotiquement stable.

Une autre façon, plus simple, de formuler la même solution, est de dire que  $A'P + PA$  est clairement définie négative ce qui permet de vérifier l'inégalité de Liapounov (5.10) page 217 et donc de tirer la même conclusion. Tout cela n'est qu'une question de formalisme.

**Remarque 5.6** *Attention, la structure particulièrement simple (diagonale) permet aisément de trouver une matrice  $P$  prouvant la stabilité asymptotique. Cependant, pour une structure quelconque, la détermination de  $P = P' > 0$  n'est pas aussi triviale.*

### 5.5.3. Stabilité dans les airs... ou presque

La matrice d'état  $A$  laisse apparaître deux lignes (ou deux colonnes) nulles. Elle possède donc au moins deux valeurs propres nulles (en réalité, ce sont ses cinq valeurs propres qui sont nulles mais c'est moins évident). D'après le critère des racines, il est donc clair qu'un tel système n'est pas asymptotiquement stable.

Pour être plus précis quant à l'étude de stabilité, il faut étudier la multiplicité géométrique des valeurs propres et regarder attentivement les détails du critère des racines (paragraphe 5.3.1 page 206). La matrice  $A$  peut être vue comme une matrice bloc-diagonale dont le premier bloc, à savoir

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

est un bloc de Jordan associé à la valeur propre 0 de multiplicité algébrique 2 et de multiplicité géométrique 1. Il s'agit donc d'instabilité et non de stabilité simple. (Remarque : cette partie de la dynamique du système est liée à l'élévation de l'hélicoptère.)

De même si l'on se contente d'étudier la dynamique de tangage relative aux composantes  $x_3$  et  $x_4$  du vecteur d'état, la sous-matrice extraite de  $A$  associée à ces états est égale au même bloc de Jordan  $J$  que celui donné ci-avant, donc la dynamique du tangage est instable.

À titre de remarque, les deux dynamiques étudiées (élévation et

tangage) correspondent toutes deux à un comportement de double intégrateur connu comme instable (voir cours sur l'approche fréquentielle ou remarque 5.3 page 210). Bien entendu, il s'agit ici de comportement en boucle ouverte (avant l'application d'une loi de commande).

#### 5.5.4. Équilibre précaire

La vérification d'une telle intuition est en réalité très simple. La matrice dynamique  $A$  obtenue fait apparaître une colonne de zéros qui implique que  $A$  possède au moins une valeur propre nulle, ce qui interdit donc la stabilité asymptotique. En d'autres termes, toute petite perturbation ne permet pas au pendule de revenir naturellement à la verticale.

Il ne reste pas à la verticale. Soit ! Se peut-il qu'il reste naturellement incliné d'un angle quelconque éventuellement proche de zéro (stabilité simple) ? Clairement non, bien sûr, mais comment le voir mathématiquement ? La valeur propre nulle de  $A$  est en fait double sur le plan algébrique mais simple sur le plan géométrique (en toute rigueur, il faut « jordaniser »  $A$  pour le vérifier mais l'auteur laisse ce travail au lecteur si l'envie lui en prend). Ceci est dû à la présence d'un double intégrateur (il a fallu dériver  $q$  et  $\theta$  pour obtenir le modèle). D'après le paragraphe 5.3.1 page 206, le système est franchement instable et le pendule tombe à la moindre perturbation... donc attention aux baguettes de pain... ou aux fusées !

#### 5.5.5. Critère de Hurwitz pour des ordres faibles

Soit le polynôme  $P_2$  d'ordre 2

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad \text{avec } a_2 > 0,$$

qui caractérise une matrice  $A$ . Pour appliquer le critère de Hurwitz tel que présenté au paragraphe 5.3.2 page 211, il faut poser  $h_0 = a_2$ ,  $h_1 = a_1$ ,  $h_2 = a_0$  et  $h_3 = 0$ . La matrice  $H$  définie en (5.8) page 212 s'écrit

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ h_0 & h_2 \end{bmatrix}.$$

Le critère de Hurwitz conduit donc à la condition nécessaire et suffisante de stabilité suivante (on dit alors que que  $A$  est *stable au sens de Hurwitz* ou que  $P_2$  est un *polynôme de Hurwitz*) :

$$\begin{cases} \Delta_1(H) = \det(h_1) = h_1 = a_1 > 0, \\ \Delta_2(H) = \det(H) = h_1 h_2 = a_0 a_1 > 0. \end{cases}$$

Compte-tenu du signe de  $a_2$  (il n'y a pas de perte de généralité à considérer ce coefficient strictement positif), la condition précédente revient à

$$a_i > 0, \quad \forall i \in \{0, \dots, 2\}.$$

Soit maintenant le polynôme  $P_3$  d'ordre 3

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad \text{avec } a_3 > 0.$$

Il convient de poser  $h_0 = a_3$ ,  $h_1 = a_2$ ,  $h_2 = a_1$ ,  $h_3 = a_0$  et  $h_4 = h_5 = 0$ . La matrice  $H$  s'écrit

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_3 & 0 \\ h_0 & h_2 & 0 \\ 0 & h_1 & h_3 \end{bmatrix}.$$

$P_3$  est un polynôme de Hurwitz si et seulement si

$$\begin{cases} \Delta_1(H) = \det(h_1) = h_1 = a_2 > 0, \\ \Delta_2(H) = \det \left( \begin{bmatrix} h_1 & h_3 \\ h_0 & h_2 \end{bmatrix} \right) = h_1 h_2 - h_0 h_3 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ \Delta_3(H) = \det(H) = h_3 (h_1 h_2 - h_0 h_3) = a_0 (a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0. \end{cases}$$

Cette condition se réécrit de manière équivalente :

$$a_0 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 a_2 > a_0 a_3.$$

Enfin, soit maintenant le polynôme  $P_4$  de degré 4

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad \text{avec } a_4 > 0.$$

Il convient de poser  $h_0 = a_4$ ,  $h_1 = a_3$ ,  $h_2 = a_2$ ,  $h_3 = a_1$ ,  $h_4 = a_0$  et  $h_5 = h_6 = h_7 = 0$ . La matrice  $H$  s'écrit

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_3 & 0 & 0 \\ h_0 & h_2 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & h_3 & 0 \\ 0 & h_0 & h_2 & h_4 \end{bmatrix}.$$

$P_4$  est un polynôme de Hurwitz si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1(H) = \det(h_1) = h_1 = a_3 > 0, \\ \Delta_2(H) = \det \left( \begin{bmatrix} h_1 & h_3 \\ h_0 & h_2 \end{bmatrix} \right) = h_1 h_2 - h_0 h_3 = a_2 a_3 - a_1 a_4 > 0, \\ \Delta_3(H) = \det \left( \begin{bmatrix} h_1 & h_3 & 0 \\ h_0 & h_2 & h_4 \\ 0 & h_1 & h_3 \end{bmatrix} \right) \\ \quad = -h_1(h_1 h_4) + h_3(h_1 h_2 - h_0 h_3) \\ \quad = -a_0 a_3^2 + a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) > 0, \\ \Delta_4(H) = \det(H) = h_4 \Delta_3(H) = a_0(-a_0 a_3^2 + a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4)) > 0. \end{array} \right.$$

Cette condition se récrit de manière équivalente :

$$a_0 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_2 a_3 - a_1 a_4 > 0, \quad a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) > a_0 a_3^2.$$

On peut remarquer que ces dernières inégalités contiennent  $a_0 > 0$ ,  $a_3 > 0$  et impliquent  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ . En outre, par hypothèse,  $a_4 > 0$ . On a donc  $a_i > 0$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, 4\}$  qui est en effet une condition nécessaire de stabilité au sens de Hurwitz (voir §5.3.2 page 211).

## 5.6. Notes et références

Avant d'évoquer les aspects historiques de la stabilité des systèmes, il est utile de préciser que les notions de ce chapitre sont très classiques et peuvent être trouvées dans beaucoup de livres et manuels d'Automatique. Une nouvelle fois, l'auteur aiguille le lecteur vers [1,2,3,4,5,6,7] et [8]. Une vision « mathématicienne » bien sentie de la stabilité des modèles (linéaires ou non linéaires) est proposée dans [9]. Pour la notion de points d'équilibre, pour celle de stabilité au sens de Liapounov ou pour celle de stabilité exponentielle, il est peut être judicieux de consulter des ouvrages consacrés aux systèmes non linéaires [10,11]. Pour ce qui est de l'adaptation de la théorie de Liapounov aux cas des systèmes linéaires, et, en particulier, l'obtention de l'équation (5.12) page 217, avec choix arbitraire de  $Q < 0$ , voir [14,15,16]. Enfin, les notes historiques relatives au premier siècle avant notre ère et apparaissant dans la biographie 5.1 page 214 sont tirées de l'excellent travail de deux célèbres historiens, à savoir R. Gosciny <sup>11</sup> et A. A. Uderzo <sup>12</sup> [17]

La notion de stabilité et les questions sous-jacentes n'apparurent pas spontanément dans les problèmes de régulation. Lorsque le régulateur à boules de J. Watt <sup>13</sup> (également appelé régulateur centrifuge) était perfectionné, c'était principalement dans le but de le rendre « *isochrone* », c'est-à-dire de rendre le système asservi précis en position. On cherchait à annuler ce que l'on appelle *l'erreur de position*. La réponse indicielle devait tendre vers la consigne de vitesse donnée [12], ce qui, comme il a été vu au chapitre 1, était impossible en l'absence de véritable effet intégral dans la loi de commande. La question des dynamiques et des régimes transitoires n'était pas le souci des savants s'intéressant à la régulation. On a vu au paragraphe 2.5 page 56, que G. B. Airy <sup>14</sup> fut l'un des tous premiers si ce n'est le premier à constater les possibles comportements instables (ou pour le moins déviants) des télescopes [13]. Comprenant l'enjeu, J. C. Maxwell <sup>15</sup> modélisa le procédé par une équation différentielle linéaire de troisième

---

11. René Gosciny, écrivain, journaliste, scénariste (et un peu historien) français (1926-1977) et non pas belge.

12. Albert Aleandro Uderzo, dessinateur et scénariste français (et non pas belge) d'origine italienne (1927-).

13. ingénieur écossais (1736-1819), qui a donné son nom au *Watt*, l'unité de puissance, donc à l'expression « Vas-y! Mets les Watts! ».

14. Georges Biddell, mathématicien, astronome, géodésien et physicien britannique (1801-1892)

15. James Clerk Maxwell, physicien et mathématicien écossais (1831-1879) qui révolutionna l'électromagnétisme par les règles qui portent son nom.

ordre et parvint à traduire la stabilité du système en termes de conditions sur les coefficients du polynôme caractéristique associé [18]. Bien entendu, implicitement, il s'agissait de pouvoir tester l'appartenance des racines du polynôme caractéristique au demi-plan gauche, ce sans calculer les racines (qui pouvaient être difficiles à obtenir). Mais il n'y avait rien de vraiment systématique dans le travail de Maxwell. À la même époque, I. A. Vichenegradski<sup>16</sup>, traduisit aussi la stabilité d'une équation différentielle de troisième ordre en termes de localisation des racines du polynôme caractéristique. Il établit des diagrammes pour associer la localisation de ces racines aux comportements transitoires de la solution de l'équation différentielles. Ces diagrammes préfigurèrent nos lieux des pôles. Deux chemins parallèles et indépendants furent alors empruntés pour établir des critères de stabilité asymptotique des systèmes linéaires.

D'une part, en Angleterre, J. E. Routh<sup>17</sup> reprit le travail de Maxwell et proposa en 1877 le *critère de stabilité de Routh*, se basant sur la construction de la table du même nom [20]. Ceci lui valut le prix Adams<sup>18</sup> dont le jury comprenait J. C Maxwell qui l'avait lui-même reçu auparavant. Ceci lui valut aussi la main de la fille aînée de G. B. Airy, Hilda. C'est ce qui s'appelle avoir le beurre, l'argent du beurre, etc. D'autre part, à Zurich, en 1893, A. B. Stodola<sup>19</sup> voulut appliquer le travail de Vichenegradski à son modèle de turbine hydraulique qui, hélas pour lui, était de septième ordre. Il fallait donc étendre le principe proposé par Vichenegradski [12,19]. Il soumit donc le problème à un mathématicien allemand qui n'était autre que Hurwitz<sup>20</sup>. Lui aussi proposa son critère de stabilité qui correspond à celui présenté dans ce chapitre [21,22]. Finalement ces deux critères furent démontrés équivalents [23]. C'est pourquoi l'on parle aujourd'hui de critère de Routh-Hurwitz. Et c'est peut-être injuste. En effet, la possibilité de localiser les racines d'un polynôme sans les calculer a toujours intéressé les mathématiciens et les premières règles apparurent alors même que l'on ignorait l'existence de racines complexes. La première règle semble due à R. Descartes<sup>21</sup> et remonterait à 1637 [24]. Sur ses traces, bien plus tard, le fameux C. Her-

---

16. Ivan Alekselevitch Vichenegradski, scientifique russe (1832-1895).

17. cf. biographie 5.1 page 214.

18. Le prix Adams, en l'honneur du mathématicien et astronome britannique John Couch Adams (1819-1892), est attribué chaque année par la faculté de mathématiques de l'Université de Cambridge et le St John's College à un jeune mathématicien du Royaume-Uni pour des travaux d'importance internationale.

19. Aurel Boroslav Stodola, physicien et ingénieur slovaque (1589-1942).

20. cf. biographie 5.2 page 215

21. René Descartes, mathématicien, physicien et philosophe français (1596-1650), éminent savant formé à l'Université de Poitiers, qui était parce qu'il pensait.

mite<sup>22</sup> établit dès 1856 une règle qui s'apparente très fortement au critère de Routh-Hurwitz [25,15]. La différence majeure est que Hermite ne s'intéressait pas à l'application possible de son critère à la stabilité des systèmes linéaires. Ce travail de Hermite eût pu être oublié sans celui de Patrick C. Parks [27]. Ce dernier avait auparavant déjà démontré que le critère de Routh-Hurwitz pouvait se déduire du travail de Liapounov [28]. À noter qu'il existe un critère de Routh-Hurwitz modifié qui présente une simplification des tests numériques associés et qui est appelé critère de Liénard-Chipart<sup>23</sup> [29,30,31]. I. Schur<sup>24</sup> proposa également une procédure de test de stabilité en continu [32] même s'il est plus connu pour ses travaux sur la stabilité des systèmes discrets, stabilité qui porte parfois son nom (« au sens de Schur », voir chapitre 9).

On peut se questionner aujourd'hui sur l'intérêt de tels critères alors que les outils numériques permettent de calculer des racines. Toutefois, la recherche et la pratique montrent que les modèles ne sont pas toujours connus avec précision et que le calcul des racines ne peut raisonnablement pas être effectué pour une famille infinie de modèles. De ce fait, ces critères algébriques de même que les inéquations et équations de type « Liapounov » restent des conditions pertinentes pour tester la localisation des racines d'un polynôme ou celle des valeurs propres d'une matrice. Cette localisation, comme l'avait compris Vichenegradski, va au-delà de la stabilité et permet d'analyser des performances transitoires (voir annexe B page 675). L'auteur du présent document connaît assez bien les problèmes de localisation des racines, notamment en termes matriciels, et se permet de renvoyer le lecteur vers [33] pour quelques réflexions récentes sur le sujet ainsi que quelques références historiques.

De façon générale, lorsque l'on étudie la stabilité des modèles d'état, même linéaires, c'est souvent la seconde approche de Liapounov qui est aujourd'hui privilégiée (voir [34,35] et l'annexe F page 709), notamment si l'on utilise des techniques d'analyse et de commande un peu plus sophistiquées que celles présentées dans le présent document. Voir l'annexe I page 771 pour une biographie de Liapounov.

---

22. Charles Hermite, mathématicien français (1822-1901).

23. Alfred-Marie Liénard, physicien et ingénieur français (1869-1958) et M. H. Chipart (?-?).

24. du nom d'Issaï Sadi Schur, mathématicien d'origine russe ayant beaucoup travaillé en Allemagne (1875-1941).

1. **T. Kailath** : *Linear Systems*. Prentice Hall, 1979.  
*Un vrai ouvrage de référence, pas très facile à aborder par son style et sa forme mais redoutablement complet. Pratiquement une « bible ».*
2. **R. C. Dorf et R. H. Bishop** : *Modern Control Systems*. Neuvième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.  
*La réédition permanente de cet ouvrage en dit long sur sa popularité. Les nombreux exemples constituent une vraie mine d'exercices pour un enseignant.*
3. **G. F. Franklin, J. D. Powell et A. Emami-Naemi** : *Feedback Control of Dynamic Systems*. Quatrième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.  
*Assez riche en exemples et agréable dans la forme. Plutôt didactique.*
4. **K. Ogata** : *Modern Control Engineering*. Troisième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.  
*Ouvrage de référence qui semble en avoir inspiré plus d'un. L'auteur a un petit faible pour cette référence dont la première édition date de 1970.*
5. **P. J. Antsaklis et A. N. Michel** : *Linear Systems* McGraw-Hill, 1997.  
*Fanchement pas le plus accessible mais très rigoureux mathématiquement. Très bien mais déconseillé pour une première approche.*
6. **B. Friedland** : *Control System Design - An Introduction to State-Space Methods*. Dover, Mineola, New York, 1985.  
*Cet ouvrage se concentre uniquement sur la représentation d'état et de ce fait, vu sa taille importante, traite bien plus d'aspects que beaucoup d'autres. Les exemples y sont nombreux et bien choisis. Il est parfois un peu dense. Son prix est très raisonnable.*
7. **B. Pradin et G. Garcia** : *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Presses Universitaires du Mirail, 2010.  
*Que dire de cet ouvrage si ce n'est que c'est celui qu'il faut acheter! Incontestablement le meilleur rapport qualité/prix.*
8. **B. Pradin** : *Polycopié de cours d'Automatique : « Automatique : Notes de cours - Exercices »*. INSA de Toulouse, 3ème année spécialité AEI. 1992.  
*Là où l'essentiel est mieux expliqué que partout ailleurs! si ce n'est dans [42].*
9. **H. Logeman et E. P. Ryan** : *Ordinary Differential Equations : Analysis, Qualitative Theory and Control*. Springer Undergraduate Series,



2014.  
Cet ouvrage utilise une approche mathématique rigoureuse pour proposer entre autres des solutions aux équations d'état (pas forcément linéaires). Les notions de commandabilité et d'observabilité (voir chapitre 6) y sont particulièrement bien amenées. Il est en outre très abordable.
10. **M. Vidyasagar** : *Nonlinear Systems Analysis*. Seconde édition - SIAM Editions, collection « Classics in Applied mathematics », 1982.  
Ouvrage assez prisé des « non-linéaristes », et des étudiants découvrant le sujet.
  11. **H. Khalil** : *Nonlinear Systems*. Troisième édition Prentice Hall, 1981.  
L'autre grosse référence sur les systèmes non linéaires.
  12. **C. C. Bissell** : A History of Automatic Control. *Springer Handbook of Automation*, Ed. S. Y. Nof, Springer, 2009, p. 56-69.  
Article résumant avec brio l'histoire de l'Automatique.
  13. **G. B. Airy** : On the regulator of the clock-work for effecting uniform movement of equatorials. *Memoirs of the Royal Astronomical Society*, vol. II, p.249-267, 1840.  
Peut-être une des toutes premières applications des régulateurs en astronomie.
  14. **W. Hahn** : Eine Bemerkung zur zweiten Method von Lyapunov. *Mathematische Nachrichten*, 14, p.349-354, 1956.  
Où il est montré pour la première fois que dans l'équation (5.12) page 217,  $Q$  peut-être choisie arbitrairement mais doit néanmoins être définie négative.
  15. **R. Bellman** : *Introduction to matrix analysis*. McGraw Hill, New York, 1960.  
Une des nombreuses contributions utiles de Bellman où l'on retrouve le même résultat que dans [14].
  16. **J. Jones** : On the Lyapunov Stability Criteria *Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM)*, 13(4), p.941-945, 1965.  
Où le résultat de [14] est encore retrouvé.
  17. **R. Goscinnny et A. Uderzo** : *Le bouclier arverne* Collection Astérix, Éditions Dargaud, 48p., 1968.  
Pour en savoir un peu sur le monde gallo-romain mais surtout sur la franchouillardise. On y situe très bien Gergovie, un peu moins bien Alésia, ce qui est parfaitement normal.

18. **J. C. Maxwell** : On Governors *Proc. of the Royal Society of London*, 16, 1868, également dans *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory*, Dover, New York, 1964, p. 270-283.  
*Première utilisation assumée des équations différentielles pour traiter de la modélisation (et de la stabilité) des premiers systèmes asservis.*
19. **I. A. Vyshnegradskii** : Über Direktwirkende Regulatoren. *Der Civi-lingenieur*, 23, p.95-137, 1877.  
*Une tentative de critère de stabilité des modèles linéaires qui inspira Hurwitz.*
20. **J. E. Routh** : *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion*. Macmillan and co. Londres, 1877.  
*La présentation par J. E. Routh du critère éponyme.*
21. **A. Hurwitz** : Über die Bedingungen, unter Welchem eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen realen Teilen besitzt *Mathematische Annalen*, 46, p.273-284, 1895.  
*Le critère de Hurwitz en version originale.*
22. **J. Jones** : *On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts* dans *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory* édité par R. Bellman et R. Kalaba, Dover, New York, 1964.  
*Le critère de Hurwitz en version anglaise.*
23. **E. Bompiani** : Sulle condizione sotto le quali un equazione a coefficienti reale ammette solo radici con parte reale negative *Giornale di Matematica*, 49, p.33-39, 1911.  
*Démonstration de l'équivalence entre le critère de Routh et celui de Hurwitz.*
24. **R. Descartes** : *La Géométrie* Imprimerie Maire, Leyde, Pays Bays (disponible à la Bibliothèque de France), 1637.  
*Une œuvre majeure à bien des égards qui ne traite pas d'Automatique mais dans laquelle on trouve les premières règles pour déterminer le signe des racines (forcément réelles à l'époque) d'un polynôme.*
25. **C. Hermite** : Sur le nombre de racines d'une équation algébrique comprise entre des limites données. *Journal für die reine und angewandte Mathematik. Journal de Crelle*, 52, p.39-51, Berlin, 1856.  
*Le critère de Routh-Hurwitz avant l'heure, peut-être même un peu plus général.*

26. **P. Remaud** : *Histoire de l'automatique en France, 1950-1950*. Éditions Hermes, 2007.  
*Unique en son genre, cet ouvrage historique se concentre sur la contribution française chez les précurseurs de l'Automatique. L'auteur insiste entre autres sur le travail de Léon Farcot relatif aux servomoteurs. Pour ce qui concerne le présent chapitre, il traite aussi du travail de Hermite sur la stabilité et de son lien avec les travaux de Routh et de Hurwitz.*
27. **P. C. Parks** : A New Proof of Hermite's Stability Criterion and a Generalization of Orlando's Formula. *International Journal of Control*, 26(2), p.197-206 1977.  
*Une redécouverte du critère de Hermite.*
28. **P. C. Parks** : A New Proof of Routh-Hurwitz's Stability Criterion Using the Second Method of Lyapunov. *Proc. Cambridge Philosophical Society*, 58(4), p.694-702 1962.  
*Le critère de Routh-Hurwitz redémontré en utilisant la théorie de Liapounov.*
29. **A. Liénard et M. H. Chipart** : Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique. *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 10(6), p. 291-346, 1914.  
*Version modifiée du critère de Routh-Hurwitz. La base théorique est la même mais le nombre de tests sur les déterminants de matrices est réduit.*
30. **B. N. Datta** : An Elementary Proof of the Stability Criterion of Liénard and Chipart. *Linear Algebra and its Applications*, 22, p. 89-96, 1978.  
*Une preuve simplifiée du critère de Liénard-Chipart.*
31. **E. I. Jury** : Comments on the Stability Criterion of Liénard and Chipart *Linear Algebra and its Applications*, 47, p. 169-171, 1982.  
*Un commentaire correctif de [30] par un grand nom de l'Automatique.*
32. **I. Schur** : Über algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen *Z. angew. Math. Mech*, 1, p. 307-321, 1921.  
*Un autre critère de stabilité moins connu que celui de Routh-Hurwitz... il y en a bien d'autres.*
33. **O. Bachelier** : *Placement de pôles et D-stabilité robuste : approche temporelle* Mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Poitiers, ENSIP, Poitiers, 2009.  
Téléchargeable à l'adresse :  
<http://www.lias-lab.fr/perso/olivierbachelier/publications.php>

Le premier chapitre de ce mémoire propose un petit historique du problème de localisation des pôles avec de nombreuses références sans forcément en donner tous les détails. Le reste du mémoire s'attarde de façon plus technique sur un point de vue et une approche personnels de l'analyse et du placement de pôles.

34. **A. M. Liapounov** : *Problème général de stabilité du mouvement*. Annales de la faculté de sciences de Toulouse, vol 9. p.203-474, 197. Traduit du texte original russe, publié dans Comm. Soc. Math., Kharkov, 1892. Une véritable mine d'idées à la fois simples mais très fortes, très puissantes, qui inspirèrent et inspirent encore de très nombreux Automaticiens mais aussi bien des chercheurs d'autres disciplines scientifiques. C'est essentiellement sa « seconde méthode » ou « méthode directe » qui génère (toujours) de nombreux travaux sur la stabilité des systèmes.
35. **W. Hahn** : *Stability of motion*. Springer Verlag, Berlin, 1967. Un ouvrage de référence sur la stabilité, en particulier sur le travail de Liapounov que finalement peu de gens ont lu directement.

# Chapitre 6

## *Commandabilité et observabilité*

Ce chapitre introduit des concepts nécessaires pour établir des lois de commande telles que celles qui seront étudiées dans les chapitres suivants. Ces concepts sont ceux de commandabilité et d'observabilité. Il furent introduits par R. E. Kálmán dont la biographie figure en annexe I.2 page 777.

### Sommaire

---

<b>6.1 Définitions . . . . .</b>	<b>238</b>
6.1.1 Commandabilité ou gouvernabilité . . . . .	238
6.1.2 Observabilité . . . . .	239
<b>6.2 Critère de Kálmán . . . . .</b>	<b>240</b>
6.2.1 Commandabilité . . . . .	240
6.2.2 Observabilité . . . . .	242
6.2.3 Dualité des deux concepts . . . . .	245
<b>6.3 Critères s'appliquant aux formes de Jordan . . . . .</b>	<b>246</b>
6.3.1 $A$ diagonalisable . . . . .	247
6.3.2 $A$ non diagonalisable . . . . .	247
<b>6.4 Grammiens . . . . .</b>	<b>248</b>
6.4.1 Définition des grammiens . . . . .	248
6.4.2 Interprétation des grammiens . . . . .	249
6.4.3 Calcul des grammiens . . . . .	250

<b>6.5</b>	<b>Test de Popov-Belevitch-Hautus</b>	<b>251</b>
<b>6.6</b>	<b>Modèles et structures</b>	<b>253</b>
6.6.1	Différence entre les modèles	254
6.6.2	Systèmes composites	257
<b>6.7</b>	<b>Réalisation minimale</b>	<b>260</b>
6.7.1	Définition	261
6.7.2	Réalisation minimale et notion de pôles	261
6.7.3	Réalisation minimale et stabilité	262
<b>6.8</b>	<b>Décomposition de Kalman</b>	<b>263</b>
6.8.1	Décomposition relative à la commandabilité	263
6.8.2	Décomposition relative à l'observabilité	267
6.8.3	Décomposition complète	268
<b>6.9</b>	<b>Quelques éléments biographiques</b>	<b>275</b>
<b>6.10</b>	<b>Exercices</b>	<b>278</b>
6.10.1	Un exo à tout faire	278
6.10.2	Décomposition de Kálmán	278
6.10.3	Retour au chapitre 4	279
<b>6.11</b>	<b>Correction des exercices</b>	<b>280</b>
6.11.1	Exo à tout faire	280
6.11.2	Décomposition de Kálmán	285
6.11.3	Retour au chapitre 4	288
<b>6.12</b>	<b>Notes et références</b>	<b>290</b>

## 6.1. Définitions

### 6.1.1. Commandabilité ou gouvernabilité

Soit le modèle d'état (3.5) d'un système linéaire, page 71, dont l'état initial est à une valeur quelconque  $x_0 = x(t_0)$ . On peut supposer sans restriction que la transmission directe est nulle ( $D = 0$ ).

Le modèle est *commandable* ou *gouvernable* si pour toute instance  $x_1$  du vecteur d'état, il existe un signal d'entrée  $u(t)$  d'énergie finie qui permet au système de passer de l'état  $x_0$  à l'état  $x_1$  en un temps fini.

Il est possible que, si la commandabilité n'est pas vérifiée sur tout le vecteur d'état, elle puisse néanmoins l'être sur une partie de ses composantes. On dit alors des variables d'état concernées que ce sont les *états commandables* du système.

La commandabilité peut être vue comme la possibilité de modifier les dynamiques d'un modèle en agissant sur ses entrées. À ce titre cette propriété ne se réfère qu'à l'état et à l'entrée du système. Il est donc clair qu'elle ne dépend que des matrices  $A$  et  $B$ .

**Remarque 6.1** *La commandabilité telle qu'elle est présentée ici et dans beaucoup d'autres documents est en fait plutôt ce qu'il convient d'appeler l'atteignabilité (au sens où l'état  $x_1$  est atteignable). La distinction entre les deux concepts est surtout utile pour les systèmes non linéaires. Pour les systèmes linéaires invariants dans le temps, les deux concepts peuvent généralement se confondre sans réelle conséquence. Dire que l'état est commandable, c'est dire que tout point de l'espace d'état est atteignable. Par la suite la distinction ne sera plus faite. Par ailleurs, le mot « gouvernabilité » est un peu passé de mode.*

### 6.1.2. Observabilité

On s'intéresse toujours au même modèle que dans la partie précédente.

Le modèle est *observable* si, quel que soit  $t_0$ , il existe un intervalle de temps fini  $[t_0, t_1]$  tel que la connaissance de l'entrée  $u(t)$  et de la sortie  $y(t)$  sur cet intervalle permet de reconstituer  $x(t_0)$ .

Encore une fois, il est possible que cette propriété ne se vérifie que pour une partie du vecteur d'état que constituent alors les *états observables* du système.

La définition de l'observabilité ne fait pas d'hypothèse particulière sur la nature de l'entrée. Cette propriété peut être interprétée comme la capacité d'un

système à révéler l'historique de son vecteur d'état au travers de celui de ses sorties. Elle ne dépend en fait que des matrices  $A$  et  $C$ .

**Remarque 6.2** *En prolongement de la remarque 6.1, il existe une propriété quelque peu défférente qui est la restructibilité de l'état. Pour la définir, il suffit de changer  $x(t_0)$  par  $x(t_1)$  dans la définition de l'observabilité. C'est en fait souvent la restructibilité du vecteur d'état (donc du modèle) qui est intéressante. Cependant, la restructibilité et l'observabilité sont équivalentes pour un système linéaire invariant dans le temps. Par la suite la distinction ne sera plus faite.*

## 6.2. Critère de Kálmán

En plus d'introduire les concepts de commandabilité et d'observabilité, R. E. Kálmán est aussi l'auteur d'un critère éponyme. Il s'exprime par une condition sur la paire de matrices  $(A, B)$  pour ce qui concerne la commandabilité et sur la paire de matrices  $(A, C)$  pour ce qui concerne l'observabilité.

**Remarque 6.3** *En réalité,  $B$  n'est qu'un vecteur colonne et  $C$  n'est qu'un vecteur ligne. Toutefois, pour des systèmes à plusieurs entrées (respectivement à plusieurs sorties),  $B$  possède plusieurs colonnes (resp.  $C$  possède plusieurs lignes) et les critères exprimés ci-après restent parfaitement valables. C'est pourquoi l'on préfère désigner  $(A, B)$  et  $(A, C)$  comme paires de matrices.*

### 6.2.1. Commandabilité

On s'intéresse maintenant à la commandabilité du système (3.5) page 71 qui se résume à la commandabilité de

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (6.1)$$

La paire de matrices  $(A, B)$  (ou le système (3.5) page 71) est commandable si et seulement si

$$\text{rang}(Q_c) = n \quad \text{où} \quad Q_c = [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B ]. \quad (6.2)$$



La matrice  $Q_c$  est dite *matrice de commandabilité de Kálmán*.

En se référant à la méthode de Cayley-Hamilton et plus précisément à la formule (4.21) page 177, on constate que  $e^{A\tau}$  peut s'écrire ainsi :

$$e^{A\tau} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k \quad \text{où} \quad \alpha_k(\tau) \in \mathbb{R}. \quad (6.3)$$

En effet, si l'on revient à la définition de la commandabilité, on peut, sans perte de généralité, considérer que  $x_1$  est l'origine de  $\mathbb{R}^n$  et que  $t_0$  est nul. La solution de l'équation d'état s'écrit (voir l'expression (4.14) page 171)

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

et conduit à

$$x_1 = x(t_1) = 0 = e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau \Leftrightarrow x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau.$$

Compte tenu de (6.3), il vient

$$x_0 = - \sum_{k=1}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (6.4)$$

En posant

$$\beta_k = \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau,$$

on peut récrire (6.4) de la façon suivante :

$$x_0 = -Q_c \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Le système est commandable si et seulement si le système (6.5) peut être résolu quel que soit  $x_0$  c'est-à-dire si et seulement si  $\text{rang}(Q_c) = n$ .

Bien entendu ce critère s'applique pour toute réalisation du système, c'est-à-dire qu'il conduit à la même conclusion quelle que soit la base retenue pour l'appliquer. Ceci se vérifie aisément d'une autre manière puisque si l'on applique à la réalisation  $(A, B, C, D)$  associée à l'état  $x$  un changement de base  $x = M\bar{x}$  (où  $M$  est inversible), conduisant à la réalisation  $(\bar{A} = M^{-1}AM, \bar{B} = M^{-1}B, \bar{C} = CM, D)$ , alors il vient

$$\begin{aligned}\bar{Q}_c &= [ \bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B} ] \\ \Leftrightarrow \bar{Q}_c &= [ M^{-1}B \quad M^{-1}AMM^{-1}B \quad \dots \quad M^{-1}A^{n-1}MM^{-1}B ] \\ \Leftrightarrow \bar{Q}_c &= M^{-1} [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B ] = M^{-1}Q_c\end{aligned}$$

Puisque  $M$  (ou  $M^{-1}$ ) est de rang plein, il est clair que  $\text{rang}(\bar{Q}_c) = \text{rang}(Q_c)$ .

### 6.2.2. Observabilité

On s'intéresse maintenant à l'observabilité du système (3.5) page 71 qui se résume à l'observabilité de

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx. \quad (6.6)$$

En effet, si l'on regarde la solution complète de l'équation d'état (4.15), à savoir

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C \left( \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right) + Du(t),$$

connaissant  $A, B, C, D$  ainsi que  $u(t)$ , les deux derniers termes du membre de droite sont calculables et peuvent être soustraits de la valeur mesurée de  $y(t)$ . Ceci revient à considérer une sortie correspondant simplement au premier terme, qui est le seul à dépendre de  $x_0$ . Un tel système n'est autre que le système (6.6). La nouvelle sortie s'exprime alors

$$y(t) = Ce^{At}x_0$$

ce qui, en tenant compte de (6.3), donne

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(t)CA^kx_0 = \text{blocdiag}\{\alpha_k I\} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0.$$

On voit clairement que la détermination de  $x_0$  en fonction de  $y(t)$  ne sera possible que si le système d'équations ci-dessus ne présente pas de déficience de rang ce qui conduit au critère d'observabilité de Kálmán :

La paire de matrices  $(A, C)$  (ou le système (3.5) page 71) est observable si et seulement si

$$\text{rang}(Q_o) = n \quad \text{où} \quad Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

La matrice  $Q_o$  est dite *matrice d'observabilité de Kálmán*.

Comme dans le cas de la commandabilité, ce critère conduit évidemment à la même conclusion dans toutes les bases. Bien qu'aucune démonstration ne soit nécessaire, il est aisé de s'en convaincre en vérifiant qu'un changement de base  $x = M\bar{x}$  (où  $M$  est inversible) faisant passer de la réalisation  $(A, B, C, D)$  à la réalisation  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D)$  conduit aussi à

$$\bar{Q}_o = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} M = Q_o M.$$

$M$  étant de rang plein, il vient  $\text{rang}(\bar{Q}_o) = \text{rang}(Q_o)$ .

### Exemple 1 :

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

La matrice de commandabilité est

$$Q_c = [ B \quad AB ] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang 2 donc le système est commandable.

La matrice d'observabilité est

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang 2 donc le système est observable.

Exemple 2 :

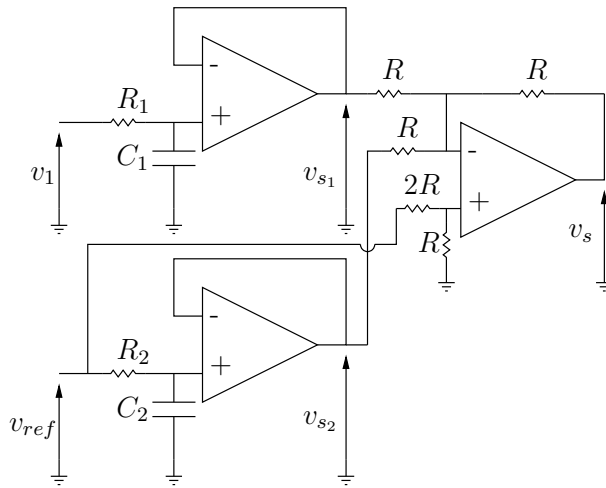


FIGURE 6.1 – Circuit électronique

Soit le système électronique représenté par le schéma de la figure 6.1. Le vecteur d'état choisi est  $x = [x_1 \ x_2] = [v_{s1} \ (v_{s2} - V_{ref})]$ . L'entrée est la tension  $u = v_1$  et la sortie est la tension  $y = v_s$ . Ce choix, ainsi que l'application des règles d'électronique, en considérant les amplificateurs opérationnels comme parfaits, conduisent à la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [-1 \quad -1] x. \end{cases} \quad (6.8)$$

La matrice de commandabilité de Kálmán est

$$Q_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{(R_1 C_1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et comme elle est de rang 1, le système n'est pas complètement commandable. Ceci traduit le fait que, dans ce montage électronique,  $v_1$  ne peut influencer sur  $v_{s_2}$ . La matrice d'observabilité de Kálmán est

$$Q_o = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix}$$

Elle est de rang plein donc le système est observable.

Si l'on décide de considérer  $v_{s_1}$  comme la sortie du système, alors la matrice de mesure devient  $C = [1 \quad 0]$  et celle d'observabilité devient :

$$Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang 1 et le système n'est donc plus observable. Ceci traduit le fait que l'on ne peut déduire  $v_{s_2}$  de  $v_{s_1}$  car  $v_{s_2}$  n'agit en rien sur  $v_{s_1}$ .

### 6.2.3. Dualité des deux concepts

Il est important de noter l'analogie entre les structures de  $Q_c$  et  $Q_o$ . Elle permettent de comprendre que la commandabilité et l'observabilité sont deux notions duales comme le soulignent les propositions suivantes :

Dualité :

La paire  $(A, B)$  est commandable si et seulement si la paire  $(A', B')$  est observable.

La paire  $(A, C)$  est observable si et seulement si la paire  $(A', C')$  est commandable.

Les critères de Kálmán ont un grand intérêt théorique et permettent de comprendre un peu mieux ces notions fondamentales de commandabilité et d'observabilité. Cependant, lorsqu'ils ne sont pas satisfaits ( $\text{rang}(Q_c) < n$  ou  $\text{rang}(Q_o) < n$ ), ils ne donnent aucune information évidente sur les composantes du vecteur d'état qui sont commandables et/ou observables.

### 6.3. Critères s'appliquant aux formes de Jordan

L'idée de ce paragraphe découle un peu de celle du paragraphe 4.4 page 178, que le lecteur est invité à éventuellement reconsulter. Dans ce dernier, il était expliqué que la réponse d'un système se décompose en une somme de différents termes appelés *modes*, chaque mode étant lié à une valeur propre réelle de  $A$  ou à une paire de valeurs propres complexes conjuguées de  $A$  (ceci étant lié à la décomposition de  $e^{At}$  ou de  $e^{A(t-\tau)}$ ). Assez grossièrement, en première approche, puisque chaque terme est lié à une valeur propre, il convient de voir si la dite valeur propre est couplée à la commande  $u(t)$  pour savoir si le mode associé peut être excité par la commande (on peut alors dire que le mode est commandable). De la même façon, il convient de voir si les modes de la réponse en  $x(t)$  se retrouvent bien couplés à la sortie  $y(t)$ , pour savoir si l'effet d'un mode est bien visible en sortie (on peut alors dire que le mode est observable). Mais ce sont rigoureusement les états qui sont définis comme commandables ou observables, pas les modes ni les valeurs propres de  $A$ . L'idée suivante est donc de corréler les deux notions en étudiant une réalisation diagonale ou de Jordan. Dans les bases associées à de telles réalisations, la dynamique de chaque état est lié à une valeur propre réelle ou à une paire de valeurs propres conjuguées. Par cette association, il devient donc légitime de parler de modes ou de valeurs propres commandables ou observables, entendant par là que l'état associé est commandable ou observable.

Comme souvent, il faut distinguer deux cas selon la multiplicité géométrique des valeurs propres de  $A$ .

### 6.3.1. $A$ diagonalisable

Dans ce cas, il existe une matrice de passage  $M$  qui permet de changer de base et d'obtenir la réalisation

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u \\ y = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] x + Du. \end{cases}$$

On peut alors assimiler la commandabilité d'un « mode »  $\lambda_i$  (ou d'une valeur propre si l'on préfère) à celle de la composante  $x_i$  du vecteur d'état associé. Il en est de même pour l'observabilité. Clairement, sur cette forme diagonale simple, on voit que l'on peut agir sur  $x_i$  lorsque la composante  $b_i$  est non nulle de même que l'on peut constater une évolution de  $x_i$  si la composante  $c_i$  est non nulle.

Le mode  $\lambda_i$  est commandable (respectivement observable) si et seulement si  $b_i \neq 0$  (resp.  $c_i \neq 0$  par dualité).

### 6.3.2. $A$ non diagonalisable

Pour simplifier, on considère uniquement le sous-système associé à la valeur propre multiple  $\lambda$ . Une réalisation de Jordan est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u \\ y = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ \dots \ c_{n-1} \ c_n] x + \bar{D}u. \end{cases}$$

Le mode  $\lambda$  associé à un unique bloc de Jordan est commandable (respectivement observable) si et seulement si  $b_n \neq 0$  (resp.  $c_1 \neq 0$ ). Dans le cas où plusieurs blocs de Jordan lui sont associés, il ne peut être ni commandable, ni observable.

Il faut noter que la dernière affirmation concernant les modes multiples associés à plusieurs blocs de Jordan n'est pas forcément vraie pour un système multivariable (à plusieurs entrées ou plusieurs sorties).

Exemple :

On reconsidère l'exemple électronique de la figure 6.1 page 244. Sa représentation d'état est donnée en (6.8). Elle est « diagonale ». On s'aperçoit, en appliquant les critères ci-avant, que la seconde composante du vecteur d'état ( $v_{s_2} - V_{ref}$ ) (donc le pôle associé) n'est pas commandable par la tension  $v_1$ . En revanche, la composante  $v_{s_1}$  (donc son pôle associé) l'est. De même, on s'aperçoit que les deux composantes de  $C$  étant non nulles, alors les deux composantes de  $x$  sont observables. Ce résultat est (heureusement !) compatible avec celui obtenu grâce au critère de Kálmán.

## 6.4. Grammiens de commandabilité et d'observabilité

Soit le modèle LTI donné en (3.5) page 71 et supposé *asymptotiquement stable*. On se propose ici de présenter un critère de commandabilité et d'observabilité qui repose sur les notions de *grammiens*<sup>1</sup>.

### 6.4.1. Définition des grammiens

Le *grammien de commandabilité*  $W_c$  et le *grammien d'observabilité*  $W_o$ , également appelés matrices grammiennes, sont respectivement définis par

---

1. du nom du mathématicien danois Jørgen Pedersen Gram (1850-1916).



$$W_c = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B' e^{A'\tau} d\tau, \quad (6.9)$$

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau, \quad (6.10)$$

d'où l'on retrouve bien que les deux propriétés sont duales l'une de l'autre.

### 6.4.2. Interprétation des grammiens

L'interprétation d'un grammiens ainsi défini n'est pas chose aisée. Cependant, les grammiens peuvent aussi être définis pour des modèles LTI à temps discret et sont dans ce cas plus faciles à interpréter. En procédant par analogie pour les modèles à temps continu, on déduit que le grammiens de commandabilité  $W_c$  est lié à l'énergie minimale du signal de commande  $u(t)$  nécessaire pour amener l'état d'une condition initiale à une condition finale en un temps infini.

Plus précisément,  $W_c$  est une matrice symétrique semi-définie positive donc il existe une matrice de passage unitaire<sup>2</sup>  $U$  telle que  $W_c = U W_c^D U'$ , et telle que, dans la nouvelle base,  $W_c^D$  est diagonale et ses éléments diagonaux  $d_i$  sont positifs ou nuls. Ces éléments sont représentatifs de la commandabilité de chaque variable d'état  $\bar{x}_i$  dans la nouvelle base. En effet,  $d_i^{-1}$  quantifie l'énergie minimale nécessaire pour atteindre  $e'_i = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]$ , le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base. Ainsi, si  $d_i$  est faible, cette énergie est grande et l'état  $\bar{x}_i$  est faiblement commandable. Si  $d_i$  est nul,  $\bar{x}_i$  n'est pas commandable du tout. Le système est donc complètement commandable si tous les  $d_i$  sont strictement positifs ce qui équivaut à dire que  $W_c^D$  est une matrice strictement définie positive<sup>3</sup>. Or,  $W_c^D$  et  $W_c$  étant semblables, alors  $W_c^D$  est définie positive si et seulement si  $W_c$  l'est aussi. (Voir l'annexe G page 723 pour quelques compléments d'information sur les grammiens.)

Le raisonnement sur le grammiens d'observabilité  $W_o$  se fait par dualité. Les critères peuvent se formuler comme suit.

2. voir en annexe le paragraphe A.1.12.3 page 654.

3. voir en annexe la paragraphe A.2 page 667 pour comprendre ce qu'est une matrice définie positive.

La paire  $(A, B)$  (respectivement la paire  $(A, C)$ ) est commandable (resp. observable) si et seulement si le grammien de commandabilité  $W_c$  (resp. d'observabilité  $W_o$ ) est strictement défini positif.

Ainsi, les grammiens fournissent-ils des conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité ou de commandabilité d'un modèle LTI. Mais de plus, à l'instar des critères basés sur les formes de Jordan, ils indiquent le nombre de variables d'état non commandables et non observables. En outre, ils permettent de quantifier cette propriété c'est-à-dire de savoir si chaque variable d'état est très ou peu commandable ou observable. En revanche, ils se limitent à l'étude des modèles LTI asymptotiquement stables.

**Remarque 6.4** *Du point de vue stochastique,  $W_c$  est égal à la variance de  $x(t)$  en régime stationnaire lorsque l'entrée  $u(t)$  est un bruit blanc.*

**Remarque 6.5** *On peut démontrer que, quelle que soit la base de l'espace d'état considérée, le produit  $W_c W_o$  conserve le même spectre.*

### 6.4.3. Calcul des grammiens

Les intégrales définies en (6.9) et (6.10) ne sont pas utilisées pour le calcul des grammiens. En réalité,

$$AW_c + W_c A' = \int_0^{\infty} (Ae^{A\tau} BB' e^{A'\tau} + e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} A') d\tau = \left[ e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} \right]_0^{\infty}.$$

Sous l'hypothèse de stabilité de  $A$ , la quantité ci-dessus est égale à  $-BB'$ . Pour s'en convaincre, il faut revenir au paragraphe 4.3.3 page 175, où il est écrit que  $e^{A\tau}$  est semblable à  $e^{J\tau}$ ,  $J$  étant la forme de Jordan semblable à  $A$ . Si  $\tau$  tend vers l'infini,  $e^{J\tau}$  tend vers zéro donc  $e^{A\tau}$  tend aussi vers zéro. Bien entendu  $e^{A \times 0} = I_n$ . En résumé, prenant en compte la dualité, on peut proposer l'assertion suivante :

Soit la réalisation (3.5) page 71, supposée asymptotiquement stable. Le grammien de commandabilité  $W_c$  et celui d'observabilité  $W_o$  sont les solutions respectives des équations de Liapounov

$$AW_c + W_c A' = -BB', \quad (6.11)$$

$$A'W_o + W_o A = -C'C. \quad (6.12)$$

Il est plus facile, à l'aide des outils numériques d'aujourd'hui de résoudre les équations (6.11) et (6.12) que de calculer les intégrales (6.9) et (6.10). À ce propos, le lecteur peut se référer à la remarque F.1 page 718 en annexe.

**Remarque 6.6** *Il existe une base de l'espace d'état dans laquelle les grammien de commandabilité et d'observabilité sont égaux et diagonaux. Ainsi, chaque élément diagonal de ce double grammien quantifie à la fois la commandabilité et l'observabilité de la variable d'état associée dans la base considérée, c'est-à-dire son influence sur le comportement entrée/sortie du système. La réalisation correspondante est dite équilibrée. Elle se révèle particulièrement utile pour réduire le modèle à savoir trouver une réalisation d'ordre moindre dont le comportement entrée/sortie se rapproche de celui du modèle initial. Il suffit pour ce faire de négliger la dynamique des variables d'état faiblement commandables et observables. Cette technique de réduction de modèle a même été étendue au cas d'une réalisation instable.*

## 6.5. Test de Popov-Belevitch-Hautus

Certains ouvrages font apparaître un test (assez peu utilisé) de commandabilité ou d'observabilité : celui de Popov-Belevitch-Hautus<sup>4</sup>, du nom de trois auteurs l'ayant presque simultanément et indépendamment proposé. Pour le démontrer, il faut recourir à un résultat intermédiaire. Une paire de matrices  $(A, B)$  est non commandable si et seulement s'il existe un vecteur non nul  $q \in \mathbb{C}^n$  tel que

$$q'A = \lambda q', \quad q'B = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (6.13)$$

4. voir le paragraphe 6.9 page 275 pour en savoir plus sur ces trois scientifiques.

Autrement dit, si l'on peut trouver un vecteur propre à gauche associé à une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  et appartenant au complément orthogonal à gauche de  $B$  (c.-à-d. au noyau à gauche de l'application associée à  $B$  : voir en annexe le paragraphe A.1.13 page 658), alors la paire  $(A, B)$  n'est pas commandable et réciproquement. La justification est assez simple. De (6.13) on déduit aisément que

$$q' A^{k+1} B = \lambda q' A^k B = 0, \quad \forall k \geq 1,$$

d'où il résulte que

$$q' \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} = q' Q_c = 0.$$

La matrice de commandabilité de Kálmán admet un complément orthogonal à gauche. Elle est donc singulière et la paire  $(A, B)$  n'est pas commandable. Réciproquement, un changement de base appliquée à une paire  $(A, B)$  non commandable peut conduire à la paire  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  où

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On peut passer par les formes de Jordan pour le voir, moyennant d'éventuelles permutations sur les états (voir §6.3 page 246) ou, en utilisant la décomposition de Kálmán qui sera vue ultérieurement (voir §6.8 page 263). Cette réalisation montre bien que la seconde partie de la dynamique n'a aucun lien avec l'entrée. Dans une telle réalisation  $A_1$  est de dimension  $\text{rang}(Q_c)$  et montre donc le « déficit de commandabilité ». Si l'on considère  $q' = [0 \quad z']'$ , où  $z$  est un vecteur propre à gauche de  $A_3$ , on constate facilement que (6.13) est vérifiée, mais pour la paire  $(\tilde{A}, \tilde{B})$ . L'utilisation du changement de base inverse permet de retrouver (6.13).

Par dualité, il est clair qu'une paire de matrices est observable si et seulement s'il n'existe aucun vecteur non nul  $q \in \mathbb{C}^n$  tel que

$$Aq = \lambda q, \quad Cq = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (6.14)$$

Grâce à ces résultats intermédiaires, on est en mesure de formuler le test de Popov-Belevitch-Hautus, parfois appelé « test PBH ».

**Test de Popov-Belevitch-Hautus (PBH)**

La paire de matrices  $(A, B)$  et  $(A, C)$  sont respectivement commandable et observable si et seulement si (respectivement)

$$\begin{aligned} \text{rang} \left( \begin{bmatrix} (\lambda I - A) & B \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \\ \text{et} \\ \text{rang} \left( \begin{bmatrix} C \\ (\lambda I - A) \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

La démonstration est simple. Dans le cas de la commandabilité, toute déficience de rang de la matrice  $[(\lambda I - A) \ B]$  se traduit de manière *équivalente* par la non-existence d'un vecteur non nul  $q \in \mathbb{C}^n$  qui entraîne

$$q' \begin{bmatrix} (\lambda I - A) & B \end{bmatrix} = 0,$$

ce qui implique la vérification de la condition de non-commandabilité (6.13). Pour l'observabilité, il suffit de raisonner par dualité.

Il est important de comprendre qu'une valeur de  $\lambda$  faisant échouer le test PBH de commandabilité (resp. d'observabilité) coïnciderait avec une valeur propre de  $A$  non commandable (resp. non observable).

**Remarque 6.7** *Ce test est assez peu utilisé car il est en général difficile de tester le rang d'une matrice dépendant d'un paramètre  $\lambda$ , ce pour toutes les valeurs de  $\lambda$ . Aussi, même si ce résultat est intéressant d'un point de vue formel ou théorique, il est peut-être abusif de le qualifier de « test ». Le mot « condition », voire les mots « lemme » ou « théorème », seraient sans doute plus appropriés.*

## 6.6. Modèles et structures

Ces notions de commandabilité et d'observabilité n'étaient pas étudiées lors des enseignements relatifs à l'approche fréquentielle. L'objectif de cette partie est d'expliquer pourquoi elles n'étaient pas requises et ce que l'approche temporelle peut apporter de plus que l'approche fréquentielle sur ce point.

### 6.6.1. Différence entre les modèles

On considère le système composite de la figure 6.2, formé de trois systèmes en cascade.

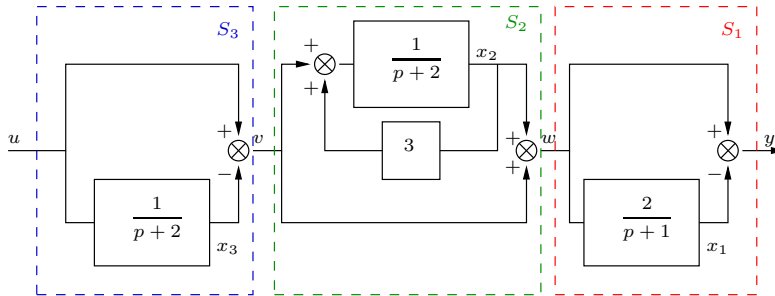


FIGURE 6.2 – Système composite

Une représentation d'état est d'abord établie en utilisant  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  comme variables d'état.

Le sous-système  $S_3$  fait clairement apparaître

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + u.$$

Le sous-système  $S_2$  amène

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + 3x_2 + v = x_2 - x_3 + u.$$

Enfin, le sous-système  $S_1$  conduit à

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2w = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2u.$$

Ces trois équations différentielles permettent, en exprimant parallèlement  $y = -x_1 + w$ , d'écrire la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [-1 \quad 1 \quad -1] x + u \end{cases}$$

Le système est donc d'ordre 3 et a pour modes  $\{-1; 1; -2\}$ . Les matrices de commandabilité et d'observabilité sont

$$Q_c = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} ; \quad Q_o = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Elles sont toutes deux de rang 2 ce qui indiquent qu'il existe un mode non commandable et un mode non observable. En effet, la déficience de rang renseigne quant au nombre de modes non commandables/observables. En revanche, on ne sait si ces modes sont confondus c'est-à-dire si c'est le même mode qui est non commandable et non observable. Pour le savoir, on peut diagonaliser la représentation d'état. En utilisant la matrice de passage

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

une réalisation diagonale possible est la suivante :

$$\Lambda = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = V^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = CV = [ -1 \quad 0 \quad -6 ], \quad \tilde{D} = 1.$$

Cette réalisation diagonale, selon les critères du paragraphe 6.3.1 page 247, fait apparaître que le mode  $(-1)$  est non commandable et que le mode 1 est non observable.

On cherche maintenant à établir l'équation différentielle unique reliant  $u$  et  $y$ . Le sous-système  $S_1$  correspond en fait à un bloc

$$S_1(p) = \frac{p-1}{p+1},$$

ce qui se traduit de manière temporelle, en appliquant  $\mathcal{L}^{-1}$  (cf. §2.1.3 page 34), par

$$\dot{y} + y = \dot{w} - w.$$

Le sous-système  $S_2$  correspond à un bloc

$$S_2(p) = \frac{p}{p-1},$$

ce qui se traduit de manière temporelle par

$$\dot{w} - w = \dot{v}.$$

Enfin, le sous-système  $S_3$  correspond à un bloc

$$S_3(p) = \frac{p+1}{p+2},$$

ce qui se traduit de manière temporelle par

$$\dot{v} + 2v = \dot{u} + u.$$

Ces trois équations différentielles obtenues conduisent à

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \ddot{u} + \dot{u}. \quad (6.16)$$

Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2 qui laisse penser que le système est d'ordre 2. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène associée à (6.16), c'est-à-dire

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$$

est

$$r^2 + 3r + 3 = (r+1)(r+2) = 0, \quad r \in \mathbb{C}.$$

Les racines de cette équation caractéristique sont  $(-1)$  et  $(-2)$  donc l'équation différentielle avec second membre (6.16) est associée aux modes  $(-1)$  et  $(-2)$ . Or, la fonction de transfert globale du système est

$$G(p) = S_1(p)S_2(p)S_3(p) = \frac{p}{p+2}.$$

Elle laisse présumer que le système est d'ordre 1 et que son seul mode est  $-2$ .

Que s'est-il donc passé? La réponse est la suivante : l'équation différentielle a perdu le mode non observable et la fonction de transfert a perdu le mode non commandable. Un tel processus se vérifie toujours.



L'équation différentielle ne représente que la partie observable du système.

La fonction de transfert ne représente que la partie commandable et observable du système.

On constate ici que l'équation d'état est un modèle plus complet que l'équation différentielle unique qui est elle-même un modèle plus complet que la fonction de transfert. Toute réalisation restreinte à la partie commandable et observable d'un système est dite *minimale* (la notion est abordée plus en détails à partir du paragraphe 6.7).

Il doit être clair dans l'esprit du lecteur qu'une fonction de transfert dont les racines du dénominateur sont à partie réelle strictement négative peut laisser penser que le système décrit est asymptotiquement stable alors qu'il peut exister un mode instable qui est non commandable et/ou non observable. Un tel mode apparaîtrait dans une représentation d'état.

### 6.6.2. Systèmes composites

Dans ce paragraphe, il s'agit de voir comment l'assemblage de blocs de transfert simples, en série, en parallèle ou encore en rétroaction : voir §3.8 page 94) peut avoir des conséquences en termes de commandabilité ou d'observabilité du système composite global.

#### 6.6.2.1. Systèmes en série

Soit le système correspondant à la mise en cascade de plusieurs sous-systèmes (schéma-bloc de la figure 6.3). Dans ce cas, le mode  $a$  est non commandable. Il n'apparaît pas dans la fonction de transfert mais est révélé par l'équation différentielle et par une représentation d'état complète.

Si l'on considère maintenant une inversion des blocs telle qu'illustrée sur la figure 6.4, alors le mode  $a$  redevient commandable mais est non observable. Il n'apparaît pas dans la fonction de transfert et n'est pas plus révélé par la résolution de l'équation différentielle.

Soit le système de la figure 6.5. Dans ces deux cas, le mode  $a$  n'est ni com-

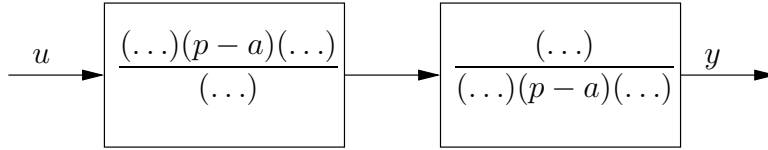


FIGURE 6.3 – mode  $a$  non commandable

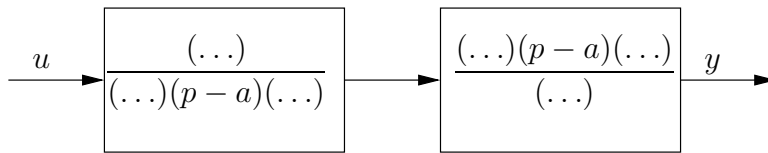


FIGURE 6.4 – mode  $a$  non observable

mandable, ni observable. Il n'est bien évidemment révélé ni par la fonction de transfert, ni par l'équation différentielle.

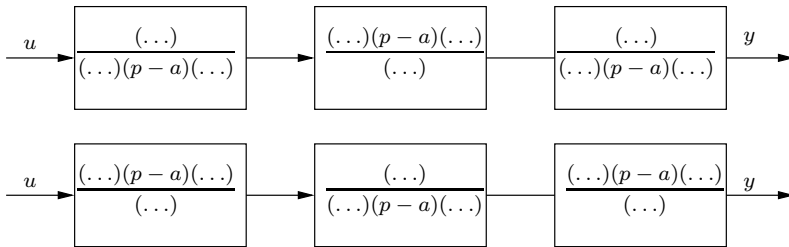


FIGURE 6.5 – mode  $a$  non commandable et non observable

### 6.6.2.2. Systèmes en parallèle

Soient deux sous-systèmes en parallèle comme indiqué sur la figure 6.6. L'association de  $S_1$  et  $S_2$  constitue alors un système commandable (respectivement observable) si  $S_1$  et  $S_2$  sont tous deux commandables et s'ils ne possèdent pas de mode commun. L'hypothèse de commandabilité (resp. d'observabilité)

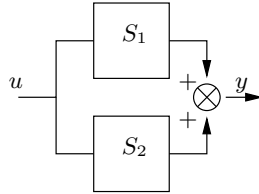


FIGURE 6.6 – Deux systèmes en parallèle

de  $S_1$  et  $S_2$  est bien sûr suffisante mais elle n'est pas nécessaire car dans le cas contraire, si les deux sous-systèmes ont un mode en commun, il se peut que le système global soit tout de même commandable (observable).

### 6.6.2.3. Systèmes en rétroaction

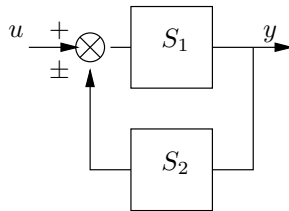


FIGURE 6.7 – Deux systèmes en contre-réaction

Enfin, si  $S_2$  constitue un organe de contre-réaction sur  $S_1$  comme l'illustre la figure 6.7, alors le système global est :

- commandable si la cascade  $S_1S_2$  est commandable ;
- observable si la cascade  $S_2S_1$  est observable.

**Remarque 6.8** Lorsque l'on pratique un asservissement de type PI sur un système de premier ordre par la technique de la compensation de pôle (voir cours sur l'approche fréquentielle), on rend la constante de temps du procédé non commandable. En effet, si le procédé et le régulateur sont respectivement décrits par

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \text{et} \quad R(p) = \frac{A}{p}(1 + \tau p),$$

c'est-à-dire deux systèmes de premier ordre, la chaîne directe  $L(p) = R(p)G(p)$ , qui obéit au cas de la figure 6.3, et qui devrait a priori être de second ordre, par compensation de  $(1 + \tau p)$ , est en réalité de premier ordre :  $L(p) = \frac{AK}{p}$ . C'est un simple intégrateur qui cache le pôle  $(-1/\tau)$ . Pourtant les dynamiques liées à  $\tau$  sont toujours effectives à l'intérieur du système. Or, ceci a une conséquence cruciale en pratique. Si la compensation n'est pas parfaite, par exemple en raison d'une connaissance imprécise de  $\tau$ , l'asservissement peut toujours être efficace. Le pôle  $(-1/\tau)$  au lieu d'être non commandable (donc absolument pas influent sur la réponse du système) est juste faiblement commandable (donc faiblement influent). L'automaticien s'en tire à bon compte et peut du reste ne pas voir l'effet de ladite imprécision. Il y a toutefois une erreur à ne pas commettre : reproduire le même raisonnement pour un pôle « instable » (à partie réelle positive). En effet, on peut appliquer la même technique d'un point de vue strictement mathématique, mais, en pratique, toute imprécision sur la valeur du pôle instable (et il y en a toujours une en pratique) se traduira par une manifestation de cette dynamique instable sur la réponse du système. Même si le pôle est faiblement commandable, son caractère instable le rend influent. Le système bouclé est alors instable.

**Remarque 6.9** Il peut paraître étonnant de ne jamais faire intervenir la transmission directe  $D$  dans ces tests de commandabilité et d'observabilité. Mais puisque'il s'agit d'un lien direct (statique) entre  $u$  et  $y$ , ne faisant donc pas intervenir  $x$ , les propriétés de  $x$  ne sont pas en jeu dans ce lien statique. Il n'y a pas de partie cachée (non commandable ou non observable) dans cette transmission directe.

## 6.7. Réalisation minimale

Cette partie définit la notion de réalisation minimale et ce qu'elle induit sur les concepts de pôles et de stabilité.

### 6.7.1. Définition

Comme on vient de le voir, l'ordre de la représentation d'état n'est pas toujours le même que celui de la fonction de transfert. Tout dépend de la commandabilité et de l'observabilité du modèle d'état. Lorsqu'il est complètement commandable et observable, les deux ordres sont égaux. Dans le cas contraire, on peut cependant restreindre la représentation d'état du système à un sous-vecteur d'état, de dimension maximale, qui soit entièrement commandable et observable.

On appelle *réalisation minimale* ou *irréductible* d'un système LTI toute représentation d'état ne décrivant que la dynamique commandable et observable du système.

### 6.7.2. Réalisation minimale et notion de pôles

Jusqu' alors, il a été opéré à une identification systématique des pôles de la fonction de transfert aux valeurs propres de la matrice d'état. Cette assimilation apparaît maintenant peu rigoureuse.

En effet, soit une réalisation  $(A, B, C, D)$  d'ordre  $n$  d'un système LTI. Soit également une réalisation minimale  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  d'ordre  $\bar{n}$  de ce système. Si le système est entièrement commandable et observable alors les deux réalisations sont de même ordre ( $n = \bar{n}$ ) et les matrices  $A$  et  $\bar{A}$  sont semblables. Les deux réalisations sont alors minimales. S'il existe une partie non commandable ou non observable dans le système, alors  $\bar{n} < n$ . La fonction de transfert admet, entre autres, les deux expressions

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D = \bar{C}(pI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$$

mais est toujours d'ordre  $\bar{n}$ . Ceci conduit tout naturellement, dans le cas où  $\bar{n} < n$ , à comparer le nombre de pôles au cardinal du spectre de la matrice d'état pour constater qu'il n'y a pas nécessairement identité des deux ensembles. Ainsi les valeurs propres de  $\bar{A}$  sont les pôles de  $G(p)$  mais celles de la matrice  $A$  ne le sont pas forcément. En revanche, tout pôle de  $G(p)$  est bien valeur propre des deux matrices. Ceci résulte de la perte de commandabilité ou d'observabilité qui conduit à la compensation de pôles et de zéros dans la fonction de transfert. Il faut donc distinguer pôles de la fonction de transfert et valeurs propres de la matrice d'état. De même il faut faire la nuance entre dénominateur de fonction

de transfert et polynôme caractéristique associé à la matrice dynamique.

Les pôles de la fonction de transfert d'un système sont égaux aux valeurs propres de toute matrice d'état d'une réalisation minimale du système.

Exemple :

Soit la réalisation :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

Une telle réalisation correspond à la fonction de transfert

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B = \frac{(p-1)}{(p-1)(p+1)} = \frac{1}{p+1}$$

d'où il apparaît que la valeur propre 1 n'est, soit pas commandable, soit pas observable puisqu'elle est à la fois pôle et zéro de la fonction de transfert. (En fait, elle n'est ni l'un ni l'autre si l'on se réfère, par exemple, aux critères de Kálmán présentés au paragraphe 6.2 page 240.) On peut construire une réalisation à partir de la fonction de transfert d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = x. \end{cases}$$

Cette réalisation d'ordre 1 est minimale.

### 6.7.3. Réalisation minimale et stabilité

Au paragraphe 5.3.1 page 206, il avait été pris soin, dans les explications relatives à la relation entre BIBO-stabilité et stabilité asymptotique, de préciser que fonction de transfert et modèle d'état étaient de même ordre. Ceci pouvait sembler un peu redondant mais la précision est nécessaire comme le montre l'exemple du paragraphe précédent.

En effet, si l'on considère la fonction de transfert  $G(p) = 1/(p+1)$ , il ne fait pas de doute que ce système de premier ordre ayant un pôle dans le demi-plan gauche

répond à une impulsion par une exponentielle décroissante. Il est BIBO-stable. Toutefois, si l'on applique le critère des racines à la réalisation initiale non minimale, la présence de la valeur propre  $(+1)$  atteste de l'instabilité de ce dernier.

En réalité, tout est une question de minimalité de la réalisation ou si l'on préfère, de commandabilité et d'observabilité. Le pôle  $(+1)$ , parce qu'il n'est ni commandable ni observable, n'est pas sensible à l'entrée du système et n'agit pas sur la sortie. Il est indiscernable dans le comportement entrée/sortie du système et n'altère donc pas la BIBO-stabilité du système. En revanche, il peut engendrer des comportements instables sous l'effet d'une condition initiale  $x(0)$ . L'implication « stabilité asymptotique d'une réalisation entraîne BIBO-stabilité du système associé » vue au chapitre 5, et dont on pouvait supposer qu'elle cachait une équivalence, ne l'est en fait que si la réalisation est minimale.

Ainsi, de même que l'on avait vu qu'il était possible de dire qu'un système est simplement stable de manière interne mais BIBO-instable (donc instable de manière externe), tel l'intégrateur, un système peut également être instable de manière interne et stable de manière externe, à l'instar de l'exemple du paragraphe précédent.

## 6.8. Décomposition de Kalman

Il est possible de trouver une réalisation d'un système linéaire qui fasse apparaître de manière explicite les parties commandable et observable. Le processus qui conduit à une telle réalisation (qui n'est pas unique) est appelé *décomposition de Kálmán* (encore lui !). Cette partie présente et justifie une telle décomposition. Il est d'abord question d'exhiber la partie commandable d'un système, puis, par dualité, d'exhiber la partie observable. Enfin, les deux techniques sont associées pour obtenir la décomposition de Kálmán.

### 6.8.1. Décomposition relative à la commandabilité

Dans ce paragraphe, la décomposition de Kálmán relative à la commandabilité est d'abord présentée, puis elle est justifiée.

Soit un système  $\Sigma$  de réalisation (quelconque)  $(A, B, C, D)$  associée au vecteur d'état  $x$  (cf. équation (3.5) page 71). Soit aussi une famille de vecteurs colonnes  $\{v_{c_i}\}$  engendrant le sous-espace commandable (c.-à-d. la partie des états qui

sont commandables, ou encore, en d'autres termes, le sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  atteignable par une loi de commande). La concaténation en lignes de ces vecteurs s'écrit

$$E_c = [ v_1 \quad \dots \quad v_{r_c} ].$$

Le scalaire  $r_c > 0$  représente le rang de la matrice de commandabilité de  $Q_c$  (voir §6.2.1 page 240), que l'on peut appeler *rang de commandabilité* ou *indice de commandabilité*. Les vecteurs  $v_{c_i}$  peuvent être obtenus facilement, par exemple en prenant les  $r_c$  premières colonnes linéairement indépendantes de  $Q_c$ . Soit aussi la matrice  $E_{\bar{c}}$  dont les colonnes sont  $(n - r_c)$  vecteurs linéairement indépendants entre eux et orthogonaux au vecteur  $v_{c_i}$  de sorte que les colonnes de la matrice

$$T_c = [ E_c \quad E_{\bar{c}} ]$$

constituent une base de  $\mathbb{R}^n$ . En appliquant le changement de base  $x = T_c z_c$ , on obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_c &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} z_c + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [ \tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2 ] z_c + Du. \end{cases} \quad (6.17)$$

La matrice  $\tilde{A}_{22}$  correspond clairement à la dynamique non commandable (elle ne peut subir l'influence de  $u$ ). Si l'on s'intéresse à la fonction de transfert du système, on peut simplifier son expression ainsi,

$$G(p) = D + C(pI - A)^{-1}B = D + \tilde{C}_1(pI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1,$$

ce qui signifie que la réalisation  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1, D)$  est une réalisation commandable. Si l'on note  $\Sigma_c$  le sous-système commandable de  $\Sigma$  associé à cette réalisation, et  $\Sigma_{\bar{c}}$ , le sous-système complémentaire (nécessairement non commandable), la figure 6.8 résume la structure du système  $\Sigma$ .

Cette décomposition est maintenant justifiée. Soit la matrice de commandabilité de Kálmán donnée en (6.2) page 240, dont la forme est néanmoins rappelée ci-après :



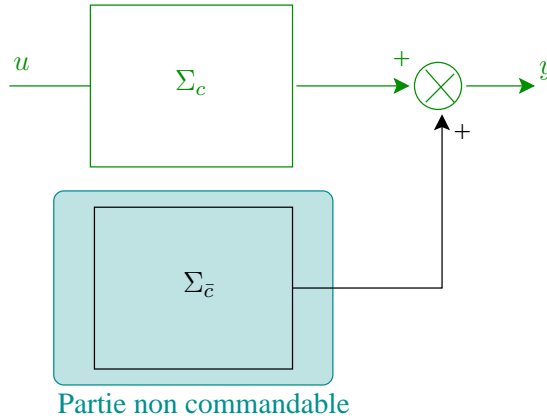


FIGURE 6.8 – Interprétation graphique de la décomposition partielle de Kálmán relative à la commandabilité

$$Q_c = [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B ] .$$

On suppose que  $Q_c$  est de rang  $r_c < n$ , ce qui signifie que la commandabilité est incomplète (sinon, ce n'est pas drôle!). Sans réelle perte de généralité,  $E_c$  est choisie de telle sorte qu'elle contienne les  $r_c$  premières colonnes de  $Q_c$  qui sont considérées comme indépendantes (si ce n'est pas le cas, la justification s'en trouve un peu complexifiée mais le principe reste le même) :

$$E_c = [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{r_c-1}B ] .$$

Soit aussi la matrice  $E_{\bar{c}}$  dont les  $(n - r_c)$  colonnes génèrent le sous-espace non commandable. Réunies avec les colonnes de  $E_c$ , elles permettent de constituer une base de  $\mathbb{R}^n$ . La matrice  $T_c = [ E_c \quad E_{\bar{c}} ]$  est donc de rang plein.

La matrice  $Q_{c_{r_c+1}} = [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{r_c}B ]$  contient nécessairement une ligne dépendante des autres sinon, l'indice de commandabilité serait  $r_c + 1$  et non  $r_c$ . Donc, quel que soit le vecteur  $q = [q_1, \dots, q_{r_c+1}]' \in \mathbb{R}^{r_c+1}$ , il existe  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{r_c}$  tels que

$$Bq_1 + ABq_2 + \dots + A^{r-1}Bq_{r_c} + A^{r_c}Bq_{r_c+1} = B\mu_1 + AB\mu_2 + \dots + A^{r_c-1}B\mu_{r_c}$$

$$\Leftrightarrow ABq_2 + \dots + A^{r-1}Bq_{r_c} + A^{r_c}Bq_{r_c+1} = B(\mu_1 - q_1) + AB\mu_2 + \dots + A^{r_c-1}B\mu_{r_c}$$

$$\Leftrightarrow AE_c \underbrace{\begin{bmatrix} q_2 \\ \vdots \\ q_{r_c} \\ q_{r_c+1} \end{bmatrix}}_{\xi} = AE_c \xi = E_c \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1 - q_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{r_c} \end{bmatrix}}_{\zeta(\xi)} = E_c \zeta(\xi).$$

Puisque  $q$  est quelconque,  $\xi$  l'est aussi. Ainsi,

$$\forall \xi, \quad \exists \zeta(\xi) : AE_c \xi = E_c \zeta(\xi).$$

De plus, soit une matrice  $Z$  telle que  $ZE_c = I$  (par exemple, la pseudo-inverse de Moore-Penrose  $Z = E_c^+$  (cf. §A.1.12.4 page 654) qui est facile à calculer puisque  $E_c$  est de rang plein). Le vecteur  $\zeta(\xi)$  peut être pris de la forme  $M\xi$  où  $M = ZAE_c$ . En effet,

$$M\xi = ZAE_c \xi = ZAE_c \xi = Z\zeta(\xi) = \zeta(\xi).$$

En outre, soit la décomposition de  $T_c^{-1}$  :

$$T_c^{-1} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad X \in \mathbb{R}^{r_c \times n}.$$

De  $T_c^{-1}T_c = I_n$ , il vient  $XE_c = I_{r_c}$  et  $YE_c = 0$ . Par ailleurs, de  $YE_c = 0$ , on déduit que  $YB = 0$ . Si l'on applique maintenant le changement de base  $x = T_c z_c$ , en décomposant  $z$  en  $z = [z'_{c_1} \ z'_{c_2}]'$  où  $z_{c_1} \in \mathbb{R}^{r_c}$ , il vient

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu = AT_c z_c + Bu = AE_c z_{c_1} + AE_{\bar{c}} z_{c_2} + Bu \\ &\Leftrightarrow \dot{x} = E_c M z_{c_1} + AE_{\bar{c}} z_{c_2} + Bu, \\ &\Leftrightarrow T_c^{-1} \dot{x} = \dot{z}_c = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} (E_{c_1} M z_{c_1} + AE_{\bar{c}} z_{c_2} + Bu) \\ &\Leftrightarrow \dot{z}_c = \begin{bmatrix} M & XAE_{\bar{c}} \\ 0 & YAE_{\bar{c}} \end{bmatrix} z_c + \begin{bmatrix} XB \\ 0 \end{bmatrix} u, \end{aligned}$$

que l'on peut récrire

$$\dot{z}_c = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} z_c + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

L'équation de sortie s'écrit plus simplement

$$y = Cx + Du = CT_c z_c + Du = \tilde{C} z_c + Du.$$

En décomposant  $\tilde{C}$  en  $\tilde{C} = [ \tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2 ]$  où  $\tilde{C}_1 \in \mathbb{R}^{r_c}$ , il vient

$$y = [ \tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2 ] z_c + Du.$$

### 6.8.2. Décomposition relative à l'observabilité

En rappelant que l'observabilité est le concept dual de celui de commandabilité, il devient relativement aisé de justifier le développement suivant.

La réalisation  $(A, B, C, D)$  du système  $\Sigma$ , associée à l'état  $x$ , est supposée complètement observable. Son *indice d'observabilité* ou *rang d'observabilité* est égal à

$$r_o = \text{rang}(Q_o),$$

où  $Q_o$  est la matrice de Kálmán d'observabilité définie en (6.7) page 243.

Soit  $T_o$  une matrice de passage dont les  $r_o$  premières lignes sont constituées de  $r_o$  lignes linéairement indépendantes de  $Q_o$  auxquelles  $(n - r_o)$  autres lignes viennent se concaténer en colonne de sorte que l'image de  $T_o$  ne soit autre que  $\mathbb{R}^n$ . Le changement de base  $z_o = T_o x$  conduit alors à

$$\begin{cases} \dot{z}_o &= \begin{bmatrix} \check{A}_{11} & 0 \\ \check{A}_{21} & \check{A}_{22} \end{bmatrix} z_o + \begin{bmatrix} \check{B}_1 \\ \check{B}_2 \end{bmatrix} u \\ y &= [ \check{C}_1 \quad 0 ] z_o + Du. \end{cases} \quad (6.18)$$

La matrice  $\check{A}_{22}$  correspond clairement à la dynamique non observable (elle ne peut être perçue au travers de la sortie  $y$ ). Si l'on s'intéresse à la fonction de transfert du système, on peut simplifier son expression ainsi,

$$G(p) = D + C(pI - A)^{-1}B = D + \check{C}_1(pI - \check{A}_{11})^{-1}\check{B}_1,$$

ce qui signifie que la réalisation  $(\check{A}_{11}, \check{B}_1, \check{C}_1, D)$  est une réalisation observable. Si l'on note  $\Sigma_o$  le sous-système observable de  $\Sigma$  associé à cette réalisation, et  $\Sigma_{\bar{o}}$ , le sous-système complémentaire (nécessairement non observable), la figure 6.9 résume la structure du système  $\Sigma$ .

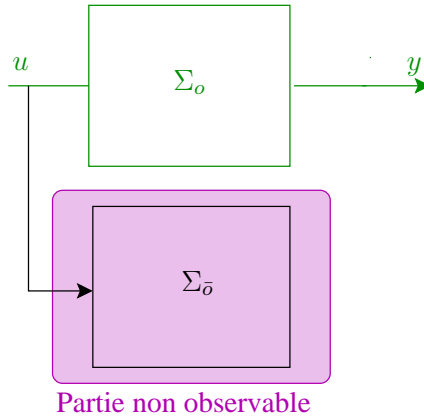


FIGURE 6.9 – Interprétation graphique de la décomposition partielle de Kálmán relative à l’observabilité

### 6.8.3. Décomposition complète

Le système  $\Sigma$ , de réalisation  $(A, B, C, D)$  associée à l’état  $x$ , est supposé tel que les quatre types d’états existent (commandable et observable, commandable et non observable, observable et non commandable, ni l’un ni l’autre).

Soit  $Q_c$  la matrice de Kálmán de commandabilité (de rang  $r_c$ ) de la réalisation  $(A, B, C, D)$ .

Soit  $Q_o$  la matrice de Kálmán d’observabilité (de rang  $r_o$ ) de la réalisation  $(A, B, C, D)$ .

On se réfère aux notations des deux paragraphes précédents pour définir ce qui suit.

- Soit  $\mathbb{S}_c$ , le sous-espace commandable, généré par les colonnes de  $E_c$  qui est donc l’image de  $Q_c$ .
- Soit  $\mathbb{S}_{\bar{o}}$ , le sous-espace non-observable, qui est donc le noyau à droite de  $Q_o$ , également noté  $\text{Ker}(Q_o)$ .
- Soit  $\mathbb{S}_{c\bar{o}}$  défini par l’intersection

$$\mathbb{S}_{c\bar{o}} = \mathbb{S}_c \cap \mathbb{S}_{\bar{o}}.$$

- Soient
  - $E_{c\bar{o}}$  une matrice dont les colonnes constituent une base de  $\mathbb{S}_{c\bar{o}}$ ,

- $E_{c\bar{o}}$  une matrice dont les colonnes constituent une base du complément de  $\mathbb{S}_{c\bar{o}}$  dans  $\mathbb{S}_c$ ,
  - $E_{\bar{c}\bar{o}}$  une matrice dont les colonnes constituent une base du complément de  $\mathbb{S}_{c\bar{o}}$  dans  $\mathbb{S}_{\bar{o}}$ ,
  - $E_{\bar{c}o}$  une matrice dont les colonnes constituent une base du complément de  $\mathbb{S}_{c\bar{o}} \cup \mathbb{S}_{\bar{o}}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , que l'on peut noter  $\mathbb{S}_{\bar{c}o}$  et qui représente le sous-espace d'état non commandable mais observable.
- Soit la matrice de passage de passage

$$T = [ E_{c\bar{o}} \quad E_{\bar{c}\bar{o}} \quad E_{\bar{c}o} \quad E_{\bar{c}\bar{o}} ] .$$

Le changement de variable  $x = Tz$  conduit à une réalisation qui est une *forme canonique de Kálmán* :

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [ C_1 \quad 0 \quad C_3 \quad 0 ] z + Du. \end{cases} \quad (6.19)$$

Il est possible de construire  $T$  de façon un peu différente et d'obtenir une autre forme canonique de Kálmán :

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_3 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [ C_1 \quad C_2 \quad 0 \quad 0 ] z + Du. \end{cases} \quad (6.20)$$

Ceci montre que la décomposition de Kálmán n'est pas unique. Toutefois, dans

les deux cas, une réalisation minimale est  $(A_{11}, B_1, C_1, D)$  et la fonction de transfert de  $\Sigma$  vérifie :

$$G(p) = D + C(pI - A)^{-1}B = D + C_1(pI - A_{11})^{-1}B_1.$$

Si l'on note  $\Sigma_{co}$ , le sous-système commandable et observable,  $\Sigma_{\bar{c}o}$  le sous-système non commandable mais observable,  $\Sigma_{c\bar{o}}$  le sous-système commandable mais non observable, et enfin  $\Sigma_{\bar{c}\bar{o}}$  le sous-système non commandable et non observable, alors, dans le cas de la décomposition (6.19), ces sous-systèmes répondent aux équations suivantes :

$$\Sigma_{co} : \begin{cases} \dot{z}_{co} = A_{11}z_{co} + A_{13}z_{\bar{c}o} + B_1u, \\ y_1 = C_1z_{co} + Du, \end{cases}$$

$$\Sigma_{\bar{c}o} : \begin{cases} \dot{z}_{\bar{c}o} = A_{33}z_{\bar{c}o}, \\ y_2 = C_3z_{\bar{c}o}, \end{cases}$$

$$\Sigma_{c\bar{o}} : \dot{z}_{c\bar{o}} = A_{21}z_{co} + A_{22}z_{c\bar{o}} + A_{23}z_{\bar{c}o} + A_{24}z_{\bar{c}\bar{o}} + B_2u,$$

$$\Sigma_{\bar{c}\bar{o}} : \dot{z}_{\bar{c}\bar{o}} = A_{43}z_{\bar{c}o} + A_{44}z_{\bar{c}\bar{o}}.$$

Dans le cas de la décomposition (6.20), ils répondent aux équations :

$$\Sigma_{co} : \begin{cases} \dot{z}_{co} = A_{11}z_{co} + A_{12}z_{\bar{c}o} + B_1u, \\ y_1 = C_1z_{co} + Du, \end{cases}$$

$$\Sigma_{\bar{c}o} : \begin{cases} \dot{z}_{\bar{c}o} = A_{22}z_{\bar{c}o}, \\ y_2 = C_2z_{\bar{c}o}, \end{cases}$$

$$\Sigma_{c\bar{o}} : \dot{z}_{c\bar{o}} = A_{31}z_{co} + A_{32}z_{c\bar{o}} + A_{33}z_{\bar{c}o} + A_{34}z_{\bar{c}\bar{o}} + B_3u,$$

$$\Sigma_{\bar{c}\bar{o}} : \dot{z}_{\bar{c}\bar{o}} = A_{42}z_{\bar{c}o} + A_{44}z_{\bar{c}\bar{o}}.$$

Dans les deux cas, il faut ajouter l'équation exprimant la sortie totale du système, à savoir

$$y = y_1 + y_2,$$

et les quatre sous-systèmes sont interconnectés selon la figure 6.10.

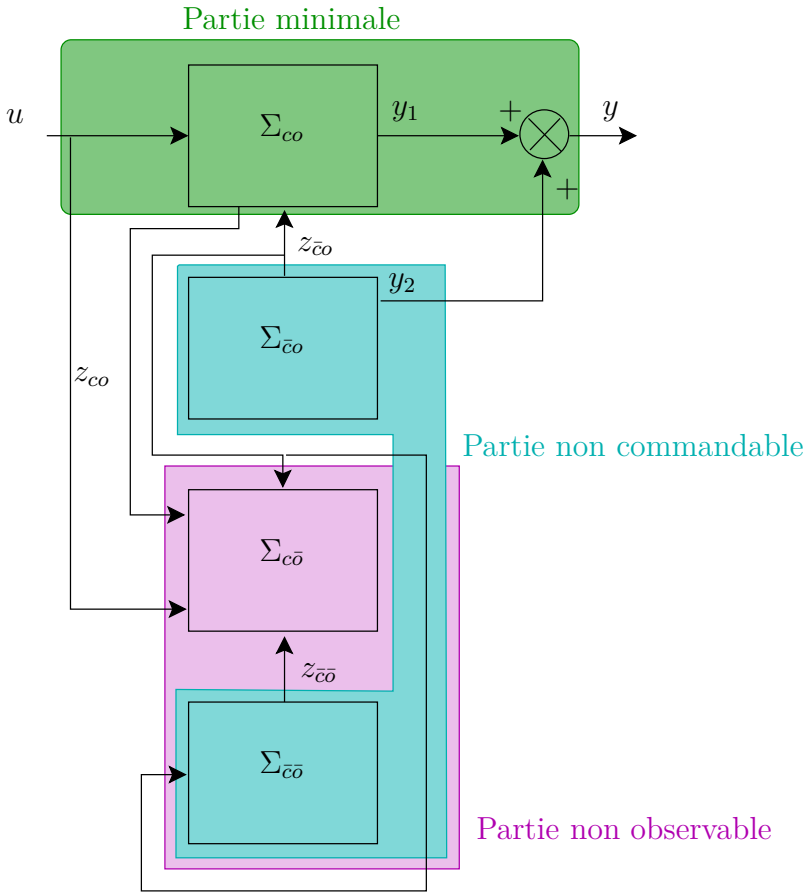


FIGURE 6.10 – Schéma synthétique de la décomposition de Kálmán

Exemple :

Soit la réalisation  $(A, B, C, D)$  donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$C = [ 3 \quad 2 \quad 4 \quad 4 ], \quad D = 1.$$

Les matrices de Kálmán de commandabilité et d'observabilité sont calculées :

$$Q_c = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & -12 & -24 \\ 4 & 7 & 13 & 25 \end{bmatrix} \Rightarrow r_c = \text{Rang}(Q_c) = 2 ;$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & 6 \\ 7 & 2 & 8 & 8 \\ 9 & 2 & 10 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow r_o = \text{Rang}(Q_o) = 2.$$

Calcul de  $E_{c\bar{o}}$  et de  $E_{co}$  :

En pratique, il faut déterminer une matrice  $E_{\bar{o}}$  dont les colonnes génèrent  $\mathbb{S}_{\bar{o}}$ , et montrer qu'il existe trois vecteurs  $x, z, q$  tels que  $E_{\bar{o}}z = E_cq = x$ . C'est une façon d'exhiber un vecteur de la base de  $\mathbb{S}_{c\bar{o}}$ .

Ici, de façon plus simple, on constate que si l'on prend au départ, pour  $E_c$ , la matrice constituée des deux dernières colonnes (indépendantes) de  $Q_c$ , à savoir

$$E_c = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -12 & -24 \\ 13 & 25 \end{bmatrix},$$

et si l'on prend  $y = [0 \ 0 \ (-1/12) \ (1/12)]'$  alors il vient

$$Q_c y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = E_c q, \quad \text{où} \quad q = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



En fait,  $x = Q_c y = E_c q \in \mathbb{S}_c$  est tel que  $Q_o x = 0$ , ce qui signifie bien qu'il existe  $q$  et  $z$  tels que  $E_c q = E_{\bar{o}} z$  (le fait que  $x$  soit dans le noyau de  $Q_o$  montre qu'il appartient à  $\mathbb{S}_{\bar{o}}$ ).

Si l'on considère par ailleurs le vecteur  $v$  défini par la première colonne de  $Q_c$ . Ce vecteur appartient évidemment à  $\mathbb{S}_c$ , il est indépendant de  $x$  et n'est pas dans le noyau à droite de  $Q_o$ . Ceci signifie qu'il est dans l'espace commandable et observable. Le choix  $E_{c_o} = v$  et  $E_{c_{\bar{o}}} = x$  permet de constituer une nouvelle matrice

$$E_c = [ E_{c_o} \quad E_{c_{\bar{o}}} ]$$

dont les colonnes génèrent  $\mathbb{S}_c$  de dimension  $r_c = 2$  ce qui signifie qu'il est inutile de chercher d'autres éléments dans  $\mathbb{S}_{c_o}$  ou  $\mathbb{S}_{c_{\bar{o}}}$  (ce sont des sous-espaces de dimension 1).

Calcul de  $E_{\bar{c}_o}$  et de  $E_{\bar{c}_{\bar{o}}}$  :

Soit le vecteur  $w = [-2 \ -1 \ 2 \ 0]'$ . La matrice  $[E_c \ w]$  est de rang plein 3. En outre,  $Q_o w = 0$ . Cela signifie que  $w \in \mathbb{S}_{\bar{c}_{\bar{o}}}$ . Si l'on complète cette base de  $\mathbb{R}^4$  avec  $\nu = [1 \ 0 \ 0 \ 0]'$  en notant que  $Q_o \nu \neq 0$ , alors le choix  $E_{\bar{c}_o} = \nu$ ,  $E_{\bar{c}_{\bar{o}}} = w$  permet de construire la matrice de passage  $T$  :

$$T = [ E_{c_o} \quad E_{c_{\bar{o}}} \quad E_{\bar{c}_o} \quad E_{\bar{c}_{\bar{o}}} ] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le changement de base  $x = Tz$  conduit donc à la réalisation canonique de Kálmán  $(A_K, B_K, C_K, D_K)$  obéissant à la structure (6.19) page 269 :

$$A_K = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_K = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_K = CT = [ 1 \ 0 \ 3 \ 0 ], \quad D_K = D = 1.$$

La réalisation minimale est donnée par  $(1, 1, 1, 1)$ . Ce système est donc instable.

Cette procédure peut se systématiser à l'aide d'un logiciel tel que MATLAB<sup>®</sup>.

Enfin, à titre de remarque, il est facile de vérifier que la décomposition de Kálmán n'est pas unique en utilisant, à la place de  $T$ , la matrice de passage  $T_{\text{bis}}$  telle que

$$T_{\text{bis}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elle conduit à la réalisation canonique de Kálmán :

$$A_{K\text{bis}} = T_{\text{bis}}^{-1}AT_{\text{bis}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{K\text{bis}} = T_{\text{bis}}^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{K\text{bis}} = CT_{\text{bis}} = [1 \ 0 \ 2 \ 0], \quad D_{K\text{bis}} = D = 1.$$

On retrouve la même réalisation minimale  $(1, 1, 1, 1)$ .

---

## 6.9. Quelques éléments biographiques

---

### Biographie 6.1 Vasile Mihai Popov (1928-) : *théoricien roumain des systèmes.*

*Ingénieur de l'Institut polytechnique de Bucarest en 1950, il y fut professeur assistant quelques années avant de rejoindre l'Institut pour l'énergie de l'Académie roumaine des sciences où il devint professeur en 1968. Il quitta la Roumanie pour les États-Unis d'Amérique, notamment les universités de Berkeley, Stanford, Maryland College Park, ainsi que celle de Floride, état où il est aujourd'hui retraité.*



*Il est surtout connu pour avoir établi un critère de stabilité des systèmes dynamiques non linéaires appelé « critère de Popov ». Mais il est également le père de la notion d'hyperstabilité, utile à l'étude des systèmes non linéaires. Il obtint aussi des résultats quand à l'équivalence de critères temporels (espace d'état) et fréquentiels (matrices de transfert) de stabilité des systèmes. Ces résultats contribuèrent, avec des travaux d'autres auteurs, à ce que l'on appelle aujourd'hui le lemme de Kálmán-Yakoubovitch-Popov ou lemme de Kálmán-Yakoubovitch-Popov-Anderson<sup>5</sup> (Encore ce Kálmán !), très largement célébré en commande avancée des systèmes linéaires.*

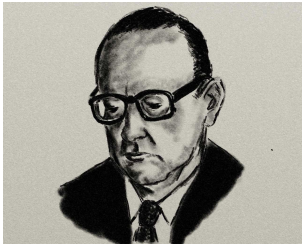
---

---

5. une synthèse de divers travaux de Rudolf Emil Kálmán (voir biographie en annexe I.2 page 777), de Vladimir Andreevitch Yakoubovitch, théoricien russe de l'Automatique (1926-2012), de Vasile Mihai Popov, plus tard unifié dans une formulation unique par Brian David Outram Anerson, mathématicien australien spécialiste de l'Automatique et du génie électrique (1941-).

---

**Biographie 6.2** Vitold Belevitch (1921-1999) : *mathématicien et ingénieur belge d'origine russe.*



*Il naquit en Finlande alors que ses parents fuyaient Saint-Pétersbourg et la révolution bolchévique. Si sa mère parvint à fuir en l'emmenant, son père fut déporté en Sibérie où il mourut. V. Belevitch put suivre des études francophones en Belgique. En 1942, il obtint un diplôme d'ingénieur en génie mécanique et en génie électrique à l'Université catholique de Louvain. Il y obtint un doctorat de Sciences*

*appliquées trois ans plus tard. Il travailla pour diverses compagnies de télécommunications en Belgique (Bell, ITT, etc.) où il appliqua la théorie des circuits, notamment à la conception de calculateurs. En 1963, il rejoignit un laboratoire de recherche de la société Philips à Eindhoven aux Pays-Bas. Il prit sa retraite en 1984.*

*Au long de sa carrière, il eut la volonté de développer des théories mathématiques qu'il appliqua à quelques domaines de prédilection :*

- la théorie des circuits ;*
  - la conférence téléphonique (il introduisit notamment la notion de « matrice conférence ») ;*
  - la théorie de l'information (avec des applications à la cybernétique et, fort de son multi-linguisme, à la linguistique) ;*
  - l'Automatique et notamment le test PBH (cf. §6.5 page 251).*
- 

Malo L. J. Hautus, professeur au département de mathématiques et d'informatique à l'Université technique d'Eindhoven (TUE), est toujours en activité et continue de s'intéresser, entre autres, à l'observabilité des systèmes (souvent plus complexes que ceux étudiés ici), à la théorie des opérateurs pour l'Automatique, etc.

L'origine du test PBH (cf. §6.5 page 251) remonte en fait aux travaux initiaux de Elmer Grant Gilbert<sup>6</sup>, en 1963, qui se limitaient à des formes diagonalisables.

---

6. ingénieur en aérospatial états-unien, retraité de l'Université du Michigan (1930-).

Son critère fut généralisé d'abord par Popov (1966), puis par Belevitch (1968) et enfin par Hautus (1969).

Pour une biographie de R. E. Kálmán, le lecteur peut consulter l'annexe I.2 page 777.

## 6.10. Exercices

### 6.10.1. Un exo à tout faire

Soit le modèle académique ci-après :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = [1 \ 1 \ 0] x. \end{cases} \quad (6.21)$$

Questions :

- Etudier sa commandabilité et son observabilité en utilisant les critères de Kálmán.
- Idem en utilisant le critère réservé aux formes de Jordan.
- Idem en calculant les grammians.
- Idem en utilisant le test PBH (Popov-Belevitch-Hautus).
- Calculer la fonction de transfert correspondante. Quel constat peut-on faire ? Expliquer.
- Quel serait l'ordre d'une unique équation différentielle (en  $u$  et  $y$ ) caractérisant le même comportement entrée-sortie ?

L'équation de sortie est maintenant modifiée :

$$y = [1 \ 0 \ 0] x.$$

Questions :

- Répondre aux mêmes questions que précédemment mais en déterminant explicitement l'équation différentielle.
- Donner une décomposition complète de Kálmán.

### 6.10.2. Décomposition de Kálmán

Soit la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -8 & -4 \\ 4 & 7 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = [ 2 \ 3 \ 1 ] x. \end{cases} \quad (6.22)$$

Questions :

- Déterminer un changement de base permettant d'obtenir une décomposition complète de Kálmán à partir de cette réalisation.
- Poursuivre les calculs jusqu'à obtention de la forme canonique correspondante.
- Donner une réalisation minimale de la représentation d'état.
- Quelle est la fonction de transfert associée ?
- Peut-on faire une remarque en rapport avec l'exercice précédent ?

**6.10.3. Retour au chapitre 4**

Soit le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, & B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C = [ -1 \ 1 ], & D = 0. \end{cases}$$

qui avait déjà été proposé à l'exercice 4.8.2, page 185. À la remarque 4.3 page 192, il avait été noté que la réponse indicielle de ce modèle de deuxième ordre coïncidait avec l'expression de la réponse indicielle d'un modèle de premier ordre.

Question :

- Expliquer ce paradoxe.

## 6.11. Correction des exercices

### 6.11.1. Exo à tout faire

La matrice de commandabilité de Kálmán (voir § 6.2.1 page 240) est égale à

$$Q_c = [ B \quad AB \quad A^2B ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice n'est clairement pas de rang plein puisqu'elle comporte une ligne nulle, symptomatique d'au moins une valeur propre nulle. Elle n'est en fait que de rang 2 ce qui signifie que l'état n'est pas entièrement commandable.

La matrice d'observabilité de Kálmán (voir § 6.2.2 page 242) est égale à

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est de plein rang 3, ce qui signifie que le système est entièrement observable.

Pour appliquer les critères propres aux formes de Jordan, il n'y a pas, dans le cas présent, de transformation préalable à opérer. En effet, la réalisation proposée est déjà une forme de Jordan dans laquelle apparaissent une valeur propre simple égale à (-1) et une valeur propre égale à (1), double au sens de la multiplicité algébrique mais simple au sens de la multiplicité géométrique (un seul bloc de Jordan). La variable d'état  $x_1$  est donc, dans cette base, associée directement à la valeur propre (-1) alors que les variables d'état  $x_2$  et  $x_3$  sont associées à la valeur propre double (1).

La composante non nulle du vecteur  $B$  montre, selon les critères du paragraphe 6.3 page 246, que la valeur propre double (1) est commandable. En revanche, la valeur propre (-1) ne l'est pas. Le signal de commande n'a aucun effet sur l'état  $x_1$ .

Les critères duaux présentés au paragraphe 6.3 montrent que tout



l'état est observable (on peut dire que les deux pôles sont observables).

Il est impossible de calculer les grammians de commandabilité et d'observabilité  $W_c$  et  $W_o$ . En effet, les équations de Liapounov qui permettent d'obtenir  $W_c$  et  $W_o$  (cf. §6.4 page 248) n'admettent d'unique solution que lorsque le système est asymptotiquement stable. Or, le système étudié présentant un pôle égal à (1), il est instable. Il existe des extensions de la notion de grammians au cas des systèmes instables mais elles sont assez sophistiquées, requièrent des connaissances plus avancées et, à l'heure où ces lignes sont écrites, ces extensions relèvent plus de la recherche que de la diffusion d'un savoir mature.

En ce qui concerne le test PBH (Popov-Belevitvh-Hautus : cf. §6.5 page 251), il peut, comme il a été mentionné, se révéler parfois un peu compliqué puisqu'il s'agit de tester une condition devant être satisfaite quel que soit un paramètre  $\lambda$  (donc *a priori* une infinité de tests). Cependant, dans le cas présent, ce test permet de tirer les mêmes conclusions que précédemment. En effet soit la matrice

$$\left[ \lambda I - A \mid B \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} \lambda + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 1 \end{array} \right].$$

Cette matrice doit nécessairement être de rang plein quelle que soit la valeur de  $\lambda$  pour que le système soit commandable. Or ce n'est pas le cas. En effet, la première ligne de la matrice s'annule pour  $\lambda = -1$  donc le test PBH permet de conclure à la non commandabilité. On peut remarquer que la valeur de  $\lambda$  qui infirme la commandabilité est celle du pôle non commandable... Tout se retrouve!

De façon duale, soit la matrice

$$\left[ \frac{C}{\lambda I - A} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{array} \right].$$

La sous-matrice constituée des lignes  $l_1$ ,  $l_3$  et  $l_4$  admet pour déterminant  $(\lambda - 1)^2$ . Elle est donc de plein rang 3 pour tout  $\lambda \neq 1$ . Or, si  $\lambda = 1$ , la sous-matrice matrice constituée des lignes  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  admet

pour déterminant la valeur 2. Elle est donc de rang 3. Donc le rang de la matrice est plein quel que soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  et le système est complètement observable.

La fonction de transfert du système est donnée par

$$G(p) = D + C(pI - A)^{-1}B =$$

$$\Leftrightarrow G(p) = 0 + [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} p+1 & 0 & 0 \\ 0 & p-1 & -1 \\ 0 & 0 & p-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $(pI - A)$  est bloc-diagonale (à deux blocs); elle est donc facile à inverser :

$$G(p) = [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} (p+1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (p-1)^{-1} & (p-1)^{-2} \\ 0 & 0 & (p-1)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

La réalisation initiale est d'ordre 3 mais cette fonction de transfert n'est que d'ordre 2 car la valeur propre (-1) de  $A$ , qui est non-commandable, n'apparaît pas comme pôle dans cette fonction de transfert (cf. §6.6 page 253).

Si l'on établissait une équation différentielle en  $u$  et  $y$  pour décrire ce comportement entrée-sortie, elle serait d'ordre 3 car l'équation différentielle rend compte de l'ensemble de la dynamique observable (cf. §6.6 page 253).

L'équation de sortie est maintenant modifiée :

$$y = [1 \quad 0 \quad 0].$$

La matrice de commandabilité de Kálmán est inchangée et le système n'est toujours pas commandable. En revanche, la matrice d'observabilité de Kálmán est modifiée :

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est clairement de rang 1 et le système n'est donc pas complètement observable. La déficience de rang étant de deux, il paraît logique de penser que le pôle double à 1 n'est plus observable. De fait, c'est ce que confirme l'application des critères associées aux formes de Jordan. En résumé, dans cette réalisation, le pôle simple (-1) n'est pas commandable et le pôle double (1) n'est pas observable.

Le système n'étant pas asymptotiquement stable, il n'est toujours pas possible de faire le calcul des grammians et de conclure quoi que ce soit par ce moyen.

Pour ce qui concerne le test PBH, les conclusions quant à la commandabilité sont les mêmes que pour la réalisation précédente. Le test d'observabilité revient à tester le rang de

$$\left[ \begin{array}{c} C \\ \lambda I - A \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{array} \right].$$

Comme pour la réalisation précédente, la sous-matrice constituée des lignes  $l_1$ ,  $l_3$  et  $l_4$  admet pour déterminant  $(\lambda - 1)^2$ . Elle est donc de rang 3 pour tout  $\lambda \neq 1$ . Mais pour  $\lambda = 1$ , la matrice globale présente une colonne nulle et ne peut donc être de plein rang. Le système n'est donc pas complètement observable. C'est la valeur du pôle non observable, à savoir 1, qui fait échouer le test... Décidément, tout se retrouve!

En reprenant le calcul de la fonction de transfert, la nouvelle instance de la matrice d'observation  $C$  conduit simplement à

$$G(p) = 0.$$

En effet, la fonction de transfert ne traduit que le comportement entrée-sortie associé aux dynamiques commandables et observables. Or aucune des trois valeurs propres n'est à la fois commandable et observable. En d'autres termes, la commande  $u$  ne peut exciter que le pôle (-1) mais ce dernier n'est pas observable en regardant les sorties. Il n'y a donc pas de relation entre l'entrée et la sortie dans ce système.

Si l'on devait établir une modélisation de ce comportement entrée-sortie sous forme d'une équation différentielle unique en  $u$  et  $y$ , cette dernière serait d'ordre 1 puisque seul l'état  $x_1$  est observable (cf. §6.6 page 253). Elle est en réalité assez facile à obtenir, puisqu'en remarquant que  $y = x_1$ , la première ligne de la représentation d'état donne la dynamique du seul état observable  $y$ , à savoir

$$\dot{y} = -y.$$

La solution d'une telle équation est de la forme

$$y = Ke^{-t}$$

où  $K$  est une constante qui ne peut être déterminée en l'absence de condition initiale sur  $y$ . Le fait remarquable est que cette équation différentielle ne dépend pas de  $u$ , ce qui s'explique par la non-commandabilité de l'état observable et confirme l'absence de lien entre l'entrée et la sortie.

En fait, la réalisation initiale est une forme de Kálmán. Pour le voir plus simplement, il suffit de la modifier légèrement en réordonnant simplement le vecteur d'état en  $x = [x_2 \ x_3 \ x_1]'$  de manière à instancier l'équation (6.19) ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] x + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] u \\ \phantom{\dot{x}} = \left[ \begin{array}{cc|c} A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{33} \end{array} \right] x + \left[ \begin{array}{c} B_2 \\ 0 \end{array} \right] u, \\ y = [ 0 \ 0 \ 1 ] x + 0u \\ \phantom{y} = [ 0 \ | \ C_3 ] x + Du. \end{array} \right.$$

Dans cette décomposition de Kálmán, la réalisation minimale se résume à  $D = 0$ . Les matrices  $A_{11}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{24}$ ,  $A_{43}$ ,  $A_{44}$  et  $B_1$  sont vides. Les sous-systèmes  $\Sigma_{co}$  et  $\Sigma_{\bar{c}\bar{o}}$  n'existent pas.

Une autre particularité de cette réalisation, liée au fait qu'elle est une forme de Jordan, est que la matrice  $A_{23}$  est nulle.

### 6.11.2. Décomposition de Kálmán

Toute la résolution de cet exercice se réfère au paragraphe 6.8 page 263.

La matrice de commandabilité de Kálmán est égale à

$$Q_c = [ B \quad AB \quad A^2B ] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

Cette matrice n'est pas de rang plein ( $\det(Q_c) = 0$ ). Les deux premières colonnes sont indépendantes donc elle est de rang 2. Il y aura donc un sous-système commandable et un autre non commandable. Le sous-espace d'état commandable est de dimension 2 alors que le sous-espace d'état non commandable est de dimension 1.

La matrice d'observabilité de Kálmán est égale à

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Son déterminant est égal à 4 donc elle est de rang plein et le système est entièrement observable. Il ne comprend donc pas de sous-système non observable.

Ainsi, une matrice de passage permettant de trouver une décomposition de Kálmán peut être

$$T = [ E_c \quad E_{\bar{c}} ].$$

Pour déterminer  $E_c$ , il suffit de choisir deux colonnes indépendantes de  $Q_c$  (puisque  $\text{rang}(Q_c) = 2$ ). Le choix se porte ici sur les deux premières colonnes de  $Q_c$  à savoir

$$E_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour déterminer  $E_{\bar{c}}$ , il suffit de choisir un vecteur colonne qui soit linéairement indépendante de  $E_c$  et qui ne soit pas dans le noyau à droite de  $Q_o$  (ça tombe bien,  $Q_o$  étant de rang plein, son noyau à droite se réduit au vecteur nul!). Le choix se porte sur

$$E_{\bar{c}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

qui conduit à la matrice de passage

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

qui est donc bien non singulière ( $\det(T) = -1$ ).

Ainsi les quatre matrices de la nouvelle réalisation sont

$$A_K = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 4 & -9 & -10 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_K = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_K = CT = [ -1 \quad 2 \quad 3 ], \quad D_K = D = 0.$$

Il s'agit bien d'une décomposition complète conforme à l'équation (6.19 page 269) mais qui se réduit en fait à une décomposition de Kálmán relative à la commandabilité telle que donnée par la formule (6.17 page 264) avec

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} -10 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{22} = -1,$$

et

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_1 = [ -1 \quad 2 ], \quad \tilde{C}_2 = 3, \quad D = 0.$$

À partir de cette décomposition de Kálmán, il est possible d'extraire une réalisation minimale :

$$(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1, D) = \left( \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, [ -1 \quad 2 ], 0 \right).$$

Cette réalisation minimale permet quant à elle le calcul de la fonction de transfert selon la formule

$$G(p) = \tilde{C}_1(pI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1 + D.$$

Il vient

$$(pI - \tilde{A}_{11}) = \begin{bmatrix} p-4 & 9 \\ -1 & p+2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(pI - \tilde{A}_{11}) = (p-4)(p+2) + 9 = (p-1)^2,$$

d'où l'on tire

$$(pI - \tilde{A}_{11})^{-1} = \frac{1}{(p-1)^2} \begin{bmatrix} p+2 & -9 \\ 1 & p-4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{1}{(p-1)^2} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p+2 & -9 \\ 1 & p-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow G(p) = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Cette fonction de transfert est la même que celle associée à la première représentation d'état donnée à l'exercice 6.10.1 page 278. Ceci veut dire que la réalisation minimale ci-avant est non seulement une réalisation minimale de la réalisation (6.22) mais aussi de la réalisation (6.21).

En réalité cela va un peu plus loin (et là, il peut être considéré que l'on va au delà des questions posées) : la matrice modale

$$V = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

est une matrice de changement de base qui permet de passer de (6.22) à (6.21) en utilisant la formule désormais habituelle (si ce n'est pas le cas, le lecteur est invité à relire les chapitres précédents!) :

$$(A, B, C, D) = (V^{-1}A_KV, V^{-1}B_K, C_KV, D_K).$$

Les deux réalisations sont donc équivalentes même en prenant en compte la partie non minimale (ici non commandable).



## Note de l'auteur



La décomposition de Kálmán n'est pas forcément très utilisée en pratique et si le lecteur éprouve des difficultés à suivre la résolution de cet exercice, qu'il ne s'inquiète pas. Cette décomposition est avant tout un outil de compréhension et de démonstration. Si elle a beaucoup contribué à l'avancée des concepts en Automatique, elle est finalement assez peu utilisée au quotidien par la plupart des automaticiens, même de haut niveau.

Si en revanche le lecteur a parfaitement suivi les calculs ci-avant, il peut essayer de se confronter seul, si ce n'est déjà fait, à l'exemple du paragraphe 6.8.3 page 268. De plus, pour continuer de s'entraîner, c'est très simple. Il suffit d'écrire directement une forme canonique de Kálmán avec éventuellement les quatre sous-systèmes  $\Sigma_{co}$ ,  $\Sigma_{c\bar{o}}$ ,  $\Sigma_{\bar{c}o}$ , et  $\Sigma_{\bar{c}\bar{o}}$  (c'est-à-dire une réalisation de la forme (6.19) page 269). Puis, à l'aide d'une matrice de passage relativement simple (non singulière bien sûr) et dont l'inverse est aussi assez simple, il s'agit d'obtenir une autre réalisation du même système. On peut alors appliquer la procédure à cette dernière réalisation et la décomposition de Kálmán qui en découle n'est pas forcément celle initialement écrite.

### 6.11.3. Retour au chapitre 4

La matrice de commandabilité de Kálmán associée au modèle (voir § 6.2.1 page 240) se calcule aisément :

$$Q_c = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Elle est clairement de rang 1 ce qui montre une déficience de commandabilité. Une réalisation minimale ne serait donc que d'ordre 1, d'où la forme de réponse indicielle de premier ordre observée au paragraphe 4.9.2 page 191 :

$$y(t) = \frac{2}{3}(1 - e^{-3t}), \quad t \geq 0.$$



Toujours au paragraphe 4.9.2, les valeurs propres de la matrice  $A$  avaient été calculées :  $(-1)$  et  $(-3)$ . La réponse indicielle montre que seule la valeur propre  $(-3)$  influence le comportement entrée-sortie du système. C'est donc la valeur propre  $(-1)$  qui est non commandable.

## 6.12. Notes et références

Une fois de plus, le lecteur peut trouver de nombreuses informations dans les ouvrages [1,2,3,4,5,6,7] et [8], ainsi que bien d'autres, que ce soit en anglais ou en français. De nouveau, l'auteur tient à préciser qu'il apprécie aussi la vision mathématique exposée dans [9].

Pour revenir aux sources, il semble qu'une des premières interrogations sur le sujet fut celle posée en 1954 par Arthur R. Bergen<sup>7</sup> et John Ralph Ragazzini<sup>8</sup> qui avaient compris que les techniques de compensation des pôles et des zéros de la fonction de transfert du procédé par ceux de la fonction de transfert du correcteur, non seulement pouvaient se révéler inexactes et dangereuses en pratique, mais également cachaient des propriétés du système [10]. (Cet article portait sur les systèmes échantillonnés (voir chapitre 9) mais ceci ne change rien.) Toutefois, les subtilités de ce qui était « caché » n'étaient pas pleinement perçues et ce fut encore Kálmán<sup>9</sup> qui comprit, à l'aide de la représentation d'état qu'il avait introduite, que de telles compensations de pôles instables, même mathématiquement exactes, généraient des systèmes à *non-minimum de phase* instables (voir §6.7.3 page 262). En effet, Kálmán introduisit les concepts de commandabilité, d'observabilité et de minimalité dans une série d'articles et de communications tout au long des années 1960 [11,12,12,13,14,15,16], et permit d'interpréter des systèmes ainsi compensés comme des modèles d'état dont une partie est non commandable et instable (donc des modèles non seulement instables mais aussi instabilisables!). Dans ces références, l'on peut retrouver le critère de Kálmán (voir §6.2 page 240) ainsi que le critère basé sur les grammians (voir §6.4.2 page 249). En fait, le critère de Kálmán peut être vu comme une conséquence du critère basé sur les grammians comme il est expliqué en annexe G page 723. Un autre article de référence de la même époque est celui d'Elmer Grant Gilbert<sup>10</sup> [17]. Certaines des contributions précédemment citées traitent de systèmes multi-entrées - multi-sorties.

Il existe d'autres formes canoniques quelque peu différentes de la forme canonique de commande ou d'observation (d'autres formes compagnes de la matrice d'état) dont la structure peut-être théoriquement reliée à des propriétés de commandabilité et d'observabilité. Elles ne sont pas présentées dans ce chapitre (ni dans le chapitre 3) mais de nombreux détails sur ces diverses formes sont donnés

---

7. ingénieur états-unien (1923-2014).

8. voir biographie 9.1 page 483.

9. voir la biographie de Rudolf Emil Kálmán en annexe I.2 page 777.

10. ingénieur en aérospatial états-unien (1930-).

dans [1].

Concernant le test PBH, il fut établi indépendamment par les trois chercheurs qui lui donnèrent son nom [20,21,22,23] (cf. biographies 6.1,6.2 page 275). Il faut mentionner que le test PBH avait déjà été établi en 1963 par Gilbert mais uniquement pour une gamme restrictive de réalisations (celles dont la matrice d'état est diagonalisable) [17].

Cependant, l'essentiel de ces articles donnait une vision qualitative de la commandabilité et de l'observabilité. Le besoin d'une vision plus quantitative se faisait pourtant sentir comme le souligna entre autres Bernard Friedland [18]<sup>11</sup>. La notion de grammien de commandabilité ou d'observabilité telle que définie en §6.4 page 248 est utile à ce titre puisqu'elle est liée, par exemple, à la quantité d'énergie nécessaire à la commande. Cette notion était déjà présente, par exemple, dans [13]. Mais ce fut un article de Bruce C. Moore en 1981, consacré à la réduction de modèle, qui éclaircit vraiment ces aspects des systèmes linéaires [19]. Cet article suscite la remarque 6.6 page 251. Pour prolonger cette remarque, certaines méthodes de réduction de modèle ne recherchent pas une base équilibrée où les deux grammien sont égaux mais préfèrent faire intervenir le grammien croisé  $W_x$  (nettement moins connu) et ainsi défini [24],

$$W_x = \int_0^{\infty} e^{A\tau} BC e^{A\tau} d\tau. \quad (6.24)$$

Il est solution de l'équation de Sylvester<sup>12</sup>

$$AW_x + W_x A = -BC. \quad (6.25)$$

Pour comprendre l'interprétation physique des grammien telle qu'exposée au paragraphe 6.4.2 page 249, l'auteur a tiré grand profit de la lecture de [25].

Enfin, pour voir plus clair dans les remarques 6.1 et 6.2 (pages 239 et 239), c'est-à-dire pour mieux saisir les différences en *commandabilité* et *atteignabilité*, ainsi qu'entre *observabilité* et *reconstructibilité*, le livre [26] est considéré comme une référence majeure.

---

11. ingénieur états-unien en électricité, spécialisé en automatique (1930-)

12. du nom du mathématicien anglais James Joseph Sylvester (1814-1897)

1. **T. Kailath** : *Linear Systems*. Prentice Hall, 1979.  
*Un vrai ouvrage de référence, pas très facile à aborder par son style et sa forme mais redoutablement complet. Pratiquement une « bible ».*
2. **R. C. Dorf et R. H. Bishop** : *Modern Control Systems*. Neuvième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.  
*La réédition permanente de cet ouvrage en dit long sur sa popularité. Les nombreux exemples constituent une vraie mine d'exercices pour un enseignant.*
3. **G. F. Franklin, J. D. Powell et A. Emami-Naemi** : *Feedback Control of Dynamic Systems*. Quatrième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.  
*Assez riche en exemples et agréable dans la forme. Plutôt didactique.*
4. **K. Ogata** : *Modern Control Engineering*. Troisième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.  
*Ouvrage de référence qui semble en avoir inspiré plus d'un. L'auteur a un petit faible pour cette référence dont la première édition date de 1970.*
5. **P. J. Antsaklis et A. N. Michel** : *Linear Systems*. McGraw-Hill, 1997.  
*Fanchement pas le plus accessible mais très rigoureux mathématiquement. Très bien mais déconseillé pour une première approche.*
6. **B. Friedland** : *Control System Design - An Introduction to State-Space Methods*. Dover, Mineola, New York, 1985.  
*Cet ouvrage se concentre uniquement sur la représentation d'état et de ce fait, vu sa taille importante, traite bien plus d'aspects que beaucoup d'autres. Les exemples y sont nombreux et bien choisis. Il est parfois un peu dense. Son prix est très raisonnable.*
7. **B. Pradin et G. Garcia** : *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Presses Universitaires du Mirail, 2010.  
*Que dire de cet ouvrage si ce n'est que c'est celui qu'il faut acheter! Incontestablement le meilleur rapport qualité/prix.*
8. **B. Pradin** : *Polycopié de cours d'Automatique : « Automatique : Notes de cours - Exercices »*. INSA de Toulouse, 3ème année spécialité AEI. 1992.  
*Là où l'essentiel est mieux expliqué que partout ailleurs! si ce n'est dans [7].*
9. **H. Logeman et E. P. Ryan** : *Ordinary Differential Equations : Analysis, Qualitative Theory and Control*. Springer Undergraduate Series,

2014.

Cet ouvrage utilise une approche mathématique rigoureuse pour proposer entre autres des solutions aux équations d'état (pas forcément linéaires). Les notions de commandabilité et d'observabilité y sont particulièrement bien amenées. Il est en outre très abordable.

10. **A. R. Bergen et J. R. Ragazzini** : Sampled-Data Processing Techniques for Feedback Control Systems. *Transactions of AIEE, Part II*, 73, p. 236-244, 1954.  
*Les premières interrogations, semble-t-il, sur le risque des compensations de pôles instables qui furent expliquées plus tard par les concepts de commandabilité et d'observabilité. L'article traite des systèmes échantillonnés mais le problème est identique pour les systèmes continus.*
11. **R. E. Kálmán** : Canonical Structure of Linear Dynamical Systems. *Proceedings of the National Academy of Science*, 48(4), p.596-600, USA, 1962.  
*Parmi les premières contributions de Kálmán sur les propriétés du modèle d'état.*
12. **R. E. Kálmán** : Mathematical Description of Linear Dynamical Systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics (Series A Control)*, 1(2) : p.152-192, 1963.  
*Description du modèle d'état et de ses propriétés par celui qui introduisit l'essentiel de ces concepts.*
13. **R. E. Kálmán, H. C. Ho et K. S. Narendra** : Controllability of Linear Dynamic Systems. *Contributions to Differential Equations*, 1(2), p.189-213, 1963.  
*Kálmán expliquant encore la commandabilité avec ses collègues .*
14. **R. E. Kálmán** : Irreducible Realizations and the Degrees of a Rational Matrix. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 13(2) : p.520-544, 1965.  
*Sur la minimalité des réalisations.*
15. **R. E. Kálmán** : Algebraic Structure of Finite Dimensional Dynamical Systems. *Proceedings of the National Academy of Science*, 54, p.1503-1508, USA, 1965.  
*Une contribution de plus de Kálmán sur la minimalité et les notions s'y rapportant.*
16. **R. E. Kálmán** : *Lectures on Controllability and Observability*. CIEM, Bologne, juillet 1968. NASA technical documents. Téléchargeable à l'adresse : [https://archive.org/details/nasa\\_techdoc\\_19700079309](https://archive.org/details/nasa_techdoc_19700079309)

- Une série de conférences en Italie sur la commandabilité et l'observabilité par Kálmán.
17. **E. G. Gilbert** : Controllability and Observability in Multivariable Control Systems. *SIAM Journal of Control*, 2(1), p.128-151, 1963.  
Un article de référence qui n'est pas de Kálmán ! Il traite des systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties.
  18. **B. Friedland** : Controllability Index Based on Conditioning Number. *Transactions of ASME (Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control)*, 97G(4), p.444-445, 1975.  
Où B. Friedland met l'accent sur l'insuffisance des critères quantitatifs de commandabilité existants.
  19. **B. C. Moore** : Principal Component Analysis in Linear Systems : Controllability, Observability, and Model Reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1), p.17-32, 1981.  
Exposition propre et rigoureuse des grammien de commandabilité, d'observabilité, démonstration d'existence d'une réalisation équilibrée où les deux grammien coïncident et utilisation de cette propriété pour trouver un modèle réduit approximatif aussi proche que possible.
  20. **V. M. Popov** : *Hyperstability of Control Systems*. Springer, Berlin, 1973.  
Ouvrage de référence et grande source d'inspiration de nombreux chercheurs où l'on peut trouver, entre autres, la version de Popov du test PBH..
  21. **V. M. Popov** : *L'hyperstabilité des systèmes automatiques*. Éditions Dunod, Paris, 1973.  
Le même livre que le précédent mais en Français. La version originale était sans doute en Roumain mais Popov écrivait parfaitement en Français.
  22. **V. Belevitch** : *Classical Network Theory*. Holden Days, San Francisco, 1968.  
Ouvrage où l'on peut trouver le test PBH en version « Belevitch ».
  23. **M. L. J. Hautus** : *Controllability and Observability of Linear Autonomous Systems* Ned. Akad. Vetenschappen Proc. Ser. A, 72, p.443-448, 1969.  
Le test PBH en vesion « Hautus ».
  24. **A. C. Antoulas** : *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. SIAM series on Advances in Design and Control, 2005.  
Où l'on peut entre autres rencontrer le grammien croisé.

25. **Ph. de Larminat** : *Automatique*. Éditions Hermes, 2000.  
*Le point de vue de Ph. de Larminat est toujours intéressant car de nombreux commentaires accompagnent la rigueur du formalisme mathématique et l'auteur, qui ne cède pas aux phénomènes de mode, garde toujours un sens critique. Pour ce qui relève de ce chapitre, les grammien y sont particulièrement bien interprétés en termes énergétiques (pour le cas des systèmes discrets mais l'analogie avec les systèmes continus est toujours possible).*
26. **W. M. Wonham** : *Linear Multivariable Control : A Geometric Approach* Deuxième édition, Springer Verlag, 1979.  
*Une approche géométrique, pas forcément simple, mais qui traite en détails des aspects structurels des modèles, c'est-à-dire de la commandabilité, de l'atteignabilité, de l'observabilité et de la restructibilité, ainsi que de leurs liens.*





# Chapitre 7

## *Commande par retour d'état*

Dans ce chapitre et dans le prochain, on aborde l'étape ultime de la conception des systèmes linéaires asservis : l'établissement d'une loi de commande capable de conférer au système des performances requises, dans la mesure du possible. Il est ici supposé que l'intégralité des composantes du vecteur d'état est mesurée et utilisée par la loi commande. On parle alors de commande par retour d'état.

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Notion de retour d'état</b> . . . . .	<b>298</b>
<b>7.2</b>	<b>Placement de pôles</b> . . . . .	<b>300</b>
7.2.1	Commandabilité et placement de pôles . . . . .	301
7.2.2	Placement de pôles sur une réalisation canonique . .	302
7.2.3	Placement de pôles sur une réalisation quelconque .	303
<b>7.3</b>	<b>Précommande</b> . . . . .	<b>308</b>
<b>7.4</b>	<b>Rejet de perturbation</b> . . . . .	<b>310</b>
7.4.1	Première approche . . . . .	310
7.4.2	Seconde approche . . . . .	315
<b>7.5</b>	<b>Stabilisabilité et détectabilité</b> . . . . .	<b>321</b>
7.5.1	Critères de type PBH . . . . .	323
7.5.2	Stabilisabilité et détectabilité interprétées par dé- composition de Kálmán . . . . .	324

<b>7.6</b>	<b>Stabilisation . . . . .</b>	<b>326</b>
<b>7.7</b>	<b>Retour d'état et énergie de commande . . . . .</b>	<b>328</b>
<b>7.8</b>	<b>Quelques éléments historiques . . . . .</b>	<b>329</b>
<b>7.9</b>	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>332</b>
7.9.1	Un peu de calcul littéral . . . . .	332
7.9.2	Oh là! ça tangué! . . . . .	333
7.9.3	Moteur à courant continu . . . . .	336
7.9.4	Asservissement de position d'une bille sur un rail . . . . .	337
7.9.5	Stabilisation par résolution d'inégalité . . . . .	338
<b>7.10</b>	<b>Correction des exercices . . . . .</b>	<b>340</b>
7.10.1	Un peu de calcul littéral . . . . .	340
7.10.2	Oh là! ça tangué! . . . . .	344
7.10.3	Moteur à courant continu . . . . .	351
7.10.4	Asservissement de position d'une bille sur un rail . . . . .	357
7.10.5	Stabilisation par résolution d'inégalité . . . . .	360
<b>7.11</b>	<b>Notes et références . . . . .</b>	<b>363</b>

## 7.1. Notion de retour d'état

Quelques aspects du retour d'état sont abordés dans cette partie. Le retour d'état est le moyen le plus classique d'envisager la commande d'un système modélisé par une représentation d'état. Il suppose que toutes les composantes  $x_i$  du vecteur d'état  $x$  soient accessibles à la mesure. Une loi de commande possible est alors

$$u(t) = Hy_c(t) + Kx(t). \quad (7.1)$$

où  $K \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur ligne de  $n$  composantes qu'il est convenu d'appeler *vecteur de retour d'état*,  $H$  est un scalaire dit de *précommande* ou *précompensation* et  $y_c$  est la consigne, c'est-à-dire l'entrée du système en boucle fermée.

Si l'on regarde attentivement l'équation (7.1), on comprend que ce type de loi de

commande ne correspond plus au schéma d'asservissement classiquement rencontré dans l'approche fréquentielle mais à un nouveau schéma de commande, comme indiqué sur la figure 7.1.

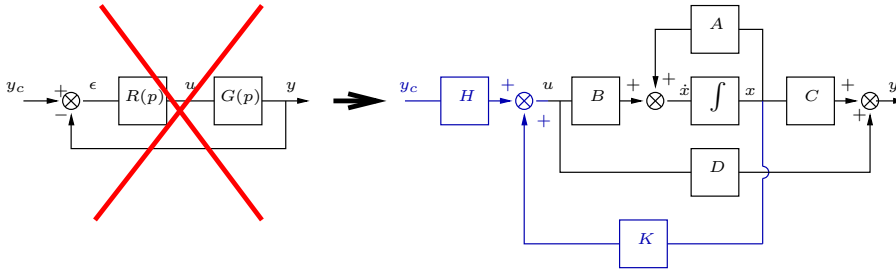


FIGURE 7.1 – Schéma d'asservissement

La motivation pour appliquer une telle commande est illustrée sur un exemple. On suppose que l'on cherche à asservir la position angulaire  $\theta$  d'un moteur à courant continu dont la vitesse et la position sont toutes deux mesurables. Sous l'hypothèse que la vitesse  $\omega$  du moteur évolue en fonction de la tension d'induit  $u$  selon une loi associée à la fonction de transfert

$$G_{\Omega}(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{L}{1 + \tau p},$$

une loi de commande possible par, retour d'état, peut correspondre au schéma de la figure 7.2. Le vecteur d'état est  $x' = [\theta \ \omega]$  et le retour d'état est  $K = [k_1 \ k_2]$ . Le scalaire  $H$  représente la précommande. Dans ce cas précis, on peut récrire le schéma comme indiqué sur la figure 7.3. Ceci conduit à une fonction de transfert en boucle fermée

$$G_f(p) = \frac{HL}{\tau p^2 + (1 - Lk_2)p - Lk_1}$$

dont on peut choisir à la fois les pôles et le gain statique, agissant ainsi sur les performances tant statiques que transitoires. On peut aussi noter que, dans le cas présent, le retour dynamique de la figure 7.3 peut s'implanter, en mesurant la vitesse  $\omega$ , comme un retour statique, ce qui évite la dérivation de  $\theta$  (parfois délicate notamment si l'implantation est numérique). De façon générale, il s'agit

là d'un des intérêts du retour d'état.

Avec cette conception de la commande, un changement notable dans les habitudes d'un automaticien débutant (par exemple familier des régulateurs PID) consiste à placer la dynamique de la loi de commande par le choix d'une boucle de retour plutôt que de par le choix d'un régulateur en amont du procédé.

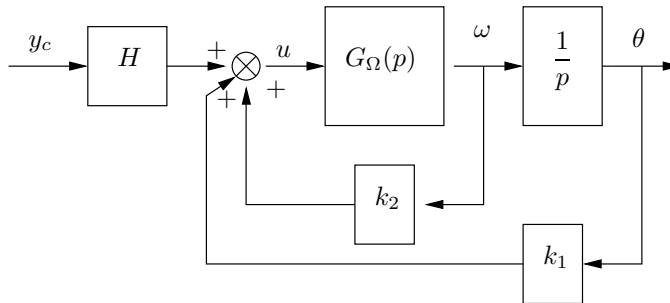


FIGURE 7.2 – Retour d'état appliqué au moteur

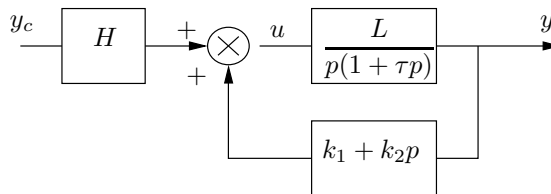


FIGURE 7.3 – Schéma-bloc équivalent

## 7.2. Retour d'état et performances transitoires : le placement de pôles

Le placement de pôles consiste à déterminer le vecteur de retour d'état  $K$  de telle sorte que le système ait les pôles désirés ou, plus rigoureusement, de telle sorte

que la matrice d'état en boucle fermée admette les valeurs propres spécifiées. Ceci permet d'agir de manière significative sur le comportement transitoire du système, en termes de temps de réponse, d'oscillations, etc. (voir §4.4 page 178).

Plus exactement, si l'on injecte l'équation (7.1) dans le système (3.5) donné page 71, il vient

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A + BK)x + BH y_c \\ y &= (C + DK)x + DH y_c. \end{cases} \quad (7.2)$$

Ainsi, la matrice en boucle fermée est  $A_f = A + BK$ . Donc le problème de placement de pôles se résume à ceci :

Placement de pôles :

Soient une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et un vecteur  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , déterminer le vecteur  $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  tel que le spectre de  $A + BK$  coïncide avec un spectre donné.

Ce problème n'est pas forcément simple et il convient de l'aborder en plusieurs étapes.

### 7.2.1. Commandabilité et placement de pôles

Le choix de  $K$  est prépondérant pour agir sur les performances transitoires du système car il induit un choix de pôles. Cependant, une question peut venir à l'esprit : le problème du placement de pôles a-t-il une solution ? *A priori*, il s'agit d'imposer les  $n$  valeurs propres de la matrice d'état en boucle fermée en choisissant les  $n$  composantes de  $K$ . On dispose donc de suffisamment de degrés de liberté. Toutefois, le problème n'est pas aussi simple et l'on peut montrer que ce problème n'admet une solution que lorsque le modèle d'état est commandable.

Le problème de placement de pôles par retour d'état admet une solution si et seulement si la paire  $(A, B)$  est commandable.

La démonstration rigoureuse de cette assertion n'est pas évidente. Elle est volontairement omise dans ce cours même si certains développements ultérieurs illustreront la proposition et la justifieront en partie.

### 7.2.2. Placement de pôles sur une réalisation canonique

Avant d'aborder le problème dans son intégralité, on se contente de supposer que le système est décrit dans une base de l'espace d'état particulière telle que la réalisation est dite canonique de commande. En réalité, il s'agit de la forme compagne horizontale (3.12) page 84 associée à une matrice d'état ici notée  $\tilde{A}$  et à un vecteur de commande ici noté  $\tilde{B}$ .

Si l'on exprime, dans cette base canonique d'état  $\tilde{x}$ , le retour d'état, il vient

$$u = \tilde{K}\tilde{x}, \quad \text{avec} \quad \tilde{K} = [ \tilde{k}_1 \quad \dots \quad \tilde{k}_n ], \quad (7.3)$$

et, toujours dans cette base, la matrice d'état en boucle fermée devient

$$\tilde{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (7.4)$$

où  $\alpha_i = a_i - k_{i+1}$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$  et où les scalaires  $a_i$  sont les coefficients du polynôme caractéristique en boucle ouverte. Les vecteurs de commande et d'observation  $\tilde{B}$  et  $\tilde{C}$  ne changeant pas. On note que la réalisation obtenue par le retour d'état est toujours de la forme compagne horizontale. Ainsi, les composantes  $\alpha_i$  apparaissant sur la dernière ligne de  $A_f$  sont les coefficients de  $D_d(p)$ , le polynôme caractéristique en boucle fermée. Si l'on désire placer les pôles  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , il faut choisir les composantes  $\tilde{k}_i$  du retour d'état  $\tilde{K} = [\tilde{k}_1 \dots, \tilde{k}_n]$  de sorte que

$$D_d(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i p^i) = \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i). \quad (7.5)$$

En développant le membre de droite de l'équation (7.5), on détermine, par identification, les coefficients  $\alpha_i$  et il reste à déduire les paramètres du retour :

$$\tilde{k}_i = a_{i-1} - \alpha_{i-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (7.6)$$

**Remarque 7.1** . Une telle loi de commande change les pôles du système mais ne modifie a priori pas les zéros puisque seuls les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert, sont modifiés. Même en présence d'une transmission directe  $D \neq 0$ , le numérateur est a priori invariant (voir la démonstration en annexe D). Il y a toutefois une exception à cette règle : il s'agit du cas où un pôle est placé à la même valeur que celle d'un zéro, ce qui entraîne une simplification entre le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert. Dans un tel cas, le zéro et le pôle disparaissent de cette fonction de transfert. Il est donc plus rigoureux d'affirmer qu'on ne peut pas modifier la valeur d'un zéro mais on peut en revanche le supprimer. Des détails supplémentaires sur ces aspects pôles/zéros sont donnés dans l'annexe D page 693.

### 7.2.3. Placement de pôles sur une réalisation quelconque

La technique présentée ci-dessus s'applique à une forme compagne horizontale. Lorsque la réalisation n'est pas canonique, il faut d'abord en obtenir une.

#### 7.2.3.1. Obtention de la forme canonique à partir de la fonction de transfert

Une première solution consiste à déterminer la fonction de transfert telle que celle donnée en (2.7) page 37, avec  $a_n = 1$ , et à déduire la forme canonique de commande à partir des coefficients du numérateur et du dénominateur de cette fonction de transfert.

#### 7.2.3.2. Obtention de la forme canonique à partir d'une autre réalisation

Le passage d'une forme quelconque à une forme compagne horizontale consiste en un changement de base dans l'espace d'état, comme il a été détaillé au paragraphe 3.7.2 page 90. On prend généralement  $m_n = B$  ce qui signifie que la matrice de passage est :

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m_n & = & B \\ m_{n-1} & = & (A + a_{n-1}I)B \\ m_{n-2} & = & (A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I)B \\ & \vdots & \\ m_1 & = & (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I)B. \end{cases} \quad (7.7)$$

On rappelle que la matrice  $M$  est telle que la réalisation canonique vérifie ( $\tilde{A} = M^{-1}AM, \tilde{B} = M^{-1}B, \tilde{C} = CM, \tilde{D} = D$ ). Lorsque le système n'est pas commandable, la matrice  $M$  est singulière et le changement de base est impossible. Ainsi, l'algorithme présenté ci-après n'est pas applicable pour un système non commandable.

### 7.2.3.3. Algorithme de placement de pôles

On dispose d'un spectre désiré  $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$ .

Étape 1 Vérification de la commandabilité. Si la paire  $(A, B)$  n'est pas commandable, le placement de pôles est génériquement impossible<sup>1</sup>.

Étape 2 Détermination du polynôme caractéristique désiré :

$$D_d(p) = \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0.$$

Étape 3 Détermination du polynôme caractéristique en boucle ouverte :

$$D(p) = \det(pI - A) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0.$$

Étape 4 Calcul du retour d'état  $\tilde{K}$  dans la base canonique par l'équation (7.6).

Étape 5 Calcul de la matrice de passage  $M$  grâce à (7.7).

---

1. Par « génériquement impossible », il est ici entendu que les pôles ne peuvent pas être *arbitrairement* placés, ce qui serait pourtant bien l'idée du placement de pôles. Cependant, si les valeurs propres désirées coïncident avec les valeurs propres non commandables (quelle chance!), le placement devient alors possible. Cette nuance a peu d'intérêt en pratique.



Étape 6 Calcul du retour d'état dans la base initiale :

$$K = \tilde{K}M^{-1}, \quad (7.8)$$

puisque la commande s'exprime

$$u = \tilde{K}\tilde{x} = \tilde{K}M^{-1}x = Kx.$$

Une fois les  $\alpha_i$  et les  $a_i$  connus, il est possible d'accélérer un peu la procédure ou tout du moins de lui donner un caractère peut-être un peu plus implantable sur le plan informatique, en tout cas plus compact grâce à une formule plus directe.. En effet, en analysant la structure de la matrice  $M$  rappelée en (7.7), il est facile de voir que cette dernière peut s'écrire

$$M = Q_c T_c \quad (7.9)$$

où  $Q_c$  est la matrice de commandabilité de Kálmán définie en (6.2) page 240 et où  $T_c$  est une matrice dite de Töplitz<sup>2</sup> :

$$T_c = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

Le retour  $K$  s'écrit alors directement

$$K = [ (a_0 - \alpha_0) \dots (a_{n-1} - \alpha_{n-1}) ] T_c^{-1} Q_c^{-1}. \quad (7.11)$$

Cette formule est appelée *formule de Bass-Gura*<sup>3</sup>. La matrice  $T_c$ , de par sa struc-

2. du nom d'Otto Töplitz, mathématicien allemand (1881-1940), originaire de Silésie.  
 3. du nom de Robert W. Bass (voir biographie 7.1 page 329.) et de celui d'Ira Gura.

ture, est toujours inversible (ses colonnes sont clairement linéairement indépendantes). Le calcul de  $K$  est donc possible si et seulement si  $Q_c$  est de rang plein c'est-à-dire si et seulement si  $(A, B)$  est commandable. Cette remarque a pratiquement valeur de démonstration de l'assertion proposée au paragraphe 7.2.1 page 301. En tout cas, elle démontre la suffisance de la commandabilité de  $(A, B)$  pour qu'un placement arbitraire de pôles soit possible. Cette formule est considéré par R. E. Kálmán<sup>4</sup> lui-même comme un résultat fondamental de l'Automatique.

Exemple :

Soit le système de réalisation  $(A, B, C, 0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x, \end{cases} \quad (7.12)$$

auquel on souhaite assigner le pôle double  $(-1)$ .

Étape 1 La matrice de commandabilité est

$$Q_c = [ B \quad AB ] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang 2 donc le système est commandable.

Étape 2 Le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée est

$$D_d(p) = (p + 1)^2 = p^2 + 2p + 1 = p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0.$$

Étape 3 Le polynôme caractéristique en boucle ouverte est

$$D(p) = \det(pI - A) = p^2 - 3p - 2 = p^2 + a_1 p + a_0.$$

Étape 4 Le retour d'état correspondant à la base canonique de commande est

$$\tilde{K} = [ \tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 ] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{k}_1 = a_0 - \alpha_0 = -2 - 1 = -3 \\ \tilde{k}_2 = a_1 - \alpha_1 = -3 - 2 = -5. \end{cases}$$

4. voir biographie en annexe I.2 page 777.

Étape 5 La matrice de passage à la base canonique est :

$$M = [m_1 \ m_2] = [(A - 3I)B \ B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Étape 6 Le retour d'état dans la base initiale est

$$K = \tilde{K}M^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -8 \end{bmatrix}.$$

Épilogue On peut vérifier que la matrice d'état en boucle fermée est

$$A_f = A + BK = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix},$$

qui conduit bien au polynôme caractéristique

$$D(p) = \det(pI - A_f) = (p - 1)(p + 3) + 4 = p^2 + 2p + 1,$$

et donc aux bonnes valeurs de pôles.

**Remarque 7.2** *Il est possible de tenter de procéder directement à l'identification*

$$\det(pI - A - BK) = D_d(p).$$

*Cette équation peut se résoudre facilement dès lors que le problème est de dimension peu élevée (classiquement  $n = 2$ ). Pour la résoudre à des ordres plus élevés, on peut recourir à la formule d'Ackermann<sup>a</sup> qui est démontrée en annexe C page 687. Cependant, la procédure présentée ci-avant revêt un caractère systématique qui se prête mieux à l'implantation d'une fonction informatique.*

a. Jürgen E. Ackermann, ingénieur allemand.

### 7.3. Performances statiques et retour d'état : la précommande

On se contente ici de déterminer une loi de commande telle que le gain statique du modèle en boucle fermée est unitaire, afin d'annuler l'erreur de position en l'absence de perturbations. Pour obtenir ce gain statique, on utilise le dernier degré de liberté disponible, à savoir le scalaire de précommande  $H$ .

La fonction de transfert d'un système bouclé par retour d'état peut être déduite de sa représentation d'état (7.2) donnée page 301 :

$$G_f(p) = (C + DK)(pI - A - BK)^{-1}BH + DH. \quad (7.13)$$

Ainsi le gain statique d'une telle fonction de transfert est-il égal à :

$$G_f(0) = [D - (C + DK)(A + BK)^{-1}B]H,$$

ce qui signifie que si l'on souhaite obtenir  $G_f(0) = 1$ , il suffit de calculer  $H$  ainsi :

$$H = [D - (C + DK)(A + BK)^{-1}B]^{-1}. \quad (7.14)$$

Le calcul de  $H$  est indépendant de la base considérée, aussi il est parfois plus facile, de déduire l'ensemble de la réalisation compagne horizontale  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ , puis, compte tenu des formes données en (3.12) page 84, de déduire  $H$  tel que

$$G_f(0) = 1 \quad \text{où} \quad G_f(p) = \frac{(\hat{b}_0 + \hat{b}_1 p + \dots + \hat{b}_{n-1} p^{n-1})H}{\alpha_0 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_{n-1} p^{n-1} + p^n} + DH,$$

$$\text{avec} \quad \hat{b}_i = b_i + D\tilde{k}_{i+1} \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Il convient de rappeler que les coefficients  $b_i$  correspondent à ceux de  $R(p)$ , le numérateur de  $G_{pr}(p)$  dans l'équation (3.16) page 86. En faisant une réduction au même dénominateur de l'expression de  $G_f(p)$ , on obtient

$$G_f(p) = \frac{(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 p + \dots + \mathbf{b}_{n-1} p^{n-1} + \mathbf{b}_n p^n) H}{\alpha_0 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_{n-1} p^{n-1} + p^n},$$

où les coefficients  $\mathbf{b}_i$  sont ceux de  $N(p)$ , le numérateur de  $G(p)$ , la fonction de transfert globale en boucle ouverte (voir équation (3.16) page 86). Il est ainsi montré que la remarque 7.1 page 303, selon laquelle les zéros de la fonction de transfert ne sont pas modifiés par un retour d'état, est vraie même en présence d'une transmission directe. Le détail de la démonstration est également proposé en annexe D page 693.

Il devient clair dans ces conditions que

$$H = \frac{\alpha_0}{\hat{b}_0 + \alpha_0 D} = \frac{\alpha_0}{\mathbf{b}_0} \quad (7.15)$$

Exemple :

Si l'on revient à l'exemple du système (7.12) page 306 pour lequel un retour d'état a déjà été calculé, il suffit de déterminer le coefficient  $b_0$ . Pour cela, il est possible de calculer  $\tilde{C}$ , le vecteur d'observation dans la base canonique de commande :

$$\tilde{C} = CM = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix}.$$

Ce vecteur  $C$  fait apparaître  $b_0$ . Le scalaire de précommande est donc (sachant que  $D = 0$ ).

$$H = \frac{\alpha_0}{b_0} = \frac{1}{1} = 1,$$

ce qui signifie ici qu'il est inutile d'appliquer une précommande.

## 7.4. Rejet de perturbation et retour d'état : adjonction d'intégrateurs

Indépendamment du gain statique, il peut être souhaitable de réduire l'effet d'une perturbation exogène agissant, en tant qu'entrée non contrôlée, sur le système. Il est parfois très difficile de réduire l'effet de la perturbation et les quelques techniques existantes nécessitent souvent la connaissance d'un modèle de la perturbation. On peut noter que toute perturbation de type impulsion de Dirac est rejetée *en régime permanent* dès lors que le système est asymptotiquement stable. Si la perturbation est plus franche, il faut envisager de sophistication la loi de commande et ceci peut s'avérer délicat.

Toutefois, lorsque cette perturbation peut être assimilée à un *échelon* (exemple : effet d'« *offset* » sur la commande) et lorsque seul l'effet de cette perturbation sur le *gain statique* est en jeu, alors, il est possible d'ajouter un intégrateur dans la chaîne directe. Le lecteur est invité à se référer à un cours sur l'approche fréquentielle traitant de la précision des systèmes bouclés. Il y a été mentionné qu'un système de classe 1 (c'est-à-dire comportant un intégrateur dans la chaîne directe) est précis en position c'est-à-dire que l'erreur de position de ce système, une fois bouclé, est nulle quand on lui applique un échelon en consigne. Enfin, en présence d'une perturbation elle aussi en échelon, cet intégrateur n'a l'effet escompté que s'il est placé en amont du point d'entrée de la perturbation dans la chaîne directe. Sur la base de ces constatations, on peut choisir d'ajouter un intégrateur à l'entrée d'un système avant de réaliser un retour d'état.

Cette partie présente deux approches de la prise en compte de perturbations en échelon dans une loi de commande de type retour d'état avec adjonction d'intégrateur. Ce sont deux approches que l'on peut trouver dans les divers cours et ouvrages. Toutefois, la seconde a très largement la préférence de l'auteur. Le lecteur désireux d'accélérer sa lecture (on le comprend!) peut donc passer directement au paragraphe 7.4.2 page 315 pour étudier la seconde approche.

### 7.4.1. Première approche

Dès lors qu'un intégrateur est ajouté, le modèle en boucle ouverte change. Il devient d'ordre  $n + 1$ , c'est-à-dire que le vecteur d'état  $x$  de dimension  $n$  est augmenté d'une  $(n + 1)^{\text{ème}}$  composante  $u$  de sorte que  $\bar{x}' = [x' \ u]$ .

La fonction de transfert en boucle ouverte d'un tel système est

$$\begin{aligned}\bar{G}(p) &= \frac{1}{p}G(p) = \frac{b_0 + b_1p^1 + \dots + b_{n-1}p^{n-1}}{0 + a_0p + a_1p^2 + \dots + p^{n+1}} + \frac{D}{p} \\ \Leftrightarrow \bar{G}(p) &= \frac{b_0 + b_1p^1 + \dots + b_{n-1}p^{n-1} + D(a_0 + a_1p + \dots + p^n)}{\bar{a}_0 + \bar{a}_1p + \bar{a}_2p^2 + \dots + p^{n+1}} \\ \Leftrightarrow \bar{G}(p) &= \frac{\bar{b}_0 + \bar{b}_1p^1 + \dots + \bar{b}_{n-1}p^{n-1} + Dp^n}{\bar{a}_0 + \bar{a}_1p + \bar{a}_2p^2 + \dots + p^{n+1}} \quad \text{avec} \\ \bar{a}_0 &= 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \bar{a}_i = a_{i-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \bar{b}_i = b_i + Da_i \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}. \end{cases}\end{aligned}$$

De plus, il convient de calculer une loi de commande de type retour d'état utilisant les  $(n + 1)$  composantes de  $\bar{x}$ , à savoir

$$\bar{u} = \bar{K}\bar{x} + \bar{H}y_c,$$

où  $\bar{u}$  est la nouvelle entrée du système telle que  $U(p) = \frac{\bar{U}(p)}{p}$ , où  $\bar{K} = [\bar{k}_1 \dots \bar{k}_{n+1}]$  est le vecteur de retour d'état à appliquer sur le système augmenté et où  $\bar{H}$  est un scalaire de précommande. Si l'on se place dans la base canonique de commande du système initial (d'état  $\tilde{x}$ ), augmenté ensuite de l'intégrateur (c'est-à-dire à l'état  $\tilde{\tilde{x}}$ ), on obtient le schéma de la figure 7.4 où le retour d'état est associé à la matrice  $\bar{\tilde{K}}$  de composantes  $\bar{\tilde{k}}_i$ .

On constate que la chaîne directe allant de  $\bar{u}$  à  $z$  est un système de classe au moins égale à 1. De ce fait, toute perturbation en échelon agissant sur le procédé en aval du premier intégrateur n'a pas d'effet sur le régime statique de  $z$ . Le cas typique est celui où la perturbation intervient au niveau de  $u$ .

En observant le schéma, on comprend qu'aucun effet n'est alors visible sur le régime permanent des variables d'état  $\tilde{\tilde{x}}_i$ . Si aucune perturbation n'intervient entre ces états  $\tilde{\tilde{x}}_i$  et  $y$ , alors la sortie  $y$  n'est pas non plus altérée en régime statique.

On se place maintenant dans la base canonique de commande du système augmenté où l'état est noté  $\tilde{\tilde{x}}$ .

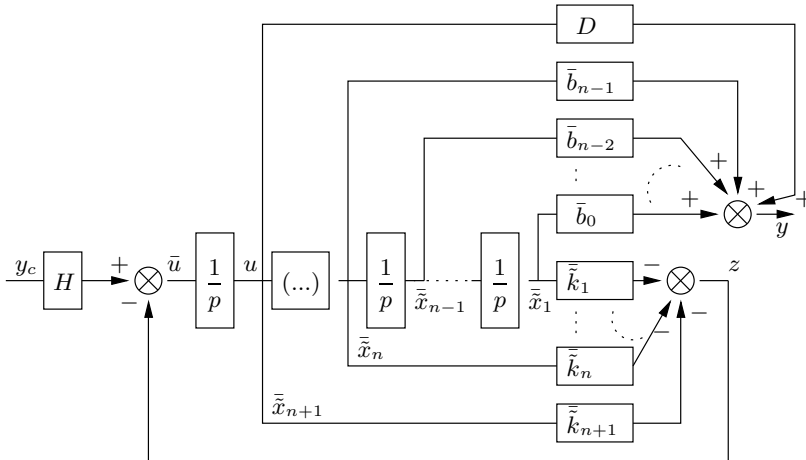


FIGURE 7.4 – Retour d'état avec intégration de la commande

**Remarque 7.3** Attention, il ne faut pas confondre l'état  $\tilde{x}$ , qui est le vecteur d'état du système initial dans sa forme canonique de commande auquel on ajoute ensuite l'intégrateur (la forme alors obtenue n'est plus canonique) avec l'état  $\tilde{\tilde{x}}$  qui est le vecteur d'état de la forme canonique de commande de l'ensemble (système initial augmenté de l'intégrateur). Cette seconde forme est donc bien canonique. Le vecteur  $\tilde{x}$  n'intervient que dans la figure 7.4 alors que le vecteur  $\tilde{\tilde{x}}$  intervient dans ce qui suit... C'est peut-être pour cela que l'auteur ne raffole pas de cette technique et lui préfère celle du paragraphe suivant.

Appliquer la technique du retour d'état conduit alors à modifier l'équation (7.6) page 303 en

$$\tilde{k}_i = \bar{a}_{i-1} - \bar{\alpha}_{i-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n + 1\}, \tag{7.16}$$

où les coefficients  $\bar{a}_i$  sont ceux du polynôme caractéristique désiré pour le modèle d'ordre  $(n + 1)$  en boucle fermée, correspondant donc aux  $(n + 1)$  pôles désirés. Ceci permet de déduire le retour d'état  $\tilde{K} = [\tilde{k}_1 \dots \tilde{k}_{n+1}]$ . Dans la base initiale, le retour est  $\bar{K} = \tilde{K} \bar{M}^{-1}$  où  $\bar{M}$  est la matrice de passage à la forme canonique pour le système augmenté. Le scalaire de précommande est alors donné par



$$\bar{H} = \frac{\bar{\alpha}_0}{\bar{b}_0} = -\frac{\tilde{k}_1}{b_0 + Da_0}. \tag{7.17}$$

La loi de commande devient donc :

$$u(t) = \int_0^t \bar{u}(\theta) d\theta = \int_0^t \left( -\frac{\tilde{k}_1}{b_0 + Da_0} y_c(\theta) + \bar{K} \bar{x}(\theta) \right) d\theta. \tag{7.18}$$

Exemple :

Si l'on revient de nouveau au système (7.12) page 306 la fonction de transfert est facilement déduite de la forme compagne horizontale :

$$G(p) = \frac{1}{p^2 - 3p - 2}.$$

En ajoutant un intégrateur, on change l'entrée  $u(t)$  du procédé en une autre entrée notée  $\bar{u}(t)$  comme indiqué sur la figure 7.4. Il vient

$$U(p) = \frac{1}{p} \bar{U}(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{u}(t) = \bar{u}(t).$$

$u(t)$ , dont la dérivée apparaît dans l'expression ci-avant, devient une nouvelle variable d'état et conduit à une représentation :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} \bar{u} \\ y &= [ 1 \ 1 \ 0 ] \bar{x} = \bar{C} \bar{x}. \end{cases} \tag{7.19}$$

L'ajout d'un intégrateur amène sans surprise à l'ordre 3. Le vecteur d'état  $\bar{x}$  de la réalisation (7.19) est défini par  $\bar{x}' = [x' \ u]$ . La dernière ligne de la matrice d'état  $\bar{A}$  est entièrement nulle ce qui confirme l'existence d'une valeur propre nulle liée à l'intégrateur.

Quant à la fonction de transfert, elle devient

$$\bar{G}(p) = \frac{1}{p(p^2 - 3p - 2)} = \frac{1}{p^3 - 3p^2 - 2p + 0} = \frac{1}{p^3 + \bar{a}_2 p^2 + \bar{a}_1 p + \bar{a}_0}.$$

Il est nécessaire de placer un pôle supplémentaire puisque le modèle est maintenant d'ordre 3 et ce pôle est ici choisi de valeur (-1). Ainsi le polynôme caractéristique désiré est-il égal à

$$\bar{D}_d(p) = (p + 1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = p^3 + \bar{\alpha}_2 p^2 + \bar{\alpha}_1 p + \bar{\alpha}_0.$$

Il est inutile de vérifier la commandabilité du système augmenté car l'ajout de l'intégrateur n'altère pas cette propriété qui a déjà été vérifiée sur le modèle initial. On déduit le retour d'état dans la base canonique

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_0 - \bar{\alpha}_0 & \bar{a}_1 - \bar{\alpha}_1 & \bar{a}_2 - \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

et le scalaire de précommande

$$\bar{H} = -\frac{-1}{1} = 1.$$

Il est donc de nouveau inutile d'appliquer une précommande dans ce cas. Il reste à déterminer la matrice de passage

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & \bar{m}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} \bar{m}_3 &= \bar{B} \\ \bar{m}_2 &= (\bar{A} + \bar{a}_2 I)\bar{B} \\ \bar{m}_1 &= (\bar{A}^2 + \bar{a}_2 \bar{A} + \bar{a}_1 I)\bar{B}, \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\bar{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

et donc au retour d'état dans la base initiale :

$$\bar{K} = \tilde{K} \bar{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -13 & -36 & -6 \end{bmatrix}.$$

La méthode présentée dans ce paragraphe peut être efficace mais elle présente deux inconvénients :

- le premier inconvénient peut se concevoir en regardant la figure 7.4. Le lien statique entre  $\bar{x}$  et  $y$  ne se place pas dans la chaîne directe. Ceci induit la nécessité du calcul d'une précommande  $\bar{H}$ , dont la valeur peut être sensible à des variations de paramètres dans le modèle. Mais, surtout, toute perturbation en échelon située dans cette partie du système ne sera pas rejetée en régime permanent par l'intégrateur ajouté. Or ce cas n'est pas inhabituel puisqu'il peut correspondre, par exemple, à un *offset* sur la mesure de  $y$ , lié à un capteur imprécis ;
- le deuxième inconvénient peut se comprendre par l'analyse rapide de l'expression de la loi de commande (7.18) page 313. Dans cette expression  $u$  dépend de l'intégrale de  $\bar{x}$  dont une des composantes est  $u$ . De ce fait, il n'y a pas stricte causalité de la loi de commande ce qui peut poser des problèmes d'implantation, notamment lors d'approximations numériques de cette loi de commande ;
- Le troisième inconvénient, et pas des moindres, est que le calcul d'un scalaire de précommande est toujours nécessaire pour assurer le suivi statique de la consigne. Or un tel scalaire de précommande est assez sensible aux imprécisions paramétriques du modèle.

Pour remédier à ces trois inconvénients, qui, selon l'auteur, rende cette technique pour le moins constestable, le prochain paragraphe présente une structure de commande quelque peu différente. Elle repose sur le même principe de l'ajout d'intégrateur mais se révèle bien plus simple, plus robuste et bien plus efficace.

#### 7.4.2. Seconde approche

L'idée est toujours d'adjoindre un intégrateur mais en se rapprochant encore d'avantage du schéma classique d'asservissement utilisé en fréquentiel. La figure 7.5 résume la structure de commande.

Une perturbation exogène  $d$  vient s'ajouter comme entrée non maîtrisable du système agissant directement sur la dynamique de  $x$  par l'intermédiaire d'un vecteur de commande  $B_d$ . Cette perturbation peut résulter d'un vrai phénomène exogène ou résumer approximativement l'effet de dynamiques négligées, d'imprécisions sur le modèle du système.

La loi de commande s'exprime

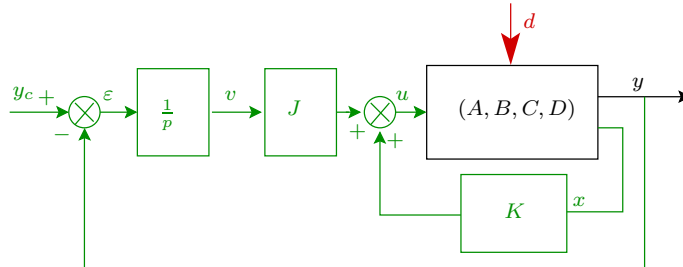


FIGURE 7.5 – Retour d'état avec intégration de l'écart

$$u(t) = Kx(t) + Jv(t) = Kx(t) + J \int_0^t \varepsilon(\theta) d\theta, \quad (7.20)$$

où  $K$  appartient à  $\mathbb{R}^n$  et  $J$  est un scalaire. L'écart  $\varepsilon$  est tout simplement, comme dans l'approche fréquentielle, défini par  $\varepsilon = y_c - y$ . En considérant l'état  $\bar{x} = [x \ v]'$ , il est assez facile de voir que ce dernier vérifie le système algébro-différentiel

$$\begin{cases} \underbrace{\dot{\bar{x}}}_{\nu} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \bar{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix}}_{\bar{B}_1} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_2} y_c + \underbrace{\begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_3} d, \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \bar{x} + \underbrace{D}_{\bar{D}} u. \end{cases} \quad (7.21)$$

Il est ici supposé que la paire de matrices  $(\bar{A}, \bar{B}_1)$  est commandable. Quant à la loi de commande (7.20), elle peut se récrire

$$u = \underbrace{\begin{bmatrix} K & J \end{bmatrix}}_{\bar{K}} \bar{x}. \quad (7.22)$$

En injectant (7.22) dans (7.21), il vient

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= (\bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K})\bar{x} + \bar{B}_2 y_c + \bar{B}_3 d, \\ y &= (\bar{C} + \bar{D} \bar{K})\bar{x}. \end{cases} \quad (7.23)$$

Il apparaît clairement, à la vue de (7.23), que le vecteur  $\bar{K}$  (c'est-à-dire la concaténation de  $K$  et  $J$ ) peut être choisi par une méthode de placement de pôles telle que celle présentée au paragraphe 7.2 page 300. La procédure s'applique alors à la paire  $(\bar{A}, \bar{B}_1)$  de manière à placer les valeurs propres de la matrice d'évolution  $\bar{A}_f = \bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K}$ . Ce placement est possible dès lors que la paire  $(\bar{A}, \bar{B}_1)$  est commandable. Il faut bien sûr penser à spécifier un pôle de plus (donc  $(n + 1)$  en tout) pour prendre en compte la présence de l'intégrateur. La procédure n'est pas redétaillée ici puisqu'elle se rapproche des algorithmes précédemment introduits, et le lecteur est invité à regarder l'exemple à fin du paragraphe.

L'écart de poursuite  $\varepsilon$  est la dernière composante du vecteur  $\nu = \dot{\bar{x}}$ . C'est pourquoi il est utile d'analyser la dynamique de  $\nu$  :

$$\dot{\nu} = (\bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K})\nu + \bar{B}_2 \dot{y}_c + \bar{B}_3 \dot{d}.$$

Si l'on considère que la consigne  $y_c$  est un échelon (où une succession lente d'échelons), alors  $\dot{y}_c = 0$  pour à peu près chaque instant du temps (sauf à l'instant de commutation de  $y_c$ ). Si l'on considère que  $d$  est aussi une perturbation en échelon, il vient également  $\dot{d} = 0$  et donc

$$\dot{\nu} = (\bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K})\nu.$$

Puisque le vecteur  $\bar{K}$  est choisi de telle sorte que la matrice  $(\bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K})$  soit *Hurwitz-stable* (c'est-à-dire stable au sens de Hurwitz : voir chapitre 5), alors il vient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \nu = 0,$$

ce qui implique nécessairement

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = 0. \quad (7.24)$$

Ceci signifie que l'erreur de position est nulle ou encore que le gain statique du système augmenté bouclé est unitaire. La consigne en échelon est donc suivie en régime permanent. Les perturbations de type échelon situées en aval de l'intégrateur dans la chaîne directe sont rejetées en régime permanent.

Avant de traiter l'exemple illustratif de cette partie, un point particulier est abordé. Une hypothèse a rapidement été formulée. En effet, le vecteur de retour d'état augmenté  $\bar{K}$  peut être efficacement calculé si la paire  $(\bar{A}, \bar{B}_1)$  est commandable. L'algorithme présenté dans ce chapitre (c'est-à-dire l'approche de Bass-Gura) s'applique sans difficulté si cette propriété de commandabilité est satisfaite. Il est donc naturel de se poser la question : cette hypothèse est-elle toujours vérifiée ?

Pas tout à fait en réalité. Un cas particulier assez peu restrictif échappe à cette hypothèse. En effet, si l'on veut attester de la commandabilité de  $(\bar{A}, \bar{B}_1)$ , il est possible d'appliquer le test de Popov-Belevitch-Hautus (test PBH, cf. §6.5 page 251) qui consiste pour le cas présent à vérifier que

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \lambda I - \bar{A} & \bar{B}_1 \end{bmatrix} \right) = n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{C}.$$

Si les expressions de  $\bar{A}$  et de  $\bar{B}_1$  explicitées en (7.21) sont prises en compte, la matrice concernée par l'équation ci-avant s'écrit

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A & 0 & B \\ -C & -\lambda & D \end{bmatrix}.$$

Si la paire de matrices  $(A, B)$  est commandable (ce qui est une hypothèse de départ évidente pour faire un placement de pôles, qui a toujours été posée depuis le début du chapitre), alors les  $n$  premières lignes constituent une matrice de rang  $n$ . Il est clair que la  $(n + 1)^{\text{ème}}$  ligne est indépendante dès lors que  $\lambda \neq 0$ . En revanche, si  $\lambda = 0$ , le problème revient à vérifier que la matrice

$$\begin{bmatrix} -A & B \\ -C & D \end{bmatrix}$$

est de rang  $(n + 1)$ . Si le modèle initial  $(A, B, C, D)$  présente un pôle nul non observable (seul le pôle nul est d'intérêt dans cette partie du raisonnement puisque  $\lambda = 0$ ), alors les  $(n - 1)$  premières colonnes de la matrice ci-dessus ne constituent qu'une matrice de rang  $(n - 1)$  au plus (test PBH d'observabilité, cf. §6.5 page 251). Par conséquent, même en ajoutant la dernière colonne, la matrice

globale ne peut atteindre, au mieux, que le rang  $n$ , et non  $(n + 1)$ , ce qui interdit la commandabilité complète.

En résumé :

L'hypothèse de commandabilité de la paire  $(\bar{A}, \bar{B}_1)$  est vérifiée si et seulement si  $(A, B, C, D)$  ne présente pas de valeur propre nulle non observable.

Pour prolonger l'interprétation de ce cas particulier légèrement restrictif, il est possible de se référer au paragraphe 6.6.2 page 257 consacré aux systèmes composites, ainsi qu'à la figure 7.6 ci-après.

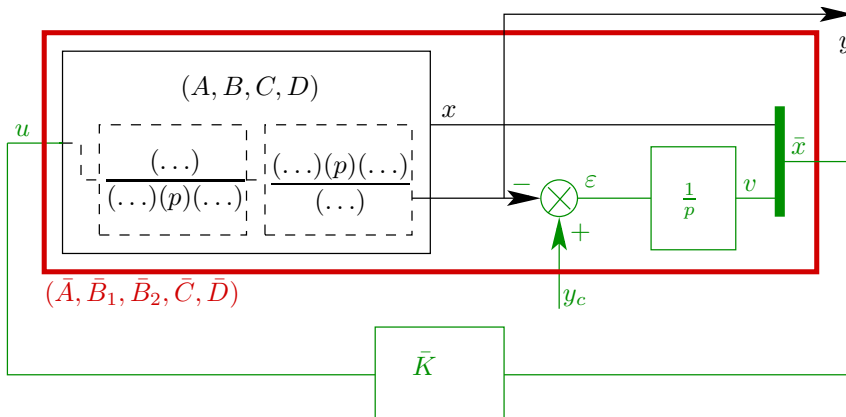


FIGURE 7.6 – Retour d'état avec intégration de l'écart : présence d'une valeur propre nulle non observable

Sur cette figure, on fait apparaître, dans le modèle initial, la valeur propre nulle non observable, conformément à la figure 6.4 page 258. Cependant, dans le transfert entre  $u$  et  $v$ , l'intégrateur ajouté se retrouve dans la configuration du schéma 6.3 page 258, c'est-à-dire qu'il devient non commandable.

Exemple :

Si l'on revient de nouveau au système (7.12). Il vient alors

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice de Kálmán de commandabilité est égale à

$$\bar{Q}_c = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -8 \\ 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Son rang est de 3 donc la paire  $(\bar{A}, \bar{B}_1)$  est commandable et le calcul de la loi de commande est donc possible.

À titre de remarque, cette vérification de la commandabilité aurait pu se faire autrement et plus simplement. En effet, à l'étape 3 de l'application de l'algorithme de placement de pôles effectuée sur cet exemple au paragraphe 7.2.3.3 page 304, le polynôme caractéristique en boucle ouverte a été calculé. Il ne fait clairement pas apparaître de racine nulle, ce qui implique qu'il n'existe aucune valeur propre nulle de  $A$ , et *a fortiori* aucune valeur propre nulle non observable. Compte tenu des discussions ci-avant, la commandabilité de  $(\bar{A}, \bar{B}_1)$  ne pouvait être que vérifiée.

Comme pour la première approche (cf. §7.4.1 page 310), les pôles spécifiés sont tous trois en  $(-1)$ . Le polynôme caractéristique désiré pour  $\bar{A}_f$  est donc toujours

$$\bar{D}_d(p) = (p+1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = p^3 + \bar{\alpha}_2 p^2 + \bar{\alpha}_1 p + \bar{\alpha}_0.$$

Le polynôme caractéristique associé à  $\bar{A}$  est

$$D(p) = \det(pI - \bar{A}) = p^3 - 3p^2 + 2p + 0 = p^3 + \bar{a}_2 p^2 + \bar{a}_1 p + \bar{a}_0.$$

Dans la base canonique de commande du système augmenté, le vecteur de retour d'état  $\tilde{K}$  est donc donné par

$$\tilde{K} = [ \tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad \tilde{J} ] = [ \bar{a}_0 - \bar{\alpha}_0 \quad \bar{a}_1 - \bar{\alpha}_1 \quad \bar{a}_2 - \bar{\alpha}_2 ] = [ -1 \quad -5 \quad -6 ].$$



La matrice de passage à la forme canonique vérifiant  $\bar{x} = \bar{M}\tilde{x}$  est donnée par (cf. §3.7.2 page 90)

$$\bar{M} = [ \bar{m}_1 \quad \bar{m}_2 \quad \bar{m}_3 ] = [ (\bar{A}^2 + \bar{a}_2\bar{A} + \bar{a}_1I)\bar{B}_1 \mid (\bar{A} + \bar{a}_2I)\bar{B}_1 \mid \bar{B}_1 ]$$

$$\Leftrightarrow \bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans la base initiale, le retour d'état est donné par

$$\bar{K} = \tilde{K}\bar{M}^{-1} = [ -5 \quad -11 \quad 1 ],$$

c'est à dire que

$$K = [ -5 \quad -11 ] \quad \text{et} \quad J = 1.$$

La matrice d'état du système augmenté bouclé devient

$$\bar{A}_f = \bar{A} + \bar{B}_1\bar{K} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -3 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elle présente bien une valeur propre triple égale à  $(-1)$ .

## 7.5. Stabilisabilité et détectabilité

Deux notions pouvant parfois se révéler importantes sont liées à celles de commandabilité et d'observabilité vues au chapitre précédent : la *stabilisabilité* et la *détectabilité*. Elles méritent que l'on s'y attarde quelque peu. Elles sont ainsi définies :

La paire de matrices  $(A, B)$  est *stabilisable* (respectivement la paire de matrices  $(A, C)$  est *détectable*) si et seulement s'il existe une matrice  $K$  de dimension appropriée appelée matrice de retour d'état (resp. *matrice d'injection de sortie*) telle que la matrice  $(A + BK)$  (resp.  $(A + KC)$ ) est *Hurwitz-stable*, c.-à-d. stable au sens de Hurwitz, à savoir que toutes ses valeurs propres sont à partie réelle négative. Ces deux notions sont duales l'une de l'autre.

Cette définition mérite un bref commentaire. Elle est donnée dans un cadre multivariable (plusieurs entrées et plusieurs sorties) d'où l'utilisation du terme *matrice* pour désigner  $K$ . Dans le cas monovariable,  $K$  est un vecteur ligne (retour d'état) ou colonne (injection de sortie). Pour simplifier, l'attention est focalisée sur la stabilisabilité et la détectabilité peut s'appréhender par dualité. On se replace dans le cas mono-entrée où  $B$  est un vecteur. La paire  $(A, B)$  est associée au système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7.25)$$

La stabilisabilité de  $(A, B)$  consiste en l'existence d'une loi de commande de type *retour d'état*

$$u(t) = Kx(t) \quad (7.26)$$

telle que le système en boucle fermée associé à la matrice dynamique  $(A + BK)$  soit asymptotiquement stable.

Puisque la détectabilité est duale de la stabilisabilité, elle consiste en l'existence d'une loi de commande de type retour d'état

$$v(t) = K'z(t) \quad (7.27)$$

appliquée au système dual

$$\dot{z}(t) = A'z(t) + C'v(t) \quad (7.28)$$

et qui le rende asymptotiquement stable en boucle fermée.

La commandabilité de  $(A, B)$  implique qu'il existe toujours un vecteur de retour d'état  $K$  tel que l'on puisse placer arbitrairement le spectre de  $(A + BK)$  (ce chapitre y accorde une large place), en particulier dans le demi-plan complexe gauche ouvert. Ainsi, il est toujours possible d'obtenir la stabilité asymptotique par retour d'état lorsque le système est commandable. En tenant compte de la dualité, on peut conclure :

Commandabilité  $\Rightarrow$  Stabilisabilité ;  
Observabilité  $\Rightarrow$  Détectabilité.

Attention, les implications réciproques ne sont pas vraies. Soit le système décrit par (7.25) page 322 avec

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il est facile de voir que ce système n'est pas commandable puisque la matrice de commandabilité de Kálmán, à savoir

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

n'est pas de rang 2. Néanmoins tout vecteur de retour d'état

$$K = [ 0 \quad k ], \quad \text{où } k < -2,$$

permet d'obtenir une matrice dynamique en boucle fermée  $(A + BK)$  ayant pour spectre  $\{-1; (2 + k < 0)\}$ , donc *Hurwitz-stable*. La paire  $(A, B)$  est donc stabilisable mais non commandable.

En revanche, si l'on remplace  $A$  par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

alors la paire  $(A, B)$  n'est ni commandable, ni stabilisable puisque tout retour d'état

$$K = [ k_1 \quad k_2 ]$$

conduit à un spectre en boucle fermée  $\{1; 2+k_2\}$ . Le pôle en boucle ouverte  $(+1)$  n'est en fait pas commandable. Il ne peut donc être déplacé dans le demi-plan gauche, ni même simplement déplacé.

On comprend par cet exemple que la stabilisabilité correspond à la commandabilité des éventuelles « parties instables » du système.

### 7.5.1. Critères de type PBH

La question des critères de stabilisabilité et de détectabilité se pose naturellement. Le plus facile est sans doute d'adapter le test PBH (cf. §6.5 page 251) de la façon suivante :

**Test de Popov-Belevitch-Hautus**

Les paires de matrices  $(A, B)$  et  $(A, C)$  sont respectivement stabilisable et détectable si et seulement si (respectivement)

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{C}^+, \quad \text{rang} \left( \begin{bmatrix} (\lambda I - A) & B \end{bmatrix} \right) = n, \\ \text{et} \\ \forall \lambda \in \mathbb{C}^+, \quad \text{rang} \left( \begin{bmatrix} C \\ (\lambda I - A) \end{bmatrix} \right) = n. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Le test vu au chapitre 6 est donc restreint au demi-plan droit fermé  $\mathbb{C}^+$  ce qui signifie bien que l'on s'intéresse, dans ce test, uniquement à la commandabilité ou l'observabilité des « valeurs propres non asymptotiquement stables »<sup>5</sup> de  $A$ . Cela étant, le test reste tout aussi peu utilisé que dans le cas de la commandabilité et de l'observabilité puisqu'il requiert généralement le calcul du rang d'une matrice pour une infinité de valeurs (une infinité moindre mais une infinité!). Il sert toutefois dans certaines démonstrations et se révèle donc utile à titre plutôt théorique.

### 7.5.2. Stabilisabilité et détectabilité interprétées par décomposition de Kálmán

On se réfère ici au paragraphe 6.8 page 263 dédié à la décomposition de Kálmán. Soit la forme canonique de Kálmán relative à la commandabilité exprimée en (6.17) page 264. Il est clair que :

La paire  $(A, B)$  est stabilisable si et seulement si  $\tilde{A}_{22}$  est Hurwitz-stable, c'est-à-dire que la stabilisabilité n'est autre que la commandabilité des parties instables du système.

5. Il y a là un abus de langage usuel que lecteur voudra bien pardonner à l'auteur : on parle souvent de pôle ou de valeur propre stable alors qu'il s'agit de la convergence du mode associé. Puissent les dieux des mathématiques pardonner aux automaticiens qui ne savent pas ce qu'ils font !

En effet, si l'on considère un retour d'état appliqué à cette réalisation,

$$u(t) = \tilde{K} z_c = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} z_c, \quad \tilde{K}_1 \in \mathbb{R}^{r_c}.$$

l'équation dynamique devient, en boucle fermée,

$$\dot{z}_c = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1 \tilde{K}_1 & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1 \tilde{K}_2 \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} z_c.$$

Quel que soit  $\tilde{K}$ , le bloc  $\tilde{A}_{22}$  est inaltéré par la loi de commande. Or ses valeurs propres sont aussi valeurs propres de toute la matrice d'état notée  $\tilde{A}_f$  (puisque cette dernière est bloc-triangulaire). Ainsi, pour que  $\tilde{A}_f$  puisse être Hurwitz-stable, il est nécessaire que  $\tilde{A}_{22}$  le soit.

De façon duale, soit la forme canonique de Kálmán relative à l'observabilité exprimée en (6.18) page 267. Il est clair que :

La paire  $(A, B)$  est détectable si et seulement si  $\check{A}_{22}$  est Hurwitz-stable, c'est-à-dire que la détectabilité n'est autre que l'observabilité des parties instables du système.

En effet, si l'on considère une injection de sortie appliquée à cette réalisation,

$$Bu(t) = \check{K} y = \begin{bmatrix} \check{K}_1 \\ \check{K}_2 \end{bmatrix} y, \quad \check{K}_1 \in \mathbb{R}^{r_o}.$$

la matrice dynamique devient, après cette injection,

$$\check{A}_i = \begin{bmatrix} \check{A}_{11} + \check{K}_1 \check{C}_1 & 0 \\ \check{A}_{12} + \check{K}_2 \check{C}_1 & \check{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

Quel que soit  $\check{K}$ , le bloc  $\check{A}_{22}$  est inaltéré par l'injection de sortie. Or ses valeurs propres sont aussi valeurs propres de toute la matrice d'état  $\check{A}_i$  (puisque cette dernière est bloc-triangulaire). Ainsi, pour que  $\check{A}_i$  puisse être Hurwitz-stable, il est nécessaire que  $\check{A}_{22}$  le soit.

Exemple :

Soit l'exemple du paragraphe 6.8.3 page 268 pour lequel une décomposition de Kálmán a été opérée. La réalisation obtenue est rappelée ci-après :

$$A_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_K = [ 1 \ 0 \ 3 \ 0 ], \quad D_K = 1.$$

Cette réalisation est une décomposition de Kálmán complète mais elle coïncide aussi avec une décomposition relative à la commandabilité (cf. 6.17) page 264), faisant apparaître ici deux pôles non commandables ou plus exactement un pôle double non commandable égal à 1. Ce dernier correspond à la valeur propre double du bloc

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

dans la matrice triangulaire supérieure  $A_K$ . On peut alors voir qu'un retour d'état dans cette base ne modifie que la première ligne de la matrice dynamique et que cette dernière reste bloc triangulaire. Elle conserve le même bloc exhibé ci-avant et la valeur propre non commandable n'est pas modifiée. Sa partie réelle étant positive, on peut conclure que ce modèle n'est pas stabilisable.

## 7.6. Stabilisation

Il est possible d'aller un peu plus loin dans la démarche et de pousser la logique, en cas de stabilisabilité, jusqu'à la recherche d'un vecteur (ou d'une matrice pour un système multi-entrées<sup>6</sup>) de retour d'état qui stabilise le système, et ce même si la commandabilité du système n'est pas complète.

Si l'on considère la définition de la stabilisabilité (détectabilité) donnée au début de la partie 7.5 page 321, en l'associant à la seconde méthode de Liapounov présentée au paragraphe 5.3.3 page 216, on peut formuler la proposition suivante.

---

6. En effet, le contenu de ce paragraphe s'étend tout naturellement au cas des systèmes multivariables.

La paire de matrices  $(A, B)$  est Hurwitz-stabilisable (respectivement la paire de matrices  $(A, C)$  est Hurwitz-déteçtable) si et seulement si :

- soit il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et un vecteur ligne (colonne)  $L \in \mathbb{R}^n$  tels que :

$$\begin{aligned} AP + BL + PA' + L'B < 0 \\ (\text{resp. } A'P + C'L' + PA + LC < 0); \end{aligned} \quad (7.30)$$

- soit, quelle que soit la matrice définie négative  $Q$ , il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et un vecteur ligne (colonne)  $L \in \mathbb{R}^n$  tels que :

$$\begin{aligned} AP + BL + PA' + L'B = Q \\ (\text{resp. } A'P + C'L' + PA + LC = Q). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Dans les deux cas, un vecteur de retour d'état  $K$  stabilisant (resp. un vecteur d'injection de sortie  $K$  stabilisant) est donné par

$$K = LP^{-1} \quad (\text{resp. } K = P^{-1}L). \quad (7.32)$$

Il est intéressant de constater que le retour d'état (a priori le vecteur le plus utile des deux vecteurs  $K$ ) se traite en utilisant une équation ou une inégalité de Lyapunov duale (c.-à-d. que l'on raisonne par rapport au système dual) alors que l'injection de sortie (potentiellement utile en tant que gain d'observateur : voir chapitre 8) se traite en utilisant le système primal. L'inversibilité de la matrice  $P$  est assurée par sa définition positive. En appliquant le premier changement

de variable de (7.32) aux premières expressions de (7.30) ou (7.31), le critère de Liapounov est satisfait pour la matrice d'état en boucle fermée  $(A + BK)'$  qui est Hurwitz-stable si et seulement si sa transposée  $(A + BK)$  l'est aussi. De manière duale, le second changement de variable de (7.32) appliqué aux secondes équations de (7.30) ou (7.31) permet de vérifier le critère de Liapounov pour la matrice d'état  $(A + KC)$ .

Les égalités données en (7.30) sont *a priori* préférées aux inégalités. Cependant, les inégalités matricielles linéaires en les inconnues, telles que celles données en (7.31) peuvent être raisonnablement abordées grâce à des méthodes numériques développées et mises à disposition sous formes de boîtes à outils logicielles depuis le début des années 1990. Ces inégalités sont plus connues sous le vocable anglais de *Linear Matrix Inequalities (LMI)*.

## 7.7. Retour d'état et énergie de commande

Dans ce petit paragraphe, l'auteur cherche à mettre en garde le lecteur quant à un risque majeur qu'il encourt si, lors de la synthèse par retour d'état, il se laisse emporter par les mathématiques. En effet, ce chapitre a exposé un problème essentiel qui est celui du placement de pôles. Lorsque le système est commandable, ce problème admet une solution quels que soient les pôles à placer. Dès lors, on peut être tenté de penser que la commandabilité est la seule contrainte. En théorie, c'est vrai mais en pratique, ça ne l'est pas. Il en existe une autre, plus dure à prendre en compte, qui a été volontairement occultée dans ce chapitre : l'énergie de commande doit respecter les contraintes physiques du procédé.

Pour être plus clair, il est raisonnable de penser que les actionneurs du système par lesquels la commande  $u$  est appliquée au procédé présentent des limites, ce qui signifie que la commande  $u$  est en pratique contrainte à évoluer dans une gamme de données. Le concepteur d'une loi de commande doit donc prendre garde de ne pas dépasser les bornes de cet intervalle. Dans un tel cas, l'actionneur introduirait une saturation, donc une non-linéarité qui pourrait, dans certains cas, engendrer de sérieux désagréments, l'instabilité par exemple.

Bien entendu, toutes les lois de commande sont susceptibles de générer de tels soucis. Dans le cas d'un placement de pôles par retour d'état, pour réduire le risque de saturation sur  $u$ , des précautions peuvent être prises :



- éviter de choisir des pôles trop rapides qui génèrent souvent de grandes composantes de  $K$  (le risque est d'autant plus grand que le système est faiblement commandable et donc nécessite une grande énergie de commande) ;
- de façon générale, ne pas trop éloigner le spectre en boucle fermée du spectre en boucle ouverte lorsque c'est possible (là aussi, ceci tend à réduire l'énergie de commande).

Si le risque de saturation semble plus fort que la nécessité de placer des pôles, il est possible de synthétiser une commande qui, plutôt que de placer le spectre du système bouclé, minimise l'énergie de commande (voir chapitre 11). Il existe des méthodes pour prendre en compte l'éventuelle saturation de  $u$  lors de la synthèse de  $K$  mais la plupart de ces méthodes sortent très largement du cadre proposé par ce document.

## 7.8. Quelques éléments historiques

---

**Biographie 7.1** Robert W. Bass : mathématicien et physicien états-unien (1930-2013).

Il obtint son diplôme de premier degré universitaire en 1950 à l'Université Johns Hopkins puis son master à l'Université d'Oxford en 1950 (grâce à une aide de l'association Rhodes Scholarship). Il revint à l'Université Johns Hopkins pour décrocher son doctorat de mathématiques en 1955. Il poursuivit ses études post-doctorales à Princeton sous la responsabilité de Solomon Lefschetz<sup>7</sup>, et intégra le fameux RIAS, puis le laboratoire de Physique des plasmas de l'Université de Princeton (1957), avant de revenir au RIAS (1959). R. Bass n'eut de cesse de changer de poste toute sa carrière. Il devint associate professor en science de l'ingénierie aérospatiale à



---

7. voir biographie 3.1 page 76.

*l'Université du Colorado en 1965, professeur de physique et astronomie en 1971 à l'Université de Brigham. Puis, il participa, sous différents statuts, à diverses activités industrielles et académiques. Durant sa carrière ponctuée de récompenses, ses travaux théoriques eurent de grandes répercussions dans de nombreux champs applicatifs tels que l'aérospatial, l'armement, etc. Si l'on se focalise sur sa contribution à l'Automatique, il est possible de la résumer de la façon suivante :*

- *Théorème de Bass-Roth (établissement du « filtre de Kálmán-Bucy » (une technique qui va au-delà du propos de ce document, qui est fort utilisée, dont l'impact sur nos technologies est majeur et qui doit son nom à R. E. Kálmán et à Richard Snowden Bucy<sup>8</sup> = par factorisation spectrale. Les extensions ultérieures de ce théorème par d'autres auteurs servent notamment à la localisation globale par satellite (système Global Positioning Satellite (GPS).*
- *L'algorithme GASP (Generalized Automatic Synthesis Program) généralisant l'algorithme ASP de Kálmán, utilisé pour l'implantation du filtre de Kálmán. Ce programme fut encore étendu par d'autres contributeurs par la suite.*
- *La notion de « système adjoint », utilisée dans la commande en temps optimal, qui préfigura partiellement ce qui allait être le principe du maximum de Pontryagin.*
- *Le filtre de Bass-Norum-Schwartz qui peut-être lui aussi lié au filtre de Kálmán-Bucy.*
- *La formule de Bass-Gura pour le placement de pôles (équation (7.11) page 305), qui est la formule la plus directe pour réaliser un placement de pôles par retour d'état. Cette formule aurait été établie par R. Bass seul avant qu'il ne la republie avec son élève Ira Gura.*
- *Etc. La liste est loin d'être exhaustive.*

*Comme il peut être vu à travers cette très partielle liste, les travaux de R. Bass sont liés à ceux de R. E. Kálmán. Bass présentait Kálmán comme son « protégé » et l'un et l'autre n'avaient de cesse de s'envoyer des roses. Ainsi, Bass vantait la théorie du filtre de Kálmán (et donc tout son cortège d'éléments précurseurs, entre autres l'essentiel de cet ouvrage) comme une technologie majeure dans le domaine aérospatial (« key enabling technology of the aerospace age ») ayant permis à l'Humanité de connaître, entre autres, le GPS. Il déclare aussi que c'est la principale technologie ayant émergé de la Guerre froide et*

---

8. ingénieur en aérospatial états-unien (1935-).

que Kálmán a apporté à la théorie des systèmes ce qu'Euclide<sup>9</sup> a apporté à la géométrie et ce que Newton<sup>10</sup> a apporté à la dynamique mécanique. De façon réciproque, Kálmán appelle la formule de Bass-Gura « the fundamental theorem of the control theory » (le théorème fondamental de la commande automatique). De là à y voir une amitié...

Les domaines d'intérêt de R. Bass vont bien au delà de l'Automatique (cf. <http://www.innoventek.com>) et il fut impliqué dans un certain nombre de controverses épistémologiques. Il comptait notamment au nombre des opposants à la théorie darwinienne de l'évolution<sup>11</sup> et prône le créationnisme. Attention l'abus d'Automatique peut entraîner de fâcheuses conséquences !

---

Pour une biographie de R. E. Kálmán, le lecteur peut consulter l'annexe I.2 page 777.

---

9. mathématicien de la Grèce antique (vers 300 av. J. C.).

10. Sir Isaac Newton, philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien britannique (1642 ou 1643-1727).

11. du nom de Charles Darwin, naturaliste anglais (1809-1882).

## 7.9. Exercices

### 7.9.1. Un peu de calcul littéral

Il s'agit là d'un exercice un peu fastidieux sur le plan calculatoire mais si le lecteur parvient au bout de cet exercice, il pourra considérer qu'il a déjà acquis une quantité importante de connaissances sur le placement de pôles par retour d'état.

Le modèle utilisé est celui de la montgolfière, présenté d'abord en §3.9.3 page 109, mis sous forme d'équation d'état en §3.10.3 page 133, et rappelé ci-après :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \sigma & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \end{cases}$$

(L'équation de sortie ne sera pas utile pour cet exercice.)

La précision n'est pas requise car le pilote de la montgolfière s'occupe de gérer l'altitude de la montgolfière en régime permanent. Cependant, on peut imaginer que la dynamique de réaction importe à ce pilote. En supposant que tout l'état peut être mesuré (hypothèse ô combien irréaliste), on souhaite calculer une loi de commande qui assure une certaine dynamique du régime transitoire au travers du choix des pôles en boucle fermée. Aucune valeur numérique n'est proposée donc tous les calculs doivent se faire de manière littérale (ainsi, si les paramètres du modèle d'état changent ( $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\sigma$ ), le calcul pourra être réutilisé).

#### Questions :

- Calculer une loi de commande par retour d'état qui place un pôle unique à  $(-\eta)$  (avec  $\eta > 0$ ) en utilisant l'algorithme du paragraphe 7.2.3.3 page 304 ainsi que l'aide fournie ci-après.
- Faire de même en utilisant la formule de Bass-Gura.
- Comparer, commenter les deux calculs.

Petite aide pour éviter les inversions difficiles (mais faisables!)

Voici trois petites inversions matricielles qui pourront être utiles à certaines étapes des calculs (mais quand?) :

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \sigma & \sigma(\alpha + \beta) \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{\sigma} & \frac{\alpha\beta}{\sigma} \\ 0 & \frac{1}{\sigma} & -\frac{\alpha + \beta}{\sigma} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\beta & 1 \\ 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} \\ 0 & \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 1 & \frac{\beta}{\sigma} & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta & -(\alpha + \beta) & 1 \\ -(\alpha + \beta) & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & (\alpha + \beta) \\ 1 & (\alpha + \beta) & (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta \end{bmatrix} .$$

**7.9.2. Oh là! ça tangué!**

On considère la maquette d'hélicoptère à trois degrés de liberté fabriquée par ADAPTECH<sup>©</sup>, modélisée lors de la résolution de l'exercice 3.9.16 page 125. On s'intéresse ici à la commande de l'angle de tangage. Le principe d'action sur cet angle de tangage  $p$  de l'hélicoptère (inclinaison vers l'avant ou vers l'arrière) est rappelé sur la figure 7.7. L'élévation de l'hélicoptère est supposée constante.

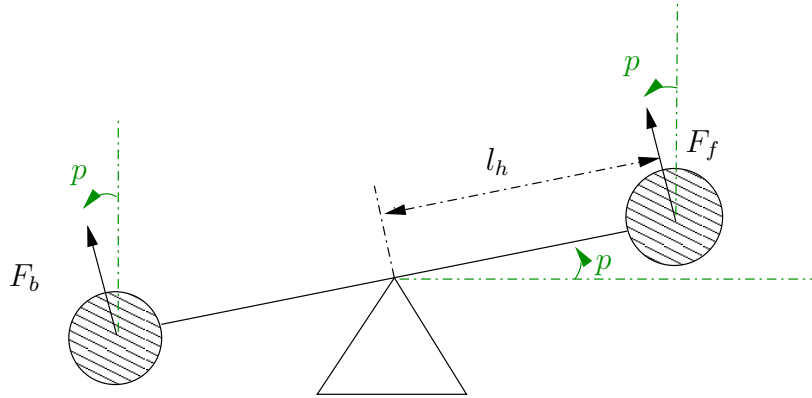


FIGURE 7.7 – Principe du tangage de l'hélicoptère

On rappelle que la demi-longueur de l'hélicoptère (qui est symétrique) est notée  $l_h$ . Le moment d'inertie de l'hélicoptère relativement à l'axe de tangage est noté  $J_p$ .

Les hélices ont des masses identiques de sorte que l'hélicoptère présente une symétrie par rapport à son axe de tangage. Les forces exercées sur les hélices ( $F_f$  ( $f$  pour *front* ou *forward*) et  $F_b$  ( $b$  pour *back* ou *backward*)) sont proportionnelles (en un rapport  $q$ ) aux tensions d'excitation des moteurs  $V_f$  et  $V_b$ .

Attention,  $p$  (pour *pitch*, le tangage) ne désigne pas ici la variable de Laplace!

On considère maintenant que l'entrée est la tension différentielle  $u = V_f - V_b$ .

Questions :

- Déterminer une représentation d'état décrivant le tangage de l'hélicoptère (l'état sera noté  $x$ ).
- De quel ordre est-elle?
- De quel type de comportement s'agit-il?
- Faire l'application numérique avec  $l_h = 1$ ,  $J_p = 1$  et  $q = 3$  (les valeurs n'étant pas réalistes pour faciliter les calculs, aucune unité n'est précisée).

- Le modèle d'état est-il stable? (Il ne faut pas oublier les notions apprises précédemment!)

On décide de commander l'angle de tangage à l'aide d'une loi de commande de type retour d'état :

$$u(t) = Kx(t) + Hp_c(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} x(t) + Hp_c(t) \quad (7.33)$$

$K$  est la matrice de retour d'état,  $p_c(t)$  est la consigne de tangage et  $H$  est un scalaire de précommande.

Questions :

- Le modèle du procédé est-il commandable (utiliser le critère de Kálmán)?
- Est-il formulé dans la base canonique de commande? Est-ce utile de faire un changement de base pour effectuer un retour d'état?
- Calculer  $K$  et  $H$  de manière à placer un pôle double égal à  $(-3)$  en boucle fermée et assurer un gain statique unitaire.

En réalité, on craint que la commande  $u = V_d$  ne soit entachée d'un *offset*. Ce dernier sera assimilé à une perturbation en échelon sur  $u$ .

Questions :

- Proposer une nouvelle loi de commande par adjonction d'intégrateur(s) qui prenne la perturbation en compte (selon la première approche, cf. §7.4.1 page 310).
- Déterminer le nouveau modèle d'état en boucle ouverte de telle sorte qu'il inclut l'intégrateur. De quel ordre est-il?
- Le modèle n'étant pas exprimé dans la case canonique de commande, proposer un changement de base *simple* qui conduise à cette base canonique.
- Calculer un nouveau retour d'état et une nouvelle précommande de sorte que le gain statique soit unitaire et que les pôles du système bouclé soient tous égaux à  $(-3)$ .
- Exprimer la loi de commande globale dans le domaine temporel (c'est-à-dire  $u(t)$  en fonction de  $p(t)$ ,  $p_c(t)$  et  $x(t)$ ). Faire de même en faisant apparaître l'angle de tangage  $p$ .

- Souligner un inconvénient de cette loi de commande sur le plan pratique.
- Remédier à cet inconvénient en synthétisant une loi de commande proche selon une approche alternative (cf. §7.4.2 page 315).
- Si l'on dispose d'un capteur de tangage, de quel autre capteur est-il nécessaire de disposer pour mettre en œuvre la loi de commande obtenue.
- Que faire si ce dernier ne peut être utilisé ?

### 7.9.3. Moteur à courant continu

Il s'agit de reprendre à peu de choses près le modèle du moteur à courant continu, introduit au paragraphe 2.3.2 page 47, et dont une réalisation a été obtenue au paragraphe 3.10.11 page 145. Toutefois, les équations sont quelque peu modifiées. L'équation électrique reste :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + e = u,$$

avec  $e = k\Omega$ , mais l'équation mécanique est complétée :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma - f\Omega - C_l$$

où  $\Gamma = ki$  et où  $C_l$  représente une perturbation associée au couple de charge.

Pour simplifier les calculs, les valeurs numériques données en §2.3.2 page 47 sont réutilisées ici, à savoir :

- $J = 1 \text{ kg.m}^2$
- $f = 1 \text{ N.m.s}$
- $R = 1 \Omega$
- $L = 10 \text{ mH}$
- $k = 1 \text{ N.m/A} = 1 \text{ V.s}$

#### Question :

Déterminer une réalisation du système (comportant deux entrées,  $u$  et  $C_l$  et une sortie  $y = \Omega$ ) et faire l'application numérique.

Il s'agit d'appliquer au modèle obtenu une loi de retour d'état :



$$u(t) = Kx(t) + Hy_c(t). \quad (7.34)$$

Questions :

- Calculer  $K$  et  $H$  de sorte à placer un pôle à  $(-98)$  et un autre à  $(-5)$ , ainsi qu'à obtenir un gain statique unitaire en boucle fermée.
- Calculer la réalisation en boucle fermée, dans la base canonique de commande.
- Calculer la fonction de transfert entre  $C_l(p)$  et  $Y(p) = \Omega(p)$ .
- Conclure sur l'effet de la commande.
- En supposant que les perturbations de charge sont de type échelon, remédier au problème constaté en s'inspirant du paragraphe 7.4.2 page 315 (un pôle supplémentaire à  $(-5)$  pourra être placé).
- Vérifier que le transfert statique entre la consigne de vitesse  $y_c = \Omega_c$  et la vitesse réelle  $y = \Omega$  est unitaire.
- Vérifier que transfert statique entre la perturbation de charge  $C_l$  et la vitesse  $y = \Omega$  est nul.

#### 7.9.4. Asservissement de position d'une bille sur un rail

On revient ici sur la bille dont on asservit la position en jouant sur l'inclinaison d'un rail (voir §3.9.7 page 114). Le système a déjà été modélisé sous forme de représentation d'état au paragraphe 3.10.7 page 136 mais. Néanmoins, la réalisation obtenue est rappelée :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ gk \end{bmatrix}$$

$$C = [ 1 \quad 0 ] \quad D = 0.$$

Questions :

- Déterminer les poles du système en boucle ouverte et conclure quant à sa stabilité asymptotique.
- Montrer que la fonction de transfert associée s'écrit

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p) = \frac{G}{p(1 + \tau p)},$$

en précisant les expressions de  $G$  et  $\tau$ .

On se propose ici d'introduire les valeurs numériques, peu réalistes mais simples :

$$gk = 2, \quad \frac{f}{m} = 5$$

Question :

- Déterminer une loi de commande de retour statique d'état avec gain de précommande qui place les pôles en boucle fermée à (-4) et (-5) et qui assure un gain statique unitaire.

Cependant, on craint des variations paramétriques dans le modèle ainsi qu'un *offset* sur la commande aussi préfère-t-on remplacer la stratégie de précommande par l'adjonction d'un intégrateur.

Question :

- Calculer une loi de commande par retour d'état, avec intégrateur, qui place un pôle à (-4) et deux pôles à (-5).

### 7.9.5. Stabilisation par résolution d'inégalité

Soit la paire  $(A, B)$  suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il s'agit de déterminer un vecteur  $K = [k_1 \ k_2]$  tel que la matrice  $(A + BK)$  est stable au sens de Hurwitz, c'est-à-dire ne possède que des valeurs propres à partie réelle négative.

Pour calculer un tel vecteur il peut sembler possible de placer deux pôles dans le demi-plan gauche ouvert. Toutefois, l'application de l'algorithme du paragraphe 7.2.3.3 (c.-à-d. de la formule de Bass Gura) n'est pas possible ici car le système n'est pas commandable. Cependant, il est stabilisable et le seul pôle non commandable est égal à (-1) donc il ne cause pas de souci. En fait, il est assez facile de voir que la matrice

$$A_f = A + BK = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 + k_1 & 1 + k_2 \end{bmatrix}$$

est triangulaire inférieure et ses deux valeurs propres sont  $(-1)$  et  $(1 + k_2)$  (la première ne pouvant être modifiée par le retour  $K$ ). En choisissant n'importe quel retour tel que  $k_2$  soit inférieur à  $(-1)$ , le système associé est stabilisé (asymptotiquement).

Ainsi, le problème, s'il ne peut être résolu par l'approche de Bass-Gura, admet néanmoins une solution. Qui plus est cette dernière est obtenue très facilement. Mais l'objectif de cet exercice est en fait d'illustrer les propositions du paragraphe 7.6 page 326.

Questions :

- Vérifier l'assertion de stabilisabilité de  $(A, B)$  énoncée ci-avant par le critère PBH.
- Trouver manuellement une solution à l'inégalité matricielle (7.30) page 327 (attention, il existe une infinité de solutions admissibles).
- Dédire le retour  $K$  correspondant.
- Commenter la méthode.

## 7.10. Correction des exercices

### 7.10.1. Un peu de calcul littéral

Le pôle unique est fixé par l'énoncé à  $(-\eta)$ . Puisque le modèle est d'ordre 3, il s'agit donc d'un pôle triple. On applique ici l'algorithme donné en §7.2.3.3 page 304.

**Étape 1** La matrice de commandabilité de Kálmán est donnée par

$$Q_c = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \sigma & \sigma(\alpha + \beta) \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}.$$

Cette matrice étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres apparaissent sur sa diagonale. Elles ne sont donc pas nulles, ce qui prouve que  $Q_c$  est de rang plein et donc que le système est commandable.

**Étape 2** Puisqu'il faut placer le pôle triple  $(-\eta)$ , le polynôme caractéristique désiré pour la boucle fermée est donné par

$$D_d(p) = (p + \eta)^3 = p^3 + 3\eta p^2 + 3\eta^2 p + \eta^3,$$

ce qui, avec les notations de l'algorithme, amène

$$\begin{cases} \alpha_0 & = & \eta^3, \\ \alpha_1 & = & 3\eta^2, \\ \alpha_2 & = & 3\eta. \end{cases}$$

**Étape 3** Quant au polynôme caractéristique de la matrice  $A$ , puisque les trois pôles déterminés aisément en §3.10.3 page 133 sont  $\alpha$ ,  $\beta$  et 0, il s'écrit

$$D(p) = (p - \alpha)(p - \beta)p = p^3 - (\alpha + \beta)p + \alpha\beta p,$$

ce qui, toujours avec les notations de l'algorithme, amène

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = \alpha\beta, \\ a_2 = -(\alpha + \beta). \end{cases}$$

Étape 4 Grâce à ces coefficients, il devient possible de déterminer le retour d'état plaçant le spectre désiré *dans la base canonique de commande* :

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= [ (a_0 - \alpha_0) \quad (a_1 - \alpha_1) \quad (a_2 - \alpha_2) ] \\ &= [ -\eta^3 \quad (\alpha\beta - 3\eta^2) \quad -(\alpha + \beta) - 3\eta ] . \end{aligned}$$

Étape 5 La matrice de passage à la base canonique de commande est donnée par (cf. aussi §3.7.2 page 90)

$$M = [ m_1 \quad m_2 \quad m_3 ] ,$$

avec (après calcul)

$$\begin{cases} m_3 = B & = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \\ m_2 = (A + a_2 I)B & = \begin{bmatrix} -\beta \\ \sigma \\ 0 \end{bmatrix} , \\ m_1 = (A^2 + a_2 A + a_1 I)B & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma \end{bmatrix} . \end{cases}$$

Il vient donc

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\beta & 1 \\ 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Étape 6 D'après l'aide fournie par l'énoncé, il vient aussi

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} \\ 0 & \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 1 & \frac{\beta}{\sigma} & 0 \end{bmatrix} .$$

Cette inversion permet de déduire le retour d'état dans la base originale (après simplification de la deuxième composante) :

$$K = \tilde{K}M^{-1} = \left[ -(\alpha + \beta) - 3\eta \left| -\frac{3\eta^2 + 3\beta\eta + \beta^2}{\sigma} \right| -\frac{\eta^3}{\sigma} \right]. \quad (7.35)$$

Si l'on veut utiliser la formule de Bass-Gura donnée en (7.11) page 305, et qui se récrit

$$K = \tilde{K}T_c^{-1}Q_c^{-1},$$

il peut être utile d'inverser  $Q_c$ . Grâce à l'aide fournie par l'énoncé, il vient

$$Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{\sigma} & \frac{\alpha\beta}{\sigma} \\ 0 & \frac{1}{\sigma} & -\frac{\alpha + \beta}{\sigma} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, il faut construire et inverser la matrice de Töplitz  $T_c$ . L'expression (7.10) page 305 s'instancie ici par

$$T_c = \begin{bmatrix} \alpha\beta & -(\alpha + \beta) & 1 \\ -(\alpha + \beta) & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

qui, une nouvelle fois grâce à l'aide fournie, s'inverse en

$$T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & (\alpha + \beta) \\ 1 & (\alpha + \beta) & (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta \end{bmatrix}.$$

Le produit  $T_c^{-1}Q_c^{-1}$  devient donc

$$T_c^{-1}Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} \\ 0 & \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 1 & \frac{\beta}{\sigma} & 0 \end{bmatrix},$$

qui n'est autre que  $M^{-1}$ . Dès lors, il est facile de calculer

$$K = \tilde{K}T_c^{-1}Q_c^1 = \tilde{K}M^{-1},$$

qui a en fait déjà été calculé en (7.35). Il vient donc

$$K = \begin{bmatrix} -(\alpha + \beta) - 3\eta & -\frac{3\eta^2 + 3\beta\eta + \beta^2}{\sigma} & -\frac{\eta^3}{\sigma} \end{bmatrix}.$$

L'énoncé fournit trois résultats d'inversions matricielles mais en réalité, seule l'inversion de  $M$  est réellement nécessaire. Tout dépend de la façon dont on gère le calcul. Une application rapide de la formule de Bass-Gura reproduisant scrupuleusement le calcul induit par l'expression de  $K$  donnée en (7.11) page 305 conduit, ainsi qu'il vient d'être fait, à déterminer les trois inverses. Toutefois, il faut noter que

$$T_c^{-1}Q_c^{-1} = (Q_cT_c)^{-1}.$$

Or il est rapide de vérifier que

$$Q_cT_c = M,$$

ce qui conduit bien à  $T_c^{-1}Q_c^{-1} = M^{-1}$ . Donc seule l'inversion de  $M$  est nécessaire. Ce qui peut paraître une subtilité de calcul n'est en fait que la logique même de la formule de Bass-Gura qui est justement basée sur l'équation  $M = Q_cT_c$ .

Quant à la comparaison des deux résultats, elle est maintenant évidente : les deux retours sont identiques. Rien de surprenant à cela puisque la formule de Bass-Gura, comme on vient juste de le rappeler, n'est qu'une forme résumée de l'algorithme. Enfin, quand bien même les deux techniques de détermination de  $K$  auraient été radicalement différentes, comment les deux retours auraient-ils pu être différents sachant qu'il n'existe qu'une seule solution au problème de placement de pôles par retour d'état (pour un système à une seule entrée!) dès lors que ce dernier est possible?

Il a pu coûter des efforts, de l'énergie, au lecteur parvenu jusqu'ici mais si c'est le cas, il a compris l'essentiel du contenu du chapitre.

## 7.10.2. Oh là! ça tangue!

L'équation différentielle qui exprime la dynamique de tangage a déjà été établie au paragraphe 3.10.16 page 153, plus précisément à l'équation (3.55), qui pour la nouvelle commande  $u = V_f - V_b$ , devient

$$\ddot{p} = \frac{ql_h}{J_p} u.$$

Cette équation a le bon goût d'être déjà linéaire.

À l'instar du choix fait en §3.10.16 page 153, le vecteur d'état « naturel » est ici  $x = [p \quad \dot{p}]'$ . Il conduit à la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_h q}{J_p} \end{bmatrix} u, \\ y = [1 \quad 0] x. \end{cases}$$

La matrice d'évolution consiste en un seul bloc de Jordan indiquant une valeur propre nulle de multiplicité algébrique double. Le comportement correspondant est donc celui d'un *double intégrateur*.

L'application numérique amène le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u, \\ y = [1 \quad 0] x. \end{cases}$$

Quelles que soient les valeurs des paramètres du modèle, ce dernier est instable puisqu'il s'agit d'un double intégrateur (cf. §5.3.1 page 206, le cas où  $\text{rang}(A) < n$ ). Du reste, ce résultat avait déjà été établi au paragraphe 5.5.3 page 225. Si le lecteur l'a remarqué, alors il est très attentif!

La matrice de commandabilité de Kálmán est

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$



Elle est clairement de plein rang  $n = 2$ , donc le système est commandable.

Le modèle d'état présenté ci-avant n'est pas exactement une forme canonique de commande (forme compagne horizontale : cf. §3.5.1.2 page 84) mais il y ressemble beaucoup. Pour avoir une forme canonique de commande, il faudrait que la seconde composante de  $B$  ne soit pas égale à 3 mais à 1. Cette petite différence ne justifie pas forcément que l'on fasse un changement de base et que l'on suive scrupuleusement toute la procédure de placement de pôles.

En effet, en restant dans la base initiale, il vient

$$A_f = A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3k_1 & 3k_2 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice d'évolution de la boucle fermée est sous forme compagne horizontale donc le polynôme caractéristique se déduit immédiatement :

$$D_f(p) = p^2 - 3k_2p - 3k_1.$$

Il doit coïncider avec polynôme caractéristique désiré, à savoir

$$D_d(p) = (p + 3)^2 = p^2 + 6p + 9.$$

L'identification de ces deux polynômes conduit à

$$K = [k_1 \quad k_2] = [-3 \quad -2].$$

Le modèle d'état, une fois bouclé par la loi (7.33) donnée page 335, s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3H \end{bmatrix}}_{B_f} p_c, \\ y = [1 \quad 0] x. \end{cases}$$

Il correspond à la fonction de transfert (où, cette fois-ci,  $p$  désigne la variable de Laplace)

$$G_f(p) = C(pI - A_f)^{-1} B_f = \frac{1}{p^2 + 6p + 9} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} p + 6 & 1 \\ -9 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3H \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow G_f(p) = \frac{3H}{p^2 + 6p + 9}.$$

Il est clair que la volonté d'obtenir un gain statique unitaire  $G_f(0) = 1$  conduit au choix  $H = 3$ .

Malheureusement si un tel système est précis en position en l'absence de perturbation sur la commande  $u$ , ce n'est plus le cas si cette commande présente un *offset* (cas pratique assez classique). La présence du double intégrateur dans la chaîne directe n'y change rien car la perturbation agit en amont de ces intégrateurs. Il est donc nécessaire d'ajouter un troisième intégrateur qui se place devant  $u$ . Il s'agit ici de se référer au paragraphe 7.4.1 page 310 et à la structure de commande donnée par la figure 7.4. La commande réelle  $u$  est donc vue comme l'intégrale d'une commande fictive  $\bar{u}$  à déterminer selon une loi de placement de pôles. Ainsi,

$$u = \int_0^t \bar{u}(\theta) d\theta.$$

Dans cette expression,  $\bar{u}$  sera calculée de manière à placer les pôles du système ainsi augmenté selon la formule

$$\bar{u} = \bar{K}\bar{x} + \bar{H}y_c,$$

où  $\bar{x}$  est le vecteur d'état du système augmenté,  $\bar{K}$  est déterminé de manière à placer les pôles et  $\bar{H}$  est calculé de manière à assurer un gain statique unitaire.

En effet, ce système augmenté d'un intégrateur passe à l'ordre 3 avec comme vecteur d'état  $\bar{x} = [x' \quad u]'$ . Le nouveau modèle en boucle ouverte s'écrit donc

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u} \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \bar{x} = \bar{C}\bar{x}. \end{cases}$$

Il s'en faut de nouveau de peu que le système ne soit déjà sous forme canonique. Si la composante égale à 3 dans  $\bar{A}$  était égale à 1, on aurait

une forme canonique de commande. Ceci signifie que le changement de base qui mène à la forme canonique est assez simple. En effet, le choix

$$\bar{x} = \overline{M}\tilde{x} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

conduit à la forme canonique de commande :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\bar{u} \\ y = [3 \ 0 \ 0] \tilde{x} = \tilde{C}\tilde{x}. \end{cases}$$

(On peut donc éviter le calcul de  $M$  par la méthode systématique.)

Placer un pôle triple à  $(-3)$  signifie que le le polynôme caractéristique désiré s'écrit

$$\overline{D}_d(p) = (p+3)^3 = p^3 + 9p^2 + 27p + 27 = p^3 + \overline{\alpha}_2 p^2 + \overline{\alpha}_1 p + \overline{\alpha}_0,$$

alors que le polynôme caractéristique du système en boucle ouverte (le triple intégrateur) est

$$\overline{D}(p) = p^3 = p^3 + 0p^2 + 0p + 0 = p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0.$$

Il s'ensuit que la loi de commande s'écrit, dans la base canonique,

$$\bar{u} = \tilde{K}\tilde{x} + \overline{H}p_c,$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_0 - \alpha_0) & (a_1 - \alpha_1) & (a_2 - \alpha_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -27 & -27 & -9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cette loi de commande conduit, en boucle fermée, à

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -27 & -27 & -9 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\overline{H} \end{bmatrix} p_c, \\ y = [3 \ 0 \ 0] \tilde{x}, \end{cases}$$

soit une forme « quasi canonique de commande » qui permet d'immédiatement déduire la fonction de transfert

$$\overline{G}_f(p) = \frac{3\overline{H}}{p^3 + 9p^2 + 27p + 27}.$$

Cette fonction de transfert présente un gain statique  $\overline{G}_f(0)$  unitaire si et seulement si  $\overline{H} = 9$ .

Il reste à déterminer le vecteur de retour d'état dans la base initiale :

$$\begin{aligned} \overline{K} &= \tilde{\overline{K}} \cdot \overline{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -27 & -27 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -9 & -9 & -9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Au final, la loi de commande s'écrit

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t \overline{u}(\theta) d\theta = \int_0^t (\overline{K}\overline{x}(\theta) + \overline{H}p_c(\theta)) d\theta \\ \Leftrightarrow u(t) &= \int_0^t (-9p(\theta) - 9\dot{p}(\theta) - 9u(\theta) + 9p_c(\theta)) d\theta \\ \Leftrightarrow u(t) &= -9p(t) - 9 \int_0^t p(\theta) d\theta - 9 \int_0^t u(\theta) d\theta + 9 \int_0^t p_c(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Hélas, cette commande peut présenter un problème de mise en œuvre car la relation ci-avant n'est pas strictement causale ce qui peut se révéler contraignant lors de l'implantation de la loi de commande (notamment si la loi de commande est réalisée approximativement par un calculateur). En outre, l'effet de la précommande  $H$  (c'est-à-dire la précision ne position) est sensible à d'éventuelles imprécisions sur les paramètres du modèle. Pour ces raisons, il est préférable de considérer l'approche alternative du paragraphe 7.4.2 page 315, c'est-à-dire obéissant à la structure de commande donnée par la figure 7.5 page 316. (Pour rappel, l'auteur invite d'ailleurs à systématiquement privilégier cette approche.) Le vecteur d'état augmenté est maintenant  $\overline{x} = \begin{bmatrix} x' & v \end{bmatrix}'$  où  $v$  est l'intégrale de l'écart de poursuite

$\varepsilon = p_c - p = y_c - y$ . Ce vecteur d'état évolue selon le modèle (7.21) page 316 qui s'instancie ici en

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} p_c \\ = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}_1\bar{u} + \bar{B}_2p_c, \\ y = [1 \ 0 \ 0] \bar{x} \\ = \bar{C}\bar{x}. \end{array} \right.$$

La loi de commande est donnée par la formule (7.20) page 316, rappelée ici :

$$u(t) = Kx(t) + Jv(t) = Kx(t) + J \int_0^t \varepsilon(\theta) d\theta.$$

Pour le cas présent, ceci revient à calculer

$$u = \underbrace{[K \ J]}_{\bar{K}} \bar{x} = [\bar{k}_1 \ \bar{k}_2 \ \bar{k}_3] \bar{x}$$

de façon à obtenir le pôle triple (-3) en boucle fermée.

Le polynôme caractéristique désiré est toujours

$$\bar{D}_d(p) = p^3 + 9p^2 + 27p + 27 = p^3 + \bar{\alpha}_2p^2 + \bar{\alpha}_1p + \bar{\alpha}_0$$

et le polynôme caractéristique en boucle ouverte est toujours

$$\bar{D}(p) = p^3 = p^3 + 0p^2 + 0p + 0 = p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0,$$

de sorte que, dans la base canonique de commande, le vecteur de retour d'état est toujours donné par

$$\tilde{\bar{K}} = [ -27 \quad -27 \quad -9 ].$$

La matrice de passage à la base canonique est construite en se référant à la formule de Bass-Gura (7.11) page 305. La matrice de commandabilité de Kálmán de la paire  $(\bar{A}, \bar{B}_1)$  se calcule assez aisément :

$$\bar{Q}_c = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 & \overline{AB}_1 & \overline{A^2B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

ce qui permet de vérifier, puisque  $\text{rang}(Q_c) = 3$ , que la paire  $(\bar{A}, \bar{B}_1)$  est bien commandable. De plus, la matrice de Töplitz associée au polynôme caractéristique en boucle ouverte se calcule encore plus facilement :

$$\bar{T}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de passage à la base canonique de commande est donnée par

$$\bar{M} = \bar{Q}_c \bar{T}_c = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ce qui implique

$$\bar{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Il vient alors

$$\bar{K} = \tilde{K} \bar{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & -3 & 9 \end{bmatrix},$$

ce qui signifie que la loi de commande s'écrit

$$u(t) = -9p(t) - 3\dot{p}(t) + 9 \int_0^t (p_c(\theta) - p(\theta)) d\theta$$

Il faut, en plus du capteur de tangage, disposer d'un capteur qui mesure sa dérivée. Si un tel capteur n'est pas utilisable, il faut construire la dérivée en question (c'est parfois difficile en pratique) ou en construire une estimation... voir le chapitre suivant !

### 7.10.3. Moteur à courant continu

En s'inspirant du paragraphe 3.10.11 page 145, le vecteur d'état naturel pour ce système est  $x = [x_1 \ x_2]' = [i \ \Omega]'$  et conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} C_l \\ = Ax + Bu + B_l C_l, \\ y = [0 \ 1] x \\ = Cx. \end{array} \right.$$

L'application numérique donne

$$A = \begin{bmatrix} -100 & -100 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_l = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 1].$$

Il faut maintenant placer les pôles du système bouclé par la loi (7.34) page 337 à (-98) et (-5). Si l'on se réfère au paragraphe 2.4.2 page 52, les pôles de la boucle ouverte sont approximativement égaux à (-99) et (-2). Cela signifie que l'on ne cherche pas vraiment à déplacer le pôle rapide (pourquoi dépenser de l'énergie de commande à modifier une dynamique peu influente, peu visible) et que le pôle dominant est accéléré. Même si les valeurs des paramètres sont irréalistes, la démarche est sensée et pour tout dire, plutôt classique.

On applique donc l'algorithme donné en §7.2.3.3, page 304, sur la paire  $(A, B)$  et le vecteur  $B_l$  est ignoré puisqu'il indique comment la perturbation agit sur le système alors que c'est la commande qui est intéressante pour l'heure.

**Étape 1** La matrice de commandabilité de Kálmán est donnée par

$$Q_c = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 100 & -10000 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure et ses valeurs propres sont sur sa diagonale. Aucune n'est nulle donc  $Q_c$  est de rang plein. Le système est commandable.

Étape 2 Le polynôme caractéristique désiré est

$$D_d(p) = (p + 98)(p + 5) = p^2 + 103p + 490 = p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0.$$

Étape 3 Quant au polynôme caractéristique de la matrice  $A$ , il a en fait déjà été calculé au paragraphe 2.3.2 page 47 (c'est le dénominateur de la fonction de transfert) :

$$D(p) = \det(pI - A) = p^2 + 101p + 200 = p^2 + a_1 p + a_0.$$

Étape 4 Grâce aux coefficients ainsi obtenus, il devient possible de déterminer le retour d'état plaçant le spectre désiré *dans la base canonique de commande* :

$$\tilde{K} = [ (a_0 - \alpha_0) \quad (a_1 - \alpha_1) ] = [ -290 \quad -2 ].$$

Étape 5 La matrice de passage à la base canonique peut se calculer à partir de  $Q_c$  et de  $T_c$ , la matrice de Töplitz donnée par

$$T_c = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En effet,

$$M = Q_c T_c = \begin{bmatrix} 100 & 100 \\ 100 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{100} \\ \frac{1}{100} & -\frac{1}{100} \end{bmatrix}.$$

Étape 5 Le vecteur de retour d'état dans la base initiale est donc

$$K = \tilde{K} M^{-1} = [ -0,02 \quad -2,88 ].$$

Il faut maintenant calculer  $H$ . Lors d'un retour d'état, le numérateur de la fonction de transfert du système concerné n'est pas modifié (il a été



calculé en §2.4.2 page 52). Le dénominateur passe de  $D(p)$  à  $D_d(p)$ . Il vient donc en boucle fermée, en tenant compte de la précommande  $H$ ,

$$G_f(p) = \frac{100H}{p^2 + 103p + 490}.$$

Pour avoir un gain statique  $G_f(0) = 1$ , il faut donc fixer  $H = 4,9$ . De façon alternative, dans la base canonique de commande, la matrice de sortie s'écrit

$$\tilde{C} = CM = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 100 \\ 100 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix}.$$

La précommande  $H$  est alors donnée par

$$H = \frac{\alpha_0}{b_0} = \frac{490}{100} = 4,9.$$

Toujours dans la base canonique de commande, pour la réalisation de la boucle fermée, la matrice  $\tilde{B}_l$  par laquelle  $C_l$  agit sur le système (en tant que perturbation) est donnée par

$$\tilde{B}_l = M^{-1}B_l = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{100} \\ \frac{1}{100} & -\frac{1}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{100} \\ \frac{1}{100} \end{bmatrix},$$

ce qui conduit à

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -490 & -103 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} y_c + \begin{bmatrix} -\frac{1}{100} \\ \frac{1}{100} \end{bmatrix} C_l \\ y = \begin{bmatrix} 100 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}. \end{cases}$$

Il est alors facile, à partir de cette forme, de déduire que la fonction de transfert entre le couple de charge et la sortie est

$$G_{l_f}(p) = -\frac{p + 102}{D_d(p)},$$

ce qui signifie qu'en régime permanent, si cette perturbation est assimilée à un échelon, il subsiste une amplification telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{C_l(t)} = G_{l_f}(0) = \frac{-102}{490} = -0,2082.$$

De ce fait, la perturbation en échelon n'est pas rejetée en régime permanent et il convient de mettre en œuvre une loi de commande qui corrige cet inconvénient.

Pour cela, l'approche du paragraphe 7.4.2 page 315 est utilisée. La loi de commande que propose cette approche est donnée en (7.20) page 316 et rappelée ci-après :

$$u(t) = Kx(t) + J \int_0^t \varepsilon(\theta) d\theta,$$

où  $\varepsilon$  désigne l'écart entre  $y_c$  et  $y$ . Le système augmenté de l'intégrateur peut être décrit en s'inspirant de (7.21) page 316, plus exactement en écrivant

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}_1 u + \bar{B}_2 y_c + \bar{B}_l C_l, \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u. \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & -100 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_1 &= \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_3 = \begin{bmatrix} B_l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{C} &= [C \ 0] = [0 \ 1 \ 0], \quad \bar{D} = D = 0. \end{aligned}$$

L'adjonction de l'intégrateur conduit au nouveau polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} \bar{D}(p) &= \det(pI - \bar{A}) = pD(p) \\ \Rightarrow \bar{D}(p) &= p^3 + 101p^2 + 200p = p^3 + \bar{a}_2 p^2 + \bar{a}_1 p + \bar{a}_0. \end{aligned}$$

Puisque le pôle supplémentaire est requis à  $(-5)$ , le polynôme caractéristique désiré pour la boucle fermée est donné par

$$\begin{aligned}\bar{D}_d(p) &= (p + 98)(p + 5)^2 \\ &= p^3 + 108p^2 + 1005p + 2450 \\ &= p^3 + \bar{\alpha}_2 p^2 + \bar{\alpha}_1 p + \bar{\alpha}_0.\end{aligned}$$

Ces deux polynômes permettent de déduire le vecteur de retour d'état dans la base canonique de commande du système augmenté, à savoir

$$\begin{aligned}\tilde{K} &= \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\bar{\alpha}_0 - \bar{\alpha}_0) & (\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_1) & (\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2450 & -805 & -7 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

La matrice de commandabilité de Kálmán de la paire augmentée  $(\bar{A}, \bar{B}_1)$  est égale à

$$\bar{Q}_c = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 & \bar{A}\bar{B}_1 & \bar{A}^2\bar{B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -10000 & 990000 \\ 0 & 100 & -10100 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}.$$

Il peut être noté qu'elle est triangulaire supérieure et donc que ses valeurs propres, figurant sur sa diagonale, ne sont pas nulles. Elle est donc de rang plein et le modèle augmenté, plus exactement la paire  $(\bar{A}, \bar{B}_1)$ , est commandable. Le paragraphe 7.4.2 page 315 laissait de toute façon assez peu de doute à ce sujet.

Quant à la matrice de Töplitz, elle s'exprime

$$\bar{T}_c = \begin{bmatrix} 200 & 101 & 1 \\ 101 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc la matrice de passage à la base canonique de commande est

$$\bar{M} = \bar{Q}_c \bar{T}_c = \begin{bmatrix} 0 & 100 & 100 \\ 0 & 100 & 0 \\ -100 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est assez facile de calculer son inverse :

$$\bar{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{100} \\ 0 & \frac{1}{100} & 0 \\ \frac{1}{100} & -\frac{1}{100} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, le gain  $\bar{K}$  est donné par

$$\bar{K} = [ K \quad J ] = [ -0,07 \quad -7,98 \quad 24,5 ].$$

La loi de commande s'écrit donc

$$u(t) = -0,07i(t) - 7,98\Omega(t) + 24,5 \int_0^t (\Omega_c(\tau) - \Omega(\tau))d\tau,$$

où  $\Omega_c(t)$  est la consigne de vitesse.

Le système en boucle fermé est décrit par

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K} \bar{x} + \bar{B}_2 y_c + \bar{B}_1 C_l, \\ y &= \bar{C} \bar{x} + \bar{D} u. \end{cases}$$

Pour déterminer le transfert statique entre  $y_c = \Omega_c$  et  $y = \Omega$ , il suffit de calculer

$$G_{y_c \rightarrow y}(0) = -\bar{C}(\bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K})^{-1} \bar{B}_2.$$

Pour se convaincre du bien fondé de cette formule, il faut se référer au paragraphe 7.3 page 308. Or la matrice  $\bar{A}_f = (\bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K})$  est égale à

$$\bar{A}_f = \bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K} = \begin{bmatrix} -107 & -898 & 2450 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Son déterminant est

$$\det(\bar{A}_f) = -2450.$$

En se référant aux paragraphes A.1.9 et A.1.12.1, respectivement page 650 et page 652, son inverse  $\overline{A}_f^{-1}$  peut être calculée. Toutefois, compte tenu des composantes nulles de  $\overline{C}$  et  $\overline{B}_2$ , il est inutile de calculer l'ensemble de  $\text{adj}(\overline{A}_f)$ , la matrice adjointe de  $\overline{A}_f$ . Il suffit de calculer la composante située à la deuxième ligne et à la troisième de colonne qui vaut, en l'occurrence, 2450. Étant donnée la valeur de  $\det(\overline{A}_f)$ , il vient

$$G_{y_c \rightarrow y}(0) = 1,$$

ce qui montre que la consigne est suivie en régime permanent. Mais ceci ne prend en compte que la contribution de  $y_c$  à  $y$ . Il convient de regarder aussi la contribution de  $C_l$ . Le transfert statique entre  $C_l$  et  $y$  est donné par

$$G_{C_l \rightarrow y}(0) = -\overline{C}(\overline{A} + \overline{B}_1 \overline{K})^{-1} \overline{B}_3.$$

Cette fois-ci, compte tenu des zéros dans  $\overline{C}$  et  $\overline{B}_3$ , c'est la composante située en deuxième ligne et deuxième colonne de  $\text{adj}(\overline{A}_f)$  qu'il faut déterminer. Elle est nulle donc

$$G_{C_l \rightarrow y}(0) = 0,$$

ce qui prouve qu'un à-coup de charge (donc une perturbation en échelon) est rejeté en régime permanent. Bien entendu, ceci ne fait qu'illustrer sur un exemple les conclusions du paragraphe 7.4.2 page 315.

#### 7.10.4. Asservissement de position d'une bille sur un rail

Les pôles de  $G(p)$  sont *a priori* 0 et  $-\frac{f}{m}$  (ce sont les valeurs propres de  $A$  qui sont sur sa diagonale car elle est triangulaire). Puisque  $\frac{f}{m} > 0$ , le système possède un pôle à partie réelle négative et un pôle sur l'axe imaginaire, il est marginalement stable mais pas asymptotiquement stable (cf. §5.3.1 page 206).

On sait que

$$m\ddot{y} = mg \sin(\alpha) - f\dot{y}.$$

En supposant que les hypothèses citées sont vérifiées, on a alors

$$(mp^2 + fp)Y(p) = mgkU(p).$$

Ainsi

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{G}{p(1 + \tau p)}$$

avec

$$G = \frac{mgk}{f}, \quad \tau = \frac{m}{f}.$$

Avec les valeurs numériques proposées, la réalisation étudiée devient

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = [ 1 \quad 0 ] \quad D = 0.$$

Il faut maintenant placer les pôles du système bouclé par la loi (7.34) page 337 à (-4) et (-5). On applique donc l'algorithme donné en §7.2.3.3, page 304, sur la paire  $(A, B)$ .

Le modèle est commandable car

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$$

est de rang plein. Le polynôme caractéristique en boucle ouverte est

$$D(p) = p^2 + 5p + 0$$

et l'on désire lui substituer dans la boucle fermée

$$D_d(p) = (p + 4)(p + 5) = p^2 + 9p + 20.$$

Ceci conduit, dans la base canonique de commande, à un retour d'état

$$\tilde{K} = [ -20 \quad -4 ].$$

Il est inutile de recourir à un changement de base puisqu'en posant  $\tilde{u} = 2u$ , on retrouve une forme canonique de commande. Le passage à la base initiale se fait donc ainsi :

$$K = \frac{1}{2} \tilde{K} = [ -10 \quad -2 ].$$

Le modèle étant quasiment sous forme canonique, il est facile de voir que sa fonction de transfert en boucle fermée est

$$G_f(p) = \frac{2}{p^2 + 9p + 20}.$$

(Le retour d'état ne change que le dénominateur : cf. remarque 7.1 page 303). Cette fonction de transfert fait apparaître un gain statique de  $\frac{1}{10}$  ce qui conduit à une précommande de  $H = 10$ .

Si l'on souhaite adjoindre un intégrateur à la loi de commande plutôt que d'utiliser une précommande statique alors il faut construire le modèle augmenté conformément au paragraphe 7.3 page 308. Ce modèle est donné par

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sur ce modèle, on peut de nouveau appliquer l'algorithme donné en §7.2.3.3, page 304.

Les polynômes caractéristiques, en boucle ouverte et désiré, deviennent respectivement

$$\bar{D}(p) = p(p^2 + 5p) = p^3 + 5p^2$$

et

$$\bar{D}_d(p) = (p + 4)(p + 5)^2 = p^3 + 14p^2 + 65p + 100.$$

Ceci conduit, dans la base canonique de commande, à

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} -100 & -65 & -9 \end{bmatrix}.$$

La matrice de changement de base, une fois calculée, est donnée par (cf. aussi §3.7.2 page 90)

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans la base initiale, on obtient

$$\bar{K} = \tilde{K} \bar{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{65}{2} & -\frac{9}{2} & 50 \end{bmatrix},$$

ce qui correspond à une loi de commande

$$u(t) = \begin{bmatrix} -\frac{65}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} x(t) + 50 \int_0^t (y_c(\theta) - y(\theta)) d\theta,$$

où  $y_c(t)$  est la consigne sur  $y(t)$ .

### 7.10.5. Stabilisation par résolution d'inégalité

Le test PBH conduit à la construction de la matrice

$$[(\lambda I - A) \quad B] = \begin{bmatrix} (\lambda + 1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1) & 1 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas de rang plein pour  $\lambda = -1$ . Mais comme ce dernier (qui est en fait le pôle non commandable) n'est pas dans le demi-plan complexe droit, la paire  $(A, B)$  est, selon le critère PBH exposé au paragraphe 7.5.1 page 323, stabilisable.

Soit la matrice  $P$  (dite de « Liapounov »), symétrique, définie positive et de même dimension que  $A$  :

$$P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}.$$

L'hypothèse de définition positive conduit, par le critère de Sylvester (cf. §A.2.2 page 668), aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} p > 0, \\ r > 0, \\ pr - q^2 > 0. \end{cases} \quad (7.36)$$

(L'une des deux contraintes  $p > 0$  et  $r > 0$  est en fait redondante.) Par ailleurs, le vecteur  $L$  apparaissant dans l'inégalité (7.30) page 327 comporte deux composantes :

$$L = [ \quad l_1 \quad l_2 \quad ].$$

Avec ces inconnues ainsi introduites, l'inégalité (7.30) se récrit

$$\left[ \begin{array}{c|c} -2p & p + l_1 \\ \hline p + l_1 & 2q + 2r + 2l_2 \end{array} \right] < 0$$

Cette inégalité induit donc le second jeu de contraintes

$$\begin{cases} -2p < 0, \\ q + r + l_2 < 0, \\ -2p(2q + 2r + 2l_2) - (p + l_1)^2 < 0. \end{cases} \quad (7.37)$$

Il s'agit maintenant de proposer une solution en  $p, q, r, l_1$  et  $l_2$  aux inégalités (7.36) et (7.37). Il en existe une infinité mais il est assez facile



d'en trouver de simples. Par exemple, on peut prendre  $p = 2$ ,  $q = 1$  et  $r = 1$ , ce qui permet de vérifier (7.36) ainsi que la première inégalité de (7.37). Le choix  $l_2 = -3$  permet de satisfaire la deuxième inégalité de (7.37). Il reste à déterminer  $l_1$  par la dernière inégalité de (7.36). Compte tenu des précédents choix, celle-ci s'écrit

$$8 - (2 + l_1)2 < 0$$

et  $l_1 = 1$  en est une solution. Une solution à (7.30) est donc résumée par

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = [ 1 \quad -3 ].$$

Il en résulte un vecteur  $K$  dont la valeur est

$$K = LP^{-1} = [ 1 \quad -3 ] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = [ 4 \quad -7 ].$$

La matrice en boucle fermée devient

$$A_f = A + BK = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

dont les valeurs propres sont  $(-1)$  et  $(-6)$ . Elle est stable au sens de Hurwitz.

Bien entendu, ce calcul est fastidieux d'autant plus qu'une autre solution est donnée par l'énoncé. En outre, le système n'est que d'ordre 2. Pour des ordres plus élevés, il devient déraisonnable de faire un tel calcul à la main. Il existe, comme mentionné au paragraphe 7.6 page 326, des outils numériques pour résoudre ce genre d'inégalités. Ces inégalités sont appelées LMI (de l'anglais *Linear Matrix Inequalities*, c'est-à-dire inégalités matricielles linéaires). Mais tout cela est bien compliqué. Alors pourquoi tant de haine ? Pour les raisons suivantes :

- la structure du modèle initial n'est pas toujours aussi sympathique que celle de cet exercice et les pôles ne figurent pas toujours sur la diagonale de  $A$  et  $A_f$ . Autrement dit, une solution triviale n'est pas toujours facile à trouver ;

- en cas d'absence de commandabilité totale, il peut être plus facile d'utiliser les outils numériques mentionnés ci-avant que d'essayer d'appliquer un algorithme à la main. Par ailleurs, si le logiciel ne trouve pas de solution, c'est que le système n'est pas stabilisable ;
- en présence d'incertitudes sur les composantes de  $A$  et  $B$ , l'application des algorithmes classiques (tels que celui de Bass-Gura) est très ardue et il devient illusoire de vouloir placer les mêmes pôles pour toute une famille de modèles incertains. Dans un tel cas, l'approche de ce paragraphe, dite « LMI », peut se révéler extrêmement utile et porteuse de nombreuses extensions mais ceci est une autre histoire qui n'est pas contée dans cet ouvrage.

En résumé, cet exercice n'a pour but que d'expliquer le principe et l'intérêt du paragraphe 7.6 page 326 même si le premier réflexe du lecteur ne sera sans doute pas d'aborder un problème sous cet angle. Toutefois, si le lecteur persiste dans son étude des systèmes linéaires, il sera en toute probabilité amené à étudier les LMI.

## 7.11. Notes et références

Comme à chaque fin de chapitre, il est juste de rappeler les ouvrages qui ont servi à rédiger ces quelques pages, au moins les principaux. Ce sont toujours les mêmes, à savoir [1,2,3,4,5,6,7] et [8].

Le résultat associant la possibilité de placer les pôles d'un système linéaire à la commandabilité de la paire  $(A, B)$ , également valable, de façon évidente, lorsqu'il existe plusieurs entrées, peut être trouvé dans [9, 10,11,1].

La technique de placement de pôles présentée dans ce chapitre est donc le fruit du travail de Robert Bass (cf. biographie 7.1 page 329) et de son étudiant Ira Gura, présenté officiellement pour la première fois dans [12]. On peut le retrouver dans [13,1] et bien d'autres ouvrages plus récents, même si l'auteur du présent document s'est avant tout inspiré de [7,8]. Pour une extension au cas des systèmes linéaires à plusieurs entrées, pour lesquels l'accroissement du nombre d'entrées offre des degrés de libertés, le lecteur intéressé pourra tirer profit de la lecture de [14] où Bruce. C. Moore, par une approche de placement de structure propre (valeurs propres et directions propres associées), non seulement propose une méthode efficace de placement de pôles, mais dénombre et identifie également tous les degrés de liberté réellement à disposition dans le calcul du retour d'état. Les degrés de liberté peuvent être utilisés pour atteindre d'autres performances, par exemple de découplage entrées-sorties ou de robustesse vis-à-vis d'incertitude sur le modèle. Dans [15], les auteurs utilisent ces degrés de liberté pour, en sus du placement de pôles, minimiser la sensibilité locale de la matrice d'état en boucle fermée vis-à-vis d'une incertitude non structurée sur cette dernière. Ce travail est à l'origine de la fonction MATLAB<sup>©</sup> `place` présentée en annexe H. Pour en savoir plus sur les techniques de placement de structure propre et les possibilités qu'elles offrent, le lecteur peut consulter [16]. Ces notions vont bien sûr au-delà des objectifs du présent document. Sur le sujet, l'auteur se permet de porter l'attention du lecteur sur un petit photocopie de notes de cours de son cru, en français : [17].

L'ajout d'un intégrateur à des fins de rejet de perturbation en échelon est un classique des ouvrages d'automatique. C'est une extension quasi naturelle de la technique de placement de pôles compte tenu des propriétés connues de l'intégrateur dans une chaîne directe. Pour écrire cette partie, l'auteur s'est essentiellement inspiré de [4] mais pour aller un peu plus loin sur le rejet de perturbation, l'étude de [6] est particulièrement indiquée.

Les considérations sur la stabilisabilité, la détectabilité et les formes minimales sont bien entendues liées au travail de R. E. Kálmán, et de même que pour le test PBH, le lecteur est invité à reconsulter les références données au chapitre 6.

Quand aux techniques de stabilisation ou de détectabilisation proposées au paragraphe 7.6 page 326, elles émanent en fait assez naturellement des formes duales de l'inéquation (5.10) ou de l'équation de Liapounov (5.12) (voir page 217) . Si les inégalités sont privilégiées, alors ces dernières peuvent être considérées comme des inégalités de base du *corpus* des inégalités matricielles linéaires (*Linear Matrix Inequalities (LMI)* en anglais), très souvent utilisées en commande et à propos desquelles l'ouvrage de référence [18] a joui (et jouit encore) d'une grande popularité dans la communauté automatique internationale au moment où les premiers outils de résolution des LMI sont apparus. L'importance des LMI avait déjà été souligné dans [19] bien avant que l'on pût les résoudre. Ce genre d'inégalités est particulièrement utile pour répondre à des spécifications de robustesse du système bouclé, par rapport à des incertitudes de modèle. Ainsi, l'inégalité (7.30) page 327 est utilisée en ce sens dans [20]. Pour se ramener à une égalité telle que (7.31) page 327, ce qui est plus simple numériquement et nominalement, mais pas toujours pertinent dans un contexte incertain, le travail de Hahn [21] est utile pour montrer que  $Q$  peut être choisie arbitrairement. La correction d'exercice du paragraphe 7.10.5 n'est qu'une façon de toucher du doigt les notions évoquées dans ces quelques lignes.

1. **T. Kailath** : *Linear Systems*. Prentice Hall, 1979.  
*Un vrai ouvrage de référence, pas très facile à aborder par son style et sa forme mais redoutablement complet. Pratiquement une « bible ».*
2. **R. C. Dorf et R. H. Bishop** : *Modern Control Systems*. Neuvième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.  
*La réédition permanente de cet ouvrage en dit long sur sa popularité. Les nombreux exemples constituent une vraie mine d'exercices pour un enseignant.*
3. **G. F. Franklin, J. D. Powell et A. Emami-Naemi** : *Feedback Control of Dynamic Systems*. Quatrième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.  
*Assez riche en exemples et agréable dans la forme. Plutôt didactique.*

4. **K. Ogata** : *Modern Control Engineering*. Troisième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.  
Ouvrage de référence qui semble en avoir inspiré plus d'un. L'auteur a un petit faible pour cette référence dont la première édition date de 1970.
5. **P. J. Antsaklis et A. N. Michel** : *Linear Systems*. McGraw-Hill, 1997.  
Fanchement pas le plus accessible mais très rigoureux mathématiquement. Très bien mais déconseillé pour une première approche.
6. **B. Friedland** : *Control System Design - An Introduction to State-Space Methods*. Dover, Mineola, New York, 1985.  
Cet ouvrage se concentre uniquement sur la représentation d'état et de ce fait, vu sa taille importante, traite beaucoup plus d'aspects que bien d'autres. Les exemples y sont nombreux et bien choisis. Il est parfois un peu dense. Son prix est très raisonnable.
7. **B. Pradin et G. Garcia** : *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Presses Universitaires du Mirail, 2010.  
Que dire de cet ouvrage si ce n'est que c'est celui qu'il faut acheter ! Incontestablement le meilleur rapport qualité/prix.
8. **B. Pradin** : *Polycopié de cours d'Automatique : « Automatique : Notes de cours - Exercices »*. INSA de Toulouse, 3ème année spécialité AEI. 1992.  
Là où l'essentiel est mieux expliqué que partout ailleurs ! si ce n'est dans [7].
9. **J. Rissanen** : Control System Synthesis by Analogue Computer Based on the Generalized Linear Feedback Concept. *Proc. of Symp. on Analog Comp. Applied to the study of Chem.* Séminaires internes Bruxelles, p. 1-13, 1960, Presses Académiques Européennes, Bruxelles, 1961.  
Semble-t-il la première démonstration du lien entre la commandabilité et la possibilité de placer les pôles.
10. **V. M. Popov** : Hyperstability and Optimality of Automatic Systems with Several Control Functions. *Revue Roumaine des Sciences Techniques - Serie Électrotechnique et Énergétique*, 9(4), p. 629-690, 1964.  
Où, d'après [5], l'on peut trouver le même résultat sur la commandabilité et le placement de pôles, que celui de [9].
11. **W. M. Wonham** : On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(6), p. 660-665, 1967.

- Démonstration plus accessible et plus claire du lien entre la commandabilité et la possibilité de placer les pôles. C'est la référence la plus citée à ce propos.
12. **R. W. Bass and I. Gura** : High Order Design via State Feedback Considerations. *Proc. of the Joint Automatic Control Conference*, p. 311-318, 1965.  
*L'origine de la technique de Bass-Gura pour le placement de pôles par retour d'état (celle retenue dans ce chapitre).*
  13. **W. A. Wolovich** : *Linear Multivariable Systems*. Springer-Verlag, 1974.  
*Où l'on rencontre l'une des premières apparitions de la technique de Bass-Gura dans un ouvrage.*
  14. **B. C. Moore** : On the Flexibility Offered by State Feedback in Multivariable Systems Beyond Closed Loop Eigenvalue Assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21, p. 689-692, 1976.  
*Première technique de placement de pôles par retour d'état basée sur la notion de structure propre et identifiant clairement les degrés de liberté à disposition dans le cas multi-entrées.*
  15. **J. Kautsky, N. K. Nichols et P. Van Dooren** : Robust Pole Assignment in Linear State Feedback. *International Journal of Control*, 41(5), p. 1129-1145, 1985.  
*Utilisation des degrés de liberté à disposition lors d'un placement de pôles par retour d'état, dans le cas multi-entrées, pour minimiser la sensibilité locale des pôles vis-à-vis d'une incertitude sur la matrice d'état. Cet article est à l'origine de la fonction `place` de MATLAB<sup>©</sup>.*
  16. **G. P. Liu et R. J. Patton** : *Eigenstructure assignment for Control System Design*. Wiley, 1998.  
*Livre spécifiquement consacré au placement de structure propre (donc entre autres de valeurs propres) pour aller un peu loin sur le sujet.*
  17. **O. Bachelier** : *Systèmes Multivariables - Partie II*. Notes de cours, Université de Poitiers, Master Sciences Technologies Santé (STS), mention informatique-télécommunication, parcours Automatique et Applications (M2), 2011. Téléchargeable à l'adresse :  
<http://www.lias-lab.fr/perso/olivierbachelier/teachings.php>  
*Quelques considérations sur le placement de structure propre avec une explication partielle du résultat de Moore [14].*
  18. **S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron et V. Balakrishnan** : *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Editions, volume

- 15 de la série "SIAM Studies in Applied Mathematics", USA, 1994.  
Ouvrage ayant popularisé la notion de LMI dans la communauté automatique.
19. **J. C. Willems** : Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6), p. 621-634, 1971.  
*Un des articles les plus denses en informations essentielles que l'auteur ait pu lire. L'auteur y annonce de façon prémonitoire le succès à venir des LMI.*
20. **J. Bernussou, J. C. Geromel et P. L. D. Peres** : A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems. *Systems and Control Letters*, 13, p. 65-72, 1989.  
*Bien que cet article s'intéresse à la stabilisation robuste (quadratique pour être précis), on y trouve l'explication claire de l'inégalité de stabilisation (7.30) page 327.*
21. **W. Hahn** : Eine Bemerkung zur zweiten Method von Lyapunov. *Mathematische Nachrichten*, 14, p.349-354, 1956.  
*Où il est montré pour la première fois que dans l'équation (5.12) page 217,  $Q$  peut-être choisie arbitrairement mais doit néanmoins être définie négative. Si cela est vrai pour l'analyse de stabilité, cela s'applique aussi pour la stabilisation par l'équation (7.31) page 327.*





## Chapitre 8

### *Commande par retour de sortie : les observateurs*

Dans ce second chapitre consacré à la commande dans l'espace d'état, on suppose que les composantes du vecteur d'état  $x$  ne sont pas forcément accessibles, ce qui est un cas de figure plus qu'usuel, et l'on se contente d'utiliser l'information présente au niveau de la sortie  $y$  pour établir une loi de commande. Cette diminution de l'information exploitable dans la boucle de rétroaction est bien sûr de nature à compliquer le problème de commande.

Lorsque seule la sortie  $y$  est utilisée pour le bouclage, on parle de *retour de sortie*. Il existe plusieurs façons d'aborder le problème de la commande par retour de sortie. La stratégie adoptée ici s'appuie sur la synthèse de systèmes appelés *observateurs* et sur les résultats exposés dans les deux chapitres précédents. En d'autres termes, des techniques sont présentées, qui visent à exploiter autant que possible la logique du retour d'état (et même du placement de pôles) vue au chapitre 7. La notion d'observabilité vue au chapitre 6 sera également très précieuse.

## Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Notions préliminaires . . . . .</b>	<b>371</b>
8.1.1	Motivation . . . . .	371
8.1.2	Principe de l'observation . . . . .	373
8.1.3	Propriété d'un observateur . . . . .	373
8.1.4	Condition d'existence d'un observateur . . . . .	374
8.1.5	À propos de la transmission directe . . . . .	374
<b>8.2</b>	<b>Synthèse d'un observateur d'ordre minimal . . . . .</b>	<b>375</b>
8.2.1	Observateur d'ordre minimal (de Luenberger) . . . . .	375
8.2.2	Procédure de Luenberger . . . . .	378
<b>8.3</b>	<b>Synthèse d'un observateur d'ordre plein . . . . .</b>	<b>383</b>
8.3.1	Observateur d'ordre plein . . . . .	383
8.3.2	Procédure de synthèse . . . . .	386
8.3.3	Observateur de Kálmán = observateur <i>identité</i> de Luenberger . . . . .	389
<b>8.4</b>	<b>Commande par retour d'état observé . . . . .</b>	<b>391</b>
8.4.1	Avec un observateur d'ordre minimal . . . . .	391
8.4.2	Avec observateur d'ordre plein . . . . .	395
<b>8.5</b>	<b>Commande par retour d'état observé avec intégrateur . . . . .</b>	<b>398</b>
<b>8.6</b>	<b>Observateur d'ordre réduit . . . . .</b>	<b>400</b>
8.6.1	Définition et synthèse . . . . .	400
8.6.2	Observateur réduit et retour d'état . . . . .	407
8.6.3	Observateur réduit, retour d'état et intégrateur . . . . .	411
<b>8.7</b>	<b>Robustesse d'un observateur à une incertitude de modèle . . . . .</b>	<b>413</b>
8.7.1	Stabilité de l'écart et convergence d'un observateur . . . . .	413
8.7.2	Principe de séparation et incertitude . . . . .	416
<b>8.8</b>	<b>Observateurs à entrées inconnues . . . . .</b>	<b>418</b>
8.8.1	Entrée inconnue sur la dynamique . . . . .	418
8.8.2	Dualité avec la commande à effet intégral . . . . .	419
8.8.3	Entrées inconnues sur la dynamique et la sortie . . . . .	419
8.8.4	Intérêt de ces observateurs . . . . .	420
<b>8.9</b>	<b>Observateur d'ordre plein et retour dynamique de sortie . . . . .</b>	<b>421</b>
<b>8.10</b>	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>427</b>

8.10.1 Euh... ça tangué toujours un peu... . . . . .	427
8.10.2 Asservissement de position d'une bille sur un rail . .	429
8.10.3 Commande sans capteur d'une machine synchrone . .	429
<b>8.11 Correction des exercices . . . . .</b>	<b>434</b>
8.11.1 Euh... ça tangué toujours un peu... . . . . .	434
8.11.2 Asservissement de position d'une bille sur un rail . .	441
8.11.3 Commande sans capteur d'une machine synchrone . .	443
<b>8.12 Notes et références . . . . .</b>	<b>457</b>

## 8.1. Notions préliminaires

### 8.1.1. Motivation

Comme il est dit dans le préambule du chapitre, il s'agit de mettre en œuvre une loi de commande qui n'utilise a priori que l'information présente sur la sortie  $y$ . En effet, la mesure de l'intégralité du vecteur d'état peut se révéler difficile, essentiellement pour deux raisons :

- il faut prévoir autant de capteurs que de composantes de  $x$  et ces capteurs ont un coût qui, dans certains cas, peut se révéler prohibitif (soit le procédé à commander est unique mais les capteurs sont vraiment hors de prix, soit le procédé est produit à grande échelle et toute diminution du prix de la commande se répercute à cette échelle) ;
- ces mêmes capteurs n'existent pas où peuvent se révéler peu fiables, voire engendrer des problèmes supplémentaires (notamment par l'introduction de nouvelles dynamiques non linéaires de nature à modifier notablement le modèle du procédé).

Pour ces raisons,  $x$  n'est pas mesuré dans ce chapitre (ou seulement partiellement comme il sera vu plus tard). Cependant, il va de soi qu'une autre information que  $y$  peut être accessible, à savoir celle contenue dans le signal de commande  $u$ .

Le principe pourrait être, tout simplement, de déterminer un scalaire de retour  $k$  ainsi qu'un autre scalaire de pré-commande  $H$  de telle sorte que la loi de commande par *retour statique de sortie*

$$u = ky + Hy_c,$$

appliquée au modèle (3.5) page 71, confère au système bouclé (dont la matrice d'état est alors  $A_f = A + BkC$ ) les propriétés requises. Cependant, procéder de la sorte se révèle extrêmement ardu. Entre autres, il semble difficile d'atteindre un niveau de performances transitoire souhaité en ne jouant que sur un seul paramètre de retour  $k$ . Par exemple, comment placer tous les pôles du modèle bouclé avec un seul degré de liberté ? Pour cette raison, il est rare de se contenter d'un retour statique de la sortie  $y$  mais il est souvent envisagé d'effectuer un *retour dynamique de sortie*, c'est-à-dire que la sortie  $y$  est rebouclée sur l'entrée  $u$  au travers d'un autre système dynamique comme le montre la figure 8.1. Il est alors nécessaire de déterminer une représentation d'état du système dynamique de retour qui confère au système bouclé global un bon comportement.

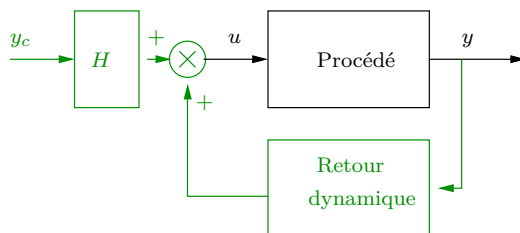


FIGURE 8.1 – Principe du retour dynamique

En outre, si l'on se réfère au chapitre précédent, une loi de commande de type retour d'état est souvent judicieuse pour obtenir des performances spécifiées, tant statiques (si l'on ajoute des intégrateurs) que transitoires. Or, le vecteur d'état n'étant pas disponible dans le problème abordé ici, une autre solution consisterait alors à le reconstruire ou à le simuler. Pour ce faire, on pourrait utiliser la solution de l'équation d'état (4.14) page 171 mais ceci nécessiterait de connaître  $x_0$  ce qui n'est *a priori* pas le cas. Aussi faut-il trouver un autre moyen de reconstruire le vecteur  $x$  pour essayer de bénéficier des avantages d'un retour d'état.

En résumé, deux possibilités viennent d'être présentées : l'une d'entre elles consiste à construire un retour dynamique de sortie ; l'autre consiste à reconstruire le vecteur d'état pour ensuite appliquer un retour d'état. En réalité, les

deux solutions peuvent être regroupées en une seule grâce au principe des observateurs présenté ci-après. Plus précisément, la solution basée sur les observateurs sera vue comme une possibilité de retour dynamique de sortie au paragraphe suivant.

### 8.1.2. Principe de l'observation

Le principe de l'observation est d'utiliser  $u$  et  $y$  pour reconstruire un vecteur  $\hat{x}$  qui soit aussi proche que possible de  $x$  afin d'effectuer ensuite un retour d'état selon la structure présentée par la figure 8.2.

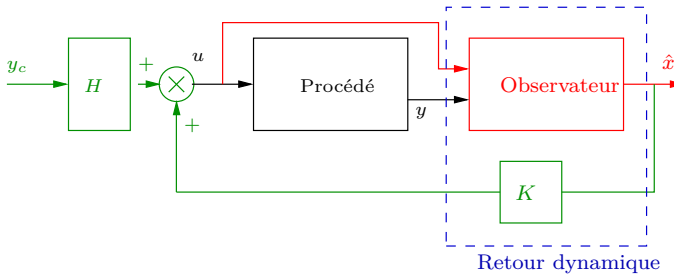


FIGURE 8.2 – Principe de l'observateur

Comme le montre cette figure, l'ensemble constitué de l'*observateur* (encore appelé *reconstructeur d'état*) et du retour d'état  $K$  constitue un retour dynamique proche de celui proposé par la figure 8.1. Toutefois, celui-ci comporte deux entrées :  $u$  et  $y$ .

Faire la synthèse d'un observateur consiste à déterminer, sur la base du modèle d'état du procédé, un modèle d'état pour l'observateur. Il existe plusieurs techniques pour réaliser cette synthèse mais avant d'en présenter deux, il convient auparavant de s'attarder un peu sur quelques points.

### 8.1.3. Propriété d'un observateur

La logique de l'observation est simple. Il est utopique de vouloir construire un observateur tel que  $\hat{x}(t) = x(t) \forall t$ . En effet, ceci signifierait que l'observateur réagit de manière infiniment rapide à une évolution de l'état du procédé même

quand  $\hat{x}(0) \neq x(0)$ . Comment un observateur devinerait-il instantanément la valeur de  $x(0)$ ? En revanche, on peut espérer obtenir cette égalité en régime permanent. Ainsi, si l'on définit l'écart vectoriel

$$\epsilon(t) = \hat{x} - x, \quad (8.1)$$

qui est appelé *écart de reconstruction*, la propriété fondamentale que doit satisfaire un observateur est de répondre à un modèle tel que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0 \quad (8.2)$$

#### 8.1.4. Condition d'existence d'un observateur

Dans ce paragraphe, il est proposé, sans démonstration, une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un observateur. Cette dernière est très simple :

Soit le modèle (3.5) page 71. On peut construire un observateur d'état pour ce modèle si et seulement si la paire  $(A, C)$  est observable.

On comprend à la lecture de cette condition l'importance de la notion d'observabilité introduite au chapitre 6. La démonstration n'est pas fournie. Cependant, elle l'est dans le cas des systèmes discrets, au paragraphe 9.6.2.2, page 521. Il suffit donc de procéder par analogie pour comprendre l'idée derrière cette condition.

#### 8.1.5. À propos de la transmission directe

Dans la suite de ce chapitre, il serait possible, comme il est de coutume, de considérer que la transmission directe est nulle dans le modèle (3.5) page 71 ( $D = 0$ ). C'est ce qui sera occasionnellement supposé.

Si ce n'était pas le cas, il suffirait de poser le changement de variable

$$\check{y} = y - Du$$

et de réaliser les procédures présentées ci-après en posant  $D = 0$  et en remplaçant  $y$  par  $\check{y}$ . Une fois les calculs effectués, on revient au problème initial en effectuant le changement inverse en vue de l'implantation.

Cependant, les procédures seront ici essentiellement présentées en présence d'une transmission directe  $D \neq 0$ . Ceci complique quelque peu les expressions et certaines analyses mais permet également une plus grande généralité de ces mêmes expressions.

## 8.2. Synthèse d'un observateur d'ordre minimal

Dans cette partie, il est question de synthétiser un observateur d'ordre minimal. On en donne d'abord la définition et la structure avant de proposer la procédure dite « de Luenberger » qui permet de réaliser cette synthèse. Il est habituel d'appeler les observateurs qui en résultent « observateurs de Luenberger » même si la théorie de Luenberger<sup>1</sup> s'étend au delà de ce qui est proposé dans cette partie.

### 8.2.1. Observateur d'ordre minimal (de Luenberger)

Il s'agit là d'un observateur dont le modèle d'état correspond à un vecteur d'état de dimension minimale. Pour l'instant, on se contente de considérer un modèle d'observateur de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} &= Fz + Py + Ru \\ \hat{w} &= Lz + Qy + Gu. \end{cases} \quad (8.3)$$

avec  $z \in \mathbb{R}^q$ . Le vecteur  $\hat{w}$  correspond à la reconstruction d'une combinaison des composantes du vecteur d'état, à savoir  $w = Sx$ . Si  $S = I_n$ , il est judicieux de remplacer  $\hat{w}$  par  $\hat{x}$  qui devient alors l'*estimation* de  $x$ . On parle alors simplement d'*observateur d'état* (plutôt que d'une fonction linéaire de l'état). Faire la synthèse d'un observateur consiste ici à déterminer convenablement  $F \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $\{P; R\} \in \{\mathbb{R}^q\}^2$  et  $\{Q, G\} \in \{\mathbb{R}^n\}^2$ , c'est-à-dire de faire en sorte que l'équation

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (8.4)$$

soit vérifiée avec

---

1. du nom de David G. Luenberger : voir biographie 8.1 page 390.

$$e(t) = \hat{w}(t) - w(t). \tag{8.5}$$

Pour  $S = I_n$ , ceci revient à prendre  $e(t) = \epsilon(t)$ , c'est-à-dire à vérifier (8.2) et donc à reconstruire l'état  $x$ .

Le modèle (8.3) correspond à la structure générale d'observateur proposée par Luenberger. La dimension  $q$  du vecteur d'état  $z$  de l'observateur n'est pas figée. Cependant, intuitivement, on peut comprendre que la sortie  $y$  apportant déjà une information sur l'état, il en reste  $(n - 1)$  à reconstruire par l'observateur. Pour cette raison, Luenberger a proposé de réduire autant que possible l'ordre de l'observateur, ce qui conduit au choix  $q = n - 1$ , d'où le vocable « observateur d'ordre minimal », ce dernier répondant quoi qu'il en soit à la structure de Luenberger (8.3).

Si l'on supposait que l'on pût satisfaire

$$z = Tx, \quad T \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n},$$

où  $T$  serait de rang plein, et ce à tout instant, alors ceci amènerait, en utilisant (3.5) page 71,

$$\hat{w} = Lz + Qy + Gu = LTx + QCx + QDu + Gu = (LT + QC)x + (QD + G)u$$

ce qui, puisque l'on souhaite vérifier  $\hat{w} = w = Sx$ , conduirait à

$$LT + QC = S \quad \text{et} \quad QD + G = 0. \tag{8.6}$$

Mais, comme on l'a vu, il est utopique d'espérer obtenir  $\hat{w} = w$  ou  $\hat{x} = x \forall t$  (c'est-à-dire ici  $z = Tx$ ). En effet, cela n'a pas de sens de vouloir satisfaire l'égalité  $z(t) = Tx(t) \forall t \geq 0$  dès lors que  $z(0)$  n'est *a priori* pas égal à  $Tx(0)$ . Aussi introduit-on l'écart de reconstruction  $\epsilon(t)$  défini en (8.1) et l'on se contente d'essayer d'obtenir

$$z(t) = T\hat{x}(t) = T(x(t) + \epsilon(t)) = Tx(t) + \mu(t) \quad \text{avec} \quad \mu(t) = T\epsilon(t) \quad \text{et} \tag{8.7}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0. \tag{8.8}$$

Si l'on dérive  $\mu$ , on obtient (la dépendance en  $t$  est désormais omise)



$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= \dot{z} - T\dot{x} = Fz + Py + Ru - TAx - TBu \\ \Leftrightarrow \dot{\mu} &= FTx + F\mu + PCx + PDu + Ru - TAx - TBu \\ \Leftrightarrow \dot{\mu} &= F\mu + (FT - TA + PC)x + (R - TB + PD)u.\end{aligned}$$

Dès lors, on peut imposer les contraintes

$$TA - FT = PC \quad \text{et} \quad R = TB - PD.$$

Il reste alors

$$\dot{\mu} = F\mu,$$

ce qui signifie que (8.8) se vérifie lorsque  $F$  est stable au sens de Hurwitz, c'est-à-dire lorsque  $F$  ne possède que des valeurs propres à partie réelle strictement négative. En prenant en compte la seconde équation de (8.3), il vient

$$\begin{aligned}\hat{w} &= LTx + L\mu + QCx + QDu + Gu \\ \Leftrightarrow \hat{w} &= (LT + QC)x + (QD + G)u + L\mu,\end{aligned}$$

qui, si l'on impose (8.6), et puisque  $\mu$  tend vers zéro, conduit à  $\hat{w} = w = Sx$  en régime permanent, c'est-à-dire à (8.4) (ou (8.2) si  $S = I_n$ ).

Finalement, c'est par un choix judicieux du modèle (8.3) que l'on parvient à satisfaire (8.8) et (8.4). De manière plus précise, ce choix consiste à :

- choisir  $F$  stable au sens d'Hurwitz et dont les modes sont plus rapides que ceux de  $A$  (l'idée est d'observer  $x$  plus vite qu'il n'évolue) ;
- choisir  $P$  et  $T$  tels que  $TA - PC = FT$  ;
- calculer  $R = TB - PD$  ;
- déterminer  $L$  et  $Q$  tels que  $LT + QC = S$  ;
- calculer  $G = -QD$ .

La procédure de Luenberger permet d'effectuer les différentes étapes ci-dessus. Avant de la détailler dans le paragraphe suivant, voici une remarque sur la dynamique de l'observateur.

**Remarque 8.1** En concaténant l'état du système et celui de l'observateur en  $\zeta = [x \ z]'$ , une réalisation du système composé du procédé et de son observateur peut être facilement obtenue (elle comprend plusieurs sorties) :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ PC & F \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} B \\ PD + R \end{bmatrix} u, \\ \begin{bmatrix} \hat{w} \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} QC & L \\ C & 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} G \\ D \end{bmatrix} u. \end{cases} \quad (8.9)$$

La matrice d'état du système global (avec l'observateur) étant bloc-triangulaire, il est alors facile de voir que ses valeurs propres sont celles de la matrice d'état du système initial et celle de  $F$ . Les deux dynamiques sont donc clairement séparées. Si maintenant l'état concaténé est  $\kappa = [x \ \mu]'$ , alors une autre réalisation du même système observé est donnée par

$$\begin{cases} \dot{\kappa} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \kappa + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ \begin{bmatrix} \hat{w} \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S & L \\ C & 0 \end{bmatrix} \kappa + \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} u. \end{cases} \quad (8.10)$$

La matrice d'état étant bloc-diagonale, la même conclusion que précédemment peut être tirée mais de plus, il est facile de constater que l'équation (8.10) obéit à la structure canonique de Kálmán relative à la commandabilité donnée en (6.17) page 264, ce qui montre que la dynamique de l'observateur n'est pas commandable.

### 8.2.2. Procédure de Luenberger

Voici un algorithme basé sur ce que propose Luenberger. Il consiste à reconstruire  $w$  dans la base canonique d'observation :

**Étape 1** Vérification de l'observabilité de la paire  $(A, C)$ . Si la paire  $(A, C)$  n'est pas observable, la synthèse de l'observateur est impossible.

**Étape 2** Changement de base pour obtenir une réalisation canonique d'observation. En réalité, cette forme correspond à la forme compagne verticale

(3.13) page 85. Pour ce faire, on passe de la réalisation  $(A, B, C)$  à la réalisation  $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$  en posant le changement de variable  $x = N\underline{x}$ . La matrice  $N$  est donnée par la relation :

$$(N')^{-1} = [ n_1 \quad \dots \quad n_n ]$$

avec

$$\begin{cases} n_1 &= C' \\ n_2 &= (A' + a_{n-1}I)C' \\ n_3 &= ((A')^2 + a_{n-1}A' + a_{n-2}I)C' \\ &\vdots \\ n_n &= ((A')^{n-1} + a_{n-1}(A')^{n-2} + \dots + a_1I)C' \end{cases} \quad (8.11)$$

On calcule alors  $\underline{S} = SN$  car, dans la base canonique associée à  $\underline{x}$ , il s'agit maintenant de reconstruire  $w = \underline{S}\underline{x} = SNN^{-1}x = Sx$ , donc  $\underline{S}$  prend le rôle de  $S$ .

**Étape 3** Choix de la dynamique de  $F$ . Pour cela, on décide d'un polynôme caractéristique de degré  $(n-1)$  qui doit correspondre aux valeurs propres  $\eta_i, i = 1, \dots, (n-1)$ , souhaitées pour l'observateur :

$$D_F(p) = \prod_{i=1}^{n-1} (p - \eta_i) = p^{n-1} + f_{n-2}p^{n-2} + f_{n-3}p^{n-3} + \dots + f_1p + f_0.$$

**Étape 4** Dédution de  $F$  ;  $F$  est arbitrairement choisie sous forme compagne verticale et admet  $D_F(p)$  comme polynôme caractéristique :

$$F = \begin{bmatrix} -f_{n-2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -f_{n-3} & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -f_1 & \vdots & \dots & \ddots & 1 \\ -f_0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

**Étape 5** Détermination (arbitraire) de  $\underline{T}$  telle que  $z = \underline{T}\underline{x}$  (le raisonnement se fait dans la base canonique donc  $T = \underline{T}N^{-1}$  mais il n'est pas nécessaire de calculer  $T$ ) :

$$\underline{T} = \left[ \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array} \right]$$

Étape 6 Détermination de  $P$  à partir de l'équation

$$\underline{TA} - FT = P\underline{C}.$$

$F$  étant prise sous forme canonique, on résout l'équation dans la base canonique, c'est-à-dire en prenant  $\underline{A}$  et  $\underline{C}$ . Ceci a l'avantage, compte tenu des structures de  $F$ ,  $\underline{A}$ ,  $\underline{T}$ , et  $\underline{C}$  et du fait que  $P \in \mathbb{R}^{n-1}$  est un simple vecteur, de calculer  $P$ , dans la base canonique, grâce à la formule explicite

$$P = \{\underline{TA} - F\underline{T}\}_1,$$

où  $\{\cdot\}_1$  est une notation correspondant à la première colonne d'une matrice.

Étape 7 Calcul de  $R$  :

$$R = \underline{TB} - P\underline{D}.$$

(Rappel :  $\underline{D} = D$  car la transmission directe est indépendante de la base retenue).

Étape 8 Détermination des matrices  $Q$  et  $L$  : elles doivent vérifier, dans la base canonique d'observation,

$$Q\underline{C} + L\underline{T} = \underline{S},$$

que l'on peut récrire

$$\begin{bmatrix} Q & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{T} \end{bmatrix} = \underline{S} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Q & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{T} \end{bmatrix}^{-1} \underline{S}.$$

Compte tenu des structures particulières des matrices impliquées dans l'égalité ci-avant, il vient

$$\begin{aligned}
 [ Q \quad L ] &= \underline{S} \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \hline T \end{bmatrix}^{-1} = \underline{S} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -f_{n_2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -f_0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
 \Leftrightarrow [ Q \quad L ] &= \underline{S} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{n_2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

L'équation ci-dessus fait donc apparaître clairement  $Q$  et  $L$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \underline{S} \begin{bmatrix} 1 \\ f_{n_2} \\ \vdots \\ f_0 \end{bmatrix}, \\ L = \underline{S} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \end{array} \right.$$

(On peut noter que  $L$  est obtenue simplement à partir de  $\underline{S}$  en supprimant la première colonne.)

Étape 9 Calcul de  $G$  :

$$G = -QD.$$

**Remarque 8.2** Si la paire  $(A, C)$  n'est pas observable, alors la matrice  $N$  n'est pas inversible et le changement de base devient impossible, ce qui démontre la suffisance de l'assertion donnée en §8.1.4 page 374.

Exemple :

Si l'on revient à l'exemple (7.12) page 306 dans lequel la réalisation est caractérisée par les quatre matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = [ 1 \quad 1 ] \quad ; \quad D = 0,$$

on peut appliquer toutes les étapes de la procédure de Luenberger pour synthétiser un observateur d'état ( $S = I$ ). Tout pôle de l'observateur est ici placé à la valeur  $(-5)$ .

**Étape 1** La matrice d'observabilité de Kálmán relative à la paire  $(A, C)$  est

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang plein donc la paire  $(A, C)$  est observable.

**Étape 2** Le calcul de la matrice de passage  $N$  (même s'il n'est pas encore utile à cette étape) conduit à :

$$(N')^{-1} = [ n_1 \quad n_2 ] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_1 = C' & = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ n_2 = (A' - 3I)C' & = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

et donc à

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow N = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \underline{S} = N.$$

**Étape 3** On décide de placer l'unique pôle de l'observateur à  $-5$  ce qui mène à

$$D_F(p) = p + 5 = f_1 p + f_0.$$

**Étape 4**  $F$  est donc égale à  $(-5)$ .

Étape 5 On en déduit

$$\underline{T} = [-5 \ 1].$$

Étape 6 Le vecteur  $P$  doit satisfaire

$$P = \{\underline{TA}\}_1 - \{F\underline{T}\}_1 = -13 - 25 = -38.$$

Étape 7

$$R = \underline{TB} - PD = \underline{TN}^{-1}B - PD = \begin{bmatrix} -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 38 \times 0 = 1$$

Étape 8 Les matrices  $Q$  et  $L$  sont également facilement déduites :

$$Q = N \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

et

$$L = N \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Étape 9

$$G = -QD = 0.$$

### 8.3. Synthèse d'un observateur d'ordre plein

Dans cette partie, on considère que l'observateur est du même ordre que le procédé, soit  $n$ . La définition et la structure d'un tel observateur sont présentées avant de donner une procédure de synthèse.

#### 8.3.1. Observateur d'ordre plein

Une structure classique d'un tel observateur consiste à exprimer ce dernier comme un système bouclé de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + Z(\hat{y} - y), \\ \hat{y} &= C\hat{x} + Du. \end{cases} \quad (8.12)$$

Ici, le vecteur d'état de l'observateur est directement  $\hat{x}$  et la sortie de ce dernier,  $\hat{y}$ , ne sert qu'à réaliser un bouclage au sein de l'observateur lui-même comme le montre la figure 8.3.

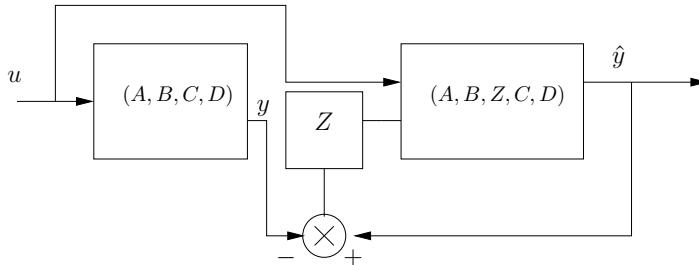


FIGURE 8.3 – Schéma de l'observateur d'ordre plein

Un tel modèle est parfois appelé *observateur de Kálmán* quoi qu'il semble plus à mettre au crédit de Luenberger. Du reste, il est aussi appelé *observateur de Luenberger*, *observateur de Luenberger-Kálmán* ou encore, comme on le verra un peu plus loin, *observateur identité de Luenberger*, ce qui est probablement le vocable le plus approprié.

Ce modèle d'observateur s'appuie clairement sur celui du système et il s'agit en fait de déterminer le *gain d'observateur*  $Z$  de telle sorte que la dynamique de l'observateur soit plus rapide que celle du procédé d'une part, et, d'autre part, que la relation (8.2) page 374 soit satisfaite. En effet, la réalisation (8.12) se réécrit

$$\dot{\hat{x}} = (A + ZC)\hat{x} + (B + ZD)u - Zy \quad (8.13)$$

où l'on voit clairement que le choix du gain d'observateur  $Z$  fixe la dynamique de la matrice d'état  $\hat{A}_f = A + ZC$  de l'observateur. Ainsi, si l'on analyse l'évolution de l'écart de reconstruction  $\epsilon$ , on constate que cette dynamique est décrite par l'équation suivante,

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= (A + ZC)\hat{x} + (B + ZD)u - ZCx - ZDu - Ax - Bu \\ &= (A + ZC)\hat{x} - (A + ZC)x + (B + ZD)u - (B + ZD)u \\ &= (A + ZC)(\hat{x} - x), \end{aligned}$$



c'est-à-dire

$$\dot{\epsilon} = (A + ZC)\epsilon. \quad (8.14)$$

Il est donc nécessaire que  $(A + ZC)$  soit stable au sens de Hurwitz, c'est-à-dire que  $(A + ZC)$  ait toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative, pour que l'on ait bien  $\hat{x} = x$  en régime permanent. Dans le cas contraire (une valeur propre à partie réelle non strictement négative),  $\epsilon$  ne peut tendre vers zéro.

La synthèse d'un observateur d'ordre plein revient donc à choisir le gain d'observateur  $Z$  pour fixer arbitrairement les pôles de l'observateur. C'est un problème dual de celui du placement de pôles par retour d'état. En effet, les valeurs propres de la matrice réelle  $A + ZC$  sont aussi celles de sa transposée  $A' + C'Z'$ , matrice qui peut être identifiée à  $A + BK$  en opérant les substitutions suivantes :

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A', \\ B &\rightarrow C', \\ K &\rightarrow Z'. \end{aligned}$$

La synthèse d'un observateur de rang plein constitue un problème dual de la commande par retour d'état.

Sur la base de cette remarque, on peut établir un algorithme de synthèse d'un observateur d'ordre plein. Ceci est l'objet du paragraphe suivant. Auparavant, une remarque analogue à la remarque 8.1 page 378 est proposée.

**Remarque 8.3** Il est à noter que si l'on concatène les deux vecteurs d'état (celui du procédé et celui de l'observateur) en un vecteur d'état unique, on obtient l'équation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -ZC & A + ZC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u. \quad (8.15)$$

La matrice d'état bloc-triangulaire apparaissant ci-dessus montre bien que les pôles du système observé sont les pôles de l'observateur ajoutés à ceux du procédé. Une autre équation est donnée par

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A + ZC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (8.16)$$

La matrice d'état bloc-diagonale apparaissant ci-dessus permet de tirer la même conclusion que précédemment mais montre aussi, en se référant à la structure canonique de Kálmán relative à la commandabilité (6.17) page 264, que la dynamique de l'observateur n'est pas commandable.

### 8.3.2. Procédure de synthèse

Voici un algorithme qui peut être facilement déduit de celui du placement de pôles par retour d'état. En fait, plutôt que de raisonner sur la matrice transposée  $(A' + C'Z')$ , on raisonne directement sur  $(A + ZC)$  ce qui revient à travailler dans la base canonique d'observation.

#### Algorithme de Bass-Gura pour la synthèse d'un observateur d'ordre plein<sup>2</sup>

On dispose d'un spectre désiré  $\{\eta_i, i = 1, \dots, n\}$  pour l'observateur.

**Étape 1** Vérification de l'observabilité. Si la paire  $(A, C)$  n'est pas observable, la synthèse de l'observateur est impossible.

**Étape 2** Détermination du polynôme caractéristique désiré pour l'observateur :

---

2. du nom de Robert W. Bass (voir biographie 7.1 page 329) et de celui de Ira Gura.

$$\hat{D}_d(p) = \prod_{i=1}^n (p - \eta_i) = p^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \beta_1p + \beta_0.$$

Étape 3 Détermination du polynôme caractéristique en boucle ouverte :

$$D(p) = \det(pI - A) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0.$$

Étape 4 Calcul du gain d'observateur

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} z_n \\ \vdots \\ z_1 \end{bmatrix}$$

dans la base canonique d'observation, dont les composantes sont s'expriment

$$z_i = a_{i-1} - \beta_{i-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (8.17)$$

Étape 5 Calcul de la matrice de passage  $N$  grâce à (8.11) page 379.

Étape 6 Calcul du gain d'observateur dans la base initiale :

$$Z = N\underline{Z} \quad (8.18)$$

Comme dans la procédure de placement de pôles présentée au paragraphe 7.2.3.3 page 304, par dualité, il est possible de rendre la procédure plus facilement implantable du point de vue informatique. En effet, l'analyse de la structure de la matrice  $N$  donnée en (8.11) page 379 conduit à déduire qu'elle vérifie

$$(N')^{-1} = Q'_o T_o, \quad (8.19)$$

où  $T_o$  est une matrice de Töplitz<sup>3</sup> s'écrivant

3. du nom d'Otto Töplitz (1881-1940), mathématicien allemand, originaire de Silésie.

$$T_o = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_3 & a_3 & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_4 & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.20)$$

Le gain d'observateur est alors donné par

$$Z = Q_o^{-1}(T_o')^{-1} \begin{bmatrix} a_{n-1} - \beta_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 - \beta_0 \end{bmatrix}. \quad (8.21)$$

Cette formule est appelée, comme pour le placement de pôles, *formule de Bass-Gura*. La matrice  $T_o$ , de par sa structure triangulaire, est toujours inversible. Le calcul de  $Z$  est donc possible si et seulement si  $Q_o$  est de rang plein c.-à-d. si et seulement si  $(A, C)$  est observable.

Exemple :

On reprend de nouveau l'exemple (7.12) page 306 et l'on applique l'algorithme précédent.

Étape 1 Déjà franchie. La paire  $(A, C)$  est observable.

Étape 2 On décide de placer un pôle double  $\eta_1 = \eta_2 = -5$  sur l'observateur.

Le polynôme caractéristique désiré pour cet observateur est donc

$$\hat{D}_d(p) = (p - \eta_1)(p - \eta_2) = (p + 5)^2 = p^2 + 10p + 25 = \beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0.$$

Étape 3 Le polynôme caractéristique du modèle du procédé est déjà connu :

$$D(p) = p^2 - 3p - 2 = a_2 p^2 + a_1 p + a_0.$$

Étape 4 Le gain d'observateur est calculé dans la base canonique :

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - \beta_1 \\ a_0 - \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ -27 \end{bmatrix}.$$

Étape 5 La matrice de passage  $N$  est déjà connue :

$$N = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Étape 6 La matrice de retour calculée dans la base initiale est

$$Z = N\underline{Z} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -13 \\ -27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 \\ -66 \end{bmatrix}.$$

**Remarque 8.4** Contrairement au cas du retour d'état, de fortes composantes dans le gain d'observateur  $Z$  n'induisent pas forcément un risque tel que celui évoqué au paragraphe 7.7 page 328 (par exemple, une saturation des actionneurs). En effet, le bouclage conçu ici est interne à l'observateur et n'est a priori pas transmis par un actionneur. L'observateur fait partie intégrante de la loi de commande.

Touefois, il faut se garder, en pratique, de rendre un observateur trop rapide car en ouvrant sa bande passante, on se prive d'un filtrage potentiel des possibles (probables ?) bruits de mesure sur  $y$ .

### 8.3.3. Observateur de Kálmán = observateur *identité* de Luenberger

L'objectif de ce paragraphe est simplement de montrer que les deux structures d'observateur présentées précédemment sont liées. Plus exactement, la seconde peut presque être interprétée comme un cas particulier de la première.

Il peut sembler étrange qu'un observateur d'ordre plein soit un cas particulier d'un observateur d'ordre minimal. Ce n'est pas exactement cela. En réalité, il faut se souvenir que la stratégie de Luenberger permet initialement d'envisager un observateur d'ordre  $q$  qui répond à la structure plus générale (8.3) page 375, dite de Luenberger, structure dans laquelle le choix  $q = (n - 1)$  n'est qu'une option. Si l'on choisit plutôt cette structure avec

$$q = n, T = L = I, Q = 0, P = -Z, S = I, \quad (8.22)$$

alors il vient  $w = x$ ,  $\mu = \epsilon$ ,  $z = x + \mu = \hat{x} = \hat{w}$ ,  $R = B$ ,  $F = A + ZC$ ,  $G = 0$ , et, avec la notation  $\hat{y} = C\hat{x}$ , la structure de l'observateur de Kálmán donnée en (8.12) page 383 est recouverte. En raison du choix  $T = I$  et du fait que le modèle de l'observateur d'ordre plein reprend celui du système, un tel observateur est appelé, dans la théorie de Luenberger, *observateur identité*.

Cette structure « identité » est incontestablement la plus populaire. L'une des raisons en est sa simplicité d'écriture, la simplicité de la procédure qui l'accompagne (la dualité avec le placement de pôles contribue à cette simplicité) et les possibilités d'extensions qu'elle offre notamment dans le cas, non traité ici, où des paramètres aux valeurs incertaines apparaissent dans le modèle du procédé.

---

**Biographie 8.1** David Gilbert Luenberger (1937-) : *chercheur en mathématiques états-unien.*



*D. G. Luenberger est toujours professeur à l'Université de Stanford. Son principal domaine d'activité est la théorie de l'information (qui peut inclure l'Automatique telle que définie dans ce document). Il manifeste de longue date un intérêt pour le rôle des mathématiques dans la résolution d'importants problèmes issus de la planification, la prise de décision, la stratégie, les systèmes, leur commande, l'optimisation, la microéconomie et l'ingénierie financière. Le travail de Luenberger qui justifie ce petit élément biographique s'inscrit dans la droite ligne du travail de*

*R. E. Kálmán*<sup>4</sup>. Luenberger est surtout connu pour sa thèse, obtenue dans le domaine du Génie Électrique au sens large du terme, et qui traitait des observateurs d'état. L'un des principaux résultats de cette thèse fut résumé dans un article de revue paru en 1964, article largement cité depuis. La carrière de Luenberger est ponctuée de nombreux prix et récompenses.

---

4. voir biographie en annexe I.2 page 777.

## 8.4. Commande par retour d'état observé

La reconstruction du vecteur d'état a ici pour but de mettre en œuvre une loi de commande par retour d'état lorsque le vecteur d'état n'est pas mesurable. Si l'on associe l'observateur d'état et la loi de commande par retour d'état, on obtient les schémas des figures 8.4 et 8.5.

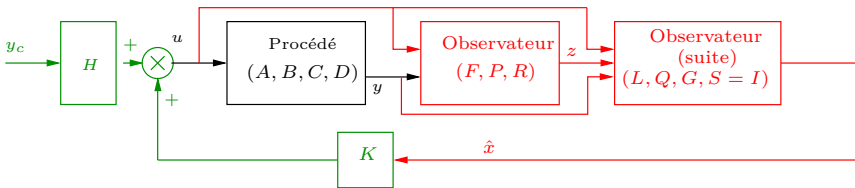


FIGURE 8.4 – Schéma d'un retour d'état via un observateur d'ordre minimal

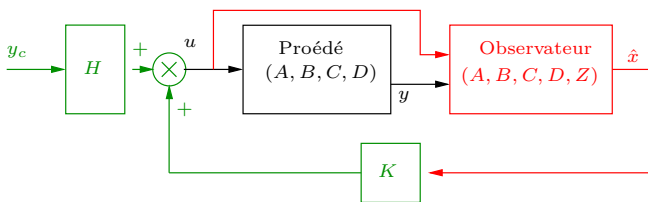


FIGURE 8.5 – Schéma d'un retour d'état via un observateur d'ordre plein (identité)

### 8.4.1. Avec un observateur d'ordre minimal

Dans le cas du retour par observateur d'ordre minimal, il est donc possible de considérer la figure 8.4. Pour ce choix d'observateur, le modèle global est d'ordre

(2n - 1). Les équations décrivant l'ensemble de ce système observé bouclé sont

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ \dot{z} = Fz + Py + Ru \\ \hat{x} = Lz + Qy + Gu \\ u = K\hat{x} + Hy_c. \end{cases}$$

À ces équations, il faut ajouter les contraintes que doivent vérifier un observateur de Luenberger, à savoir

$$\begin{cases} TA - PC = FT, \\ TB - PD = R, \\ LT + QC = I, \\ -QD = G. \\ F \text{ est stable au sens de Hurwitz.} \end{cases}$$

La commande  $u$  peut se réexprimer

$$\begin{aligned} u &= KLz + KQy + KGu + Hy_c \\ \Leftrightarrow u &= KLz + KQ(Cx + Du) + KGu + Hy_c \\ \Leftrightarrow (1 - \underbrace{K(QD + G)}_0)u &= KQCx + KLz + Hy_c \\ \Leftrightarrow u &= KQCx + KLz + Hy_c. \end{aligned}$$

Par ailleurs, le vecteur  $\dot{z}$  peut alors aussi se réexprimer en utilisant l'expression de  $u$  :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Fz + P(Cx + Du) + Ru \\ \Leftrightarrow \dot{z} &= Fz + PCx + (PD + R)u \\ \Leftrightarrow \dot{z} &= Fz + PCx + (PD + R)KQCx + (PD + R)KLz + (PD + R)Hy_c \\ \Leftrightarrow \dot{z} &= (P + (PD + R)KQ)Cx + (F + (PD + R)KL)z + (PD + R)Hy_c. \end{aligned}$$

Enfin, la sortie  $y$  devient

$$\begin{aligned} y &= Cx + DKQCx + DKLz + DHy_c \\ \Leftrightarrow y &= (C + DKQC)x + DKLz + DHy_c. \end{aligned}$$



En considérant comme état global du système, le vecteur  $\zeta = [x' \ z']'$ , il vient

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \begin{bmatrix} A+BKQC & BKL \\ (P+(PD+R)KQ)C & F+(PD+R)KL \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} BH \\ (PD+R)H \end{bmatrix} y_c \\ y = [(C+DKQC) \quad DKL] \zeta + DHy_c. \end{cases} \quad (8.23)$$

Si la transmission directe  $D$  est nulle, ces équations se simplifient en

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \begin{bmatrix} A+BKQC & BKL \\ (P+RKQ)C & F+RKL \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} BH \\ RH \end{bmatrix} y_c \\ y = [C \quad 0] \zeta. \end{cases} \quad (8.24)$$

En rappelant que  $z = T\hat{x} = Tx + \mu$ , en considérant maintenant le vecteur  $\kappa = [x' \ \mu']'$ , et en utilisant les équations que doivent vérifier les matrices du modèles de l'observateur (cf. §8.2.1 page 375), il vient une autre représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{\kappa} = \begin{bmatrix} A+BK & BKL \\ 0 & F \end{bmatrix} \kappa + \begin{bmatrix} BH \\ 0 \end{bmatrix} y_c, \\ y = [(C+DK) \quad DKL] \kappa + DHy_c. \end{cases} \quad (8.25)$$

Cette dernière équation peut, comme précédemment, se simplifier, si  $D = 0$ , en

$$\begin{cases} \dot{\kappa} = \begin{bmatrix} A+BK & BKL \\ 0 & F \end{bmatrix} \kappa + \begin{bmatrix} BH \\ 0 \end{bmatrix} y_c, \\ y = [C \quad 0] \kappa. \end{cases}$$

**Remarque 8.5** Comme suite à la remarque 8.1 page 378, cette réalisation montre que les valeurs propres de la matrice d'état du système accompagné de son observateur puis bouclé par un retour d'état sont, d'une part, les pôles du procédé bouclé par un retour d'état associé à  $K$  (comme s'il n'y avait pas d'observateur), et, d'autre part, les valeurs propres de  $F$  caractérisant la dynamique de l'observateur d'ordre minimal. Par ailleurs, l'équation (8.25) est une forme canonique de Kálmán comme celle présentée en (6.17) page 264 qui montre que, même en boucle fermée, la dynamique de reconstruction n'est toujours pas commandable.

Il est aussi possible d'intégrer en partie le retour d'état dans l'observateur. On parle alors d'observateur de retour d'état. L'idée est de poser  $w = Kx$ . Alors le retour d'état observé s'écrit

$$u = \hat{w} + Hy_c, \tag{8.26}$$

où  $\hat{w}$  est la reconstruction, par l'observateur, de  $w$ . Cette reconstruction peut se faire à l'aide de la procédure de Luenberger en posant simplement

$$S = K. \tag{8.27}$$

Le schéma de commande devient

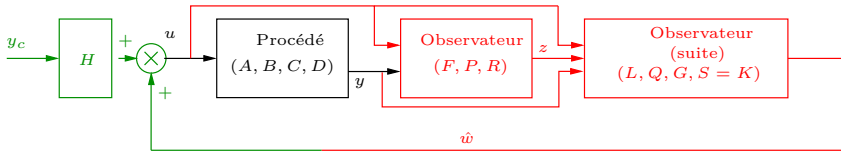


FIGURE 8.6 – Schéma d'un retour d'état via un observateur d'ordre minimal (de Luenberger) intégrant la reconstruction de  $w = Kx$

En posant alors comme état global  $\zeta = [x' \ z']'$ , il vient

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \begin{bmatrix} A + BQC & BL \\ (P + (PD + R)Q)C & F + (PD + R)L \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} BH \\ (PD + R)H \end{bmatrix} y_c \\ y = \begin{bmatrix} (C + DQC) & DL \end{bmatrix} \zeta + DH y_c. \end{cases}$$

Le vecteur  $K$  disparaît de ces équations car il est en fait intégré dans les valeurs calculées des matrices du modèle de l'observateur. Ceci semble permettre plus difficilement, *a priori*, de conclure au *principe de séparation* (des valeurs propres

du système et celles de l'observateur). Toutefois, si l'état global est  $\kappa = [x' \ \mu']'$ , il vient

$$\begin{cases} \dot{\kappa} = \begin{bmatrix} A+BK & BL \\ 0 & F \end{bmatrix} \kappa + \begin{bmatrix} BH \\ 0 \end{bmatrix} y_c \\ y = \begin{bmatrix} (C+DK) & DL \end{bmatrix} \kappa + DHy_c, \end{cases} \quad (8.28)$$

et le principe de séparation est respecté, à savoir que la matrice d'état du système global a pour valeurs propres celles de  $(A+BK)$  (commande par retour d'état) et celles de  $F$  (observateur).

#### 8.4.2. Avec observateur d'ordre plein

Dans le cas du retour avec observateur d'ordre plein, il faut se référer à la figure 8.5 page 391. L'observateur implanté correspond au modèle exprimé dans la base initiale ce qui permet ensuite d'appliquer directement le retour  $K$ . Pour ce second choix d'observateur, les équations du système global, qui est d'ordre  $2n$ , sont

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + Z(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du \\ u = K\hat{x} + Hy_c. \end{cases}$$

En considérant le vecteur d'état  $\xi = [x' \ \epsilon']'$  où  $\epsilon = \hat{x} - x$ , il vient le modèle global suivant :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \begin{bmatrix} A+BK & BK \\ 0 & A+ZC \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} BH \\ 0 \end{bmatrix} y_c \\ y = \begin{bmatrix} (C+DK) & DK \end{bmatrix} \xi + DHy_c. \end{cases} \quad (8.29)$$

Si la transmission directe est nulle ( $D = 0$ ), le modèle précédent se simplifie en

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} A+BK & BK \\ 0 & A+ZC \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} BH \\ 0 \end{bmatrix} y_c \\ y &= [C \ 0] \xi. \end{cases}$$

**Remarque 8.6** Comme suite à la remarque 8.3 page 386, on voit dans l'équation d'état ci-avant que les pôles du système observé bouclé sont les pôles de l'observateur ajoutés à ceux du procédé bouclé par un retour d'état associé au vecteur  $K$ . Le modèle (8.29) est une forme canonique de Kálmán comme présentée en (6.17) page 264, qui montre que la dynamique de reconstruction n'est pas commandable. Ces commentaires sont les mêmes que pour le premier type d'observateur ce qui est logique puisque, d'après le paragraphe 8.3.3 page 389, l'observateur de Kálmán est un observateur de Luenberger particulier.

Quoi qu'il en soit, dans les deux cas, la procédure de calcul d'une loi de commande par retour de sortie consiste d'une part à synthétiser un retour d'état, d'autre part à synthétiser un observateur. Il n'est donc pas utile de répéter la procédure dans sa globalité. Autrement dit, les calculs de  $K$  et de  $Z$  sont menés de façon totalement indépendante. C'est aussi cela que l'on appelle *principe de séparation*.

Exemple :

On reprend l'exemple du modèle (7.12) page 306 pour lequel un retour d'état et deux observateurs ont été synthétisés. C'est l'observateur d'ordre plein qui est ici pris en compte. En supposant que les conditions initiales sont toutes nulles, la réponse indicielle du système bouclé global est donnée par la figure 8.7. Elle est superposée à la réponse indicielle du système bouclé par retour d'état sans observation. On constate que les deux courbes sont parfaitement confondues. L'observateur remplit donc très bien son rôle. Par ailleurs, puisque  $x$  et  $\hat{x}$  sont tous deux nuls à l'origine du temps, l'observateur décrit immédiatement l'état du procédé sans qu'un régime transitoire de l'observation ne soit visible. Le régime transitoire de l'ensemble de la réponse est étroitement lié aux pôles  $\lambda_i$  du système qui sont placés par  $K$ . Le régime statique est assuré par la précommande  $H$  (ici de 1).

En revanche, si l'on considère qu'à l'instant 0, on a  $x(0) = [0, 5 \ -1]'$  et  $\hat{x}(0) = [0 \ 0]'$ , ce qui revient à considérer  $\xi(0) = [0, 5 \ -1 \ -0, 5 \ 1]'$ , et, si l'on superpose

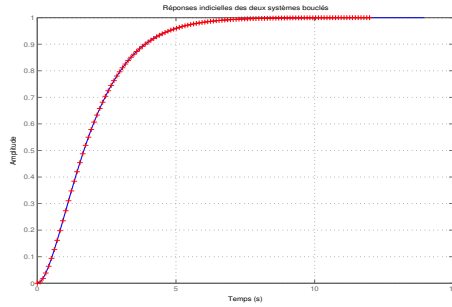


FIGURE 8.7 – Réponses indicielles à conditions initiales nulles.

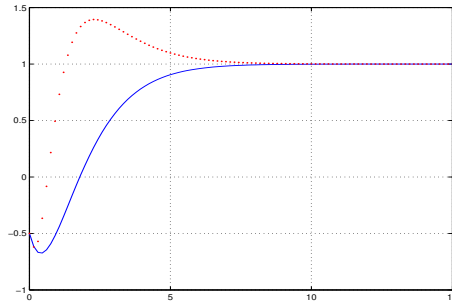


FIGURE 8.8 – Réponses indicielles à conditions initiales non nulles

la réponse indicielle du système bouclé par retour d'état direct avec celle du système observé bouclé, on constate cette fois-ci une différence, comme le montre la figure 8.8. Cette différence est liée au régime transitoire de l'observation liée à la dynamique de l'observateur c'est-à-dire aux pôles  $\eta_i$  de cet observateur. Il est donc essentiel de choisir convenablement cette dynamique (plus rapide que celle du système). Bien entendu, en régime permanent,  $\hat{x}(t)$  rejoint  $x(t)$  (c'est une convergence asymptotique).

## 8.5. Commande par retour d'état observé avec intégrateur

Si l'on craint l'influence d'une perturbation (notamment en échelon) sur le régime statique, il est possible, comme dans la partie 7.4 page 310, d'adjoindre un intégrateur à la loi de commande pour rejeter complètement cette perturbation en régime permanent, ce pour des consignes constantes. On se réfère ici à la seconde approche présentée au paragraphe 7.4.2 page 315, la première approche présentée au paragraphe 7.4.1 page 310 induisant, comme il a été vu, quelques inconvénients.

Le modèle du procédé est donc augmenté (en amont) d'un intégrateur. Toutefois, puisque cet intégrateur fait partie de la loi de commande, l'état correspondant est disponible et il est inutile de vouloir l'observer. Seul l'état initial  $x$  est à observer. La structure retenue pour cette commande est donc donnée par la figure 8.9.

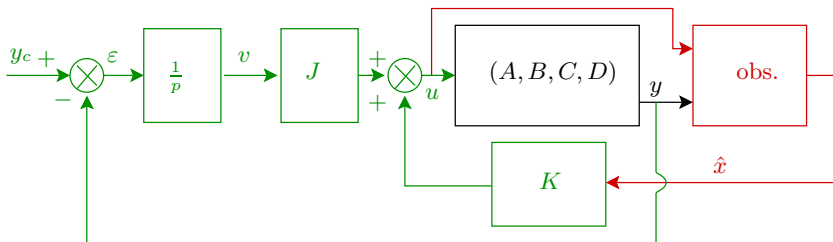


FIGURE 8.9 – Schéma de commande par retour d'état observé avec adjonction d'intégrateur

Si l'on considère un observateur d'ordre plein, l'ensemble des équations est rappelé :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + Z(\hat{y} - y), \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du, \\ \dot{v} = -Cx - Du + y_c, \\ u = K\hat{x} + Jv, \\ \epsilon = \hat{x} - x. \end{cases}$$

En considérant, comme en §7.4.2 page 315, le vecteur  $\bar{x} = [x' \ v]'$  puis le vecteur  $\bar{\xi} = [\bar{x} \ \epsilon]'$ , il vient

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}} = \left[ \begin{array}{cc|c} A+BK & BJ & BK \\ -C-DK & -DJ & -DK \\ \hline 0 & 0 & A+ZC \end{array} \right] \bar{\xi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_c, \\ y = [C+DK \quad DJ \mid DK] \bar{\xi}. \end{cases} \quad (8.30)$$

Compte tenu des notations introduites en (7.21) page 316, la représentation d'état se récrit

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}} = \left[ \begin{array}{cc|c} \bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K} & \bar{B}_1 K & \\ 0 & A + ZC & \\ \hline \bar{C} + \bar{D} \bar{K} & DK & \end{array} \right] \bar{\xi} + \begin{bmatrix} \bar{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} y_c, \\ y = [\bar{C} + \bar{D} \bar{K} \quad DK] \bar{\xi}. \end{cases} \quad (8.31)$$

Cette équation montre que, même en boucle fermée, et même en présence de l'intégrateur, la dynamique du système global est constituée de la dynamique choisie par retour d'état avec intégrateur, (c.-à-d. les valeurs propres de  $(\bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K})$  : cf. § 7.4.2 page 315) d'une part, et de la dynamique de reconstruction (c.-à-d. les valeurs propres de  $(A + ZC)$  : cf. §8.3 page 383) d'autre part.

En outre, comme en boucle ouverte, le modèle (8.31) se révèle être une forme canonique de Kálmán relative à la commandabilité (cf. §6.8.3 page 268), forme de laquelle il peut être déduit que la dynamique de  $\epsilon$  n'est pas commandable.

### Exemple :

On reprend l'exemple du modèle (7.12) page 306 pour lequel un retour d'état avec intégrateur a été calculé au paragraphe 7.4.2 page 315 et un observateur de Kálmán a été synthétisé au paragraphe 8.3.2 page 386.

Si l'on suppose qu'une perturbation en échelon affecte la commande  $u$  après 2 secondes de réponse, la réponse indicielle est donnée par la figure 8.10. La courbe en trait plein correspond au cas où l'amplitude de la perturbation est nulle (absence de perturbation) et la courbe matérialisée par les croix représente

le cas où cette perturbation est un échelon unitaire. On peut constater que le gain statique unitaire n'est pas altéré par la perturbation.

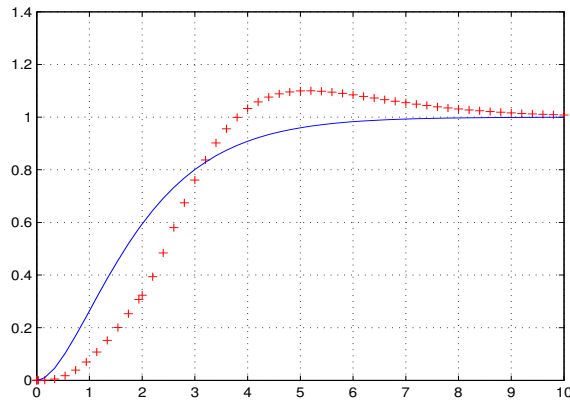


FIGURE 8.10 – Réponses indicielles à conditions initiales nulles.

Toutefois, ces réponses correspondent à une reconstruction instantanée. Plus précisément, il y a une condition initiale nulle sur l'ensemble du vecteur d'état ce qui implique un écart de reconstruction nulle à  $t = 0$ . Si maintenant une condition initiale est considérée sur l'état  $x$  du procédé, à savoir  $x_0 = [0, 5 \ 1]'$ , ce qui induit  $\epsilon_0 = -x_0$ , alors les réponses indicielles obtenues pour les mêmes signaux d'entrée que précédemment sont données par la figure 8.11.

Les mêmes conclusions peuvent être tirées avec un observateur d'ordre minimal. Les équations ne sont pas détaillées dans ce document.

## 8.6. Observateur d'ordre réduit

### 8.6.1. Définition et synthèse

Dans cette partie, la possibilité d'utiliser des observateurs d'ordre réduit est étudiée. Il s'agit en quelque sorte de ne pas trancher véritablement entre mesure et observation mais d'associer les deux. Soit le système (3.5) page 71. La



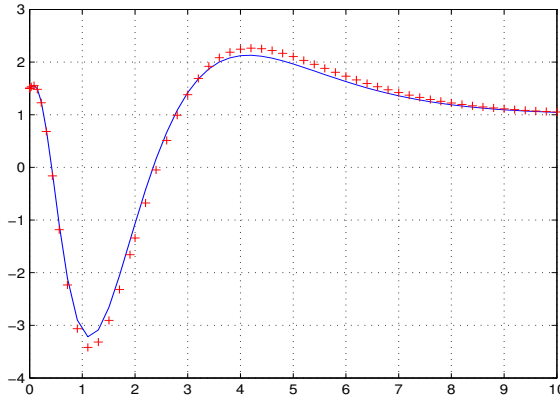


FIGURE 8.11 – Réponses indicielles pour  $\epsilon_0 = -x_0 = -[0, 5 \ 1]'$ .

paire  $(A, C)$  est supposée observable. Ce système est monovarié en ce sens qu'il ne présente qu'une entrée de commande  $u$  et qu'une sortie à contrôler  $y$ . On suppose toutefois que l'on dispose de  $p (< n)$  informations au travers d'un vecteur de mesures  $y_{\text{mes}} \in \mathbb{R}^p$ . Cette concaténation correspond à un vecteur de plusieurs sorties que l'on ne cherche pas à contrôler mais qui servent à la commande. Si  $y_{\text{mes}}$  est considéré comme un vecteur de sortie, alors le système devient multivariable puisque présentant plusieurs sorties. À ce titre, cette partie constitue une petite escapade dans le monde des systèmes multivariables.

Le système à observer s'écrit donc

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax & + Bu, \\ y_{\text{mes}} &= C_{\text{mes}}x & + D_{\text{mes}}u, \end{cases} \tag{8.32}$$

où  $C_{\text{mes}}$  est de plein rang  $p$ .

Très souvent, le vecteur de sortie  $y_{\text{mes}}$  consiste simplement en une partie de l'état  $x$  (pour simplifier, les  $p$  premières composantes) que l'on note  $x_1 \in \mathbb{R}^p$ . Autrement dit,  $y_{\text{mes}} = [I_p \ 0]x$ , ce qui est donc un cas particulier de  $y_{\text{mes}} = C_{\text{mes}}x + D_{\text{mes}}u$ . Si l'expression  $[I_p \ 0]x + D_{\text{mes}}u$  n'est pas initialement présente dans le modèle, il est possible de la faire apparaître grâce à un changement de base  $x = \tilde{M}\tilde{x}$ , par exemple avec

$$\check{M} = [ C_{\text{mes}}^+ \quad C_{\text{mes}_\perp} ],$$

où  $C_{\text{mes}}^+$  est une pseudo-inverse de  $\check{C}$ , c.-à-d. une matrice rectangulaire haute de plein rang  $p$  telle que  $C_{\text{mes}}^+ C_{\text{mes}} = I_p$  (par exemple la pseudo inverse de Moore-Penrose, cf. §A.1.12.4 page 654 en annexe), et où  $C_{\text{mes}_\perp}$  est le « complé- ment orthogonal à droite » de  $C_{\text{mes}}$  c.-à-d. une matrice rectangulaire haute de plein rang  $(n - p)$  telle que  $C_{\text{mes}} C_{\text{mes}_\perp} = 0$  (cf. §A.1.13 page 658 en annexe). Cette matrice génère le noyau de l'application linéaire associée à  $C_{\text{mes}}$ , ce qui implique que les colonnes de  $C_{\text{mes}_\perp}$  associées aux colonnes de  $C_{\text{mes}}^+$  constituent bien une base de  $\mathbb{R}^n$  et  $\check{M}$  est bien de rang plein. (Il est possible de déterminer d'autres matrices de passage faisant l'affaire.)

La réalisation correspondant à la nouvelle base s'écrit

$$\begin{cases} \dot{\check{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \check{A}_{11} & \check{A}_{12} \\ \check{A}_{21} & \check{A}_{22} \end{bmatrix}}_{\check{A}} \check{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \check{B}_1 \\ \check{B}_2 \end{bmatrix}}_{\check{B}} u, \\ y_{\text{mes}} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix}}_{\check{C}} \check{x} + \underbrace{D_{\text{mes}}}_{\check{D}} u, \end{cases} \tag{8.33}$$

Il s'agit donc d'observer  $\check{x} = [\check{x}'_1 \quad \check{x}'_2]'$  avec  $\check{x}_1 \in \mathbb{R}^p$ ,  $\check{x}_2 \in \mathbb{R}^q$ , et avec  $q = n - p$ . De façon plus générale, il s'agit de reconstruire  $w = Sx = S_1 x_1 + S_2 x_2$  que l'on peut écrire

$$w = Sx = S\check{M}\check{x} = \check{S}\check{x}, \tag{8.34}$$

où, bien sûr,

$$\check{S} = S\check{M} = [ \check{S}_1 \quad \check{S}_2 ]. \tag{8.35}$$

Pour ce faire, le système différentiel constituant la première équation du modèle (8.33) est récrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \check{\dot{x}}_2 &= \underbrace{\check{A}_{22}}_{\check{A}} \check{x}_2 + \underbrace{[\check{A}_{21} \check{B}_2]}_{\check{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \check{x}_1 \\ u \end{bmatrix}}_{\check{u}}, \\ \underbrace{\check{\dot{x}}_1}_{\check{y}} &= \underbrace{\check{A}_{12}}_{\check{C}} \check{x}_2 + \underbrace{[\check{A}_{11} \check{B}_1]}_{\check{D}} \check{u}. \end{cases} \quad (8.36)$$

L'observateur est calculé sur la base du modèle (8.36) selon une structure de Luenberger :

$$\begin{cases} \dot{z} &= \check{F}z + \check{P}\check{y} + \check{R}\check{u}, \\ \hat{w} &= \check{L}z + \check{Q}\check{y} + \check{G}\check{u}, \end{cases} \quad (8.37)$$

où  $z \in \mathbb{R}^q$ .

Il a été vu dans le paragraphe 8.1.4 page 374 que l'existence d'un observateur effectif est équivalente à l'observabilité d'une paire de matrices qui, ici, est la paire  $(\check{A}, \check{C}) = (\check{A}_{22}, \check{A}_{12})$ . Or, d'après le test de Popov-Belevitch-Hautus (PBH) (voir §6.5, équation (6.15) page 251), si  $(A, C)$  est observable (et donc aussi  $(\check{A}, \check{C})$ ), il vient

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \check{C} \\ (\lambda I - \check{A}) \end{bmatrix} \right) = \text{rang} \left( \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ (\lambda I - \check{A}_{11}) & \check{A}_{12} \\ \check{A}_{21} & (\lambda I - q - \check{A}_{22}) \end{bmatrix} \right) n \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Le rang  $n$  est entre autres assuré par l'indépendance linéaire des  $q$  dernières colonnes de la matrice dans l'équation ci-avant. Compte tenu du bloc supérieur nul, ces  $q$  dernières colonnes sont effectivement linéairement indépendantes si et seulement si

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \check{A}_{12} \\ (\lambda I - \check{A}_{22}) \end{bmatrix} \right) = q \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ceci n'est autre que la vérification du test PBH pour la paire  $(\check{A}, \check{C}) = (\check{A}_{22}, \check{A}_{12})$ . Donc  $(\check{A}, \check{C})$  est observable.

La paire  $(A, C)$  est observable  $\Rightarrow$  La paire  $(\check{A}, \check{C})$  est observable.

L'idée est alors d'utiliser, comme pour un observateur de l'ensemble du vecteur d'état, une relation

$$z = T\hat{\hat{x}},$$

où, toutefois, dans ce cas,  $\hat{x} = [\check{x}'_1 \ \hat{x}'_2]'$  est une sorte de reconstruction de  $\check{x}$ , constituée en fait de  $\check{x}_1$  lui-même et d'une reconstruction  $\hat{x}_2$  de  $\check{x}_2$ . La matrice  $T$  est ainsi décomposée,

$$T = \begin{bmatrix} Z & \check{T} \end{bmatrix},$$

de sorte que

$$z = \check{T}\hat{x}_2 + Z\check{x}_1 = \check{T}\check{x}_2 + Z\check{x}_1 + \underbrace{\check{T}\epsilon_2}_{\mu}, \quad (8.38)$$

où

$$\epsilon_2 = \hat{x}_2 - \check{x}_2$$

est l'écart de reconstruction sur  $x_2$ . On a alors

$$\mu = z - \check{T}\check{x}_2 - Z\check{x}_1.$$

Il vient donc, par dérivation,

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \dot{z} - \check{T}\dot{\check{x}}_2 - Z\dot{\check{x}}_1 \\ &\Leftrightarrow \dot{\mu} = \check{F}z + \check{P}\check{y} + \check{R}\check{u} - \check{T}\check{A}\check{x}_2 - \check{T}\check{B}\check{u} - Z\check{C}\check{x}_2 - Z\check{D}\check{u} \\ &\Leftrightarrow \dot{\mu} = \check{F}z + \check{P}\check{C}\check{x}_2 + \check{P}\check{D}\check{u} + \check{R}\check{u} - \check{T}\check{A}\check{x}_2 - \check{T}\check{B}\check{u} - Z\check{C}\check{x}_2 - Z\check{D}\check{u}. \end{aligned}$$

Or,

$$z = \check{T}\check{x}_2 + Z\check{x}_1 + \mu = \mu + \check{T}\check{x}_2 + \begin{bmatrix} Z & 0 \end{bmatrix} \check{u},$$

ce qui implique que

$$\dot{\mu} = \check{F}\mu + (\check{F}\check{T} - \check{T}\check{A} + \check{P}\check{C} - Z\check{C})\check{x}_2 + (\check{R} + \check{P}\check{D} - \check{T}\check{B} - Z\check{D} + \check{F} \begin{bmatrix} Z & 0 \end{bmatrix})\check{u}. \quad (8.39)$$

De ce fait, pour assurer la convergence asymptotique de  $z$  vers  $Tx$ , il est nécessaire que  $\mu$  tende vers zéro, ce qui est imposé par les contraintes suivantes (en posant que  $\check{R} = [\check{R}_1 \ \check{R}_2]$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{F} \text{ stable au sens de Hurwitz,} \\ \check{F}\check{T} - \check{T}\check{A} + (\check{P} - Z)\check{C} = \check{F}\check{T} - \check{T}\check{A}_{22} + (\check{P} - Z)\check{A}_{12} = 0, \\ \check{R} + (\check{P} - Z)\check{D} - \check{T}\check{B} + \check{F} \begin{bmatrix} Z & 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \check{R}_1 - \check{T}\check{A}_{12} + (\check{P} - Z)\check{A}_{11} + \check{F}Z = 0, \\ \check{R}_2 - \check{T}\check{B}_2 + (\check{P} - Z)\check{B}_1 = 0. \end{cases} \end{array} \right. \quad (8.40)$$

Par ailleurs, l'objectif véritable est de reconstruire  $w$ . La partie statique de l'équation (8.37) conduit à

$$\begin{aligned} \hat{w} &= \check{L}\check{T}\check{x}_2 + \check{L}Z\check{x}_1 + \check{L}\mu + \check{Q}\check{C}\check{x}_2 + \check{Q}\check{D}\check{u} + \check{G}\check{u} \\ \Leftrightarrow \hat{w} &= (\check{Q}\check{C} + \check{L}\check{T})\check{x}_2 + ([\check{L}Z \ 0] + \check{Q}\check{D} + \check{G})\check{u} + \check{L}\mu. \end{aligned}$$

Pour une reconstruction efficace en régime permanent, compte tenu du fait que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0$ , il faut assurer

$$(\check{Q}\check{C} + \check{L}\check{T})\check{x}_2 + ([\check{L}Z \ 0] + \check{Q}\check{D} + \check{G})\check{u} = \check{S}_1\check{x}_1 + \check{S}_2\check{x}_2,$$

ce qui conduit aux contraintes (en supposant que  $\check{G} = [\check{G}_1 \ \check{G}_2]$ ) :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \check{Q}\check{C} + \check{L}\check{T} = \check{S}_2 \\ [\check{L}Z \ 0] + \check{Q}\check{D} + \check{G} = [\check{S}_1 \ 0] \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \check{Q}\check{A}_{12} + \check{L}\check{T} = \check{S}_2 \\ [\check{L}Z \ 0] + \check{Q}[\check{A}_{11} \ \check{B}_1] + [\check{G}_1 \ \check{G}_2] = [\check{S}_1 \ 0] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \check{Q}\check{A}_{12} + \check{L}\check{T} = \check{S}_2 \\ \check{L}Z + \check{Q}\check{A}_{11} + \check{G}_1 = \check{S}_1 \\ \check{Q}\check{B}_1 + \check{G}_2 = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{8.41}$$

Il s'agit donc de trouver une solution au jeu de contraintes constitué de (8.40) et (8.41). Ces solutions existent dès lors que  $(\check{A}, \check{C})$  est observable. La recherche d'une solution passerait *a priori* par des moyens numériques plutôt que par un développement analytique et un calcul « à la main ». Une difficulté dans ce calcul serait d'assurer la stabilité de  $F$ . Toutefois, quand bien même une solution serait trouvée, sa mise en œuvre pourrait se révéler un peu plus délicate que prévu en raison de la nécessité d'utiliser  $\check{y}$ , donc  $\check{x}_1$ , c.-à-d.  $(\dot{y}_{\text{mes}} - \check{D}\check{u})$ . En effet, il faudrait dériver le vecteur de mesure  $y_{\text{mes}}$  ainsi que  $u$ , ce qui peut se faire mais complique un peu l'implantation et n'est pas sans risque en pratique. Il est possible de s'affranchir de cette difficulté en se focalisant sur une solution particulière, qui correspond en fait à une sorte d'*observateur réduit identité*. Ainsi, soit le choix

$$\check{T} = I_q,$$

auquel s'ajoutent les choix

$$\check{P} = 0, \quad \check{Q} = 0.$$

Il vient alors

$$z = Z\check{x}_1 + \hat{\check{x}}_2,$$

et les contraintes (8.40) et (8.41) deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{F} - \check{A} - Z\check{C} = 0 \Leftrightarrow \check{F} = \check{A} + Z\check{C} = \check{A}_{22} + Z\check{A}_{12} \\ \check{R} = [ \check{R}_1 \quad \check{R}_2 ] \\ \quad = [ \check{A}_{21} + Z\check{A}_{11} - (\check{A}_{22} + Z\check{A}_{12})Z \quad \check{B}_2 + Z\check{B}_1 ] \\ \check{L} = \check{S}_2 \\ \check{G} = [ \check{G}_1 \quad \check{G}_2 ] = [ \check{S}_1 - \check{S}_2 Z \quad 0 ]. \end{array} \right.$$

L'observateur qui en découle s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = Fz + Py_{mes} + Ru, \\ \dot{\hat{w}} = Lz + Qy_{mes} + Gu, \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \check{F}, \\ P = \check{R}_1, \\ R = \check{R}_2 - \check{R}_1\check{D}, \\ L = \check{L}, \\ Q = \check{G}_1, \\ G = -\check{G}_1\check{D}, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{z} &= Fz + Py_{mes} + Ru, \\ \hat{w} &= Lz + Qy_{mes} + Gu, \end{cases} \quad (8.42)$$

avec

$$\begin{cases} F &= \check{A}_{22} + Z\check{A}_{12}, \\ P &= \check{A}_{21} + Z\check{A}_{11} - (\check{A}_{22} + Z\check{A}_{12})Z, \\ R &= \check{B}_2 + Z\check{B}_1 - (\check{A}_{21} + Z\check{A}_{11} - (\check{A}_{22} + Z\check{A}_{12})Z)\check{D}, \\ L &= \check{L} - \check{S}_2, \\ Q &= \check{S}_1 - \check{S}_2Z, \\ G &= (\check{S}_2Z - \check{S}_1)\check{D}. \end{cases} \quad (8.43)$$

Le calcul de l'observateur se ramène alors au calcul du vecteur  $Z$  qui doit assurer que  $F = \check{F}$  est stable au sens de Hurwitz. Or l'observabilité de la paire  $(\check{A}_{22}, \check{A}_{12})$  rend ce calcul possible, par exemple en utilisant la procédure indiquée au paragraphe 8.3.2 page 386. En suivant cette procédure, la dynamique de  $\mu$  est fixée (les pôles de l'observateur sont choisis).

### 8.6.2. Observateur réduit et retour d'état

Si une loi de commande de type retour d'état est construite sur la base de l'observateur réduit synthétisé au paragraphe précédent, il est judicieux d'écrire cette loi

$$u = Hy_c + \hat{w}, \quad \text{avec} \quad \hat{w} = K\hat{x}, \quad (8.44)$$

où  $\hat{x}$  est défini comme dans le paragraphe précédent à savoir  $\hat{x} = [x'_1 \ x'_2]'$  =  $\check{M}\hat{\hat{x}} = \check{M}[\hat{x}'_1 \ \hat{x}'_2]'$ . L'observateur doit donc à la fois reconstruire  $\hat{x}_2$  et intégrer le vecteur de retour d'état  $K$ . Un tel observateur s'obtient grâce à (8.42) en prenant comme équation statique  $\hat{w} = K\hat{x} = K\check{M}\hat{\hat{x}}$ , ce qui implique de faire le choix

$$S = K \Leftrightarrow \check{S} = K\check{M}.$$

À l'équation d'état de l'observateur ainsi instancié s'ajoute aussi la loi de commande (8.44) qui peut se récrire, en tenant compte de (8.42),

$$u = Hy_c + Lz + Qy_{\text{mes}} + Gu.$$

En utilisant l'expression de  $z$  donnée par l'équation (8.38) page 404,  $u$  devient

$$u = Hy_c + LT\check{x} + L\mu + Q\check{C}\check{x} + Q\check{D}u + Gu. \tag{8.45}$$

Or, il est clair d'après (8.43) que

$$Q\check{D} = -G \Rightarrow Q\check{D}u + Gu = 0. \tag{8.46}$$

Par ailleurs, toujours en utilisant (8.43), il vient

$$\begin{aligned} LT\check{x} + Q\check{C}\check{x} &= \check{S}_2(\check{x}_2 + Z\check{x}_1) + (\check{S}_1 - \check{S}_2Z)\check{x}_1 \\ \Leftrightarrow LT\check{x} + Q\check{C}\check{x} &= \check{S}_1\check{x}_1 + \check{S}_2\check{x}_2 = \check{S}\check{x} = Sx = Kx. \end{aligned} \tag{8.47}$$

En injectant (8.46) et (8.47) dans (8.45), l'équation

$$u = Kx + L\mu + Hy_c, \tag{8.48}$$

est obtenue, qui, elle-même injectée dans le modèle d'état initial du procédé (3.5) donné page 71, en se souvenant que  $\dot{\mu} = F\mu$ , conduit, pour l'état global  $\kappa = [x \ \mu]'$ , à

$$\begin{cases} \dot{\kappa} &= \begin{bmatrix} A + BK & BL \\ 0 & F \end{bmatrix} \kappa + \begin{bmatrix} BH \\ 0 \end{bmatrix} y_c \\ y &= [ (C + DK) \quad DL ] \kappa + DHy_c, \end{cases} \tag{8.49}$$

Ce modèle est exactement celui obtenu avec un observateur complet (voir équation (8.28) page 395). Le principe de séparation est respecté. Les pôles du système global sont ceux obtenus par calcul (indépendant) d'un retour d'état  $u = Kx + Hy_c$  plaçant les pôles (cf. §7.2.3.3 et §7.3 pages 304 et 308) et ceux de l'observateur (valeurs propres de  $F$ ).

En outre, la représentation d'état obtenue est une forme canonique de Kálmán



relative à la commandabilité (cf. §6.8.3 page 268) qui montre que la dynamique de  $\mu$  reste non commandable.

Le schéma de commande correspond à la figure 8.12.

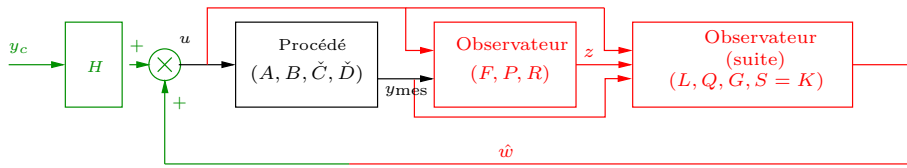


FIGURE 8.12 – Schéma d'un retour d'état via un observateur réduit (intégrant la reconstruction de  $w = Kx$ )

Exemple :

On reprend l'exemple du modèle (7.12) page 306 pour lequel un retour d'état a déjà été calculé. Les matrices nécessaires au calcul sont ici rappelées :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$C = [ 1 \quad 1 ]; \quad D = 0; \quad K = [ -3 \quad -8 ].$$

Il s'agit d'appliquer la procédure de synthèse d'un observateur d'ordre réduit exposée au paragraphe 8.6.1 page 400. Dans le cas présent, une seule mesure est accessible :  $y_{mes} = y \Rightarrow C_{mes} = C$ . De ce fait, la synthèse d'un observateur d'ordre réduit revient à la synthèse d'un observateur d'ordre minimal, c.-à-d. d'ordre 1. Le pôle de l'observateur est spécifié à  $F = -5$ .

La matrice de changement de base  $\check{M}$  peut facilement être choisie :

$$\check{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \check{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Remarque : cette matrice ne correspond pas à celle proposée en §8.6.1 page 400 mais ce n'est pas une nécessité).

Cette matrice de passage conduit à la nouvelle réalisation

$$\check{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}; \quad \check{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \check{C} = [1 \quad 0]; \quad \check{D} = 0.$$

L'application de la procédure conduit à

$$\begin{cases} F &= \check{A}_{22} + Z\check{A}_{12} = 2 - Z = -5 \Rightarrow Z = 7, \\ P &= \check{A}_{21} + Z\check{A}_{11} + (\check{A}_{22} + Z\check{A}_{12})Z = -4 + 7 - 5 \times 7 = 3 - 35 = -32, \\ R &= \check{B}_2 + Z\check{B}_1 = \check{B}_2 = -1. \end{cases}$$

À ce stade, deux cas sont considérés :

- $w = x \Rightarrow \hat{w} = \hat{x} \Rightarrow u = K\hat{w} + Hy_c$  :

Ce cas correspond à un *vrai observateur d'état* c'est-à-dire à

$$S = I_2 \Rightarrow \check{S} = \check{M} \Rightarrow \check{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Il vient alors

$$\begin{cases} L &= \check{L} = \check{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \\ Q &= \check{S}_1 - \check{S}_2 Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix}, \\ G &= (\check{S}_2 Z - \check{S}_1)\check{D} = 0. \end{cases}$$

L'observateur obtenu est donc un observateur d'état d'ordre minimal qui constitue une alternative à celui calculé au paragraphe 8.2.2 page 378 puisqu'ici,  $p = q = (n - 1)$ . Toutefois, pour ce cas de figure, il apparaît plus simple de procéder comme en §8.2.2.

- $w = Kx \Rightarrow \hat{w} = K\hat{x} \Rightarrow u = \hat{w} + Hy_c$  :

Ce cas correspond à un *observateur de retour d'état* c'est-à-dire à

$$S = K = [ -3 \quad -8 ] \Rightarrow \check{S} = K\check{M} = [ -8 \quad 5 ] \Rightarrow \check{S}_1 = -8, \quad \check{S}_2 = 5.$$

Il vient alors

$$\begin{cases} L &= \check{L} = \check{S}_2 = 5, \\ Q &= \check{S}_1 - \check{S}_2 Z = -8 - 5 \times 7 = -43, \\ G &= (\check{S}_2 Z - \check{S}_1) \check{D} = 0. \end{cases}$$

### 8.6.3. Observateur réduit, retour d'état et intégrateur

On considère l'observateur d'ordre réduit du paragraphe 8.6.1 page 400, auquel est ajoutée une loi de commande avec intégrateur telle que celle schématisée par la figure 8.13.

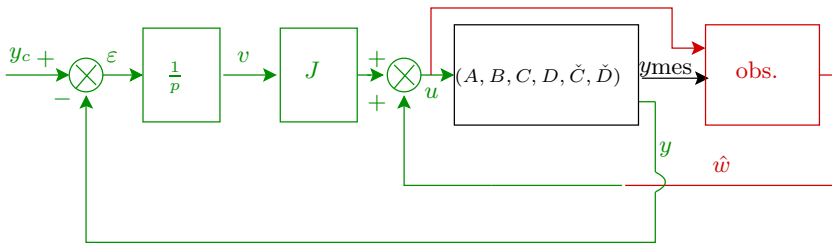


FIGURE 8.13 – Schéma d'un retour d'état avec intégrateur via un observateur réduit (intégrant la reconstruction de  $w = Kx$ )

En se servant des notations et des développements des paragraphes 7.4.2 page 315 et 8.6.1 page 400, ainsi que des arguments du paragraphe 8.6.2 et plus particulièrement de l'équation (8.48) page 408, il vient

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \\ \dot{\mu} &= F\mu, \\ \hat{y} &= C\hat{x} + Du, \\ \dot{v} &= -Cx - Du + y_c, \\ u &= Kx + Jv + L\mu, \end{cases}$$

En considérant, comme en §7.4.2 page 315, le vecteur  $\bar{x} = [x' \ v]'$  puis le vecteur  $\bar{\kappa} = [\bar{x}' \ \mu]'$ , il vient aussi

$$\begin{cases} \dot{\bar{\kappa}} = \left[ \begin{array}{cc|c} A+BK & BJ & BL \\ -C-DK & -DJ & -DL \\ \hline 0 & 0 & F \end{array} \right] \bar{\kappa} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_c, \\ y = [C+DK \quad DJ \mid DL] \bar{\kappa}. \end{cases} \quad (8.50)$$

Compte tenu des notations introduites en (7.21) page 316, la représentation d'état se réécrit

$$\begin{cases} \dot{\bar{\kappa}} = \left[ \begin{array}{cc|c} \bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K} & \bar{B}_1 \bar{L} \\ 0 & F \end{array} \right] \bar{\kappa} + \begin{bmatrix} \bar{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} y_c, \\ y = [\bar{C} + \bar{D} \bar{K} \quad DL] \bar{\kappa}. \end{cases} \quad (8.51)$$

Cette équation montre que, comme de coutume maintenant, même en boucle fermée, et même en présence de l'intégrateur, la dynamique du système bouclé global est constituée de la dynamique choisie par retour d'état avec intégrateur, (c.-à-d. les valeurs propres de  $(\bar{A} + \bar{B}_1 \bar{K})$  : cf. §7.4.2 page 315) d'une part, et de la dynamique de  $\mu$  (c.-à-d. les valeurs propres de  $F$ ) d'autre part.

En outre, comme en boucle ouverte, le modèle (8.51) se révèle être une forme canonique de Kálmán relative à la commandabilité (cf. §6.8.3 page 268), forme de laquelle il peut être déduit que la dynamique de  $\mu$  n'est pas commandable.

Exemple :

L'exemple du modèle (7.12) page 306 est de nouveau repris. Il y a peu à dire. L'observateur se contente de reconstruire  $\hat{w}$  et n'intervient pas sur la partie intégrale de la commande. Dès lors, il suffit de reprendre le gain  $J$  calculé au paragraphe 7.4.2 page 315, à savoir  $J = 1$ .

## 8.7. Robustesse d'un observateur à une incertitude de modèle

Il est ici supposé que le procédé initial est soumis à une incertitude de modèle qui se traduit par des matrices incertaines venant s'ajouter à celles de la réalisation nominale. Ainsi, le modèle incertain s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u, \\ y &= (C + \Delta C)x + (D + \Delta D)u, \end{cases} \quad (8.52)$$

où  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta C$  et  $\Delta D$  sont des matrices inconnues qui traduisent l'imprécision sur les composantes de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Le passage à la forme canonique (déterminé sur le modèle nominal) conduit à

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} &= (\underline{A} + \underline{\Delta A})\underline{x} + (\underline{B} + \underline{\Delta B})u, \\ y &= (\underline{C} + \underline{\Delta C})\underline{x} + (D + \Delta D)u, \end{cases} \quad (8.53)$$

où  $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, D)$  est la réalisation canonique d'observation nominale et où  $\underline{\Delta A} = N^{-1}\Delta AN$ ,  $\underline{\Delta B} = N^{-1}\Delta B$ ,  $\underline{\Delta C} = \Delta CN$  et  $\Delta D$  sont les matrices d'incertitude issues du changement de base.

### 8.7.1. Stabilité de l'écart et convergence d'un observateur

Lorsque le modèle est parfaitement connu, c'est-à-dire que les composantes des matrices constituant ses réalisations sont connues avec une grande précision, les écarts considérés, que ce soient les écarts de reconstruction  $\epsilon$  ou  $e$ , ou encore l'écart  $\mu$ , convergent vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini dès lors que l'observateur est asymptotiquement stable. Autrement dit, la convergence vers zéro et la stabilité au sens de Hurwitz de  $F$  ou  $(A + ZC)$  (selon l'observateur traité) sont équivalentes. Il n'y a alors pas lieu de distinguer les deux notions.

Toutefois, le lecteur, en approfondissant ses lectures, rencontrera peut-être des documents qui soulignent cette nuance. En effet, dans certaines circonstances il convient de distinguer les deux concepts, en particulier si le modèle du procédé n'est pas connu avec précision et répond par exemple au modèle incertain (8.52). Ce paragraphe s'attache à montrer que la présence d'incertitude sur le modèle du système conduit à une erreur de convergence. Ainsi, dans la suite de ce paragraphe, chaque observateur est repris afin de faire apparaître l'existence d'une erreur de convergence.

### 8.7.1.1. Observateur de Luenberger

Il est plus facile de commencer à analyser la dynamique de  $\mu$ . Il vient

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \dot{z} - T\dot{\underline{x}} = Fz + Py + Ru - T\dot{\underline{x}} \\ \dot{\mu} &= FT\underline{x} + F\mu + PC\underline{x} + P\underline{\Delta C}x + PDu + P\underline{\Delta D}u \\ \Leftrightarrow &+ Ru - T\underline{A}x - T\underline{\Delta A}x - T\underline{B}u - T\underline{\Delta B}u \\ \Leftrightarrow \dot{\mu} &= F\mu + \underbrace{(P\underline{\Delta C} - T\underline{\Delta A})\underline{x} + (P\underline{\Delta D} - T\underline{\Delta B})u}_{h_\mu}. \end{aligned}$$

La dynamique de  $\mu$  n'est donc plus décrite par un système autonome et même si  $F$  est stable au sens de Hurwitz, il existe un transfert de la quantité  $h_\mu$  vers  $\mu$ . Cette absence de convergence vers zéro induit une même déficience de convergence de  $e$  :

$$\begin{aligned} e = \hat{w} - w &= L\underline{T}x + L\mu + Q\underline{C}x + Q\underline{\Delta C}x + QDu + Q\underline{\Delta D}u + Gu - \underline{S}x \\ \Leftrightarrow e &= L\mu + Q\underline{\Delta C}x + Q\underline{\Delta D}u. \end{aligned}$$

Puisque  $\mu$  ne tend pas zéro et que le second terme dans l'expression de  $e$  n'est *a priori* pas nul en régime permanent, l'écart sur la quantité reconstruite est non nul. Il y a bien une erreur de convergence.

### 8.7.1.2. Observateur identité d'ordre plein

Pour cet observateur, il est inutile, dans l'exposé, de recourir à la forme cano- nique d'observation. L'écart de reconstruction est décrit par

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= A\hat{x} + Bu + ZC\hat{x} + ZDu - ZCx - Z\underline{\Delta C}x - ZDu - Z\underline{\Delta D}u \\ &- Ax - \underline{\Delta A}x - Bu - \underline{\Delta B}u \\ \Leftrightarrow \dot{\epsilon} &= (A + ZC)\epsilon - \underbrace{(\underline{\Delta A} + Z\underline{\Delta C})x - (\underline{\Delta B} - Z\underline{\Delta D})u}_{h_\epsilon}. \end{aligned}$$

Comme pour l'observateur « général » de Luenberger, on remarque que la dyna- mique de  $\epsilon$  n'est plus décrite par un système autonome stable. Un terme d'entrée  $h_\epsilon$  vient empêcher l'écart de converger vers zéro.

### 8.7.1.3. Observateur d'ordre réduit

On considère ici l'observateur identité réduit vu au paragraphe 8.6.1 page 400 ainsi que les choix qui y sont mentionnés, à savoir  $\check{T} = I$ ,  $\check{P} = 0$  et  $\check{Q} = 0$ . En présence d'incertitude, l'équation (8.36) page 403 peut être ainsi modifiée :

$$\begin{cases} \check{\dot{x}}_2 &= (\check{\mathcal{A}} + \Delta\check{\mathcal{A}})\check{x}_2 + (\check{\mathcal{B}} + \Delta\check{\mathcal{B}})\check{u}, \\ \check{y} &= (\check{\mathcal{C}} + \Delta\check{\mathcal{C}})\check{x}_2 + (\check{\mathcal{D}} + \Delta\check{\mathcal{D}})\check{u}. \end{cases} \quad (8.54)$$

En actualisant la dynamique de  $\mu$ , c'est-à-dire l'équation (8.39) page 404, et en tenant compte du choix rappelé ci-avant et des contraintes (8.40) page 404 respectées pour synthétiser le correcteur, il vient

$$\dot{\mu} = \check{F}\mu + (-\Delta\check{\mathcal{A}} - Z\Delta\check{\mathcal{C}})\check{x}_2 + (-\Delta\check{\mathcal{B}} - Z\Delta\check{\mathcal{D}})\check{u}.$$

On voit de nouveau que la présence des deux derniers termes de l'expression de  $\dot{\mu}$  implique que la stabilité au sens de Hurwitz de  $F$  ne suffit pas assurer la convergence de  $\mu$  vers zéro.

Comme dans le cas de l'observateur général de Luenberger, cette absence de convergence vers zéro implique que l'écart  $e = \hat{w} - w$  ne tend pas vers zéro, à l'instar de ce qui est expliqué à la fin du paragraphe 8.7.1.1 (mais les expressions, très complexes, ne sont pas détaillées ici).

### 8.7.1.4. Conclusion sur la convergence

Les trois paragraphes précédents ont montré que la convergence vers une valeur finale n'était pas acquise et qu'un *biais de convergence* peut apparaître très facilement dès lors que le modèle initial n'est pas connu avec précision. Si ceci ne nuit pas nécessairement à la stabilité de l'ensemble du système observé bouclé, cela peut néanmoins arriver et il convient d'y prêter une grande attention. En outre, les performances, transitoires ou statiques, risquent de s'en trouver dégradées. Ceci signifie que les observateurs, quoique très puissants, sont sensibles aux variations paramétriques et autres imprécisions du modèle.

Par ailleurs, le gain d'observateur  $Z$  intervient dans l'expression des biais de convergence ce qui montre que le choix de grandes composantes dans  $Z$  (pour placer des pôles très rapides c'est-à-dire augmenter la bande passante) peut augmenter l'effet néfaste des incertitudes.

### 8.7.2. Principe de séparation et incertitude

Dans le paragraphe précédent, il est évoqué très brièvement la possibilité d'une dégradation des performances transitoires et statiques en boucle fermée pouvant éventuellement aller jusqu'à la perte de stabilité. Or, du point de vue nominal, les performances transitoires (et la stabilité asymptotique en premier lieu) sont assurées par le choix des pôles du procédé commandé et de ceux de l'observateur, ces pôles respectant le principe de séparation. Dans la suite de ce paragraphe, l'influence du modèle incertain (8.52) ou (8.53) sur le principe de séparation est analysé pour un observateur répondant à la structure générale de Luenberger. Les conclusions qui sont tirées peuvent être appliquées aux deux autres observateurs étudiés (observateur identité d'ordre plein et observateur d'ordre réduit).

Pour un retour d'état sans adjonction d'intégrateur, les équations à prendre en compte sont rappelées :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u, \\ y &= (C + \Delta C)x + (D + \Delta D)u, \\ \dot{\mu} &= F\mu + P(\underline{\Delta C} - T\underline{\Delta A})x + (P\Delta D - T\underline{\Delta B})u, \\ u &= \hat{w} + Hy_c = K\hat{x} + Hy_c = Kx + L\mu + Hy_c. \end{cases}$$

En prenant comme vecteur d'état  $\kappa = [x' \ \mu']'$ , il vient

$$\begin{cases} \dot{\kappa} &= \begin{bmatrix} ((A + \Delta A) + (B + \Delta B)K) & (B + \Delta B)L \\ (P(\underline{\Delta C} - T\underline{\Delta A}) + (P\Delta D - T\underline{\Delta B})K) & (F + (P\Delta D - T\underline{\Delta B})K) \end{bmatrix} \kappa \\ &+ \begin{bmatrix} (B + \Delta B)H \\ (P\Delta D - T\underline{\Delta B})H \end{bmatrix} y_c \\ y &= \begin{bmatrix} ((C + \Delta C) + (D + \Delta D)K) & (D + \Delta D)L \end{bmatrix} \kappa \\ &+ (D + \Delta D)Hy_c. \end{cases} \quad (8.55)$$

Cette équation est une généralisation de l'équation (8.28) donnée page 395.

Dans le cas d'un retour d'état avec intégrateur, les équations à prendre en compte sont les mêmes à l'exception de



$$u = \hat{w} + Jv = K\hat{x} + Jv = Kx + L\mu + Jv,$$

et il faut ajouter

$$\dot{v} = \epsilon = y_c - y.$$

Il vient, en prenant comme état étendu  $\bar{\kappa} = [x' \ v \ \mu']'$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\kappa}} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{(A + \Delta A) + (B + \Delta B)K}{(P(\Delta C - T\Delta A) + (P\Delta D - T\Delta B)K) - ((C + \Delta C) + (D + \Delta D)K)} & \frac{(B + \Delta B)J}{(P\Delta D - T\Delta B)J - (D + \Delta D)J} & \frac{(B + \Delta B)L}{(F + (P\Delta D - T\Delta B)K) - (D + \Delta D)L} \end{array} \right] \bar{\kappa} \\ + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] y_c \\ y = \left[ \begin{array}{ccc} ((C + \Delta C) + (D + \Delta D)K) & (D + \Delta D)J & (D + \Delta D)L \end{array} \right] \bar{\kappa} + 0y_c, \end{array} \right. \quad (8.56)$$

Dans le cas de l'équation (8.55) comme dans celui de l'équation (8.56), il est clair qu'il n'est plus possible de repérer une structure particulière qui pourrait permettre d'exprimer un principe de séparation. Il serait *inexact* d'affirmer que les matrices d'état admettent comme valeurs propres celles de l'observateur auxquelles s'ajouteraient celles que l'on place pour le procédé. Ces dernières sont du reste elles-mêmes incertaines : par exemple, en l'absence d'effet intégral dans la commande, ce sont les valeurs propres de  $((A + \Delta A) + (B + \Delta B)K)$ . Ainsi, du point de vue de ces équations, les performances transitoires sont doublement altérées, par l'incertitude quant aux pôles placés sur le procédé, et, par le non respect du principe de séparation. À ce titre, il apparaît difficile de garantir une forme de réponse transitoire et même la stabilité asymptotique.

**Remarque 8.7** *Il existe des techniques de synthèse d'observateurs et surtout de lois de commande qui cherchent à prendre les incertitudes de modélisation en compte. Ces techniques appartiennent à un pan spécial de l'Automatique que l'on appelle la commande robuste et qui sort du cadre de ce document... jusqu'à plus ample évolution.*

## 8.8. Observateurs à entrées inconnues

L'idée de ce paragraphe est d'envisager la possibilité de rejeter l'effet d'une perturbation, en régime permanent sur l'écart de reconstruction. Ceci donne lieu à la notion d'*observateur à entrée inconnue*, un vocable en réalité impropre puisque l'entrée inconnue en question est la perturbation agissant sur le procédé.

### 8.8.1. Entrée inconnue sur la dynamique

Dans cette partie, le procédé est décrit par

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_d d, \\ y = Cx + Du. \end{cases} \quad (8.57)$$

Dans ce modèle,  $d$  représente une entrée exogène inconnue perturbant la dynamique de l'état  $x$  par l'intermédiaire d'un vecteur  $B_d$  connu. Une hypothèse fondamentale dans ce qui suit est que cette entrée est de type échelon, ce qui se traduit (au moins pour presque chaque instant du temps) par l'équation supplémentaire

$$\dot{d} = 0. \quad (8.58)$$

Bien entendu, si cette hypothèse n'est pas vérifiée, le problème devient plus compliqué. En outre, il est aussi possible de considérer une perturbation sur la sortie  $y$ , correspondant par exemple, de façon réaliste, à un bruit de mesure ou à un défaut d'*offset* du capteur. Ce second point sera abordé un peu plus tard.

L'idée retenue dans ce paragraphe est assez simple : l'équation (8.58) est ajoutée au modèle d'état (8.57) de sorte qu'il est possible de définir un état augmenté  $\underline{x} = [x \quad d]'$  dont la dynamique est décrite par le modèle augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{d} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B_d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_E u, \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_C \underline{x} + \underbrace{D}_D u. \end{cases} \quad (8.59)$$

Il est alors facile de synthétiser un observateur, quel qu'en soit le type (Luenberger, Kálmán, ou réduit), qui reconstruise  $\underline{x}$ . C'est donc un observateur de l'état

mais aussi de la perturbation  $d$ . Les techniques de calcul sont les mêmes que celles présentées précédemment. Elles sont simplement appliquées au système d'ordre  $(n + 1)$  ce qui conduit inévitablement à un observateur de taille plus élevée.

### 8.8.2. Dualité avec la commande à effet intégral

Si l'on prête un peu d'attention à l'équation (8.59) et si elle est comparée à l'équation du modèle augmenté (7.21) page 316 servant à la synthèse d'une loi de commande de type retour d'état avec intégrateur, il est possible de mettre en évidence une dualité entre les deux problèmes. En effet, si l'on élimine le terme de consigne et de perturbation dans l'équation (7.21), il est facile de voir que la structure de (8.59) correspond à une forme duale de (7.21). Plus exactement, en posant  $D = 0$  dans (8.59) et, dans (7.21),

$$\begin{cases} C &= -B_d, \\ D &= 0, \\ C &= B', \end{cases} \quad (8.60)$$

alors la réalisation  $(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{D})$  n'est autre que  $(\underline{A}', \underline{C}', \underline{B}', \underline{D}')$ . Ceci signifie que si l'observateur à calculer est un observateur identité de Kálmán (cf. §8.3 page 383), le calcul du gain d'observation associé  $\underline{Z}$  est dual du calcul du retour d'état augmenté  $\bar{K}$  tel que défini en §7.4.2 page 315. Comme ce gain en question prend en compte l'effet intégral, par dualité, l'observateur est parfois appelé *observateur PI*.

### 8.8.3. Entrées inconnues sur la dynamique et la sortie

Dans ce paragraphe, le problème est légèrement complexifié, à moindres frais. En effet, une autre perturbation vient entacher la mesure de  $y$  de sorte que le modèle à observer devient

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu + B_ad, \\ y &= Cx + Du + D_ff, \end{cases} \quad (8.61)$$

où  $f$  est donc une autre perturbation. Bien que ce type de perturbation corresponde souvent à des bruits de mesure, auquel cas  $f$  est plutôt un signal de hautes fréquences, le problème envisagé ici est un problème d'*offset* sur la mesure lié à un défaut franc du capteur. Ainsi,  $f$  est considéré comme une échelon, de même que  $d$ . Il est donc raisonnable d'ajouter les équations

$$\begin{cases} \dot{d} = 0, \\ \dot{f} = 0. \end{cases} \quad (8.62)$$

En suivant la même stratégie qu'au paragraphe 8.8.1, c'est-à-dire en considérant l'état augmenté  $\underline{x} = [x \quad d \quad f]'$ , il vient

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{d} \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} u, \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 & D_f \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \underline{x} + \underbrace{D}_{\underline{D}} u. \end{cases} \quad (8.63)$$

Il est alors possible de déterminer un observateur, quel qu'en soit le type, qui reconstruise  $\underline{x}$ , c'est-à-dire  $x$  mais aussi des perturbations  $d$  et  $f$ . Les techniques de calcul sont les mêmes que pour un simple observateur de l'état. Elles sont simplement appliquées au système d'ordre  $(n+2)$ , conduisant donc à un observateur de taille plus élevée.

#### 8.8.4. Intérêt de ces observateurs

Il peut être étonnant de confier à un observateur le soin de rejeter une perturbation alors que ce rôle est en général dévolu à la commande. En fait, ce rejet n'est pas vraiment recherché à des fins de commande, et ne se substitue en rien à l'effet intégral de la commande. En d'autres termes, même si l'on utilise un observateur à entrée(s) inconnue(s), il ne faut pas abandonner l'effet intégral dans la commande.

L'intérêt d'un observateur à entrée inconnue apparaît entre autres dans deux situations :

- *le diagnostic* : il s'agit d'un pan de l'Automatique qui consiste à détecter en ligne les défaillances (pannes) des systèmes, entre autres des capteurs. Une des stratégies de diagnostic très connue consiste à utiliser une batterie d'observateurs et ces observateurs ne servent pas à la commande. Ils doivent donc « par eux-mêmes se débarrasser » des perturbations ;

- la commande sans capteur : dans certains problèmes ardues de commande, la sortie à asservir n'est pas mesurée mais estimée par un observateur qui peut être biaisé (à cause d'incertitudes, de perturbations ou de non-linéarités diverses). Bien sûr, des mesures sont nécessaires, mais la sortie à contrôler ne dispose pas elle-même de capteur. Or, face à une perturbation en échelon, l'effet intégral peut être en partie inopérant du fait que l'écart  $\varepsilon = y_c - y$  est remplacé par  $\hat{\varepsilon} = y_c - \hat{y}$ , où  $\hat{y}$  est la sortie reconstruite (potentiellement mal reconstruite) et  $\hat{\varepsilon}$  est donc un écart biaisé. En de telles circonstances, il importe, autant que faire se peut, de limiter l'effet d'éventuelles perturbations afin de réduire le biais sur l'écart de reconstruction  $\varepsilon$  (cf. l'exemple en §8.10.3 page 429).

## 8.9. Observateur d'ordre plein et retour dynamique de sortie

Il a été vu au cours du paragraphe 8.1 page 371 qu'un observateur est une instance de retour dynamique de sortie. Le principe de l'observation a donc été utilisé pour calculer des structures dynamiques de retour de sortie, *a priori* particulières. Est-il possible de concevoir la commande par retour dynamique de sortie autrement que par le point de vue de l'observation ?

La réponse est évidemment *oui*. On peut calculer des régulateurs PID, qui sont des retours dynamiques de sortie, sans qu'un tel retour ait une quelconque structure d'observateur. Toutefois, si l'on se place dans le contexte de l'espace d'état et que l'on restreint un peu la structure de rétroaction, une question intéressante se pose.

En effet, soit le modèle d'état d'un procédé,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (8.64)$$

où la transmission directe  $D$  est volontairement prise nulle pour simplifier le développement (elle n'apporterait rien au propos). Cette réalisation est supposée *minimale* (c.-à-d. commandable et observable, cf. §6.7 page 260). On peut envisager d'appliquer une loi de commande ainsi structurée :

$$\begin{cases} \dot{x}_K &= A_K x_K + B_K y, \\ y &= C_K x_K. \end{cases} \quad (8.65)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^{n_K}$  est le vecteur d'état du système constituant la loi de commande. C'est une représentation d'état à part entière. Elle est d'ordre  $n_K > 0$  et est appelée *retour dynamique de sortie*. Elle peut être accompagnée d'une transmission directe mais là encore, ce n'est pas utile de la faire apparaître dans le contexte de ce paragraphe. La fonction de transfert de ce retour dynamique de sortie est

$$G_K(p) = C_K(pI - A_K)^{-1} B_K.$$

Une telle loi de commande est également souvent appelée *correcteur dynamique* ou simplement *correcteur* ou encore, *compensateur* (dynamique). L'anglicisme *contrôleur* est également très souvent utilisé. Que ce correcteur soit placé comme  $R(p)$  dans la partie gauche de la figure 7.1 page 299 (schéma de commande classique pour l'approche fréquentielle de l'automatique des systèmes multivariable *i.e.* régulateurs PID, etc.) ou qu'il soit placé dans la boucle de retour comme le retour dynamique de la figure 8.1 page 372 a en réalité peu d'importance pour ce qui va suivre dans ce paragraphe.

La concaténation des deux vecteurs d'état  $x$  et  $x_K$  en un seul vecteur  $\xi = [x' \ x'_K]'$  conduit à la dynamique autonome globale

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi \quad (8.66)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & B C_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix}. \quad (8.67)$$

Si, plutôt que de considérer la loi de commande (8.65), on applique au procédé (8.64) une loi de commande basée sur un observateur d'ordre plein (observateur), alors cette dernière s'écrit (rappel du paragraphe 8.4 page 391)

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + Z(\hat{y} - y), \\ \hat{y} &= C\hat{x}, \\ u &= K\hat{x}. \end{cases} \quad (8.68)$$

On y trouve à la fois l'observateur et le retour d'état reconstruit qui ne peuvent être calculés que sous l'hypothèse de minimalité de la réalisation donnée en (8.64).

La concaténation des deux vecteurs d'état  $x$  et  $\hat{x}$  en un seul vecteur  $\bar{\zeta} = [x' \ \hat{x}']'$  conduit à la dynamique autonome globale

$$\dot{\bar{\zeta}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\zeta} \quad (8.69)$$

où

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -ZC & (A + BK + ZC) \end{bmatrix}. \quad (8.70)$$

On est donc face à deux stratégies : soit on applique à (8.64) une loi de commande dynamique (8.65) sans se soucier de la notion d'observation, soit on décide de construire cette loi de commande en se basant sur la synthèse d'un observateur, ici d'ordre plein, auquel cas la loi de commande prend la forme (8.68). Dans les deux cas, on obtient une dynamique autonome globale caractérisée entièrement par la matrice dynamique en boucle fermée ( $\mathbf{A}$  dans le premier cas et  $\bar{\mathbf{A}}$  dans le second cas). On peut légitimement se poser la question de la meilleure stratégie ou, au moins, de la plus générale. S'il est difficile d'affirmer qu'une stratégie est meilleure que l'autre, on peut au moins facilement comprendre que le retour dynamique est une notion plus générale et qu'un cas particulier consiste à construire ce retour en s'appuyant sur la synthèse d'un observateur d'ordre plein. Du reste, il est aisé de constater que le retour dynamique ne peut être basé sur un observateur d'ordre plein et un retour d'état reconstruit que si  $n_K = n$  (sinon les deux lois de commande ne sont pas du même ordre). Par la suite, il est donc supposé que  $n_K = n$ .

Sous cette hypothèse de lois de commande du même ordre  $n_K = n$ , les expressions des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\bar{\mathbf{A}}$  montrent bien que le retour dynamique de sortie est basé sur un observateur d'ordre plein uniquement dans le cas où

$$\begin{cases} A_K = A + BK + ZC, \\ B_K = Z, \\ C_K = K. \end{cases} \quad (8.71)$$

Ceci permet de voir que le retour dynamique de sortie particulier (8.68) se réécrit alors

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A + BK + ZC)\hat{x} + Zy, \\ u = K\hat{x}. \end{cases} \quad (8.72)$$

et admet pour modèle externe la fonction de transfert

$$\hat{G}(p) = K(pI - A - BK - ZC)^{-1}Z. \quad (8.73)$$

Ce cas *a priori* particulier est-il assez général pour couvrir tous les problèmes envisagés ? La structure particulière (8.71) recèle-t-elle une généralité cachée ?

Pour le voir, on peut se focaliser sur le problème qui a été abordé au cours de ce chapitre, à savoir le placement de pôles. En effet, l'essentiel des développements de ce chapitre consistait à placer les pôles du procédé par un retour d'état observé ce qui amenait à placer aussi les pôles de l'observateur, le spectre du système global respectant *in fine* le principe de séparation. Ce spectre global est alors constitué des valeurs propres de  $(A + BK)$  et de celles de  $(A + ZC)$ . C'est aussi le spectre de la matrice  $\bar{\mathbf{A}}$ , cette matrice étant en fait semblable à la matrice dynamique de la représentation d'état (8.29) page 395.

Par ailleurs, il existe des méthodes (non détaillées ici) de calcul de retour dynamique de sortie (8.65) qui permettent d'imposer à la matrice  $\mathbf{A}$  un spectre global contenant  $2n$  valeurs propres sans se soucier d'un quelconque observateur, c'est-à-dire sans prendre en compte une structure particulière de  $\mathbf{A}$  qui serait caractérisée par (8.71). Ces méthodes sont efficaces dès lors que la réalisation (8.64) est minimale. La question est alors la suivante : est-il possible de faire autant de choses en imposant cette structure (8.71) ? Autrement dit, est-il possible, pour le placement de pôles, de placer tous les spectres en s'appuyant sur la synthèse d'un observateur d'ordre plein ?

Clairement la réponse est *non* ! En effet, lorsque l'on s'appuie sur la synthèse d'un observateur d'ordre plein, il est nécessaire de séparer le spectre global, qui est auto-conjugué, en deux sous-ensembles eux-mêmes auto-conjugués. Cela signifie que si une valeur propre désirée complexe non réelle apparaît dans un sous ensemble, ce dernier doit aussi contenir la valeur propre conjuguée. Cette contrainte est nécessaire pour obtenir des vecteurs  $K$  et  $Z$  réels (c'est tout de même mieux quand on veut implanter les lois de commande !). Par conséquent, si l'on souhaite placer  $2n$  valeurs propres, il est impératif que cette séparation soit possible. Le problème se pose dans le cas où  $n$  est impair. Il est alors nécessaire que, parmi les  $2n$  valeurs propres à placer, figurent au moins deux valeurs propres réelles. Si l'on suppose par exemple que  $n = 3$  et que le spectre global à placer est  $\{-2 - \mathbf{i}; -2 + \mathbf{i}; -3 - \mathbf{i}; -3 + \mathbf{i}, -5 - 2\mathbf{i}; -5 + 2\mathbf{i}\}$ , la séparation en deux sous-ensembles auto-conjugués est impossible. Il est donc impossible de trouver un retour dynamique de sortie qui soit basé sur un observateur d'ordre plein et qui place ce spectre, selon la procédure indiquée par les paragraphes 8.3 page 383 et 8.4 page 391. Pourtant, ce placement peut se faire par d'autres techniques.



Et pour les autres situations, c'est-à-dire :

- soit si  $n$  est pair,
- soit si  $n$  est impair mais le spectre global à placer contient au moins 2 valeurs réelles,

que peut-on dire ?

Il est clair que dans ce cas, l'hypothèse de minimalité garantit que le placement est possible. La technique de Bass-Gura assure de la possibilité du calcul de  $K$  et de  $Z$ . Il est même clair que si l'on s'amuse à changer la répartition du spectre global en deux sous-spectres auto-conjugués, décidant que certains pôles du procédé deviennent pôles de l'observateur et inversement, le calcul reste possible, et deux nouveaux vecteurs  $K$  et  $Z$  sont déterminés. Le retour dynamique qui en résulte n'en a pas moins une structure vérifiant (8.69-8.70).

Cela n'indique toutefois pas si cette structure couvre tous les cas possibles de retours dynamiques de sortie répondant au problème. Même si la justification n'en est pas triviale, la réponse à cette question est quant à elle très claire ! *Oui*, cette structure est suffisamment générale. Il est possible de montrer que pour un spectre donné vérifiant les contraintes mentionnées ci-avant ( $n$  pair ou au moins 2 valeurs propres désirées réelles), alors, la fonction de transfert  $G_K(p)$  qui résulte de tout retour dynamique plaçant les  $2n$  pôles est *unique*. Or s'il est possible de déterminer un retour dynamique de sortie basé sur un observateur de rang plein qui place les mêmes pôles et qui a pour fonction de transfert  $\hat{G}(p)$ , c'est donc que  $\hat{G}(p) = G(p)$  par unicité. Les deux retours dynamiques (8.65) et (8.68) ne sont alors que des réalisations équivalentes, associées à la même fonction de transfert. Il n'y a donc pas de perte de généralité à baser la synthèse du retour dynamique de sortie sur un observateur d'ordre plein accompagné d'un retour d'état reconstruit.

**En résumé :**

Soit le modèle d'état minimal (8.64) d'ordre  $n$ . Tout retour dynamique de sortie (8.65) d'ordre plein  $n$  plaçant le spectre désiré  $\mathbb{S} = \{\lambda_i, i = 1, \dots, 2n\}$  peut être basé sur la synthèse d'un observateur d'ordre plein accompagné d'un retour d'état reconstruit tel que décrit par (8.68) à l'exception du cas où  $n$  est impair et  $\mathbb{S}$  ne contient pas de valeur réelle.

Dans un tel cas, il existe d'autres méthodes pour placer le spectre retenu (non détaillées ici).

Il convient de noter que ce résultat ne s'applique pas au cas de systèmes comportant plusieurs entrées ou plusieurs sorties.

## 8.10. Exercices

### 8.10.1. Euh... ça tangue toujours un peu...

... par manque de capteur. On revient ici sur le cas de la commande du tangage de l'hélicoptère, cas qui a été présenté au paragraphe 7.9.2 page 333 et traité au paragraphe 7.10.2 page 344. Toutefois, il est ici supposé que le capteur de vitesse de tangage (c.-à-d. la mesure de  $\dot{p}$ ) n'est pas disponible. Seule la mesure de  $p$  est accessible. Il y a bien entendu possibilité de dériver  $p$  mais ce n'est pas toujours très raisonnable en pratique, surtout si la technologie de mise en œuvre nécessite le recours à une approximation numérique de la dérivée, toujours un peu sujète à caution. Même dans le cas analogique, la dérivation est risquée car elle amplifie les bruits de mesure. Il faut donc se contenter de la mesure de la sortie  $y = p$  (angle de tangage). L'idée est bien sûr de rester sur une logique de retour d'état mais en reconstruisant l'état complet à l'aide d'un observateur.

#### Questions :

- Écrire l'équation d'un observateur d'ordre minimal.
- Appliquer la procédure de Luenberger (cf. §8.2.2 page 378) pour déterminer un modèle d'observateur applicable pour la commande du tangage (placer le(s) pôle(s) de cet observateur à -10).
- En concaténant l'état du procédé et celui de l'observateur en un seul vecteur, déterminer un modèle d'état du système observé (se contenter de l'expression littérale). Conclure.

On décide de reprendre la loi de commande par retour d'état (sans intégrateur) calculée en §7.10.2 page 344 mais l'état est remplacé par le résultat de son observation.

#### Questions :

- Exprimer clairement cette loi de commande par retour d'état observé.

- Injecter la loi de commande par retour d'état observé dans le modèle de manière à déterminer un modèle d'état du système observé bouclé. Faire l'application numérique.
- Calculer le polynôme caractéristique de la matrice d'état globale.
- Calculer les pôles du système observé bouclé et conclure.
- Proposer une modification de l'observateur obtenu pour reconstruire directement  $Kx$ .

On décide de remplacer l'observateur d'ordre minimal par un observateur d'ordre plein (c.-à-d. un observateur de Kálmán encore appelé observateur identité).

Questions :

- Écrire l'équation d'un observateur d'ordre plein.
- Expliquer comment choisir la matrice de retour interne à cet observateur pour assurer son efficacité.
- Appliquer la procédure de synthèse d'un observateur d'ordre plein dans le cas de la commande du tangage (placer le(s) pôle(s) de l'observateur à  $-10$ ).
- Donner l'expression du modèle observé et conclure quant à ses pôles.
- Injecter la loi de commande dans le modèle du système observé et déterminer un modèle d'état où le vecteur d'état global résulte de la concaténation de l'état du procédé et de l'écart d'observation. Conclure quant aux pôles du modèle observé bouclé.
- Expliquer pourquoi il est inutile d'adapter la précommande en présence d'un observateur.
- Montrer que l'observateur obtenu répond lui aussi à la structure générale de Luenberger.

On suppose maintenant que la commande  $u$  est entachée d'un *offset* (perturbation en échelon) nécessitant la présence d'un intégrateur dans la chaîne directe, en amont de la commande.

Question :

Expliquer brièvement, sans entrer dans les calculs, comment adap-

ter la loi de commande par adjonction d'intégrateur et retour d'état calculée en §7.10.2 page 344 à la présence d'un observateur.

### 8.10.2. Asservissement de position d'une bille sur un rail

On revient sur l'asservissement de la position d'une bille sur un rail en jouant sur l'inclinaison de ce rail. Le procédé a été modélisé sous forme de représentation d'état au paragraphe 3.10.7 page 136. Une loi de commande par retour d'état avec intégrateur plaçant les pôles a également été calculée au paragraphe 7.10.4 page 357 pour des valeurs numériques particulières des paramètres mécaniques caractéristiques. Pour rappel, la réalisation correspondant à ces valeurs numériques est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = [ 1 \quad 0 ] \quad D = 0.$$

La valeur du vecteur associé au retour d'état avec intégrateur, et noté  $\bar{K}$ , ne sera pas utile dans cet exercice.

Malheureusement, la mesure de  $x_2(t) = \dot{y}(t)$  n'est pas possible et donc le retour d'état ne peut être appliqué. On convient donc d'utiliser un observateur d'ordre minimal pour reconstruire l'ensemble du vecteur d'état.

#### Questions :

- Appliquer la procédure de Luenberger pour calculer un observateur d'ordre minimal. (Tous les pôles de cet observateur seront placés à la valeur (-10)).
- Expliquer comment, à partir de cet observateur, mettre en œuvre la loi de commande par retour d'état et intégrateur précédemment calculée.

### 8.10.3. Commande sans capteur d'une machine synchrone

Il s'agit ici de considérer un problème technologique extrêmement délicat mais en l'abordant de manière simplifiée. Bien que le problème soit simplifié, la solution proposée ici, assez originale, est proche d'une solution exploitable en pratique (bien que non complète).

Le problème s'inscrit dans une tentative d'asservissement en vitesse d'un moteur électrique. Cela a déjà été fait au paragraphe 7.10.3 page 351, pourra rétorquer le lecteur assidu et concentré. Certes, mais cette fois-ci le moteur en question est une machine synchrone à aimants permanents. Un modèle simplifié est supposé déjà connu. Il est établi dans le repère dit «  $(d, q)$  », c'est-à-dire après une transformation de Park (du nom de Robert H. Park, ingénieur électricien états-unien (1902-1994)). Les détails d'une telle modélisation ne sont pas fournis et le lecteur pourra consulter un ouvrage d'électrotechnique s'il le souhaite (selon sa santé mentale). La seule idée que l'auteur explique cette partie ferait trop sourire certains de ses collègues, qui, contrairement à lui, sont spécialistes du domaine. En bref, le modèle dans le repère  $(d, q)$  est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{di_d}{dt} = -\frac{R_s}{L_d}i_d + \frac{L_q}{L_d}\omega i_q + \frac{u_d}{L_d}, \\ \frac{di_q}{dt} = -\frac{R_s}{L_q}i_q - \frac{L_d}{L_q}\omega i_d - \frac{\Psi}{L_q}\omega + \frac{u_q}{L_q}, \end{cases}$$

où

- $i_d, i_q$  sont les projections des intensités des courants statoriques sur les axes  $d$  et  $q$  respectivement ;
- $u_d, u_q$  sont les projections des tensions statoriques sur les axes  $d$  et  $q$  respectivement ;
- $R_s$  est une estimation de la résistance statorique d'une phase ;
- $\Psi$  est le flux induit par les aimants ;
- $L_d$  et  $L_q$  sont les inductances statoriques sur les axes  $d$  et  $q$  respectivement (elles seront prises toutes égales à  $L$  dans les calculs, ce qui correspond au cas de la machine à pôles lisses... rien à voir avec les pôles d'une fonction de transfert) ;
- $\omega$  est la vitesse électrique de rotation du rotor (proportionnelle à sa vitesse mécanique).

Par ailleurs, une approximation difficile à vraiment justifier mais néanmoins plutôt usuelle est ici retenue : la vitesse  $\omega$  est supposée à peu près constante ( $\dot{\omega} \simeq 0$ ). C'est une façon d'exprimer, grossièrement, le fait que sa dynamique est bien moins rapide que celles des courants  $i_d$  et  $i_q$ .

Question :

Établir une réalisation d'ordre 3 du système où  $\omega$  joue à la fois le rôle de paramètre dans la matrice dynamique et celui de variable d'état.

L'idée n'est pas ici de calculer la loi de commande. En pratique, elle est assez simple et consiste en deux boucles d'asservissement des intensités des courants  $i_d$  et  $i_q$  sur la base de régulateurs proportionnels intégraux, dans un premier temps, puis en une boucle d'asservissement de la vitesse  $\omega$ , dans un second temps. Ceci pourrait se faire en utilisant les approches présentées dans ce document. La seule vraie précaution à prendre est d'assurer une certaine rapidité des boucles de courants (une large bande passante) pour les considérer comme constants au regard de la dynamique de vitesse, c'est-à-dire celle imposée par la dernière boucle. Une telle stratégie de commande suppose la mesure tant des courants que de la vitesse. Or, un capteur de vitesse ou de position angulaire est encombrant, coûte cher, et un enjeu majeur dans le domaine est la possibilité de supprimer ce capteur de  $\omega$ . Oui mais voilà, c'est la sortie à asservir, donc il est absolument primordial de disposer, pour remplacer ce capteur, d'un observateur performant.

Questions :

- Utiliser la technique de calcul d'un observateur d'ordre réduit s'appuyant sur la mesure des courants pour reconstruire  $\omega$  (le calcul étant littéral, le spectre à placer n'est pas spécifié).
- Écrire clairement cet observateur en utilisant les grandeurs physiques du procédé.
- Montrer qu'il admet une forme simplifiée et se ramène au choix d'un seul paramètre.
- Montrer qu'il faut recourir à une approximation pour le mettre en œuvre et qu'il est par ailleurs non linéaire.

Mais le problème est bien plus ardu qu'il n'y paraît. En effet, les courants  $i_d$  et  $i_q$  ne sont pas des vrais courants dont l'intensité est mesurable. Comme il a été dit avant,  $i_d$  et  $i_q$  résultent d'une transformation de Park

appliquée à des intensités de courants qui, elles, sont effectivement mesurées. Les mesures de  $i_d$  et  $i_q$  sont donc indirectes puisqu'elles passent par la transformation de Park. Or, cette transformation dépend explicitement de la position angulaire  $\theta$  du rotor. Cette position n'est pas mesurée. Toutefois, c'est l'intégrale de  $\omega$ . Elle peut donc être calculée si  $\omega$  est connue. Hélas, dans le problème présent,  $\omega$  n'est que reconstruite par l'observateur, et il faut se contenter de déduire une position estimée  $\hat{\theta}$  qui est l'intégrale de la vitesse estimée  $\hat{\omega}$  issue de l'observateur. En résumé, l'observateur induit un biais sur les propres mesures dont il se sert... C'est le serpent qui se mord la queue.

Plus précisément, le modèle du moteur peut s'écrire dans le plan dit  $(\alpha, \beta)$  :

$$\begin{cases} \frac{di_\alpha}{dt} = -\frac{R_s}{L}i_\alpha + \frac{\Psi \sin \theta}{L}\omega + \frac{u_\alpha}{L}, \\ \frac{di_\beta}{dt} = -\frac{R_s}{L}i_\beta - \frac{\Psi \cos \theta}{L}\omega + \frac{u_\beta}{L}, \end{cases}$$

où

- $i_\alpha, i_\beta$  sont les projections des intensités des courants statoriques sur les axes  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement ;
- $u_\alpha, u_\beta$  sont les projections des tensions statoriques sur les axes  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement.

La transformation de Park consiste à transformer les grandeurs en  $(\alpha, \beta)$  en des grandeurs en  $(d, q)$  ou réciproquement, de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} z_\alpha \\ z_\beta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}(\theta)} \begin{bmatrix} z_d \\ z_q \end{bmatrix}$$

Dans cette expression,  $z$  peut représenter aussi bien  $u$  que  $i$ . Le problème vient donc du fait que  $i_d$  et  $i_q$  sont construits à partir de  $\mathbf{P}(\hat{\theta})$ , c'est-à-dire une matrice de rotation qui utilise un angle estimé  $\hat{\theta}$ , issu de l'intégration de  $\hat{\omega}$ , la vitesse estimée, conduisant en fait à des estimations  $\hat{i}_d$  et  $\hat{i}_q$ . De même, la construction de  $u_\alpha$  et  $u_\beta$  se fait à l'aide de  $\hat{u}_d$  et  $\hat{u}_q$  qui tiennent compte de  $\hat{\theta}$  et non de  $\theta$ . Enfin, l'équation mécanique qui régit la vitesse est ici ajoutée (principe fondamental de la dynamique) :



$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\Psi \sin \theta}{J} i_\alpha + \frac{\Psi \cos \theta}{J} i_\beta - \frac{T_r}{J},$$

où  $J$  est l'inertie de l'arbre du moteur et  $T_r$  est le couple de charge qui s'oppose au mouvement de rotation.

Questions :

- En considérant que le couple de charge est constant, établir un modèle d'état d'ordre 4 dans le plan  $(d, q)$ .
- Rejeter les parties du modèle faisant apparaître la différence entre  $\theta$  et  $\hat{\theta}$  dans un terme de perturbations.
- Construire une structure d'observateur réduit de la vitesse et du couple résistant qui rejette ce couple en régime permanent, ce en négligeant la perturbation lié à  $\hat{\theta} - \theta$ .
- Écrire clairement cet observateur en utilisant les grandeurs physiques du procédé.
- Écrire l'équation qui régit la dynamique de l'écart de reconstruction.
- Montrer qu'il peut en exister une forme simplifiée comprenant moins de paramètres de réglage.
- Montrer que le calcul des pôles de l'observateur peut se faire avec les techniques de ce chapitre bien que le modèle soit multivariable.

La résistance statorique  $R_s$  et le flux  $\Psi$  sont supposés admettre des incertitudes de l'ordre de 20%.

Questions :

- Récrire le modèle du système en prenant en compte ces incertitudes.
- Récrire le modèle de la dynamique de l'écart de reconstruction en faisant apparaître le terme de perturbations lié à  $(\hat{\theta} - \theta)$  précédemment introduit ainsi qu'un terme lié aux incertitudes.

## 8.11. Correction des exercices

### 8.11.1. Euh... ça tangué toujours un peu...

La structure générale d'un observateur, selon Luenberger, est celle donnée en (8.3) page 375. Puisque c'est l'état  $x$  lui-même qui est reconstruit, le choix  $\hat{w} = \hat{x}$  s'impose et l'équation devient :

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz + Py + Ru \\ \hat{x} = Lz + Qy + Gu, \end{cases}$$

où  $z$  est le vecteur d'état de l'observateur dont la sortie  $\hat{x}$  est l'état reconstruit du procédé. L'observateur est pris d'ordre minimal  $(n - 1) = 1$ , c'est-à-dire que  $z \in \mathbb{R}$ .

Il s'agit maintenant d'appliquer la procédure de Luenberger donnée en §8.2.2 page 378. Le modèle de la dynamique de tangage établi en §7.10.2 page 344 fait apparaître le triplet de matrices suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = [ 1 \quad 0 ].$$

**Étape 1** La matrice d'observabilité de Kálmán est donnée par

$$Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elle est égale à l'identité et est donc de rang plein. Le système est observable.

**Étape 2** Pour calculer la matrice de changement de base  $N$ , il est possible de procéder de trois manières :

- La première manière consiste à suivre scrupuleusement la procédure présentée en §8.2.2 page 378. Il vient

$$(N')^{-1} = [ n_1 \quad n_2 ]$$

avec

$$\begin{cases} n_1 = C' & = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ n_2 = (A' + 0.I)C' & = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

ce qui implique

$$(N')^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

- La deuxième manière, un peu plus rapide, consiste à utiliser la formule de Bass-Gura dans sa version duale, c'est-à-dire (8.21) page 388, ou plus exactement sa prémisses donnée en (8.19) page 387. La matrice  $Q_o = I$  a déjà été calculée et la matrice de Töplitz relative à l'observabilité est :

$$T_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Il vient donc

$$(N')^{-1} = I.I = I \Rightarrow N = I.$$

- La troisième manière, encore plus rapide, consiste à s'apercevoir que le modèle d'état est déjà sous forme canonique d'observation et qu'il n'est donc pas nécessaire de passer par un changement de base, d'où le fait que  $N$  est égale à l'identité. (Oui, c'est vrai, il n'est pas très sympathique de ne pas avoir prévenu le lecteur que les calculs étaient totalement inutiles à cette étape. Si le lecteur s'en est rendu compte de lui-même, c'est très bien, sinon, il faut croire en la vertu didactique de ce contre-temps.)

**Étape 3** L'observateur est d'ordre 1 ; il n'y a donc qu'un pôle à fixer, selon l'énoncé, à  $(-10)$ , de sorte que le polynôme caractéristique désiré pour cet observateur est :

$$D_F(p) = p + 10 = f_1 p + f_0.$$

**Étape 4** La matrice  $F$  se résume donc à un scalaire :

$$F = -f_0 = -10.$$

Étape 5 D'où l'on déduit la matrice  $T$  :

$$T = [ F \mid 1 ] = [ -10 \quad 1 ].$$

Étape 6 Le vecteur  $P$  se résume ici aussi un scalaire donné par

$$P = \{TA\}_1 - \{FT\}_1,$$

où l'on rappelle que  $\{.\}_1$  désigne la première colonne de la matrice et où  $A$  remplace  $\underline{A}$  puisque le modèle est déjà sous forme canonique d'observabilité. L'application numérique conduit à

$$P = -100.$$

Étape 7  $R$  est donné par

$$R = T\underline{B} - PD = TB - PD = 3.$$

Étape 8 Il convient maintenant de résoudre l'équation

$$Q\underline{C} + LT = QC + LT = \underline{S} = S.$$

Comme il s'agit de reconstruire l'état lui-même, et non une combinaison linéaire donnée des composantes de ce vecteur d'état, il faut choisir  $S = I$ , ce qui conduit à

$$\begin{aligned} [ Q \mid L ] &= \left[ \frac{C}{T} \right]^{-1} = \left[ \frac{1 \quad 0}{-10 \quad 1} \right]^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 10 & 0 \end{array} \right] \\ \Rightarrow Q &= \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 10 \end{array} \right], \quad L = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Étape 9 Enfin, le vecteur  $G$  est donné par

$$G = -QD = 0,$$

qui est, de toute évidence, toujours nul en l'absence de transmission directe sur le système initial.

En concaténant, l'état du procédé et celui de l'observateur en un vecteur unique  $\zeta = [x \ z]'$ , le modèle global du système observé est donné par la représentation d'état (8.9) page 378 où l'on peut instancier  $D = 0$  pour obtenir

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ PC & F \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} B \\ R \end{bmatrix} u, \\ \begin{bmatrix} \hat{w} \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} QC & L \\ C & 0 \end{bmatrix} \zeta + 0u. \end{cases}$$

La matrice dynamique de ce système est bloc-triangulaire inférieure, ce qui permet de voir que ses valeurs propres sont celles du procédé (les deux valeurs propres nulles de  $A$ ) auxquelles vient s'ajouter celle de l'observateur (donc  $F = -10$ ).

La loi de commande de type retour d'état observé s'exprime

$$u(t) = K\hat{x}(t) + Hp_c(t),$$

où  $p_c$  est la consigne de tangage.

Si l'on injecte cette loi de commande dans le modèle de l'état observé, on retrouve les équations du paragraphe 8.4 page 391, plus exactement, en conservant comme vecteur d'état  $\zeta$  et en tenant compte de  $D = 0$ , l'équation (8.24), rappelée ci-après :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= \begin{bmatrix} A + BKQC & BKL \\ (P + RKQ)C & F + RKL \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} BH \\ RH \end{bmatrix} y_c \\ y &= [C \ 0] \zeta. \end{cases}$$

Les différentes étapes de l'application numérique ne sont pas détaillées car elles sont simples (même si l'ensemble du calcul peut sembler fastidieux ou rébarbatif). Il faut toutefois rappeler qu'au paragraphe 7.10.2 page 344, il avait été obtenu

$$K = [ -3 \quad -2 ] \quad \text{et} \quad H = 3.$$

Il vient alors

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -69 & 0 & -6 \\ -169 & 0 & -16 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} y_c \\ y = [1 \ 0 \ 0] \zeta. \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique correspondant s'exprime

$$\det \left( pI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -69 & 0 & -6 \\ -169 & 0 & -16 \end{bmatrix} \right) = (p+16)(p^2+69) - 6 \times 169 =$$

$$p^3 + 16p^2 + 69p + 16 \times 69 - 6 \times 169 = p^3 + 16p^2 + 69p + 90 =$$

$$(p+3)^2(p+10).$$

Il est donc clair que l'on retrouve le pôle à  $(-10)$  de l'observateur ainsi que les deux pôles du système à  $(-3)$ , placés par la loi de commande initialement calculée en §7.10.2 page 344.

Il est possible d'adapter l'observateur de manière à observer directement  $Kx$ . Il faut reprendre l'équation (8.3) page 375 et considérer

$$\hat{w} = K\hat{x}.$$

Si l'on se réfère au paragraphe 8.4 page 391, ceci signifie que  $S = K$  et l'étape 8 de la procédure doit être ainsi modifiée :

**Étape 8** Il convient maintenant de résoudre l'équation

$$QC + LT = S,$$

mais cette fois-ci avec  $S = K$

$$\begin{aligned} [Q \mid L] &= S \left[ \frac{C}{T} \right]^{-1} = [-3 \quad -2] \left[ \frac{1}{-10} \quad \frac{0}{1} \right]^{-1} \\ &= [-3 \quad -2] \left[ \frac{1}{10} \mid \frac{0}{1} \right] = [-23 \mid -2] \\ &\Rightarrow Q = -23, \quad L = -2. \end{aligned}$$

L'observateur du *retour d'état*  $w = Kx$  s'écrit donc

$$\begin{cases} \dot{z} &= -10z - 100y + 3u \\ \dot{w} &= -2z - 23y, \end{cases}$$

L'observateur d'ordre plein a la structure donnée par (8.12) page 383 et rappelée ci-après :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + Z(\hat{y} - y), \\ \hat{y} &= C\hat{x} + Du, \end{cases}$$

où  $\hat{x}$  est l'état reconstruit donc  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ .

La dynamique interne de l'observateur est caractérisée par les valeurs propres de  $(A + ZC)$  qui sont aussi celles de  $(A' + C'Z')$ . Il s'agit de choisir  $Z$  de manière à placer ces valeurs propres de façon judicieuse. Ceci revient à un problème de placement de pôles sur la paires  $(A', C')$ .

La procédure du paragraphe 8.3.2 page 386 est appliquée :

**Étape 1** L'observabilité de  $(A, C)$  a déjà été vérifiée.

**Étape 2** L'observateur est d'ordre 2 donc l'énoncé demande implicitement de placer les deux pôles de cet observateur à  $(-10)$ . Le polynôme caractéristique désiré correspondant est :

$$\hat{D}_d(p) = (p + 10)^2 = p^2 + 20p + 100 = p^2 + \beta_1 p + \beta_0.$$

**Étape 3** Le polynôme caractéristique du procédé est toujours

$$D(p) = p^2 = p^2 + 0p + 0 = p^2 + a_1 p + a_0.$$

**Étape 4** Dans la base canonique d'observation, le gain d'observateur est donné par

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - \beta_1 \\ a_0 - \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -100 \end{bmatrix}.$$

**Étape 5** Il est inutile de se faire de nouveau avoir comme au début de l'exercice. Le modèle d'état du procédé est une forme canonique d'observation donc  $N = I$ .

Étape 6 De ce fait

$$Z = \tilde{Z} = \begin{bmatrix} -20 \\ -100 \end{bmatrix}.$$

Si l'on concatène les deux vecteurs d'état (celui du procédé et celui de l'observateur) en un vecteur d'état unique, on obtient l'équation (8.15) page 386, rappelée ci-après :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -ZC & A + ZC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u.$$

La matrice d'état étant bloc-triangulaire, il est facile de constater que ses valeurs propres sont celles de  $A$  (pôles du procédé) et celles de  $(A + ZC)$  (pôles de l'observateur).

La loi de commande est toujours  $u = K\hat{x} + p_c$ . Une fois injectée dans les équations du procédé et de l'observateur, en prenant comme vecteur d'état global  $\xi = [x' \ \epsilon']'$  où  $\epsilon = \hat{x} - x$ , il vient l'équation (8.29) page 395 ci-après partiellement instanciée avec  $D = 0$  :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \begin{bmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A + ZC \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} BH \\ 0 \end{bmatrix} y_c \\ y = [C \ 0] \xi + DH y_c. \end{cases}$$

De nouveau, la matrice d'état étant bloc-triangulaire, il est facile de constater que ses valeurs propres sont celles de  $(A + BK)$  (pôles du procédé bouclé avec le retour d'état calculé indépendamment) et celles de  $(A + ZC)$  (pôles de l'observateur).

La précommande  $H$  intervient comme un gain qui se place devant l'ensemble du système bouclé (comprenant l'observateur). Puisque l'état est asymptotiquement reconstruit, en régime permanent, la valeur finale de  $x$  et de  $\hat{x}$  est la même, de sorte que, toujours en régime permanent, les effets d'un simple retour d'état et d'un retour observé coïncident parfaitement. Ainsi dans les deux cas, la valeur de convergence de  $y = p$  est la même donc le gain statique est le même. L'adaptation de ce dernier par la précommande doit donc rester la même, à savoir  $H = 3$ .



L'observateur d'ordre plein répond à la structure de Luenberger. Pour s'en convaincre, il suffit de relire le paragraphe 8.3.3 page 389 qui explique tout ! (Inutile de tout récrire, non ?).

En présence d'un *offset* sur la commande  $u$ , il convient de placer un intégrateur en amont de cet *offset*, ce qui a été fait en §7.10.2 page 344. La loi de commande calculée était (voir les détails en §7.10.2)

$$u(t) = -9p(t) - 3\dot{p}(t) + 9 \int_0^t (p_c(\theta) - p(\theta))d\theta.$$

Or,  $\dot{p}(t)$  n'est plus accessible à la mesure et l'utilisation alternative d'un observateur d'ordre plein conduit à

$$u(t) = -9\hat{p}(t) - 3\hat{\dot{p}}(t) + 9 \int_0^t (p_c(\theta) - p(\theta))d\theta,$$

qui consiste à remplacer les mesures des deux composantes de  $x$ , à savoir  $p$  et  $\dot{p}$ , par leurs estimations respectives  $\hat{p}$  et  $\hat{\dot{p}}$ . Toutefois, puisque  $p$  est aussi la sortie et qu'elle est mesurée, alors, il est possible de récrire la loi de commande

$$u(t) = -9p(t) - 3\hat{\dot{p}}(t) + 9 \int_0^t (p_c(\theta) - p(\theta))d\theta.$$

### 8.11.2. Asservissement de position d'une bille sur un rail

Pour calculer l'observateur d'ordre minimal, on se réfère à la procédure de Luenberger donnée en §8.2.2 page 378.

Le système est observable puisque la matrice d'observabilité de Kálmán est

$$Q_o = I_2$$

et qu'elle est de toute évidence de rang plein. Le fait d'obtenir l'identité peut s'expliquer par le fait que le modèle d'état est une forme canonique dite d'« observabilité » (et non d'observation), que l'auteur a choisi de ne pas présenter dans cet ouvrage. Pour passer à la forme canonique d'observation, il faut utiliser la matrice de passage  $N$ . Comme  $A$  est

sous forme compagne horizontale (cf. §3.5.1.2 page 84), il est clair que le coefficient  $a_{n-1} = a_1$  du dénominateur de la fonction de transfert est 5, ce qui permet de calculer la matrice de passage à la forme canonique d'observation :

$$\begin{aligned}(N^T)^{-1} &= [ C' \quad (A' - 5I)C' ] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow N &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

La forme canonique d'observation qui en découle est

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \underline{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \underline{C} &= [ 1 \quad 0 ] & \underline{D} &= 0.\end{aligned}$$

Ces matrices correspondent aux expressions fournies en (3.13) page 85. En continuant d'appliquer la procédure de Luenberger, on trouve successivement

$$F = -10, \quad \underline{T} = [ -10 \quad 1 ], \quad P = -50, \quad R = 2.$$

Puis on continue la procédure en remarquant que  $\underline{S} = SN = N$  puisque dans le cas d'un observateur d'état, on  $S = I$ . Il vient alors

$$\begin{aligned}[ Q \quad L ] &= \underline{S} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \\ &= N \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \\ &= I.\end{aligned}$$

et donc

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Puisque le procédé ne comporte pas de transmission directe ( $D = 0$ ), alors  $G = 0$ . Toutes les matrices de l'observateur sont ainsi calculées.

On peut alors associer cet observateur à la loi de commande (sans intégrateur) calculée en §7.10.4 page 357. Et si l'on souhaite ajouter un intégrateur à la loi de commande, on peut aussi associer cet observateur à la loi de commande *avec intégrateur*, toujours calculée en §7.10.4 page 357. L'observateur ne fait qu'observer l'état du système sans intégrateur (cf. §8.5 page 398).

### 8.11.3. Commande sans capteur d'une machine synchrone

La commande choisie consiste à concaténer les deux tensions  $u_d$  et  $u_q$  en un seul vecteur  $u = [u_d \ u_q]'$  (oui, nous débordons sur le cas multivariable, mais ce n'est pas très grave). Quant au vecteur d'état, il est naturel de le choisir en considérant les variables qui apparaissent sous forme dérivée dans les équations (sans oublier l'équation  $\dot{\omega} = 0$  qui correspond à l'hypothèse de vitesse quasi constante au regard des dynamiques des courants) :

$$x = [ i_d \ i_q \ \omega ]'.$$

La sortie est la troisième variable d'état à savoir  $\omega$  (pour l'instant). Il suffit alors de formuler de façon matricielle l'ensemble des équations différentielles qui sont déjà linéaires pour obtenir la réalisation

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -a & \omega & 0 \\ -\omega & -a & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u, \\ y = [ 0 \ 0 \ 1 ] x, \end{cases}$$

avec  $a = \frac{R_s}{L}$ ,  $b = \frac{\Psi}{L}$  et  $l = \frac{1}{L}$ . Dans ce modèle,  $\omega$  joue bien à la fois le rôle de variable d'état et de paramètre apparaissant dans la matrice dynamique.

Si, maintenant, on considère que  $\omega$  n'est plus mesurée mais qu'en revanche,  $i_d$  et  $i_q$  sont accessibles à la mesure, alors l'équation d'état peut répondre au modèle (8.32) ou (8.33) (voir page 401) avec

$$\check{x} = x, \quad y_{\text{mes}} = \check{y} = x_1 = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix},$$

$$C_{\text{mes}} = \check{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{\text{mes}} = \check{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur d'état du modèle (8.33) se décompose en deux :

$$\check{x}_1 = x_1 \quad \text{et} \quad \check{x}_2 = x_2 = \omega.$$

Il vient alors

$$\check{A}_{11} = \begin{bmatrix} -a & \omega \\ -\omega & -a \end{bmatrix}, \quad \check{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \end{bmatrix}, \quad \check{B}_1 = \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix},$$

$$\check{A}_{21} = [ 0 \quad 0 ], \quad \check{A}_{22} = 0, \quad \check{B}_2 = [ 0 \quad 0 ].$$

Il s'agit alors d'appliquer les formules données en (8.42) et (8.43) (voir page 407) pour déterminer un observateur réduit identité, en considérant que  $w = \omega$  ce qui conduit à  $\check{S}_1 = [0 \ 0]$  et  $\check{S}_2 = 1$ . Il peut être noté que la paire  $(\check{A}_{22}, \check{A}_{12})$  est observable. Par ailleurs, si l'on considère que le gain  $Z$  s'exprime  $Z = [\alpha_1 \ \alpha_2]$  (il est inutile de donner des valeurs puisque les pôles à placer ne sont pas spécifiés), alors il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \check{A}_{22} + Z\check{A}_{12} = -\alpha_2 b, \\ P = \check{A}_{21} + Z\check{A}_{11} - (\check{A}_{22} + Z\check{A}_{12})Z \\ \quad = [ -\alpha_1 a - \alpha_2 \omega + \alpha_1 \alpha_2 b \mid \alpha_1 \omega - \alpha_2 a + \alpha_2^2 b ], \\ R = \check{B}_2 + Z\check{B}_1 - (\check{A}_{21} + Z\check{A}_{11} - (\check{A}_{22} + Z\check{A}_{12})Z)\check{D} \\ \quad = [ \alpha_1 l \mid \alpha_2 l ] \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \check{L} = \check{S}_2 = 1, \\ Q = \check{S}_1 - \check{S}_2 Z = -Z = [ -\alpha_1 \mid -\alpha_2 ], \\ G = (\check{S}_2 Z - \check{S}_1)\check{D} = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on ramène ceci à une écriture plus directe faisant apparaître les grandeurs physiques, l'observateur (8.42) page 407 devient

$$\begin{cases} \dot{z} &= -\alpha_2 \frac{\Psi}{L} z + \left( -\alpha_1 \frac{R_s}{L} - \alpha_2 \omega + \alpha_1 \alpha_2 \frac{\Psi}{L} \right) i_d \\ &+ \left( \alpha_1 \omega - \alpha_2 \frac{R_s}{L} + \alpha_2^2 \frac{\Psi}{L} \right) i_q + \frac{\alpha_1}{L} u_d + \frac{\alpha_2}{L} u_q, \\ \hat{\omega} &= z - \alpha_1 i_d - \alpha_2 i_q, \end{cases}$$

où  $\hat{\omega}$  est la reconstruction de  $\omega$ . Ce cas de figure est assez particulier. Dans cet observateur, l'écart de reconstruction  $\epsilon_\omega = \hat{\omega} - \omega$  est décrit par l'équation

$$\dot{\epsilon}_\omega = F \epsilon_\omega = -\alpha_2 \frac{\Psi}{L} \epsilon_\omega.$$

Une telle dynamique est caractérisée par un seul pôle :  $-\alpha_2 \frac{\Psi}{L}$ . Il en résulte que  $\alpha_2$  doit être choisi au minimum positif pour assurer la stabilité asymptotique de cet écart. Il faut aussi noter que  $\alpha_1$  n'a pas d'influence sur le pôle. Ceci est dû à la structure de la matrice  $\hat{A}_{12}$  qui présente une composante nulle. De ce fait,  $\alpha_1$  peut être pris nul ce qui simplifie l'expression de l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{z} &= -\alpha_2 \frac{\Psi}{L} z - \alpha_2 \omega i_d + \left( -\alpha_2 \frac{R_s}{L} + \alpha_2^2 \frac{\Psi}{L} \right) i_q + \frac{\alpha_2}{L} u_q, \\ \hat{\omega} &= z - \alpha_2 i_q. \end{cases}$$

La non-linéarité du modèle du procédé est occultée dans le raisonnement par le fait que  $\omega$  est aussi un paramètre de la matrice dynamique. Mais cette non-linéarité réapparaît soudain et génère un problème. L'observateur calculé dépend de  $\omega$  qui n'est pas mesuré. Pour le mettre en œuvre, il faut remplacer, dans le modèle de l'observateur,  $\omega$  par  $\hat{\omega}$ , ce qui est une approximation, raisonnable dès lors que l'observateur a déjà commencé à converger, et il vient

$$\begin{cases} \dot{z} &= -\alpha_2 \frac{\Psi}{L} z + -\alpha_2 \hat{\omega} i_d + \left( -\alpha_2 \frac{R_s}{L} + \alpha_2^2 \frac{\Psi}{L} \right) i_q + \frac{\alpha_2}{L} u_q, \\ \hat{\omega} &= z - \alpha_2 i_q. \end{cases}$$

Il en résulte que l'observateur obtenu est non linéaire. Il faut toutefois noter qu'en pratique,  $i_d$  est souvent asservi à 0 de sorte que le terme approximatif faisant intervenir  $\hat{\omega}$  perd très vite de son influence.

**Remarque 8.8** *Il peut être intéressant de conserver  $\alpha_1$  dans les équations et d'asservir le courant  $i_d$  à une certaine proportion de  $i_q$  afin de minimiser la sensibilité de l'observateur par rapport à une éventuelle incertitude sur  $R_s$  qui varie avec la température. Mais ceci n'est pas détaillé dans le document.*

Le modèle en  $(\alpha, \beta)$  est maintenant considéré. Dans ce modèle, si l'on prend en compte l'équation régissant la vitesse et faisant apparaître le couple résisitant  $T_r$ , ainsi que l'hypothèse de constance de  $T_r$ , à savoir  $\dot{T}_r = 0$ , alors un vecteur d'état naturel est

$$x_{\alpha\beta} = [ i_\alpha \quad i_\beta \quad \omega \quad T_r ]'$$

La commande consiste en un vecteur

$$u_{\alpha\beta} = [ u_\alpha \quad u_\beta ]'$$

et, pour l'instant, la sortie est  $y = \omega$ . L'équation d'état qui résulte de ce choix est

$$\begin{cases} \dot{x}_{\alpha\beta} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a & 0 & b \sin \theta & 0 \\ 0 & -a & -b \cos \theta & 0 \\ -k \sin \theta & k \cos \theta & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{\alpha\beta}} x_{\alpha\beta} + \underbrace{\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_{\alpha\beta}} u_{\alpha\beta}, \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{\alpha\beta}} x_{\alpha\beta}, \end{cases}$$

avec  $k = \frac{\Psi}{J}$  et  $h = \frac{1}{J}$ . Le modèle est bien d'ordre 4 mais il est dans le repère  $(\alpha, \beta)$  alors que l'on souhaite (c'est un choix) travailler dans le repère  $(d, q)$  qui ne fait normalement plus apparaître  $\theta$ . Il faut noter à cette occasion que le modèle n'est pas linéaire puisque les composantes de la matrice dynamique contiennent des fonctions trigonométriques de  $\theta$  qui est l'intégrale de la troisième variable d'état.

**Remarque 8.9** *Initialement, le couple  $T_r$  est une perturbation exogène mais l'idée de considérer cette perturbation comme constante pour l'intégrer au jeu des variables d'états n'est autre que celle des observateurs à entrée inconnue présentée au paragraphe 8.8 page 418.*

Pour passer dans le repère  $(d, q)$ , il faut utiliser la transformation de Park. Plus précisément, le nouveau vecteur d'état serait

$$x_{dq} = [ i_d \quad i_q \quad \omega \quad T_r ]',$$

donc les deux dernières composantes resteraient inchangées et seules les deux premières doivent être obtenues par la transformation de Park. La formule de passage serait idéalement

$$x_{\alpha\beta} = \mathbf{T}(\theta)x_{dq}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\theta) & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}.$$

Toutefois, comme il est expliqué dans l'énoncé,  $\theta$  n'est pas mesuré mais approché par intégration de la vitesse estimée  $\hat{\omega}$  qui conduit à une estimation  $\hat{\theta}$ . Il faut donc se contenter de la formule de passage

$$x_{\alpha\beta} = \mathbf{T}(\hat{\theta})x, \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\hat{\theta}) & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix},$$

où  $x$  est ici le véritable vecteur d'état considéré en pratique, à savoir

$$x = [ \hat{i}_d \quad \hat{i}_q \quad \omega \quad T_r ]'.$$

Il est rappelé que  $\hat{i}_d$  et  $\hat{i}_q$  ne sont donc que des mesures estimées des intensités  $i_d$  et  $i_q$ .

De la même manière, il faut considérer ce passage dans la construction de  $u_{\alpha\beta}$ . Les grandeurs  $i_d$  et  $i_q$  n'étant pas réellement mesurées, l'asservissement de  $i_d$  et  $i_q$  est en pratique remplacé par un asservissement de  $\hat{i}_d$  et  $\hat{i}_q$ . De ce fait, cet asservissement, quel qu'il soit, conduit à une commande  $u$  définie par

$$u = [ \hat{u}_d \quad \hat{u}_q ]'$$

à partir de laquelle il faut construire  $u_{\alpha\beta}$ . Cette reconstruction ne peut se faire que par une transformation de Park « décalée » :

$$u_{\alpha\beta} = \mathbf{P}(\hat{\theta})u.$$

Il vient donc

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mathbf{T}^{-1}(\hat{\theta})x_{\alpha\beta} + \mathbf{T}^{-1}(\hat{\theta})\dot{x}_{\alpha\beta} \\ y &= \underbrace{[0 \ 0 \ 1 \ 0]}_C x. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} &= \underbrace{(\dot{\mathbf{T}}^{-1}(\hat{\theta})\mathbf{T}(\hat{\theta}) + \mathbf{T}^{-1}(\hat{\theta})A_{\alpha\beta}\mathbf{T}(\hat{\theta}))}_A x + \underbrace{\mathbf{T}^{-1}(\hat{\theta})B_{\alpha\beta}\mathbf{P}(\hat{\theta})}_B u, \\ y &= Cx. \end{cases} \quad (8.74)$$

Pour expliciter cette expression, il est nécessaire de réaliser le calcul suivant :

$$\mathbf{T}(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \cos(\hat{\theta}) & -\sin(\hat{\theta}) & 0 & 0 \\ \sin(\hat{\theta}) & \cos(\hat{\theta}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}^{-1}(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \cos(\hat{\theta}) & \sin(\hat{\theta}) & 0 & 0 \\ -\sin(\hat{\theta}) & \cos(\hat{\theta}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{T}}^{-1}(\hat{\theta}) = \hat{\omega} \begin{bmatrix} -\sin(\hat{\theta}) & \cos(\hat{\theta}) & 0 & 0 \\ -\cos(\hat{\theta}) & -\sin(\hat{\theta}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ce calcul permet de déduire, grâce à (8.74), une représentation non linéaire dans le plan  $(d, q)$  :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \hat{A}x + Bu, \\ y &= Cx, \end{cases} \quad (8.75)$$

avec



$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -a & \hat{\omega} & -b \sin(\hat{\theta} - \theta) & 0 \\ -\hat{\omega} & -a & -b \cos(\hat{\theta} - \theta) & 0 \\ k \sin(\hat{\theta} - \theta) & k \cos(\hat{\theta} - \theta) & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = B_{\alpha\beta}. \tag{8.76}$$

Ce modèle n'est pas linéaire puisque  $\hat{A}$  fait toujours apparaître des fonctions trigonométriques, mais cette fois-ci de  $(\hat{\theta} - \theta)$ . Il est possible de « déguiser » ce modèle non linéaire en un modèle linéaire en reportant les non-linéarités dans un terme de perturbations fictives :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{8.77}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} -a & \hat{\omega} & 0 & 0 \\ -\hat{\omega} & -a & -b & 0 \\ 0 & k & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_f = \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f = \begin{bmatrix} \sin(\hat{\theta} - \theta)\omega \\ (1 - \cos(\hat{\theta} - \theta))\omega \\ \sin(\hat{\theta} - \theta)\hat{i}_d - (1 - \cos(\hat{\theta} - \theta))\hat{i}_q \end{bmatrix}.$$

Lorsque la position est correctement estimée, il vient :

$$\hat{\theta} - \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin(\hat{\theta} - \theta) & = 0 \\ (1 - \cos(\hat{\theta} - \theta)) & = 0 \end{cases} \Rightarrow f = 0.$$

Mais encore faut-il que la position  $\theta$  soit bien reconstruite. Cette reconstruction dépend entre autres de la qualité de la reconstruction de  $\omega$  (... le serpent évoqué plus avant).

Un intérêt de ce modèle est que, contrairement au modèle initialement considéré dans cet exercice, il fait apparaître  $\hat{\omega}$  au lieu de  $\omega$  dans  $A$ . Cette valeur est réellement à disposition en sortie de l'observateur... qui reste néanmoins à déterminer.

L'idée est de nouveau d'appliquer la procédure de synthèse d'un observateur d'ordre réduit en supposant que le serpent n'est pas dangereux c'est-à-dire que  $f$  est négligeable. Les mesures accessibles ne sont plus  $i_d$  et  $i_q$  mais les estimations  $\hat{i}_d$  et  $\hat{i}_q$  résultant de la reconstruction  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  issue elle-même de l'intégration de la vitesse estimée  $\hat{\omega}$ . L'équation d'état peut répondre au modèle (8.32) ou (8.33) (voir page 401) avec

$$\check{x} = x, \quad y_{\text{mes}} = \check{y} = x_1 = \begin{bmatrix} \hat{i}_d \\ \hat{i}_q \end{bmatrix},$$

$$C_{\text{mes}} = \check{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{\text{mes}} = \check{D} = 0.$$

Le vecteur d'état du modèle (8.33) se décompose en deux :

$$\check{x}_1 = x_1 \quad \text{et} \quad \check{x}_2 = x_2 = [\omega \quad T_r]'$$

Il vient alors

$$\check{A}_{11} = \begin{bmatrix} -a & \hat{\omega} \\ -\hat{\omega} & -a \end{bmatrix}, \quad \check{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix}, \quad \check{B}_1 = \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix},$$

$$\check{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \check{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -h \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \check{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il s'agit de nouveau d'appliquer les formules données en (8.42) et (8.43) (voir page 407) pour déterminer un observateur réduit identité. Puisque l'observateur doit reconstruire  $\omega$  et  $T_r$ , c'est-à-dire  $x_2$ , il faut considérer  $w = x_2$  ce qui conduit à  $\check{S}_1 = 0$  et  $\check{S}_2 = I_2$ . Il peut être noté que la paire  $(\check{A}_{22}, \check{A}_{12})$  est observable. Le gain  $Z$  à déterminer est alors une matrice de dimension  $2 \times 2$  que l'on peut exprimer

$$Z = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}.$$

(Il est encore inutile de chercher des valeurs à ces composantes puisque les pôles à placer ne sont pas spécifiés). Il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \check{A}_{22} + Z\check{A}_{12} = \begin{bmatrix} -b\alpha_2 & -h \\ -b\alpha_4 & 0 \end{bmatrix}, \\ P = \check{A}_{21} + Z\check{A}_{11} - (\check{A}_{22} + Z\check{A}_{12})Z \\ = \left[ \begin{array}{c|c} -a\alpha_1 - \alpha_2\hat{\omega} + b\alpha_1\alpha_2 + h\alpha_3 & \alpha_1\hat{\omega} - \alpha_2a + b\alpha_2^2 + h\alpha_4 + k \\ -a\alpha_3 - \alpha_4\hat{\omega} + b\alpha_1\alpha_4 & \alpha_3\hat{\omega} - a\alpha_4 + b\alpha_2\alpha_4 \end{array} \right], \\ R = \check{B}_2 + Z\check{B}_1 - (\check{A}_{21} + Z\check{A}_{11} - (\check{A}_{22} + Z\check{A}_{12})Z)\check{D} = \begin{bmatrix} \alpha_1l & \alpha_2l \\ \alpha_3l & \alpha_4l \end{bmatrix}, \\ L = \check{L} = \check{S}_2 = I_2, \\ Q = \check{S}_1 - \check{S}_2Z = -Z = \left[ \begin{array}{c|c} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 \end{array} \right], \\ G = (\check{S}_2Z - \check{S}_1)\check{D} = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on ramène ceci à une écriture plus directe faisant apparaître les grandeurs physiques, l'observateur (8.42) page 407 devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = \left(-\frac{m}{J} - \alpha_2\frac{\Psi}{L}\right)z_1 - \frac{1}{J}z_2 + \left(-\alpha_1\frac{R_s}{L} - \alpha_2\hat{\omega} + \alpha_1\alpha_2\frac{\Psi}{L} + \frac{\alpha_3}{J}\right)\hat{i}_d \\ \quad + \left(\alpha_1\hat{\omega} - \alpha_2\frac{R_s}{L} + \alpha_2^2\frac{\Psi}{L} + \frac{\Psi + \alpha_4}{J}\right)\hat{i}_q + \frac{\alpha_1}{L}\hat{u}_d + \frac{\alpha_2}{L}\hat{u}_q, \\ \dot{z}_2 = -\alpha_4\frac{\Psi}{L}z_1 + \left(-\alpha_3\frac{R_s}{L} - \alpha_4\hat{\omega} + \alpha_1\alpha_4\frac{\Psi}{L}\right)\hat{i}_d \\ \quad + \left(\alpha_3\hat{\omega} - \alpha_4\frac{R_s}{L} + \alpha_2\alpha_4\frac{\Psi}{L}\right)\hat{i}_q + \frac{\alpha_3}{L}\hat{u}_d + \frac{\alpha_4}{L}\hat{u}_q, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\omega} = z_1 - \alpha_1\hat{i}_d - \alpha_2\hat{i}_q, \\ \hat{T}_r = z_2 - \alpha_3\hat{i}_d - \alpha_4\hat{i}_q, \end{array} \right.$$

où  $\hat{T}_r$  est bien sûr la reconstruction de  $T_r$ . Un tel observateur est *a priori* plus intéressant que le précédent pour au moins deux raisons :

- il permet de reconstruire le couple en plus de la vitesse;
- il est par construction dépendant de  $\hat{\omega}$  et non de  $\omega$  donc il n'y a pas d'approximation à utiliser  $\hat{\omega}$  dans les équations (l'approximation est en fait reportée dans la négligence de  $f$ ).

Dans cet observateur, la dynamique de l'écart de reconstruction sur  $x_2$  est décrite par l'équation

$$\dot{\epsilon}_2 = \dot{\hat{x}}_2 - \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} (\dot{\hat{\omega}} - \dot{\omega}) \\ \dot{\hat{T}}_r \end{bmatrix} = F\epsilon_2 = F(\hat{x}_2 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\epsilon}_2 = \begin{bmatrix} -b\alpha_2 & -h \\ -b\alpha_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{\omega} - \omega) \\ (\hat{T}_r - T_r) \end{bmatrix}.$$

Ceci provient du fait que dans le cas présent,  $\epsilon_2 = \mu$  et il est rappelé que  $\dot{\mu} = F\mu$ . (À titre d'exercice, le lecteur peut retrouver cette relation en partant des équations propres au présent exemple.)

Une telle dynamique est caractérisée par deux pôles qui peuvent être placés par un choix judicieux de  $Z$  puisque  $F = A_{22} + ZA_{12}$ . Cependant, l'équation ci-avant montre que seuls  $\alpha_2$  et  $\alpha_4$  déterminent le spectre de  $F$ . Ceci est encore dû à la structure de la matrice  $\hat{A}_{12}$  qui présente une ligne nulle. De ce fait,  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  peuvent être pris nuls ce qui simplifie l'expression de l'observateur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = -\alpha_2 \frac{\Psi}{L} z_1 - \frac{1}{J} z_2 - \alpha_2 \hat{\omega} \hat{i}_d \\ \quad + \left( -\alpha_2 \frac{R_s}{L} + \alpha_2^2 \frac{\Psi}{L} + \frac{\Psi + \alpha_4}{J} \right) \hat{i}_q + \frac{\alpha_2}{L} \hat{u}_q, \\ \dot{z}_2 = -\alpha_4 \frac{\Psi}{L} z_1 - \alpha_4 \hat{\omega} \hat{i}_d + \left( -\alpha_4 \frac{R_s}{L} + \alpha_2 \alpha_4 \frac{\Psi}{L} \right) \hat{i}_q + \frac{\alpha_4}{L} \hat{u}_q, \\ \hat{\omega} = z_1 - \alpha_2 \hat{i}_q, \\ \hat{T}_r = z_2 - \alpha_4 \hat{i}_q, \end{array} \right.$$

L'observateur est en fait un observateur adaptatif puisqu'il est adapté avec l'une de ses sorties :  $\hat{\omega}$ . Il est donc en toute rigueur non linéaire ce qui n'empêche pas la dynamique de l'écart de reconstruction d'être linéaire. Ainsi, le placement de pôles conserve un sens. Si  $F$  est choisie stable au sens de Hurwitz (et suffisamment « rapide »), alors  $\epsilon_2$  tend suffisamment vite vers zéro, donc ses deux composantes aussi.

Si l'on s'intéresse au calcul des  $\alpha_i$ , il faut noter que la première ligne de  $\check{A}_{12}$  étant nulle, la matrice  $F$  s'écrit

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -h \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow F = \begin{bmatrix} -b\alpha_2 & -h \\ -b\alpha_4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -h \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b & 0 \end{bmatrix}.$$

Non seulement, il est ainsi de nouveau montré que  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  n'ont pas d'influence mais surtout, on s'aperçoit que la paire

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & -h \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b & 0 \end{bmatrix} \right)$$

qui est observable, suffit à réaliser le placement de pôles. Ce calcul peut donc se faire dans un cadre monovariable avec les techniques présentées dans ce chapitre. (Des techniques existent dans le cadre multivariable mais vont au-delà de ce qui est présenté ici.) Quant à  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$ , ils peuvent être *a priori* choisis quelconques sans altérer le spectre, donc pour simplifier nuls.

Si maintenant la résistance statorique et le flux sont incertains, il convient de récrire le modèle en remplaçant  $R_s$  par  $(R_s + \delta R_s)$  et  $\Psi$  par  $\Psi + \delta\Psi$  où  $\delta R_s$  et  $\delta\Psi$  sont bien entendu les incertitudes sur  $R_s$  et  $\Psi$ . Pour simplifier les notations, ces incertitudes sont reportées sur les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $k$  qui sont remplacés par  $a + \delta a$ ,  $b + \delta b$  et  $k + \delta k$  (pour ne pas trop souffrir, l'inductance  $L$  et l'inertie  $J$  sont supposées connues avec précision ce qui est une situation sans doute quelque peu idéalisée). Ainsi le modèle du système se réécrit

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + Bu + (B_f + \Delta B_f)f, \\ y &= Cx, \end{cases}$$

avec

$$\Delta A = \begin{bmatrix} -\delta a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta a & -\delta b & 0 \\ 0 & \delta k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\Delta B_f = \begin{bmatrix} -\delta b & 0 & 0 \\ 0 & \delta b & 0 \\ 0 & 0 & \delta k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La dynamique de l'écart de reconstruction  $\epsilon_2$  peut se récrire en partant de la forme générale de la dynamique de  $\mu$  en présence d'incertitude telle que présentée en §8.7.1.3 page 415 mais c'est plutôt fastidieux et mieux vaut partir directement des équations du présent modèle incertain et de celles de l'observateur obtenu. En supposant que  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  ne sont pas forcément nuls, il vient :

$$\dot{\epsilon}_2 = F\epsilon_2 + d$$

avec

$$d = \frac{\begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} \alpha_1 \hat{i}_d + \alpha_2 \hat{i}_q \end{array} \right) \delta a + \alpha_2 \omega \delta b - \hat{i}_q \delta k \\ \left( \begin{array}{c} -\alpha_2 (1 - \cos(\hat{\theta} - \theta)) \omega (b + \delta b) + \alpha_1 (b + \delta b) \sin(\hat{\theta} - \theta) \omega \\ + (k + \delta k) ((1 - \cos(\hat{\theta} - \theta)) \hat{i}_q - \sin(\hat{\theta} - \theta) \hat{i}_d) \end{array} \right) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} \alpha_3 \hat{i}_d + \alpha_4 \hat{i}_q \end{array} \right) \delta a + \alpha_4 \omega \delta b \\ \left( \begin{array}{c} -\sin(\hat{\theta} - \theta) \hat{i}_d (k + \delta k) - (1 - \cos(\hat{\theta} - \theta)) (\alpha_4 (b + \delta b) \omega \\ + \alpha_3 (b + \delta b) \sin(\hat{\theta} - \theta)) \omega \end{array} \right) \end{bmatrix}}.$$

(Attention, le calcul n'est pas immédiat.)

Comme il peut être vu, le biais de convergence  $d$  a une expression plutôt complexe. Il est clair que ce biais a une influence sur la qualité de l'observation et sur la commande qui utilise cette observation.

**Remarque 8.10** *Il est clair que les valeurs  $\alpha_i$  ont une influence sur l'effet de  $d$ . Il faut choisir  $\alpha_2$  et  $\alpha_4$  de manière à rendre l'observateur suffisamment rapide au regard de la dynamiques du système (en fait celle de  $\omega$  et  $T_r$ ) mais vouloir le rendre trop rapide peut conduire à un accroissement du biais de convergence. Par exemple, un terme tel que  $\alpha_2 \omega \delta b$  est d'autant plus grand que l'on a cherché à rendre l'observateur rapide en augmentant  $|\alpha_2|$ . Ceci est une illustration d'un des propos du paragraphe 8.7.1.4 page 415 qui stipule qu'il est parfois dangereux, en présence d'incertitude, de vouloir rendre l'observateur rapide.*

**Remarque 8.11** Une stratégie pour simplifier un peu ce terme serait de fixer arbitrairement

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \tau\alpha_2, \\ \alpha_3 &= \tau\alpha_4, \end{cases}$$

pour une valeur fixée quelconque de  $\tau$  puis d'asservir les courants de telle sorte que rapidement, il vienne

$$\hat{i}_d = -\frac{\hat{i}_q}{\tau}.$$

Ainsi les termes en  $\delta a$  disparaîtraient ce qui signifierait que l'incertitude sur  $R_s$  n'aurait plus d'influence. Toutefois,  $\tau$  doit être choisi suffisamment grand car la commande de la machine synchrone suppose un courant  $i_d$  relativement faible (il est généralement asservi à zéro).

En outre, introduire un courant  $\hat{i}_d$  non nul en régime permanent peut agir de façon nuisible sur les autres termes des composantes de  $d$ .

L'effet néfaste de  $d$  est surtout flagrant à basse vitesse (en toute rigueur, le modèle n'est pas observable pour  $\omega = 0$ ).

Il est intéressant de noter que certains termes des composantes de  $d$  tendent vers zéro lorsque  $\omega$  se rapproche de zéro. Cela étant, en pratique, le problème persiste et l'observateur peut se mettre à diverger au passage à  $\omega = 0$ .

**Remarque 8.12** Une autre stratégie, pas forcément incompatible avec la précédente, consiste à essayer de concevoir un observateur de telle sorte que la perturbation  $d$  soit rejetée, au moins sur  $\epsilon_\omega$ . Autrement dit, il faut calculer la matrice  $Z$  de façon à non seulement placer les pôles, mais aussi à réduire le transfert entre  $d$  et  $\epsilon_\omega$ . Mais la perturbation n'a rien d'un simple échelon et le recours à des intégrateurs risque d'être inefficace. Des méthodes plus savantes qui vont bien au-delà de ce que propose ce document (minimisation de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  du transfert par exemple) peuvent être tentées mais le problème reste néanmoins très complexe et ouvert.

**Remarque 8.13** *Enfin, un problème qui n'est pas le moindre vient de l'estimation  $\hat{\theta}$  de  $\theta$ , qui s'obtient par intégration de  $\hat{\omega}$ . Il est absolument nécessaire d'obtenir par une méthode ou une autre la position de départ  $\theta_0$  sinon cette erreur se répercute sur la valeur de l'intégrale et si elle est importante, elle peut mettre très rapidement l'observateur en défaut et conduire à une instabilité de la reconstruction.*

*Il serait utile de pouvoir observer  $\theta$  plutôt que de l'obtenir par intégration. Pour ce faire, une idée assez naturelle serait de passer à un modèle d'ordre 5 en ajoutant  $\theta$  comme variable d'état ainsi que l'équation  $\dot{\theta} = \omega$ . Hélas, le modèle ainsi obtenu n'est pas observable !*



## 8.12. Notes et références

Une fois de plus, la plupart des développements de ce chapitre peuvent être trouvés dans des livres de référence tels que [1,2,3,4,5,6]. Mais la véritable source d'inspiration de l'auteur reste avant tout [7] et [8].

Du point de vue historique, l'essentiel des résultats concernant les observateurs semble pour beaucoup le fruit du travail de David G. Luenberger<sup>5</sup> qui peu à peu progressivement sa théorie dans plusieurs articles dont les plus notables sont peut-être [9,10,11]. Mais tout le travail sur les observateurs n'est pas forcément à mettre au crédit de Luenberger car l'on retrouve encore, dans cette affaire, l'incontournable Kálmán<sup>6</sup>, qui pour résoudre des problèmes de filtrage en présence de bruits envisagés comme des signaux aléatoires, utilisait déjà des formes d'observateurs [12,13]. Ce travail correspond aujourd'hui à un classique des cours avancés d'automatique, plus précisément de filtrage optimal : le *filtre de Kálmán* dont la version continue doit être aussi portée au crédit de Richard S. Bucy<sup>7</sup>. La notoriété de Kálmán tient autant à ce filtre qu'à sa formalisation de la représentation d'état puisque le filtre en question fut implanté dans les ordinateurs de navigation du programme Apollo, contribuant ainsi à sa réputation d'efficacité.

En réalité, la présentation des observateurs proposée dans ce chapitre, sur le plan chronologique, est un peu spéieuse. Il est sans doute juste de dire que les observateurs étaient déjà connus du fait du travail de Kálmán sur le filtre éponyme, et même peut-être d'autres auteurs auparavant puisque la paternité de ce filtre fut contestée à Kálmán et parfois attribuée à Thorvald N. Thiele<sup>8</sup> et Peter Swerling<sup>9</sup>. Ainsi, l'observateur identité d'ordre plein semble pouvoir être attribué plus ou moins directement, plus ou moins complètement, à plusieurs chercheurs, mais pour le formalisme et les problèmes de reconstruction d'état, le point de vue de Kálmán demeure important. Ce fut toutefois Luenberger qui introduisit le vocable *observateur* et qui, en en généralisant les concepts via la possibilité de réduire l'ordre, posa les bases d'une vraie théorie de l'observation. Pour rendre compte de cette chronologie, il eut peut-être été pertinent de présenter d'abord l'observateur identité d'ordre plein (après tout, nombre de documents ne présente que celui-ci), puis d'introduire la procédure de Luenber-

---

5. voir biographie 8.1 page 390.

6. voir biographie en annexe I.2 page 777.

7. Richard Snowden Bucy, ingénieur états-unien (1935-).

8. Thorvald Nicolai Thiele, astronome et statisticien danois (1838-1910).

9. théoricien états-unien du RADAR (1929-2000).

ger pour les observateurs réduits et d'évoquer ainsi le cas particulier non réduit présenté en premier dans ce chapitre. L'auteur a préféré faire le choix de clairement distinguer les observateurs non réduits des observateurs réduits. Ainsi le lecteur pourra-t-il se contenter de lire ce qui concerne l'observateur d'ordre plein en prenant tout de même connaissance de la théorie de Luenberger. Un ouvrage très intéressant fait le point sur les observateurs : [14]. De plus, en Français, les notes de cours sur l'observation de Frédéric Rotella à l'École Nationale d'Ingénieurs (ENI) de Tarbes constituent également une lecture enrichissante [15].

Pour ce qui est de la commande par retour d'état reconstruit, ce n'est autre que la suite logique du calcul d'un observateur et les premières références citées dans ce paragraphe présentent cette suite logique de façon détaillée.

Les développements proposés par l'auteur concernant la non conservation des propriétés des observateurs en présence d'incertitudes n'ont pas été empruntés à quelque livre que ce soit. Toutefois, ce ne sont que des calculs assez « naturels » qui n'ont rien de vraiment original et qui trouvent à coup sûr leur équivalent dans nombre d'ouvrages.

La synthèse d'observation en présence d'entrées non maîtrisées est également une extension assez naturelle. Il faut noter que de nombreux points intéressants sont développés dans [6].

Le raisonnement proposé au paragraphe 8.9 page 421 concernant la plus ou moins grande généralité des retours dynamiques de sortie basée sur un retour d'état reconstruit par un observateur identité dans l'ensemble des retours dynamiques de sortie d'ordre plein est pour beaucoup emprunté à [16], mais remonte à une remarque initialement formulée dans [17]. Il faut noter à ce propos qu'une technique de placement de pôles par retour dynamique de sortie, pour les systèmes mono-entrée, mono-sortie, et non basée sur une structure d'observateur, est proposée dans [18]. Elle s'appuie sur les modèles externes (fonctions de transfert).

L'exercice corrigé sur la machine synchrone et son observateur à des fins de commande sans capteur est inspiré de certains travaux d'introduction d'un chapitre de la thèse [19].

1. **T. Kailath** : *Linear Systems*. Prentice Hall, 1979.  
*Un vrai ouvrage de référence, pas très facile à aborder par son style et sa forme mais redoutablement complet. Pratiquement une « bible ».*
2. **R. C. Dorf et R. H. Bishop** : *Modern Control Systems*. Neuvième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.  
*La réédition permanente de cet ouvrage en dit long sur sa popularité. Les nombreux exemples constituent une vraie mine d'exercices pour un enseignant.*
3. **G. F. Franklin, J. D. Powell et A. Emami-Naemi** : *Feedback Control of Dynamic Systems*. Quatrième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.  
*Assez riche en exemples et agréable dans la forme. Plutôt didactique.*
4. **K. Ogata** : *Modern Control Engineering*. Troisième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.  
*Ouvrage de référence qui semble en avoir inspiré plus d'un. L'auteur a un petit faible pour cette référence dont la première édition date de 1970.*
5. **P. J. Antsaklis et A. N. Michel** : *Linear Systems*. McGraw-Hill, 1997.  
*Fanchement pas le plus accessible mais très rigoureux mathématiquement. Très bien mais déconseillé pour une première approche.*
6. **B. Friedland** : *Control System Design - An Introduction to State-Space Methods*. Dover, Mineola, New York, 1985.  
*Cet ouvrage se concentre uniquement sur la représentation d'état et de ce fait, vu sa taille importante, traite bien plus d'aspects que beaucoup d'autres. Les exemples y sont nombreux et bien choisis. Il est parfois un peu dense. Son prix est très raisonnable.*
7. **B. Pradin** : *Polycopié de cours d'Automatique : « Automatique : Notes de cours - Exercices »*. INSA de Toulouse, 3ème année spécialité AEI. 1992.  
*Là où l'essentiel est mieux expliqué que partout ailleurs ! si ce n'est dans [8].*
8. **B. Pradin et G. Garcia** : *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Presses Universitaires du Mirail, 2010.  
*Que dire de cet ouvrage si ce n'est que c'est celui qu'il faut acheter ! Incontestablement le meilleur rapport qualité/prix.*

9. **D. G. Luenberger** : Observing the State of a Linear System. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8, p. 74-80, 1964.  
*La gènese des observateurs par le maître du genre.*
10. **D. G. Luenberger** : Observing for Multivariable Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(2), p. 190-197, 1966.  
*Une extension de l'article précédent au cas des systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties, avec deux ans de recul en plus.*
11. **D. G. Luenberger** : An Introduction to Observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6), p. 596-602, 1971.  
*Encore un article de référence sur les observateurs, plus complet et plus didactique que les précédents où l'on perçoit mieux la procédure de Luenberger telle qu'elle est présentée dans cet ouvrage.*
12. **R. E. Kálmán** : A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME (Journal of Basic Engineering)*, 82D(1), p. 35-45, 1960.  
*L'article à l'origine du très célèbre filtre de Kálmán, en version discrète.*
13. **R. E. Kálmán et R. S. Bucy** : New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. *Transactions of the ASME (Journal of Basic Engineering)*, 83D(1), p. 95-108, 1961.  
*La version continue du toujours très célèbre filtre de Kálmán, établi en collaboration avec Bucy. C'est donc le filtre de Kálmán-Bucy. Ne pas l'oublier!*
14. **J. O'Reilly** : *Observers for Linear Systems*. Academic Press, New York, 1983.  
*À la connaissance de l'auteur, le premier ouvrage didactique sur les observateurs linéaires : une référence.*
15. **F. Rotella** : *Observation*. Notes de cours, ENI de Tarbes. Téléchargeable à l'adresse :  
<http://www.clubeea.org/documents/mediatheque/observateurs.pdf>  
*Excellentes, rigoureuses et assez complètes notes de cours sur les observateurs.*
16. **Y. Rahman et D. S. Bernstein** : Are All Full-Order Dynamic Compensators Observer Based? *IEEE Control Systems Magazine*, p. 116-122, janvier 2017.  
*Tous les compensateurs dynamiques d'ordre plein peuvent-ils avoir une structure d'observateur avec retour d'état? Une réponse claire dans le cas monovarié.*

17. **F. M. Brasch Jr et J. B. Pearson** : Pole placement using dynamic compensators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(1), p. 34-43, 1970.  
*Un début de solution au problème résolu dans la référence précédente.*
18. **G. C. Goodwin, S. F. Graebe et M. E. Salgado** : *Control System Design*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 2001.  
*Où l'on trouve une méthode pour calculer un compensateur dynamique d'ordre plein plaçant le spectre souhaité (approche par fonctions de transfert).*
19. **I. Omrane** : *Développement de capteurs logiciels de position pour la commande de la machine synchrone à aimants permanents*. Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, janvier 2014.  
*Où un chapitre est consacré à l'utilisation d'un observateur pour la commande sans capteur de la vitesse d'une machine synchrone. Ce qui figure dans le présent document n'en est qu'une prémisse.*



# Chapitre 9

## *Introduction à la représentation d'état discrète*

Dans ce chapitre, une première approche de la version discrète des représentations d'état linéaires est proposée. Il ne peut en aucun cas s'agir d'un cours sur les systèmes discrets, mais plutôt d'un aperçu rapide. À cette fin, des rappels sur les signaux discrets sont néanmoins nécessaires, avant d'introduire le modèle d'état discret. La relation entre ce modèle et la fonction de transfert en  $z$  est résumée. Les concepts de réponse temporelle, stabilité, commande, observation sont également très brièvement abordés.

### Sommaire

---

<b>9.1 Rappels sur les signaux . . . . .</b>	<b>465</b>
9.1.1 Signaux continus, discrets, quantifiés, non quantifiés	465
9.1.2 Transformation de signaux . . . . .	468
<b>9.2 Systèmes discrets linéaires . . . . .</b>	<b>479</b>
9.2.1 Définition . . . . .	479
9.2.2 Modèles externes . . . . .	480
9.2.3 Modèle interne : la représentation d'état . . . . .	486
9.2.4 Lien entre les modèles . . . . .	486

<b>9.3</b>	<b>Systèmes échantillonnés</b>	<b>487</b>
9.3.1	Pourquoi étudier les modèles discrets? (notion de système échantillonné)	487
9.3.2	Commande numérique	489
9.3.3	Échantillonnage et théorème de Shannon	490
9.3.4	Signaux continu/échantillonné/discretisé : un bilan	493
9.3.5	Obtention d'un modèle échantillonné	498
<b>9.4</b>	<b>Réponse d'un système discret</b>	<b>504</b>
9.4.1	Réponse du modèle d'état	505
9.4.2	Analyse de la réponse : étude des modes	508
<b>9.5</b>	<b>Stabilité d'un système discret</b>	<b>510</b>
9.5.1	Stabilité BIBO	510
9.5.2	Stabilité interne	511
9.5.3	Critère des racines	512
9.5.4	Critère de Jury	515
9.5.5	Méthode de Liapounov	515
9.5.6	Stabilité d'un système échantillonné	517
<b>9.6</b>	<b>Commandabilité/observabilité</b>	<b>519</b>
9.6.1	Définitions	519
9.6.2	Critère de Kálmán	520
9.6.3	Critères s'appliquant aux formes de Jordan	522
9.6.4	Grammiens	522
9.6.5	Test PBH	524
9.6.6	Modèles et structures	524
9.6.7	Réalisation minimale	525
9.6.8	Décomposition de Kálmán	525
<b>9.7</b>	<b>Commande par retour d'état</b>	<b>527</b>
9.7.1	Les différentes approches de la commande numérique	527
9.7.2	Retour d'état discret	528
9.7.3	Placement de pôles par retour d'état	529
9.7.4	Stabilisabilité et détectabilité	531
9.7.5	Stabilisation	532
9.7.6	Stabilisabilité, détectabilité	534
<b>9.8</b>	<b>Commande par retour de sortie</b>	<b>534</b>
<b>9.9</b>	<b>Exercices</b>	<b>536</b>
9.9.1	Petit système de premier ordre	536
9.9.2	Le revenu national	536



---

9.9.3	Nouveau plongeon dans la cuve . . . . .	537
9.9.4	Egalité et inégalité de Stein . . . . .	541
<b>9.10</b>	<b>Correction des exercices . . . . .</b>	<b>543</b>
9.10.1	Petit système de premier ordre . . . . .	543
9.10.2	Le revenu national . . . . .	545
9.10.3	Nouveau plongeon dans la cuve . . . . .	546
9.10.4	Egalité et inégalité de Stein . . . . .	553
<b>9.11</b>	<b>Notes et références . . . . .</b>	<b>556</b>

---

## 9.1. Rappels sur les signaux

### 9.1.1. Signaux continus, discrets, quantifiés, non quantifiés

Un signal peut être vu comme une quantité, notée  $f$ , qui varie dans le temps, de sorte que  $f(t)$  est une fonction ou une distribution du temps. Plus simplement, un signal se caractérise par une amplitude  $f$  (généralement associée à une grandeur physique) qui évolue en fonction du temps  $t$ . On peut distinguer différentes classes de signaux selon les valeurs que peuvent prendre  $f$  et  $t$ . Ainsi, on peut faire une première distinction sur le temps  $t$  et séparer :

- les signaux à temps continu ou simplement « *signaux continus* » : ceux-ci sont tels que l'amplitude  $f$  est définie quel que soit le temps  $t$  (cas (a) et (b) de la figure 9.1) ;
- les signaux à temps discret ou simplement « *signaux discrets* » : ceux-là sont tels que l'amplitude  $f$  est définie à des instants précis du temps (le temps est alors « discrétisé » : cas (c) à (f) de la figure 9.1).

Par ailleurs, on fait une autre distinction sur l'amplitude  $f$  en séparant :

- les *signaux non quantifiés* pour lesquels  $f$  peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle continu (cas (a), (c) et (e) de la figure 9.1);
- les *signaux quantifiés* pour lesquels  $f$  est un nombre quantique c'est-à-dire qu'il ne peut prendre que des valeurs discrètes bien définies (l'amplitude est alors discrète : cas (b), (d) et (f) de la figure 9.1).

Un signal continu et non quantifié est appelé *analogique* (*analog signal* en anglais) tel celui dessiné sur la figure 9.1, cas (a). Dans les ouvrages sur le sujet, il arrive que l'on ne distingue pas signaux continus et analogiques sans que cela ne soit nécessairement problématique. Toutefois, ces deux vocables ne sont pas synonymes et la classe des signaux analogiques constitue un sous-ensemble des signaux continus.

De même, un signal discret et quantifié est qualifié de *numérique* (*digital signal* en anglais), tels ceux dessinés sur la figure 9.1, cas (d) et (f). Là encore, il arrive très souvent que l'on confonde signal discret et signal numérique bien que les signaux numériques constituent un sous-ensemble des signaux discrets.

Il se peut que pour un signal discret (numérique ou pas), les instants du temps pour lesquels l'amplitude  $f$  est définie soient régulièrement espacés, faisant apparaître une *période*, comme dans les cas (e) et (f) de la figure 9.1. Par ailleurs, l'on peut noter qu'un signal quantifié est tel qu'il existe toujours un intervalle minimal entre deux valeurs admissibles de l'amplitude  $f$ . Il est fréquent que tous les intervalles entre deux valeurs admissibles successives soient des multiples de cet intervalle minimal qui est alors appelé *quantum*.

**Remarque 9.1** *En toute rigueur, l'acception du mot « numérique » proposée ci-avant n'est pas tout à fait conforme au sens habituel que l'on en a. Un signal numérique est plus souvent vu comme un signal certes discret, mais pour lequel les valeurs définies de  $f$  sont régulièrement espacées dans le temps. De plus, son amplitude peut être codée de façon binaire et est alors manipulable par un calculateur, un ordinateur, etc.*

L'objet de ce chapitre est de s'intéresser aux signaux discrets et aux systèmes associés. Si les signaux continus sont assez bien modélisés par des fonctions

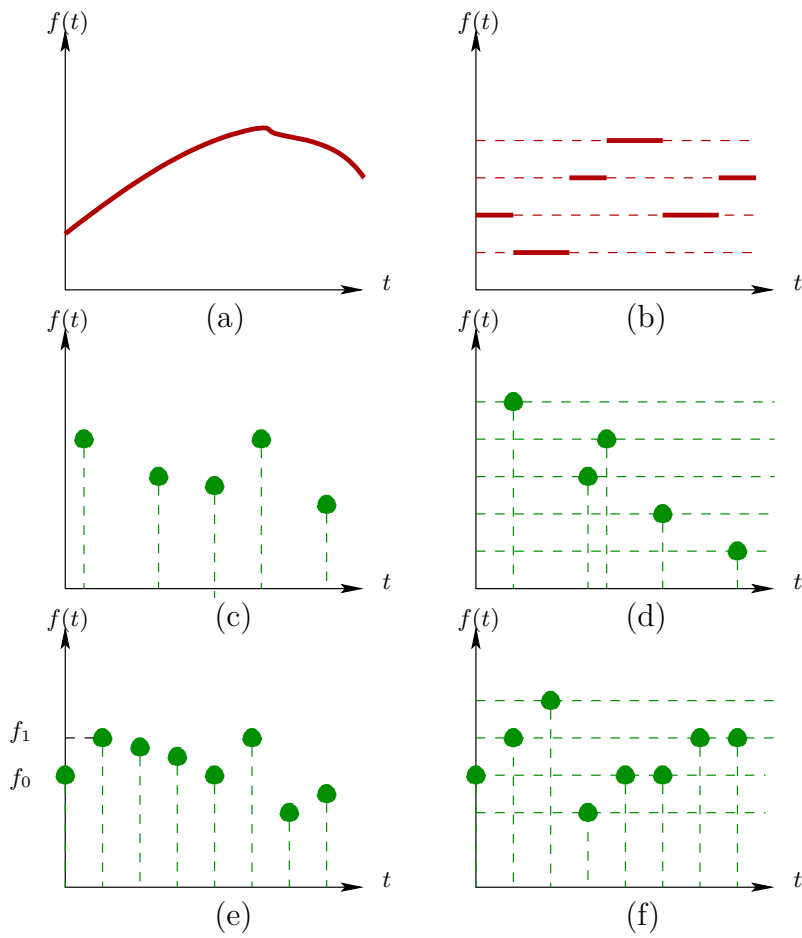


FIGURE 9.1 – Signaux continus et discrets

mathématiques, les signaux discrets, tels qu'ainsi présentés, le seraient plutôt par des distributions. Cependant, il est plus facile de s'affranchir du temps en définissant un signal discret par une suite de valeurs successives que l'on indice. Ainsi les valeurs  $f(t_0)$ ,  $f(t_1)$ , etc., en supposant que  $t_0$  est l'origine du temps, sont notées  $f_0$ ,  $f_1$  et appelées *échantillons* (voir figure 9.1.(e)). La séquence d'échantillons caractérisant le signal discret est notée  $\{f_k\}$ . L'indice  $k$  est alors un entier relatif qui peut, si on le souhaite, faire référence au temps. De façon formelle, un signal discret est donc défini par une suite et c'est souvent ainsi que les signaux discrets sont directement introduits dans de nombreux cours.

**Remarque 9.2** *Un modèle de signal discret sous forme d'une suite (séquence) d'échantillons est en réalité plus général qu'un modèle de signal à temps discret puisque la référence au temps n'est plus nécessaire. De fait, l'indice pourrait tout aussi bien se référer à une dimension spatiale ou tout autre chose. Il est donc possible de faire une nuance entre signaux discrets et signaux à temps discret même si cette nuance ne sera pas vraiment utile dans la suite de ce document. Cette nuance existe aussi entre signal continu et signal à temps continu. Dans la présent ouvrage, les signaux évoluent dans le temps.*

## 9.1.2. Transformation de signaux

### 9.1.2.1. Échantillonnage

Il est possible de transformer un signal continu en un signal discret. Ce processus est appelé *échantillonnage* ou *discrétisation*. Le signal est dit *discrétisé* ou *échantillonné*. Il est représenté sur la figure 9.2. En réalité, il sera vu par la suite qu'il convient parfois de rigoureusement distinguer échantillonnage et discrétisation (voir §9.3.4 page 493). Les instants d'échantillonnage ne sont pas nécessairement régulièrement espacés dans le temps. Toutefois, généralement, les échantillons sont « prélevés » à intervalles réguliers. La durée entre deux instants d'échantillonnage, notée  $T$  sur la figure 9.2, est alors appelée *période d'échantillonnage*. Dans ce paragraphe, on se contente de discuter d'un échantillonnage à période  $T$ . Dans un premier temps, l'*échantillonnage impulsionnel* est évoqué. Puis, une seconde partie introduit la notion d'*échantillonnage idéal*. Enfin, cet échantillonnage conduit dans une troisième partie à la notion de *transformée étoile*.

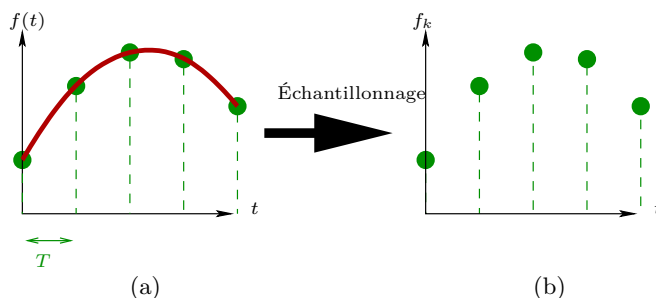


FIGURE 9.2 – Processus d'échantillonnage

### 9.1.2.1.1. Échantillonnage impulsif

Le symbole de Kronecker<sup>1</sup>  $\delta_{ij}$  est défini comme une suite doublement indexée dont les éléments ne peuvent prendre que deux valeurs :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (9.1)$$

Ainsi, chaque élément  $f_k$  d'une suite peut s'écrire, de manière volontairement un peu complexifiée,

$$f_k = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \delta_{kj} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \delta_{jk}, \quad (9.2)$$

même si cette expression n'a *a priori* en elle-même pas vraiment d'intérêt ici. Du reste, ce symbole de Kronecker n'est ici véritablement introduit que pour préciser certaines subtilités de vocabulaire pouvant générer la confusion. Sur le même principe que le symbole de Kronecker, l'*impulsion unitaire discrète*  $\{\delta_{\mathbf{a}_k}\}$  est définie, à partir du symbole de Kronecker, par

$$\delta_{\mathbf{a}_k} = \delta_{0k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases} \quad (9.3)$$

Lorsque l'on souhaite associer à un signal à temps continu  $f(t)$  une suite  $\{f_k\}$  selon le principe de la figure 9.2, il convient d'abord d'introduire une fonction

1. du nom du mathématicien et logicien allemand Leopold Kronecker (1823-1891).

temporelle appelée *impulsion unitaire*, ou par abus de langage, *fonction de Kronecker*, voire, de manière encore un peu plus abusive, *symbole de Kronecker*. Elle sera ici notée  $\delta_{\mathbf{d}}(t)$  et est définie tout naturellement par

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{d}} : \mathbb{R} &\rightarrow \{0; 1\} \\ t &\mapsto \delta_{\mathbf{d}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0, \\ 0 & \text{si } t \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.4)$$

Il s'agit donc de la description mathématique d'une impulsion instantanée d'amplitude 1 se produisant à l'instant 0. Si cette description s'inspire de celle du symbole de Kronecker, la définition corollaire de l'*impulsion unitaire retardée*, en est plus proche :

$$\delta_{\mathbf{d}}(t - \theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \theta \\ 0 & \text{si } t \neq \theta. \end{cases} \quad (9.5)$$

Soit maintenant le train d'impulsions unitaires distantes dans le temps de  $T$ , se produisant à partir de l'instant 0 sur un horizon infini de temps, et dessiné sur la figure 9.3.

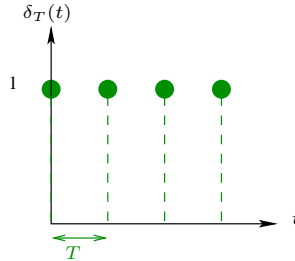


FIGURE 9.3 – Train d'impulsions unitaires discrètes

Du point de vue mathématique, ce train d'impulsions, noté  $\delta_T(t)$ , s'exprime

$$\delta_T(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\mathbf{d}}(t - kT). \quad (9.6)$$

Il en résulte qu'en s'inspirant de l'expression du signal discret  $\{f_k\}$  donnée en (9.2), il est possible d'exprimer le signal échantillonné de la figure 9.2 (ici

noté  $f_s(t)$  en fonction du temps :

$$f_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kt) \delta_{\mathbf{d}}(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \delta_{\mathbf{d}}(t - kT). \quad (9.7)$$

On peut associer cette transformation à celle d'une fonction continue en un train d'impulsions de largeur nulle. Puisque l'échantillonnage est ici supposé de période fixe, ces impulsions sont régulièrement espacées dans le temps. L'opération est symbolisée par l'« interrupteur » de la figure 9.4.

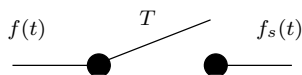


FIGURE 9.4 – Symbole de l'échantillonneur impulsionnel à période  $T$

Un tel échantillonnage n'est pas tout à fait réaliste puisqu'en pratique, une impulsion de durée nulle ne peut exister. Il n'en est pas moins vrai que l'opérateur mathématique associé a été défini et correspond assez bien à ce qui est souhaité dans un échantillonnage. Toutefois, il y a une différence entre l'échantillonnage tel qu'il est présenté ici et la discrétisation. Le signal échantillonné défini ici est  $f_s(t)$  ; il est continu. Le signal discret qui lui est associé est la suite  $\{f_k\}$  ; il est discret. Ils ne sont qu'associés l'un à l'autre. Cela vient du passage du symbole de Kronecker à l'impulsion unitaire. Le symbole de Kronecker est un signal discret (une suite) défini pour chaque indice  $k$ , alors que l'impulsion unitaire (fonction de Kronecker) est un signal continu défini pour tout  $t$ . Il en résulte que la différence entre  $f_s(t)$  et  $\{f_k\}$  est la suivante :  $f_s(t)$  vaut zéro presque à tout instant et prend la valeur  $f_k$  pour  $t = kT$  quel que soit  $k$ . Si chaque indice  $k$  est associé à l'instant  $kT$  (le signal est alors « à temps discret » et pas simplement discret), alors, grossièrement,  $f_s(t)$  vaut 0 là où son « équivalent » à temps n'est pas défini. Ces subtilités sont plus importantes qu'il n'y paraît, mais on pourra se contenter par la suite de dire que  $f_s(t)$  véhicule en lui l'information discrète, à savoir  $\{f_k\}$ . Réciproquement, la suite  $\{f_k\}$  contient les caractéristiques essentielles de  $f_s(t)$ .

Dans le paragraphe suivant, une autre forme d'échantillonnage encore moins réaliste (et pourtant utile) est présentée.

### 9.1.2.1.2. Échantillonnage impulsionnel idéal

Pour des raisons de cohérence mathématique, il est coutume d'introduire un opérateur mathématique appelé *échantillonneur idéal* qui consiste à voir ces impulsions comme des impulsions, non seulement instantanées (de largeur nulle) mais aussi d'amplitude infinie. Toutefois, pour que ces impulsions puissent véhiculer un tant soit peu une réalité physique, à savoir l'information présente au niveau du signal, il est souhaitable que l'intégration au cours du temps de chaque impulsion soit liée à la valeur  $f(kT)$  du signal  $f(t)$  à l'instant d'échantillonnage  $kT$  par la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\delta(\theta)d\theta = f(0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\delta(\theta - kT)d\theta = f(kT), \quad (9.8)$$

où  $\delta(t)$  n'est autre que l'impulsion de Dirac, et où, de ce fait,  $\delta(t - kT)$  est l'impulsion de Dirac<sup>2</sup> différée d'un temps  $kT$ . D'ordinaire, l'impulsion de Dirac est souvent vue comme une impulsion rectangulaire de durée  $h$  et d'amplitude  $\frac{1}{h}$  pour une valeur de  $h$  tendant vers 0. C'est donc une impulsion de largeur nulle, d'amplitude infinie et de surface 1. Parfois, on dit que la *force* de cette impulsion est de 1. Cependant, il faut noter que si l'équation (9.8) est vraie pour toute fonction  $f(t)$  continue en  $kT$ , elle peut être vue comme une alternative à la définition de l'impulsion de Dirac (en notant que l'intégrale doit être entendue au sens symbolique et non comme une intégrale ordinaire au sens de Riemann<sup>3</sup> ( $\delta(t)$  est alors dite *fonction généralisée*). Il est clair que la surface de l'impulsion de Dirac telle que la relation (9.8) conduit à la définir est, comme dans la définition usuelle, égale à 1. Il suffit, pour le voir, de choisir  $f(t) = 1$  dans l'équation. Par ailleurs, la transformée de Laplace de  $\delta(t)$  est bien toujours égale à 1 en choisissant  $f(t) = e^{-pt}$  dans (9.8). En effet,

$$\mathcal{L}(\delta)(p) = \int_{0-}^{\infty} \delta(\theta)e^{-p\theta}d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta)e^{-p\theta}d\theta = e^{0p} = 1. \quad (9.9)$$

Les autres propriétés de  $\delta(t)$  sont, entre autres,

2. du nom de Paul Adrien Maurice Dirac, physicien et mathématicien britannique (1902-1984).

3. du nom de Georg Friedrich Bernhard (ou seulement Bernhard) Riemann, mathématicien allemand (1826-1866).



$$\begin{cases} \delta(at) &= \frac{1}{|a|}\delta(t), \\ \delta(-t) &= \delta(t), \\ f(t)\delta(t-h) &= f(h)\delta(t-h). \end{cases} \quad (9.10)$$

Soit un train d'impulsions de Dirac se produisant à chaque instant d'échantillonnage  $kT$ , à partir de l'instant 0 et sur un horizon infini de temps. Un tel train d'impulsions est appelé *peigne de Dirac*<sup>4</sup>. Il est ici noté  $\mathbf{\square}_T(t)$  et est représenté sur la figure 9.5. Sur cette figure, on peut noter que chaque impulsion fait apparaître une flèche plutôt qu'un point. Il s'agit d'une notation graphique usuelle pour illustrer le fait que c'est la force des impulsions qui est unitaire et non leur amplitude.

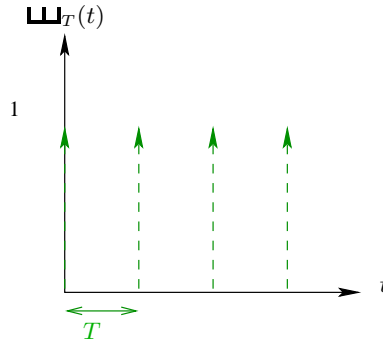


FIGURE 9.5 – Peigne de Dirac

L'échantillonnage idéal peut alors être défini comme la transformation du signal continu  $f(t)$  en un signal échantillonné noté  $f^*(t)$  s'exprimant

$$f^*(t) = f(t)\mathbf{\square}_T(t). \quad (9.11)$$

Compte tenu de la structure du peigne de Dirac, il vient

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT),$$

---

4. Normalement, le peigne de Dirac est défini de façon bilatérale et le train d'impulsions se prolonge pour  $t < 0$ . Ici il suffit de considérer un peigne *causal*, c-à-d. nul pour  $t < 0$ . C'est donc en toute rigueur le peigne de Dirac multiplié par la fonction de Heaviside (échelon unitaire).

qui, de par la troisième propriété donnée en (9.10), s'écrit

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT) = f_k\delta(t - kT), \quad (9.12)$$

en définissant  $f_k = f(kT)$  comme dans le paragraphe précédent. Cette opération est parfois appelée *transformation étoile temporelle*. L'opérateur associé sera noté  $\mathcal{T}^*$ , autrement dit

$$\mathcal{T}^*(f)(t) = f^*(t).$$

L'expression de  $f^*(t)$  est proche de celle de  $f_s(t)$  donnée en (9.7) page 471. Les impulsions unitaires discrètes ont été remplacées par des impulsions de Dirac. L'échantillonnage impulsionnel idéal est donc l'opération qui consiste à transformer  $f(t)$  en  $f^*(t)$ . Elle est symbolisée comme indiqué par la figure 9.6. Cette symbolisation est la même que pour l'échantillonneur impulsionnel de sorte que pour un même schéma, on peut raisonner avec un type d'échantillonnage ou l'autre, même si c'est l'échantillonnage idéal qui est généralement retenu.

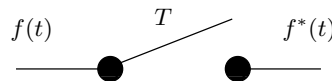


FIGURE 9.6 – Symbole de l'échantillonneur impulsionnel idéal à période  $T$

À l'instar de ce qui conclut le paragraphe précédent,  $f^*(t)$ , tout comme  $f_s(t)$ , est en fait un signal continu qui véhicule en lui l'information discrète, c'est-à-dire la suite  $\{f_k\}$  des échantillons. Il est donc associé au signal discret contenant l'information pertinente mais n'est rigoureusement pas lui-même le signal discret (voir §9.3.4 page 493 pour plus de détails).

### 9.1.2.1.3. Transformée de Laplace étoile

La transformée de Laplace de la transformée étoile temporelle, également appelée *transformée de Laplace étoile*, se définit simplement par

$$F^*(p) = \mathcal{L}(f^*)(p). \quad (9.13)$$

L'opérateur s'appliquant directement à  $f$  peut se noter  $\mathcal{L}^*$  de sorte que

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \circ \mathcal{F}^*$$

et

$$\mathcal{L}^*(f)(p) = F^*(p).$$

L'utilisation de l'expression (9.12) conduit à

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \mathcal{L}(\delta(t - kT)),$$

c'est-à-dire

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTp}. \quad (9.14)$$

**Remarque 9.3** Il doit être bien compris que le signal  $f^*(t)$  (ou  $F^*(p)$  dans le domaine de Laplace) est un signal (idéalement) échantillonné et l'ensemble des échantillons  $f(kT)$  est associé à  $\{f_k\}$ , la suite de valeurs  $f_k$ . Chaque  $f_k$  désigne aussi la force de l'impulsion idéale correspondante dans  $f^*(t)$ . Le signal  $f^*(t)$  n'existe pas. Il est simplement associé à  $\{f_k\}$ . Le terme échantillonnage idéal est donc mal choisi; celui d'échantillonnage fictif serait sans doute plus approprié. Néanmoins, la transformée de Laplace étoile peut se révéler utile lors de calculs de transferts de systèmes ou interviennent des signaux discrets et continus, comme il sera vu dans le paragraphe 9.1.2.3 page 476. pour calculer la fonction de transfert du bloqueur d'ordre zéro.

### 9.1.2.2. Quantification

On peut aussi envisager le passage d'un signal non quantifié à un signal quantifié. Il s'agit de la *quantification*. Ceci consiste, par exemple, à forcer les valeurs non admissibles de  $f(t)$  aux valeurs quantiques admissibles les plus proches. Ce processus est illustré pour un signal continu par la figure 9.7 (on peut aussi quantifier un signal discret).

Les valeurs admissibles d'un signal quantifié ne sont pas nécessairement régulièrement espacées. Toutefois, elles le sont généralement et l'écart minimal entre

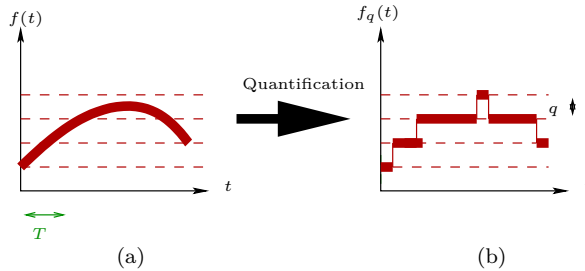


FIGURE 9.7 – Processus de quantification

deux valeurs, noté  $q$  sur la figure 9.7, est alors un quantum appelé *quantum de conversion*.

Il est possible de recourir à l'échantillonnage et à la quantification à la fois. On parle alors de *numérisation*.

### 9.1.2.3. Blocage

Il est possible de définir la transformation d'un signal discret en un signal continu. Le principe consiste à faire en sorte qu'entre deux échantillons, l'amplitude du signal  $f$  reste bloquée sur les valeurs d'une fonction mathématique. Cette transformation est ici appelée *blocage*. La technique de blocage la plus classique consiste, entre deux échantillons  $f_k$  et  $f_{k+1}$ , à bloquer la valeur du signal à  $f_k$ . Le dispositif assurant cette opération est formellement appelé *bloqueur d'ordre zéro*. L'effet d'un tel bloqueur est illustré par la figure 9.8 où l'on voit que le signal continu est alors un signal « en escalier ».

Si l'on interprète le bloqueur d'ordre zéro comme un modèle continu associé à la fonction de transfert  $B_0(p)$  et si l'on considère des échantillons  $f_k$  régulièrement espacés dans le temps d'une période  $T$  comme sur la figure 9.8, on peut déterminer cette fonction de transfert  $B_0(p)$  en analysant la réponse impulsionnelle de ce bloc (cf. figure 9.9).

La réponse d'un bloqueur d'ordre zéro à une impulsion de Dirac  $\delta(t)$  est la somme de deux échelons unitaires, le second étant retardé de  $T$  :

$$y(t) = \Gamma(t) - \Gamma(t - T). \quad (9.15)$$

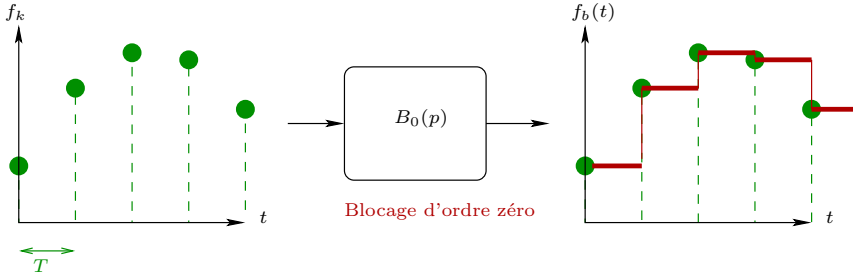


FIGURE 9.8 – Blocage d'ordre zéro

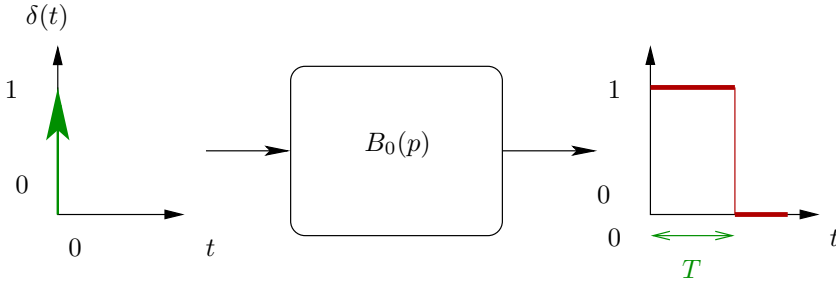


FIGURE 9.9 – Réponse impulsionnelle du bloqueur d'ordre zéro

( $\Gamma(t)$  représente l'échelon unitaire c.-à-d. la fonction de Heaviside<sup>5</sup>). En réalité, il ne s'agit pas là d'une impulsion de Dirac mais plutôt d'une *impulsion unitaire*  $\delta_d(t)$ , qui est appliquée au bloqueur. Toutefois, conformément au paragraphe 9.1.2.1.2 page 472, on peut supposer que cette impulsion est idéalement échantillonnée, c.-à-d. que l'on remplace  $\delta_d(t)$  par sa transformée temporelle étoile  $\delta_d^*(t) = \delta(t)$ . En d'autres termes, on considère dans ces chaînes de transmission d'information que les signaux échantillonnés le sont idéalement. Du point de vue formel, ce sont donc des impulsions de Dirac qui excitent le bloqueur. Ce dernier doit être modélisé dans ce même cadre formel. L'application de  $\mathcal{L}$  à l'équation (9.15) permet de déduire  $B_0(p)$  :

5. du nom d'Olivier Heaviside : voir biographie 2.2, page 41.

$$B_0(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-Tp}}{p} = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}. \quad (9.16)$$

De manière alternative, il est possible de voir le signal discret comme issue de l'échantillonnage idéal d'un signal continu de sorte que  $\{f_k\}$  est associé à un signal  $f^*(t)$  issu de l'échantillonnage de  $f(t)$  (cf. §9.1.2.1.2 page 472). Ainsi,  $f_b(t)$  étant le signal bloqué comme indiqué sur la figure 9.8, il vient

$$F_b(p) = \mathcal{L}(f_b(t)) = \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (f(kT)\Gamma(t - kT) - f(kT)\Gamma(t - (k+1)T))\right).$$

L'opérateur  $\mathcal{L}$  étant linéaire, il vient

$$F_b(p) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{L}(f(kT)\Gamma(t - kT)) - \mathcal{L}(f(kT)\Gamma(t - (k+1)T))).$$

Le théorème du retard (cf. §2.1.3 page 34) conduit à

$$\begin{aligned} F_b(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{f(kT)}{p} e^{-kTp} - \frac{f(kT)}{p} e^{-(k+1)Tp} \right) \\ &\Leftrightarrow F_b(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTp} \end{aligned}$$

qui se réécrit

$$F_b(p) = B_0(p)F^*(p).$$

La transmittance  $B_0(p)$  exprime donc bien, dans le domaine de Laplace, la relation entre  $f^*(t)$  et  $f_b(t)$ .

**Remarque 9.4** *Encore une fois, l'auteur se répète :  $B_0(p)$  est une fonction de transfert entre deux signaux ( $f^*(t)$  et  $f_b(t)$ ), vus sous l'angle des signaux continus, dont l'un est fictif, à savoir  $f^*(t)$ . Ce n'est donc pas la véritable fonction de transfert du bloqueur. C'est toutefois celle qu'il convient d'utiliser dans certains calculs dès lors que les signaux sont vus comme idéalement échantillonnés.*

Il est aussi possible d'envisager d'autres types de blocage tels que le blocage d'ordre 1, pour lequel le bloqueur utilise l'échantillon courant ainsi que le précédent pour bloquer l'amplitude  $f$  sur la droite définis par ces deux points, ou encore le blocage d'ordre 2, etc. On peut considérer toutes sortes d'interpolations plus ou moins sophistiquées à partir des échantillons. Ces cas de figure ne sont pas détaillés ici.

## 9.2. Systèmes discrets linéaires

Dans cette partie, un rappel est effectué sur la notion de système discret linéaire. Après une brève définition, deux catégories de modèles sont proposées : les modèles externes de transfert, c'est-à-dire l'équation récurrente et la fonction de transfert en  $z$ , puis le modèle interne, à savoir la représentation d'état. Un lien entre ces modèles est établi.

### 9.2.1. Définition

Un système discret est un système qui transforme une suite d'échantillons d'entrée  $\{u_k\}$  en une suite d'échantillons de sortie  $\{y_k\}$ , comme le montre la figure 9.10.

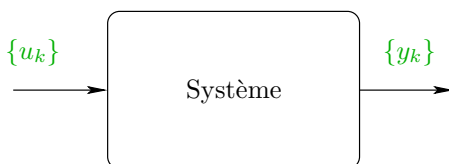


FIGURE 9.10 – Système discret

Un *système discret linéaire* est un système discret qui respecte le principe de superposition c'est-à-dire, à l'instar des modèles continus (cf. §1.2 page 3), qui vérifie

$$\begin{aligned} \{u_k\}_i &\Rightarrow \{y_k\}_i \quad \forall i \quad \Rightarrow \\ \{u_k\} &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i \{u_k\}_i) \Rightarrow \{y_k\} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \{y_k\}_i), \quad \{\alpha_i\} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (9.17)$$

En toute rigueur, la relation précédente doit rester valide lorsque  $n$  tend vers l'infini (cf. §1.2 page 3).

### 9.2.2. Modèles externes

Dans ce paragraphe, sont présentés deux modèles dits « externes », c'est-à-dire deux modèles de transfert qui proposent un lien direct entre la séquence d'entrée  $\{u_k\}$  et la séquence de sortie  $\{y_k\}$  sans préjuger des relations internes au système. Le premier modèle est l'équation récurrente. Le second est la fonction de transfert en  $z$ . Le lien entre ces deux modèles est obtenu grâce à la transformation en  $z$ .

#### 9.2.2.1. Premier modèle externe : l'équation récurrente

De même que le comportement d'un système continu peut-être caractérisé par une équation différentielle telle que (2.2) page 33, un système discret peut être modélisé par une *équation récurrente* impliquant l'entrée  $u$  et la sortie  $y$ , et qui prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \dots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = \\ b_m u_{k+m} + b_{m-1} u_{k+m-1} + \dots + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Cette équation récurrente est linéaire à coefficients constants. On peut donc parler, comme en continu, de systèmes discrets LTI (de l'anglais *linear time*



*invariant*, c.-à-d. linéaire invariant dans le temps).

Si l'on précise les conditions initiales sur  $\{u_k\}$  et  $\{y_k\}$  (à savoir  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_{m-1}$ ), le système est alors complètement défini.

L'équation récurrente est un modèle particulièrement indiqué pour une loi de commande car, dès lors que le système est *causal* ( $m \leq n$ ), elle constitue un algorithme très facilement implantable dans un processeur. En effet, si l'on connaît entièrement  $\{u_k\}$  ainsi que les conditions initiales, il est facile de faire reconstruire  $\{y_k\}$  par un ordinateur, selon une programmation séquentielle relativement basique.

### 9.2.2.2. Transformation en $z$

Soit une suite  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ( $k$  est positif ou nul (signal causal)). La transformation en  $z$  (opérateur symbolisé par  $\mathcal{Z}$ ) de  $\{f_k\}$  est définie par la série entière :

$$F(z) = \mathcal{Z}[\{f_k\}] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}. \quad (9.19)$$

L'image  $F(z)$  de  $\{f_k\}$  est appelée *transformée en  $z$*  de  $\{f_k\}$ . Les propriétés de l'opérateur  $\mathcal{Z}$  sont données en annexe E. L'opérateur  $\mathcal{Z}$  représente donc, pour les signaux discrets, ce que représente l'opérateur de Laplace  $\mathcal{L}$  pour les signaux continus. De même, la variable  $z \in \mathbb{C}$  représente, pour les signaux discrets, ce que la variable de Laplace  $p$  représente pour les signaux continus, quoique l'interprétation « fréquentielle » de  $z$  soit plus difficile à appréhender. Comme pour la transformation de Laplace, il est possible de calculer la transformée en  $z$  de fonctions usuelles. Un tableau de transformées est disponible en annexe E page 703.

Dans le cadre des signaux échantillonnés,  $\{f_k\}$  peut être associé à un signal idéalement échantillonné à une période  $T$ , noté  $f^*(t)$ . Si l'on compare l'expression de la transformée de Laplace de  $f^*(t)$  (c.-à-d. la transformée de Laplace étoile d'un hypothétique signal continu  $f(t)$  à échantillonner) donnée par (9.14) page 475 et l'expression de  $F(z)$ , la transformée en  $z$  du signal discret  $\{f_k\}$

donnée par (9.19), et en notant que  $f_k = f(kT)$ , on peut établir une relation simple entre les deux transformées :

$$F^*(p) = F(z)|_{z=e^{Tp}}. \quad (9.20)$$

On peut donc faire un lien mathématique direct entre la transformée de Laplace étoile d'un signal continu subissant un échantillonnage et la transformée en  $z$  du signal discret associé au même signal après échantillonnage. C'est une des raisons pour lesquelles il est pertinent de considérer l'échantillonnage idéal tel que défini au paragraphe 9.1.2.1.2 page 472 et la transformée de Laplace étoile, plutôt que de considérer un échantillonnage impulsionnel tel que défini au paragraphe 9.1.2.1.1 page 468.

La transformation en  $z$  est parfois attribuée à P. S. de Laplace<sup>6</sup> sous une forme sans doute moins aboutie et sans être nommée ainsi. Elle fut remise au goût du jour en 1947 par W. Hurewicz<sup>7</sup> pour résoudre certaines équations différentielles mais c'est surtout en 1952 qu'elle fut repopularisée par J. R. Ragazzini (voir biographie ci-après) et L. Zadeh<sup>8</sup>, dans le cadre de l'étude des systèmes échantillonnés et plus largement discrets, avant d'être quelque peu étendue par E. I. Jury<sup>9</sup>.

(Le lecteur intéressé trouvera quelques informations supplémentaires sur ces aspects pseudo-historiques, accompagnées de quelques références, au paragraphe 9.11 page 556).

---

6. voir biographie 2.1 page 40.

7. Witold Hurewicz, mathématicien polonais (1904-1956).

8. Lotfi Aliasker Zadeh (1921-2017), mathématicien et ingénieur d'origine azeri et russe, spécialiste d'électricité, d'informatique et d'intelligence artificielle, reconnu comme le père de la logique floue.

9. Eliahu Ibrahim Jury (1923-), ingénieur états-unien né à Bagdad, dont la contribution à l'automatique des systèmes discrets est particulièrement importante.

---

**Biographie 9.1** John Ralph Ragazzini (1912-1988) : *ingénieur électricien américain.*

Né à New York, il suivit de très brillantes études au City College of New York avant d'obtenir, en 1941, son doctorat de Génie Électrique à l'Université Columbia de Manhattan.

Sa carrière universitaire fut remarquable.

Il occupa notamment le poste de doyen de la School of Engineering and Science de l'Université de New York. Il fut aussi, durant la deuxième guerre mondiale, responsable du département de génie électrique de l'Université Columbia. À cette époque, il fut impliqué dans le projet Manhattan qui permit le développement de la bombe A. Parmi ses nombreux travaux, il est entre autres crédité de la transformation en  $z$  avec son élève Lotfi Zadeh (même si des



travaux antérieurs existaient sur le sujet). Son ampleur scientifique se traduit certainement aussi par la notoriété et le nombre de ses élèves parmi lesquels il convient de citer Lotfi Zadeh (père de la logique floue), Eliahu Jury (et son critère éponyme pour analyser la stabilité d'un système discret) et l'incourtable Rudolf Emil Kálmán (père de la représentation d'état, cf. annexe I.2 page 777). L'American Automatic Control Council (AACC) décerne aujourd'hui une récompense portant son nom, le Ragazzini Award, qui met en lumière les contributions à la formation en automatique. Ragazzini en fut le premier récipiendaire en 1979, plus tard succédé par, entre autres, Michael Athanassiades Athans<sup>10</sup>,

---

10. théoricien greco-états-unien de la commande (1937-).

Charles A. Desoer<sup>11</sup>, Gene F. Franklin<sup>12</sup>, Thomas Kailath<sup>13</sup>, Peter Dorato<sup>14</sup>, Katsuhiko Ogata<sup>15</sup>, Hassan K. Khalil<sup>16</sup>, Stephen Boyd<sup>17</sup>, etc., autant d'auteurs dont le lecteur aura peut-être l'occasion d'étudier les ouvrages et articles.

### 9.2.2.3. Second modèle externe : la fonction de transfert en $z$

De même que pour les signaux continus, on peut raisonner dans le domaine de Laplace, pour les signaux discrets, on peut raisonner dans le plan en  $z$ . Il s'agit alors tout simplement d'appliquer  $\mathcal{Z}$ , la transformation en  $z$ , à l'équation récurrente (9.18) page 480. Compte tenu des propriétés de  $\mathcal{Z}$  (cf. annexe E page 703), il vient :

$$\begin{aligned} & \underbrace{(a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n)}_{D(z)} Y(z) \\ & - \underbrace{(a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n)y_0 - \dots - a_nzy_{n-1}}_{I_1(z)} = \\ & \underbrace{(b_0 + b_1z + \dots + b_{m-1}z^{m-1} + b_mz^m)}_{N(z)} U(z) \\ & - \underbrace{(b_1z + \dots + b_{m-1}z^{m-1} + b_mz^m)u_0 - \dots - b_mzu_{m-1}}_{I_2(z)}, \end{aligned}$$

11. théoricien belge de la commande (1923-2010) ayant travaillé aux États-Unis.

12. ingénieur états-unien spécialiste de la commande (1927-2012) ayant produit de célèbres ouvrages didactiques.

13. ingénieur états-unien (1935-), théoricien de l'information et des systèmes, auteur d'une « bible » sur les systèmes linéaires et d'ouvrages célèbres sur l'estimation, le traitement du signal.

14. professeur états-unien en électricité et informatique, spécialiste de la commande (1932-2010).

15. professeur en ingénierie japonais (1925-), spécialiste de l'Automatique et auteur de nombreux ouvrages de référence sur le sujet qui ont largement inspiré l'auteur du présent document.

16. Professeur égyptien travaillant aux États-Unis, auteur d'un ouvrage de référence sur les systèmes non-linéaires.

17. professeur états-unien, spécialiste des systèmes, qui a œuvré à l'utilisation de l'optimisation convexe en analyse et commande des systèmes.

où  $N(z)$ ,  $D(z)$ ,  $I_1(z)$  et  $I_2(z)$  sont des polynômes en  $z$ . Ceci permet d'écrire l'expression de la transformée en  $z$  de  $\{y_k\}$  ainsi :

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)}U(z) + \frac{I_1(z)}{D(z)} - \frac{I_2(z)}{D(z)} = \frac{I(z)}{D(z)}U(z) + \frac{I_1(z)}{D(z)}$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \underbrace{\frac{N(z)}{D(z)}}_{G(z)} U(z) + \frac{I(z)}{D(z)}.$$

Sachant que le polynôme  $I(z) = I_1(z) - I_2(z)$  regroupe les conditions initiales, la *fonction de transfert* en  $z$  peut se définir par

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1z + \dots + b_{m-1}z^{m-1} + b_mz^m}{a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n}. \quad (9.21)$$

$G(z)$  est donc un modèle de comportement entrée-sortie qui caractérise le système indépendamment des conditions initiales (voir figure 9.11).

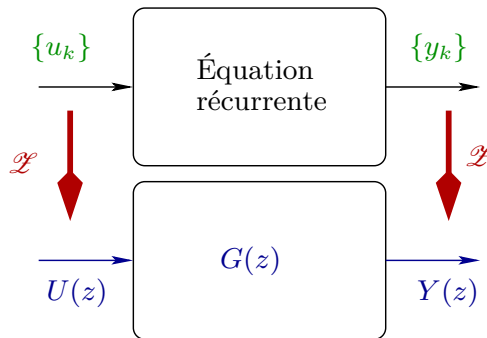


FIGURE 9.11 – Modélisation dans le plan en  $z$

Comme dans le cas d'une fonction de transfert en  $p$ , le dénominateur  $D(z)$  est appelé *polynôme caractéristique* et ses racines sont les *pôles* du système discret. De même, les racines de  $N(z)$  sont les *zéros* du système discret.

### 9.2.3. Modèle interne : la représentation d'état

Il s'agit d'exprimer le lien entre  $\{u_k\}$  et  $\{y_k\}$  en faisant intervenir des vecteurs intermédiaires internes au système discret représenté par la figure 9.10 page 479. Ces variables internes constituent le vecteur d'état  $x_k \in \mathbb{R}^n$  qui obéit à l'équation récurrente matricielle (évidemment linéaire) :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (9.22)$$

Il s'agit d'une *représentation d'état* du système discret qui est donc un modèle « interne » du système. Les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  portent le même nom que pour une représentation d'état continue et jouent le même rôle (cf. §3.2 page 70).

La représentation d'état d'un système discret n'est pas unique. Il suffit de changer le vecteur d'état  $x_k$  pour obtenir un autre modèle. Chaque choix correspond, comme en continu, à ce que l'on appelle une *réalisation*.

### 9.2.4. Lien entre les modèles

#### 9.2.4.1. D'une réalisation à l'autre

Tout d'abord, il faut noter qu'il est possible de passer d'une réalisation à une autre en utilisant une transformation de similarité, c'est-à-dire en opérant un changement de base dans l'espace d'état. Les règles sont les mêmes que pour les systèmes continus (cf. §3.7 page 88) et l'on peut ainsi, par exemple, obtenir des *réalisations compagnes* ou *diagonales*.

#### 9.2.4.2. De l'équation d'état à la fonction de transfert en $z$

Le procédé mathématique est le même qu'en continu si ce n'est que l'on utilise l'opérateur  $\mathcal{Z}$  plutôt que  $\mathcal{L}$  (cf. §3.6 page 87). Ainsi, la première équation récurrente de (9.22), par application de  $\mathcal{Z}$  pour des conditions initiales nulles, devient :

$$zX(z) = AX(X) + BU(Z) \Leftrightarrow (zI_n - A)X(z) = BU(z).$$

Sous réserve d'inversibilité de  $(zI_n - A)$ , en prenant en compte l'équation de sortie, il vient :

$$G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D. \quad (9.23)$$

$G(z)$  est définie pour toute valeur de  $z$  assurant l'inversibilité de  $(zI_n - A)$ . En réalité cette matrice est inversible pour tout  $z$  vérifiant

$$D(z) = \det(zI_n - A) \neq 0.$$

Ainsi, le polynôme caractéristique  $D(z)$ , comme en continu, se déduit de  $A$  et l'on peut écrire :

Les pôles de  $G(z)$  sont des valeurs propres de  $A$ .

Comme en continu, il est possible que certaines valeurs propres de  $A$  ne soient pas des pôles de  $G(z)$ . L'explication en est donnée au paragraphe 9.6.7 page 525.

### 9.2.4.3. De la fonction de transfert en $z$ à l'équation d'état

Il existe bien sûr différentes façons de procéder puisque la représentation d'état n'est pas unique. On peut obtenir, à partir de  $G(z)$ , des formes compages ou diagonales. Les méthodes de passage sont exactement les mêmes que pour les systèmes continus (cf. §3.5 page 80).

## 9.3. Systèmes échantillonnés

### 9.3.1. Pourquoi étudier les modèles discrets ? (notion de système échantillonné)

Il s'agit dans cette partie de justifier l'introduction d'un modèle discret pour des problèmes pratiques d'Automatique. En réalité, les procédés à commander sont

très rarement discrets mais plutôt continus. Alors pourquoi étudier un modèle discret ? Il existe plusieurs raisons mais la principale est que les progrès en informatique ont permis l'implantation, sur des calculateurs, de lois de commande de plus en plus sophistiquées. Toutefois, cette implantation se fait au format numérique ce qui suppose que le processus de commande (qui sera ici appelé *contrôleur* même s'il s'agit d'un anglicisme) manipule des signaux numériques (donc discrets). Si le procédé est un système continu et le contrôleur un système discret, il convient de prévoir une interface entre les deux, comme précisé sur la figure 9.12.

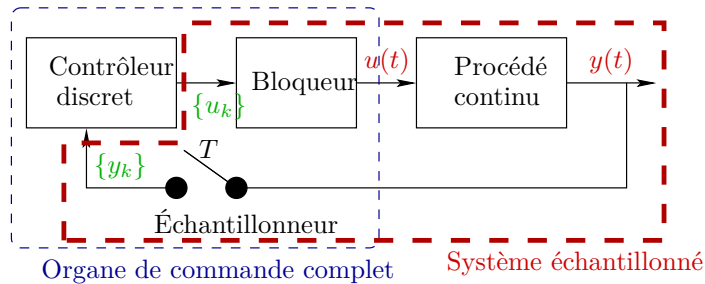


FIGURE 9.12 – Système continu discrétisé bouclé

Sur cette figure, les signaux  $u(t)$  et  $y(t)$  sont continus (éventuellement analogique pour  $u(t)$ ; forcément analogique pour  $y(t)$  si le procédé est linéaire); les signaux  $\{u_k\}$  et  $\{y_k\}$  sont discrets (éventuellement numériques). Bien que ce formalisme ne l'exige pas nécessairement, les signaux discrets sont ici supposés faire apparaître une période d'échantillonnage  $T$ .

Un système continu précédé d'un bloqueur et suivi d'un échantillonneur est un système discret particulier que l'on appelle *système échantillonné*.

**Remarque 9.5** À propos des systèmes échantillonnés et des systèmes bouclés, il est important de noter qu'un système échantillonné puis bouclé n'est pas équivalent au même système bouclé puis échantillonné.



### 9.3.2. Commande numérique

En pratique, le contrôleur (ou correcteur) discret est un organe informatique (par exemple un processeur) qui ne manipule, par essence, que des signaux numériques. Lorsque qu'un procédé est asservi par un tel organe, on parle de *commande numérique*<sup>18</sup>. Le principe en est résumé par la figure 9.13.

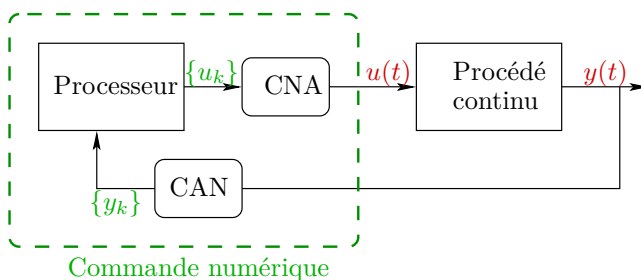


FIGURE 9.13 – Schéma de principe de la commande numérique

Dans ce cas, les signaux  $\{u_k\}$  et  $\{y_k\}$  sont numériques. Le signal  $y(t)$  est continu et même analogique si le procédé est linéaire. Quant au signal  $u(t)$ , il est continu mais quantifié (donc pas analogique).

Sur la figure apparaît un **CAN** (Convertisseur Analogique Numérique). Il joue le rôle d'échantillonneur mais aussi de quantificateur. Cette quantification est inhérente au codage des valeurs du signal  $y$  en binaire, codage qu'effectue le CAN. Ce dernier peut aussi parfois intégrer le capteur de mesure. De plus, le **CNA** (Convertisseur Numérique Analogique), qui porte mal son nom, intervient en fait comme bloqueur d'un signal numérique en un signal continu (non analogique!). Ce blocage est inhérent au décodage des valeurs binaires de  $\{u_k\}$  par le CNA.

Le processeur exécutant l'algorithme de commande est un contrôleur discret et même numérique car il reçoit un signal numérique  $\{y_k\}$  et restitue un signal numérique  $\{u_k\}$ .

18. À ne pas confondre avec les « machines à commande numérique » des ateliers de mécanique même si ces machines peuvent engendrer, dans leur conception, des problèmes de commande numérique au sens entendu ici.

Il faut noter que puisqu'un processeur est cadencé à une certaine fréquence, les signaux numériques font apparaître une période d'échantillonnage  $T$  qui dépend de la fréquence d'utilisation du processeur mais aussi des temps de conversion, des temps de mesures et du temps de calcul de la commande. En outre, le CAN implique un *quantum* de conversion  $q$  dont l'effet est sans doute parfois perceptible bien qu'il ne soit que très rarement considéré dans les cours sur les systèmes échantillonnés.

Quoi qu'il en soit, cette commande numérique n'est qu'un cas particulier de la commande discrète schématisée sur la figure 9.12. C'est pourquoi l'étude des modèles discrets, leur analyse et leur commande se révèlent utiles.

**Remarque 9.6** *Le CAN joue entre autres le rôle d'un échantillonneur impulsionnel. Mais il bloque aussi pour laisser à la conversion le temps de se faire. Ce blocage a un effet dynamique. Toutefois, on peut, en pratique et de manière formelle, associer ce CAN à un échantillonneur impulsionnel idéal (en oubliant le blocage) car c'est le fruit de l'échantillonnage qui est exploité. Dès lors,  $\{u_k\}$  et  $\{y_k\}$  doivent être respectivement associés à  $u^*(t)$  et  $y^*(t)$ .*

### 9.3.3. Échantillonnage et théorème de Shannon

On s'intéresse ici à l'effet de la conversion analogique numérique. Comme souvent dans l'étude des systèmes échantillonnés, l'effet de la quantification est négligé de sorte que la conversion se résume à l'échantillonnage (on vient de voir que le blocage du CAN pouvait être ignoré). Cette prise d'échantillons est assimilable à la modulation du signal continu de sortie  $y(t)$  par un un peigne de Dirac  $\mathbf{II}_T(t)$ , c'est-à-dire un train d'impulsions de Dirac distantes de  $T$ <sup>19</sup>. Ainsi, on construit un signal décrit par

$$y^*(t) = y(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT),$$

où  $T$  est toujours la période d'échantillonnage et  $\delta(\cdot)$  représente l'impulsion de Dirac. Il vient :

$$y^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \delta(t - kT),$$

19. Dans ce cas, le peigne de Dirac est considéré bilatéral c.-à-d. non causal (les impulsions courent aussi le long du demi-axe défini par  $t < 0$ ) mais cela ne change pas le principe.

où l'on voit apparaître les éléments  $y_k$  de la suite  $\{y_k\}$ , c'est-à-dire le véritable signal discret associé au signal échantillonné  $y^*(t)$ .

Il est absolument essentiel, pour que la commande numérique soit efficace, que la boucle ramène une information pertinente sur la dynamique du système. En d'autres termes, il est capital que le signal  $y^*(t)$  « capture » convenablement la dynamique de  $y(t)$  qui n'est autre que la dynamique du procédé continu lui-même. Ainsi, pour que les échantillons  $y_k$  soient représentatifs de cette dynamique, il convient de faire un choix judicieux de  $T$ . Une étude plus approfondie des signaux échantillonnés a conduit C. Shannon à affirmer :

**Théorème de Shannon strict**

La fréquence d'échantillonnage doit être strictement deux fois supérieure à la plus grande fréquence contenue dans le spectre de  $y(t)$ .

Cette assertion, parfois également appelée théorème de Nyquist-Shannon, est établie sur la base d'arguments théoriques rigoureux que le lecteur pourra trouver dans tout bon cours de traitement du signal. Mais la dite assertion n'est pas facilement applicable en pratique. En automatique, pour des cas concrets, on considère souvent une fréquence d'échantillonnage dix fois supérieure à la plus grande fréquence de cassure du modèle continu du procédé.

**Règle de Shannon pratique**

Règle de Shannon pratique La fréquence d'échantillonnage doit être au moins dix fois supérieure à la plus grande fréquence de cassure du modèle du procédé.

Il est bien sûr tentant d'échantillonner le plus rapidement possible pour que le modèle échantillonné se révèle le plus proche possible du modèle continu. Idéalement, une période nulle ( $T = 0$ ) ne trahit en rien la dynamique du système. Mais ceci est utopique. Il subsiste toujours un temps d'échantillonnage.

Bien que ce dernier soit modélisé selon une modulation par un peigne de Dirac, chaque échantillon n'est pas obtenu instantanément. Le CAN présente toujours un temps de conversion. Par ailleurs, il est nécessaire que le processeur dispose de temps pour exécuter l'algorithme et actualiser la commande  $u_k$  à chaque période. Il faut aussi que le CNA ait le temps de bloquer  $u_k$ . Enfin, certains capteurs de mesure, comme il a été vu, engendrent un temps de mesure qui conditionne très largement  $T$  (le cas typique, si ce n'est caricatural, en est la mesure d'un chimiste qui prélève un échantillon de produits dans le réacteur pour lui faire subir un autre processus chimique afin de revenir quelques heures plus tard muni des estimations des concentrations!). C'est pourquoi, malgré les progrès réalisés dans le domaine des circuits microélectroniques permettant des échantillonnages toujours plus rapides, il reste utile de formaliser un modèle échantillonné.

---

**Biographie 9.2** Claude Elwood Shannon (1916-2001) : *ingénieur électricien et mathématicien états-unien.*

*Il étudia le génie électrique à l'Université du Michigan avant d'intégrer le Massachusetts Institute of Technology (MIT) où, suivant, entre autres, les enseignements de N. Wiener<sup>20</sup>, il obtint un master en 1938, master dans lequel, illustrant ses aptitudes aux mathématiques, il appliqua l'algèbre booléenne à la conception de machines à relais, montrant par là même que la matérialisation électrique de l'algèbre de Boole<sup>21</sup>, par des relais ou tout autres équivalents plus modernes, pouvait résoudre tout problème logique (ah, les fameuses tables de vérité, leur simplification, etc.!).*



*Ce master fut considéré par certains comme le « master le plus brillant de tous les temps » (rien que ça !). En 1940, il décrocha son doctorat de mathématiques, toujours au MIT.*

*Il partagea sa carrière entre des activités académiques, notamment au MIT entre*

---

20. Norbert Wiener, mathématicien états-unien (1894-1964).

21. du nom du logicien, mathématicien et philosophe britannique Georges Boole (1815-1864).

1958 et 1978, et ses activités plus appliquées aux laboratoires Bell (1941-1972). Grandissant dans le culte de son héros Thomas Edison<sup>22</sup>, il était un bricoleur de génie, construisant chez lui de nombreux mécanismes amusants ou paradoxaux. En 1948 et 1949, Shannon présenta son schéma de principe de communication entre machines. Ce schéma fut vécu comme une révolution dans le monde des sciences de l'information et de la communication, à un tel point que Shannon est perçu comme le père de théorie de l'information, ce dont il se défendit.

Il fut aussi à l'origine, entre autres, de la notion d'entropie de l'information, toujours croissante, dont il montra l'analogie avec l'entropie définie en thermodynamique. Il s'illustra également en jetant certaines bases théoriques de codage, de compression (premier théorème de Shannon) et étudia la capacité d'un canal à transmettre le contenu d'une source d'information (second théorème de Shannon). Son œuvre est donc majeure et ce n'est que pour une petite part de cette dernière ayant trait à l'Automatique, le théorème de Nyquist-Shannon brièvement exposé ci-avant (Nyquist étant souvent oublié<sup>23</sup>), que cette biographie est retenue.

Shannon fut emporté par la maladie d'Alzheimer.

---

### 9.3.4. Signaux continu/échantillonné/discretisé : un bilan

Avant de voir comment on peut obtenir des modèles discrétisés à partir de modèles continus, il est utile de faire un bilan quelque peu formalisé du processus de discrétisation par échantillonnage. Si le lecteur est à son aise avec ces différentes notions, il peut se dispenser de la lecture de ce paragraphe. Si, au contraire, il se pose quelques questions de formalisme, c'est peut-être une occasion d'y voir un peu plus clair, du moins l'auteur l'espère. Ce n'est toutefois pas un cours rigoureux et complet sur le sujet.

À plusieurs reprises, notamment dans des remarques, une distinction a été faite entre signal échantillonné et signal discret. Si l'on considère l'échantillonnage comme un simple prélèvement de valeurs le long d'une courbe, ce qu'il devrait être en principe, ce n'est sans doute pas nécessaire de faire une telle distinction. Cependant, il a été vu que le formalisme mathématique conduisait à introduire

---

22. Thomas Alva Edison, célèbre inventeur et industriel états-unien (1847-1931), auquel on doit entre autres l'ampoule, et dont Shannon apprit plus tard qu'il était un cousin éloigné.

23. voir sa biographie 2.4 page 43.

l'échantillonnage impulsionnel idéal (cf. §9.1.2.1.2 page 472). Cette vision formelle de l'échantillonnage qu'est la transformée étoile  $\mathcal{T}^*$  n'est pas tout à fait l'échantillonnage tel qu'il était envisagé initialement. C'est pourtant elle qui est retenue en Automatique et donc, aussi, dans ce paragraphe. La distinction peut ainsi se révéler importante si l'on veut correctement associer le formalisme mathématique aux différents concepts. Pour cela, on s'aide ici de la figure 9.14.

Dans cette figure, il peut être vu que  $f(t)$ , le signal continu (c.-à-d. à *temps continu*) est échantillonné en lui appliquant la transformation étoile  $\mathcal{T}^*$ . Le résultat de cette transformation est donc un signal échantillonné  $f^*(t)$ . La figure fait apparaître ces deux signaux comme continus. En effet, comme on l'a vu précédemment, le signal  $f^*(t)$  est lui aussi à temps continu puisqu'il est aussi défini, certes égal à 0 mais bel et bien défini, en dehors des instants d'échantillonnage. La véritable discrétisation se fait en associant les forces des impulsions de Dirac contenues dans  $f^*(t)$ , à savoir les valeurs  $f(kT)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , aux éléments  $f_k = f(kT)$  d'une suite  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Cette suite est le véritable signal discret qui, chaque indice  $k$  correspondant à un temps  $t = kT$ , est un signal à *temps discret*. L'opération qui à  $f^*(t)$  associe  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est notée  $\mathcal{X}$ . La discrétisation complète, ici notée  $\mathcal{D}$ , est donc vue comme un échantillonnage idéal suivi de  $\mathcal{X}$  :

$$\mathcal{D} = \mathcal{X} \circ \mathcal{T}^*.$$

Les signaux  $f(t)$ ,  $f^*(t)$ , et  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  sont exprimés dans le domaine « temporel » (dès lors que  $t \in \mathbb{R}$  et l'indice  $k \in \mathbb{N}$  sont vus comme des temps). C'est la partie gauche de la figure 9.14. Ils peuvent aussi être exprimés dans le domaine « fréquentiel » comme l'illustre la partie droite de la figure. Cette partie montre que l'application de la transformation de Laplace  $\mathcal{L}$  au signal continu initial  $f(t)$  conduit à la transformée  $F(p)$ , de même que le signal échantillonné  $f^*(t)$  a pour image, par cette même transformation  $\mathcal{L}$ , le signal  $F^*(p)$ . On a vu par ailleurs au paragraphe 9.1.2.1.3 page 474 que le passage direct de  $f(t)$  à  $F^*(p)$  est noté  $\mathcal{L}^*$  et appelé transformation de Laplace étoile :  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \circ \mathcal{T}^*$ . Sur la figure, apparaît aussi une transformation, notée  $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}^*$ , qui fait passer de  $F(p)$  à  $F^*(p)$ . C'est en fait l'équivalent de  $\mathcal{T}^*$  vu dans le domaine fréquentiel. Il est possible d'exprimer cet opérateur. En temporel, la transformation  $\mathcal{T}^*$  est une multiplication par le peigne de Dirac  $\mathbf{II}_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$ . La transformation de Laplace de ce peigne est

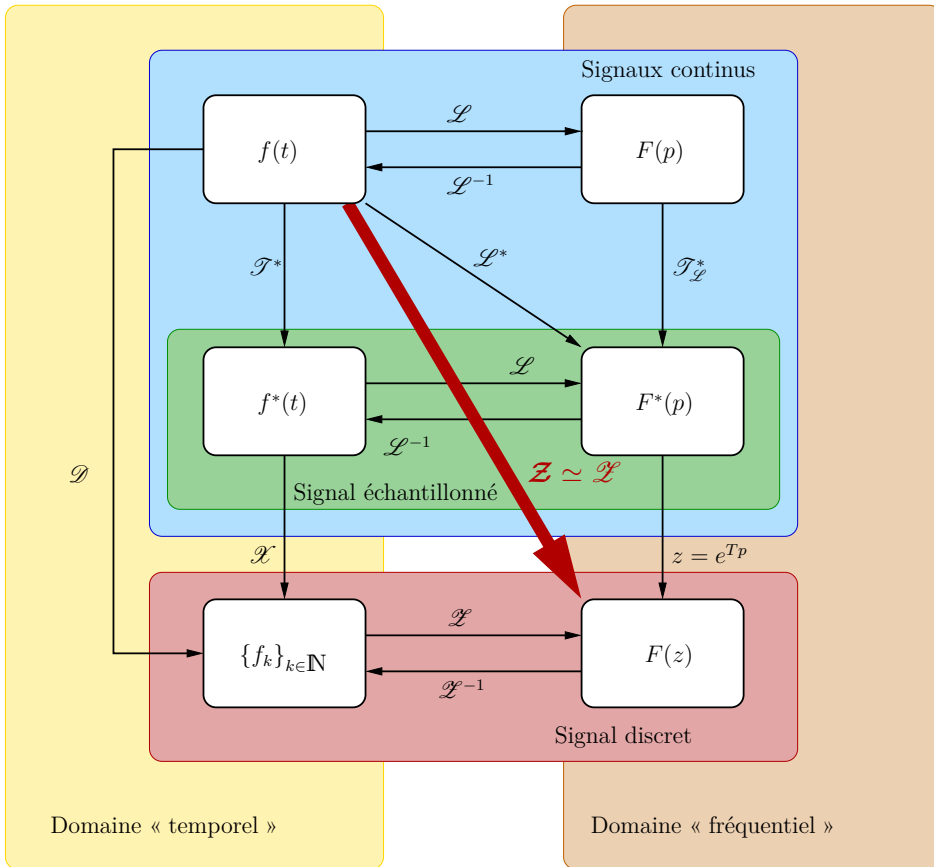


FIGURE 9.14 – Transformations mathématiques associées au processus d'échantillonnage et de discrétisation

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{\square}_T)(p) &= \int_0^\infty \mathbf{\square}_T(t) e^{-pt} dt \\
\Leftrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{\square}_T)(p) &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \delta(t - kT) dt \\
\Leftrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{\square}_T)(p) &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty \delta(t - kT) dt = \sum_{k=0}^\infty \mathcal{L}(\delta(t - kT))
\end{aligned}$$

Compte tenu des propriétés de  $\mathcal{L}$  (cf. §2.1.3 page 34), il vient

$$\mathcal{L}(\mathbf{\square}_T)(p) = \sum_{k=0}^\infty e^{-kTp}. \quad (9.24)$$

que l'on peut noter abusivement  $\mathbf{\square}(p)$ . En effet, on peut montrer que si l'on pose  $p = 2i\pi f$ ,  $f$  étant ici la fréquence, cette série correspond à un train d'impulsions de Dirac en fréquence. Quoi qu'il en soit, puisque  $f^*(t)$  est le produit de  $f(t)$  et de  $\mathbf{\square}_T(t)$ , la propriété sur la transformée de Laplace du produit donnée au paragraphe 2.1.3 page 34 conduit à

$$\begin{aligned}
F^*(p) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\gamma - i\beta}^{\gamma + i\beta} F(\sigma) \mathbf{\square}(p - \sigma) d\sigma \\
\Leftrightarrow F^*(p) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\gamma - i\beta}^{\gamma + i\beta} F(\sigma) \sum_{k=0}^\infty e^{-kT(p - \sigma)} d\sigma \\
\Leftrightarrow F^*(p) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\gamma - i\beta}^{\gamma + i\beta} F(\sigma) \sum_{k=0}^\infty e^{-kTp} e^{kT\sigma} d\sigma.
\end{aligned}$$

En procédant au changement de variable  $s = k\sigma$  dans l'intégrale, il vient

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^\infty e^{-kTp} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\gamma - i\beta}^{\gamma + i\beta} \frac{1}{k} F\left(\frac{s}{k}\right) e^{kTs} ds}_{f(kT)},$$

où l'on voit apparaître la transformée de Laplace inverse de  $f(kt)$  (encore une fois, voir §2.1.3 page 34). On a donc

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^\infty f(kT) e^{-kTp} = \sum_{k=0}^\infty f_k e^{-kTp}.$$



C'est bien l'expression (9.14) de  $F^*(p)$  obtenue au paragraphe 9.1.2.1.3 page 474. On peut donc confirmer sans surprise que

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \circ \mathcal{F}^* = \mathcal{F}_z^* \circ \mathcal{L}.$$

Le signal discret (ou à temps discret)  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  a une image  $F(z)$  dans le domaine « fréquentiel », ce en appliquant la transformation en  $z$ . Il a été vu en (9.20) page 482 que  $F(z)$  pouvait aussi s'obtenir directement à partir de  $F^*(p)$  en posant  $z = e^{Tp}$ . La figure 9.14 rappelle ce passage.

Si, maintenant, on s'intéresse au passage direct du signal continu exprimé dans le domaine temporel (à savoir  $f(t)$ ) au signal discret exprimé dans le domaine en  $z$  (à savoir  $F(z)$ ), et que l'on note cette transformation globale

$$\mathcal{Z} = \mathcal{L} \circ \mathcal{X} \circ \mathcal{F}^* = \mathcal{L} \circ \mathcal{D},$$

alors il est facile de voir que cette transformation s'exprime simplement :

$$F(z) = \mathcal{Z}(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}.$$

Cette expression est très proche de l'expression de  $F(z)$  issue de  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , donnée en (9.19) page 481, et rappelée ci-après :

$$F(z) = \mathcal{L}(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}.$$

Les deux expressions sont en réalité les mêmes dès lors qu'on se souvient que  $f(kT)$  n'est autre que  $f_k$ . C'est pourquoi, pas abus de notation, on note souvent  $\mathcal{L}$  en lieu et place de  $\mathcal{Z}$ . Il y a toutefois une différence entre les deux opérateurs puisque  $\mathcal{L}$  transforme un signal discret en un signal également discret mais exprimé en  $z$  alors que  $\mathcal{Z}$  transforme un signal continu exprimé en  $t$  en un signal discret exprimé en  $z$ . Ce n'est mathématiquement pas la même chose. Pour se convaincre que ce n'est pas équivalent, il faut penser à la transformation inverse. L'expression de  $F(z)$  permet de reconstruire  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  (ceci revient à appliquer  $\mathcal{L}^{-1}$ ) mais ne permet pas de retrouver  $f(t)$  puisqu'elle n'apporte pas d'information sur  $f(t)$  en dehors des instants d'échantillonnage.  $\mathcal{Z}^{-1}$  n'existe pas et ne peut donc être égale à  $\mathcal{L}^{-1}$ . C'est donc que rigoureusement  $\mathcal{L} \neq \mathcal{Z}$ . Il faut en être conscient même si l'abus de notation n'est pas un souci. On le

commettra par la suite pour des signaux, comme pour des transferts.

Toutes les subtilités de ce paragraphe ne sont pas absolument nécessaires à la compréhension de la suite du chapitre mais l'auteur espère que le lecteur y aura trouvé quelques éclaircissements. Pour compléter sa compréhension, le lecteur peut consulter un bon ouvrage de traitement du signal où il pourra notamment peaufiner la vision fréquentielle des signaux et les subtilités du théorème de Nyquist-Shannon, de la transformation de Fourier (continue ou discrète)<sup>24</sup>.

### 9.3.5. Obtention d'un modèle échantillonné

Dans ce paragraphe, un modèle de système échantillonné est proposé. L'hypothèse d'un bloqueur d'ordre zéro est retenue de sorte que le système échantillonné est celui représenté sur la figure 9.15. Les signaux discrets sont associés à des signaux idéalement échantillonnés donc l'échantillonneur est idéal.

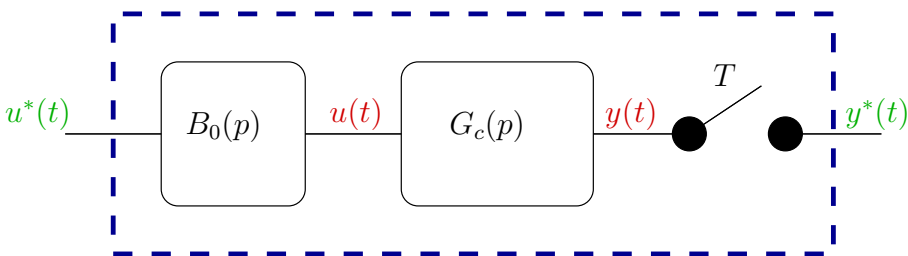


FIGURE 9.15 – Système échantillonné à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro

Une première partie introduit la notion de fonction de transfert étoile ce qui permet de rappeler brièvement dans la seconde partie un résultat concernant la fonction de transfert discrète  $G(z)$  du système discret qui transforme  $\{u_k\}$  en  $\{y_k\}$ . Une troisième partie détaille un peu plus l'obtention du modèle d'état.

#### 9.3.5.1. Fonction de transfert étoile

Les signaux idéalement échantillonnés ont été introduits au paragraphe 9.1.2.1 page 468. Ils n'ont pas vraiment de réalité physique mais peuvent être associés à

<sup>24</sup>. du nom du Baron Joseph (ou Jean Baptiste Joseph) Fourier, mathématicien et physicien français (1768-1830).

des signaux discrets (suites mathématiques). Donc si un système échantillonné associé à une fonction de transfert  $G(z)$  transforme un signal discret  $\{u_k\}$  en un signal  $\{y_k\}$  (de transformées en  $z$  respectives  $U(z)$  et  $Y(z)$ ), alors il naturel d'introduire une *fonction de transfert étoile*  $G^*(p)$  qui permet de transformer le signal idéalement échantillonné  $u^*(t)$  en le signal idéalement échantillonné  $y^*(t)$  (de transformées de Laplace respectives  $U^*(p)$  et  $Y^*(p)$ ). Compte tenu de la relation (9.20) page 482, il vient

$$Y^*(p) = Y(z)|_{z=e^{Tp}} = [G(z)U(z)]|_{z=e^{Tp}} = G(z)|_{z=e^{Tp}}U(z)|_{z=e^{Tp}}$$

$$\Leftrightarrow Y^*(p) = G(z)|_{z=e^{Tp}}U^*(p),$$

qui se résume à :

$$G^*(p) = G(z)|_{z=e^{Tp}}. \quad (9.25)$$

Une telle fonction de transfert entre signaux idéalement échantillonnés ne peut se concevoir que dans le cadre des systèmes échantillonnés mais non dans celui des systèmes purement discrets.

### 9.3.5.2. Calcul de $G(z)$

Puisque le bloqueur d'ordre zéro peut être vu comme un modèle continu dont la fonction de transfert  $B_0(p)$  est donnée en (9.16) page 478, il est possible d'appliquer la formule :

$$G(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}(B_0(p)G_c(p))]. \quad (9.26)$$

Cependant, il existe aussi un résultat fondamental<sup>25</sup> :

<sup>25</sup>. Dans ces deux formules,  $\mathcal{L}$  devrait rigoureusement être remplacé par  $\mathcal{Z}$  : cf. §9.3.4 page 493.

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{L} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{G_c(p)}{p} \right) \right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{L} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{G_c(p)}{p} \right) \right]. \quad (9.27)$$

Ce résultat peut être justifié. En effet,

$$L(p) = B_0(p)G_c(p) = \underbrace{\frac{G_c(p)}{p}}_{\bar{G}(p)} \underbrace{(1 - e^{Tp})}_{B^*(p)} = \bar{G}(p)B^*(p).$$

On fait ici apparaître une fonction de  $e^{Tp}$  qui peut être assimilée à une transformée étoile. La transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle de  $L(p)$  s'écrit

$$Y(p) = L(p)\mathcal{L}[\delta](p) = L(p) = \bar{G}(p)B^*(p), \quad (9.28)$$

puisque la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est égale à 1. En appliquant  $\mathcal{L}^{-1}$  pour retrouver la réponse impulsionnelle de  $L(p)$  exprimée dans le domaine temporel, on peut écrire

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[L](t) = \int_0^t \bar{g}(t - \theta)b^*(\theta)d\theta,$$

où  $\bar{g}(t)$  et  $b^*(t)$  désignent les transformées de Laplace inverses respectives de  $\bar{G}(p)$  et  $B^*(p)$ . En se remémorant la définition de la transformée étoile temporelle donnée par (9.12) page 474, il vient

$$y(t) = \int_0^t \bar{g}(t - \theta) \sum_{j=0}^{\infty} b(\theta)\delta(\theta - jT)d\theta.$$

L'expression de  $y(t)$  devient

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \bar{g}(t - \theta)b(\theta)\delta(\theta - jT)d\theta \\ \Leftrightarrow y(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \bar{g}(t - jT)b(jT), \end{aligned}$$

puisque l'impulsion de Dirac  $\delta(\theta - jT)$  est nulle partout ailleurs qu'en  $\theta = jT$  et qu'en cet argument, son intégrale vaut 1. Si l'on applique la transformée en  $z$ , il vient

$$Y(z) = \mathcal{L}[y(t)] = \sum_{h=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \bar{g}(t - jT)b(jT) \right) z^{-h}.$$

En notant que tout retard temporel de  $j$  périodes se traduit dans le domaine en  $z$  par une multiplication par  $z^{-j}$  (cf. §E.3 en annexe, page 706), il vient

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{g}(hT)b(jT)z^{-(h+j)} \\ \Leftrightarrow Y(z) &= \sum_{h=0}^{\infty} \bar{g}(hT)z^{-h} \sum_{j=0}^{\infty} b(jT)z^{-j} = \underbrace{\mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}(\bar{G}(p))]}_{G(z)} \underbrace{\mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}(B^*(p))]}_{B(z)} \\ &\Leftrightarrow Y(z) = \bar{G}(z)B(z) = B(z)\bar{G}(z). \end{aligned} \tag{9.29}$$

Le facteur  $B(z)$  se calcule aisément à partir de  $B^*(p)$  en utilisant la relation (9.20) page 482 et l'on obtient

$$\begin{aligned} B(z) &= (1 - z^{-1}) \\ \Rightarrow Y(z) &= (1 - z^{-1})\mathcal{L} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G_c(p)}{p} \right] \right]. \end{aligned}$$

Si  $y(t)$  est la réponse à  $\delta(t)$ , alors, puisque  $\delta(t) = \delta_d^*(t)$ , il en résulte que  $Y(z)$  est la réponse, exprimée dans le domaine en  $z$ , à l'impulsion discrète unitaire  $\delta_d^*(t)$  dont la transformée en  $z$  est égale à 1, de sorte que

$$Y(z) = G(z)$$

et la formule (9.27) est recouvrée.

**Remarque 9.7** D'après l'équation (9.28), il est aisé de voir que  $Y^*(p) = L^*(p) = [\bar{G}(p)B^*(p)]^*$ . Par ailleurs, la relation (9.20) appliquée à l'équation (9.29) montre que  $Y^*(p) = \bar{G}^*(p)B^*(p)$ . Il s'agit là d'une propriété de la transformée de Laplace étoile :

$$[A(p)B^*(p)]^* = A^*(p)B^*(p). \tag{9.30}$$

En revanche,  $[A(p)B(p)]^* \neq A^*(p)B^*(p)$ .

Exemple :

Soit la fonction de transfert continue :

$$G_c(p) = \frac{1}{p(p+2)} \quad (9.31)$$

La fonction de transfert en  $z$  de ce procédé échantillonné à  $T = 1s$  se calcule par

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1-e^p}{p} \frac{1}{p(p+2)} \right) \right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{p^2(p+2)} \right) \right] \\ &\Leftrightarrow G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{0,5}{p^2} - \frac{0,25}{p} + \frac{0,25}{p+2} \right) \right], \end{aligned}$$

(après décomposition en éléments simples) soit, en utilisant les tableaux donnés en annexe E page 703,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow G(z) &= \frac{z-1}{z} \left[ \frac{0,5z}{(z-1)^2} - \frac{0,25z}{z-1} + \frac{0,25z}{z-0,1353} \right] \\ &\Leftrightarrow G(z) = \frac{0,2838z + 0,1485}{(z-1)(z-0,1353)}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

### 9.3.5.3. Modèle d'état

On suppose que le procédé continu de fonction de transfert  $G_c(p)$  apparaissant sur la figure 9.15 page 498 est représenté par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) = C_c x(t) + D_c u(t) \end{cases} \quad (9.33)$$

Pour une condition initiale  $x_0$  sur l'état, la solution de l'équation ci-dessus se déduit de la relation (4.14) page 171. En outre, si l'on applique cette relation sur l'horizon  $[kT; (k+1)T]$ , alors le bloqueur d'ordre zéro maintient le signal d'entrée à  $u(t) = u_k$ ,  $x_0$  devient  $x_k$  et l'état final est  $x_{k+1}$ . On obtient :

$$x_{k+1} = e^{A_c T} x_k + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_c((k+1)T-\tau)} B_c u_k d\tau,$$

ce qui, en opérant le changement de variable d'intégration  $\alpha = (k+1)T - \tau$ , devient

$$x_{k+1} = e^{A_c T} x_k + \left( \int_0^T e^{A_c \alpha} d\alpha \right) B_c u_k. \quad (9.34)$$

De plus, l'équation de sortie est vérifiée à tout instant, donc en particulier lorsque  $t = kT$ . De fait il vient

$$y_k = C_c x_k + D_c u_k. \quad (9.35)$$

(Ceci traduit simplement le fait que  $\mathcal{Z}$  est un opérateur linéaire). L'identification de (9.34) et (9.35) d'une part, avec (9.22) page 486 d'autre part, permet de déduire les formules d'échantillonnage suivantes :

$$\begin{aligned} A &= e^{A_c T} \quad ; \quad B = \int_0^T e^{A_c \alpha} B_c d\alpha ; \\ C &= C_c \quad ; \quad D = D_c. \end{aligned} \quad (9.36)$$

**Remarque 9.8** Si la matrice dynamique  $A_c$  est non singulière, il est possible de calculer la matrice  $B$  en utilisant une relation plus simple :

$$B = A_c^{-1} (e^{A_c T} - I) B_c. \quad (9.37)$$

Il est important de noter que la relation unissant  $A_c$  à  $A$  se vérifie aussi sur les valeurs propres de ces dernières.

$$\begin{aligned} \lambda_i \text{ valeurs propres de } A_c, \quad i = 1, \dots, n \\ \Updownarrow \\ \mu_i = e^{\lambda_i T} \text{ valeurs propres de } A, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Exemple :

On reprend l'exemple du paragraphe 9.3.5.2 page 499. Une réalisation compagne verticale est donnée par

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c x + B_c u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = C_c x = [1 \ 0] x. \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer une réalisation pour le système échantillonné associé. En utilisant (9.36), il est facile de voir que  $C = C_c$  et  $D = 0$ . Pour une période d'échantillonnage  $T$ , (9.36) conduit à

$$A = e^{A_c T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

et

$$B = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2\alpha}) \\ 0 & e^{-2\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( T + \frac{e^{-2T} - 1}{2} \right) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}.$$

Si l'on prend  $T = 1s$ , il vient :

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0,4323 & 0,2838 \\ 0 & 0,1353 & 0,4323 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

En appliquant la formule (9.23), on retrouve l'expression de  $G(z)$  donnée en (9.32).

## 9.4. Réponse d'un système discret

Cette partie s'intéresse à la réponse des systèmes discrets. Bien que cette réponse puisse être obtenue en partant d'un modèle externe (équation récurrente ou fonction de transfert en  $z$ ), ce document se focalise sur le modèle interne, à savoir l'équation d'état.

Trois sous parties sont considérées. La première établit la réponse temporelle d'un système discret, dans sa forme générale, en résolvant l'équation d'état. La deuxième se concentre sur le cas spécifique des systèmes échantillonnés. Une troisième partie introduit la notion de modes d'un système discret.



### 9.4.1. Réponse du modèle d'état

#### 9.4.1.1. Résolution de l'équation d'état

Il est facile de voir, pour un état initial  $x_0$ , que l'application de (9.22) page 486 conduit à

$$x_1 = Ax_0 + Bu_0,$$

puis

$$x_2 = Ax_1 + Bu_1 = A(Ax_0 + Bu_0) + Bu_1 = A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1.$$

La logique de cette récurrence conduit à écrire

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u_j. \quad (9.38)$$

En utilisant l'équation de sortie, la réponse d'un modèle discret est donnée par

$$y_k = CA^k x_0 + C \sum_{j=0}^{k-1} (A^{k-j-1} B u_j) + D u_k. \quad (9.39)$$

On voit clairement que, dans cette réponse, la matrice  $A$  est élevée à différentes puissances. Il est donc essentiel de pouvoir calculer  $A^k$ .

#### 9.4.1.2. Les principaux types de réponse

Si la réponse fréquentielle d'un système discret peut être définie, elle est quelque peu difficile à interpréter par rapport à celle d'un système continu. En revanche, il est assez facile d'appréhender les réponses impulsionnelle et indicielle.

##### 9.4.1.2.1. Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle du modèle discret (9.22) page 486 est la réponse à une impulsion unitaire telle que définie en (9.3) page 469. La transformée en  $z$  de cette impulsion unitaire discrète étant égale à 1, il s'ensuit que la réponse est donnée par

$$\{y_k\} = \mathcal{Z}^{-1}(G(z)). \quad (9.40)$$

Mais puisqu'il est question de représentation d'état dans ce document, la réponse peut aussi s'exprimer en fonction de la réalisation  $(A, B, C, D)$  :

$$y_k = CA^k x_0 + CA^{k-1} B \quad \text{et} \quad y_0 = Cx_0 + D. \quad (9.41)$$

#### 9.4.1.2.2. Réponse indicielle

La réponse indicielle se définit quant à elle comme la réponse à un signal discret associé à un train d'impulsions unitaires causal tel que celui défini en (9.6) page 470. Ce signal est un échelon unitaire discret qui vérifie  $u_k = 1 \forall k \in \mathbb{N}$ . La transformée en  $z$  de cet échelon est  $\frac{z}{z-1}$  (cf. tableau donné en annexe au paragraphe E.3, page 706) ce qui permet d'écrire

$$\{y_k\} = \mathcal{Z}^{-1} \left( \frac{zG(z)}{z-1} \right). \quad (9.42)$$

Si l'on s'en tient à l'expression de cette réponse en fonction de  $(A, B, C, D)$ , il vient

$$y_k = CA^k x_0 + C \sum_{j=0}^{k-1} (A^{k-j-1} B) + D. \quad (9.43)$$

#### 9.4.1.3. Calcul de $A^k$

Ce paragraphe fait écho au paragraphe 4.3 page 172. Trois méthodes sont ici proposées :

- **Calcul direct** : il s'agit tout simplement d'enchaîner de façon récurrente de calcul de  $A^0 = I$ ,  $A$ ,  $A^2 = A.A$ ,  $A^3 = A^2.A$ , etc., jusqu'à  $A^k = A^{k-1}.A$ . Pour simplifier ce calcul, il est possible de s'aider du théorème de Cayley-Hamilton, comme il est expliqué au paragraphe 4.3.1 page 172.
- **Méthode modale** : il s'agit de passer par la forme canonique de Jordan. Ainsi, si  $M$  est telle que  $A = MJM^{-1}$ , où  $J$  est une matrice de Jordan, il est facile de vérifier que  $A^k = MJ^kM$ . Une fois  $M$  déterminée, il faut calculer  $J^k$  et déduire  $A^k$ . Pour un bloc diagonal de  $J$ , on a

$$\begin{bmatrix} \lambda_h & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{h+l} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_h^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{h+l}^k \end{bmatrix}.$$

Pour un bloc de Jordan de dimension  $m$ , on a

$$\begin{bmatrix} \lambda_h & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_h & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_h \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_h^k & \mathcal{C}_n^1 \lambda_h^{k-1} & \mathcal{C}_n^2 \lambda_h^{k-2} & \dots & \mathcal{C}_n^m \lambda_h^{k-m+1} \\ 0 & \lambda_h^k & \mathcal{C}_n^1 \lambda_h^{k-1} & \dots & \mathcal{C}_n^{m-1} \lambda_h^{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_h^k \end{bmatrix},$$

où les scalaires  $\mathcal{C}_i^j$  sont les coefficients de la formule du binôme de Newton<sup>26</sup> correspondant aux combinaisons :

$$\mathcal{C}_i^j = \frac{i!}{(i-j)!j!}.$$

- **Utilisation de  $\mathcal{Z}$**  : la transformée en  $z$  de l'équation du système autonome  $x_{k+1} = Ax_k$  s'écrit

$$zX(z) - zx_0 = AX(z) \Leftrightarrow X(z) = (zI - A)^{-1}zx_0, \\ \Rightarrow x_k = \mathcal{Z}^{-1}[(zI - A)z]x_0$$

sous réserve d'inversibilité de  $(zI - A)$ . Comme la solution du système autonome est  $x_k = A^kx_0$ , par identification, on déduit

$$A^k = \mathcal{Z}^{-1}[(zI - A)^{-1}z].$$

---

26. Sir Isaac Newton, philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome britannique (1642 ou 1643-1727).

#### 9.4.1.4. Réponse d'un système échantillonné

Dans ce paragraphe, un problème essentiel est abordé. Sans entrer dans le détail, des précautions à prendre dans l'étude d'un système échantillonné sont exposées. Si l'on se reporte à la figure 9.15 page 498, on peut noter que la sortie  $\{y_k\}$  du modèle discret est associée à la version échantillonnée de la véritable sortie du procédé, c.-à-d.  $y(t)$ . Or c'est cette dernière qui constitue la grandeur pertinente. Une fois le modèle discret établi, il est possible, comme le montrent les paragraphes précédents, de déterminer  $\{y_k\}$  à partir de  $\{u_k\}$ . Cependant,  $y(t)$  n'est pas reconstituée pour autant. Il faut alors distinguer deux cas :

- **Étude en boucle ouverte** : ce cas ne pose généralement pas trop de problème. L'application pratique du théorème de Shannon (cf. §9.3.3 page 490) dans le choix de  $T$  permet souvent d'obtenir un signal discret  $\{y_k\}$  qui rend bien compte des dynamiques contenues dans le signal continu  $y(t)$ . Une interpolation des échantillons  $y_k$  ou un bon filtrage du signal échantillonné associé doit donner une bonne idée de la forme de  $y(t)$ . C'est ce que l'on appelle la restitution du signal  $y(t)$  ;
- **Étude en boucle fermée** : Malgré un choix pertinent de  $T$  en boucle ouverte, la commande numérique peut introduire des dynamiques plus rapides dans le système de sorte que  $T$  devient inappropriée en boucle fermée. Il faut alors envisager trois options :
  - recourir à un outil de calcul numérique pour reconstituer  $y(t)$ , la sortie du modèle continu excité par une commande discrète ;
  - diminuer  $T$  pour rendre l'échantillonnage de  $y(t)$  représentatif de sa forme
  - reprendre les spécifications en boucle fermée.

#### 9.4.2. Analyse de la réponse : étude des modes

À l'instar de l'analyse faite du régime transitoire des modèles d'état continus (cf. §4.4 page 178), et conformément à la propriété de  $A^k$  et de sa forme modale, on peut constater que les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$  ont une influence prépondérante sur la forme de  $\{y_k\}$ .

Pour simplifier, en supposant que  $A$  ne possède que des valeurs propres distinctes  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , on a :

$$\text{diag}_{i=1, \dots, n} (\lambda_i^k) = V^{-1} A^k V,$$

avec la matrice modale  $V$  qui vérifie

$$V = [v_1 \quad \dots \quad v_n] \quad \text{et} \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_n \end{bmatrix}.$$

Si l'on définit les matrices  $N_i$  de rang 1 par

$$N_i = v_i w'_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

l'expression (9.38) page 505 se récrit

$$x_k = \sum_{i=1}^n N_i \left( \lambda_i^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} (\lambda_i^{k-j-1} B u_j) \right).$$

Une telle réponse fait apparaître  $n$  termes impliquant des puissances de  $\lambda_i$ . Chaque terme associé à une valeur propre  $\lambda_i$  est appelé *mode du système discret*. Par abus de langage, on appelle parfois  $\lambda_i$  mode, assimilant ainsi mode, pôle et valeur propre.

Bien que les matrices  $N_i$ , qui sont de manière non triviale liées aux zéros du système, aient une influence certaine sur la forme de  $\{x_k\}$  (donc  $\{y_k\}$ ), ce sont surtout les valeurs propres  $\lambda_i$  elles-mêmes qui déterminent l'allure du mode associé. Les différents cas possibles peuvent se résumer par le tableau 9.1.

Tous les comportements des différents modes sont répartis sur  $\{x_k\}$  et sur  $\{y_k\}$  par les matrices  $N_i$ ,  $B$  et  $C$ . Quoi qu'il en soit, les comportements possibles sont résumés sur la figure 9.16.

Il existe deux sources d'oscillation d'un système discret :

- la présence de modes complexes (qui peut être liée à un mode complexe du procédé continu si l'on a affaire à un système échantillonné) ;
- la présence de modes à partie réelle négative (cette oscillation est due uniquement à la discrétisation dans le cas d'un système échantillonné).

Valeur propre	Comportement du mode associé
$ \lambda_i  > 1$	Mode divergent
$ \lambda_i  < 1$	Mode convergent
$ \lambda_i  = 1$	Mode entretenu
$\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$	Oscillation du mode
$\text{Re}(\lambda_i) < 0$	Changement de signe à chaque échantillon
$\text{Im}(\lambda_i) = 0$ et $\text{Re}(\lambda_i) \geq 0$	Pas d'oscillation du mode

TABLE 9.1 – Différents comportements des modes

## 9.5. Stabilité d'un système discret

Il s'agit dans cette partie de reprendre les éléments du chapitre 5 sur la stabilité des modèles continus et de donner des équivalences pour le cas discret. Le lecteur est donc fortement incité à se reporter au chapitre 5 page 201.

### 9.5.1. Stabilité BIBO

Il n'y a pas de différence fondamentale avec le cas continu ce qui conduit tout naturellement à la définition suivante :

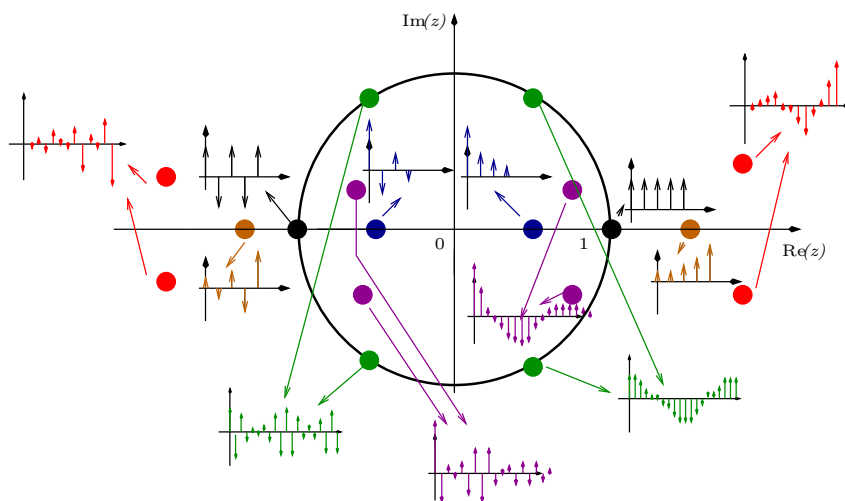


FIGURE 9.16 – Allure des modes en fonction de la localisation de  $\lambda_i$  dans le plan en  $z$

Un système discret est stable au sens BIBO (ou encore au sens entrée/sortie) si quelle que soit l'état initial  $x_0 = x(0)$ , pour toute entrée  $\{u_k\}$  bornée, la sortie  $\{y_k\}$  l'est aussi.

Là aussi, il est parfois difficile d'exploiter cette définition. La notion de stabilité des états d'équilibre est donc privilégiée.

## 9.5.2. Stabilité interne

### 9.5.2.1. Définition et recherche d'un état d'équilibre

Un système se trouve dans un état d'équilibre (par état, l'on entend un point de l'espace d'état c.-à-d. une instance du vecteur d'état) si cet état n'est pas modifié lorsque le système est abandonné à lui-même.

Un système livré à lui-même est qualifié d'*autonome* ou de *libre* ( $u_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ ). Un point d'équilibre  $x_e$  est une solution en  $x_k$  de l'équation :

$$x_{k+1} = Ax_k \Leftrightarrow (A - I)x_k = 0. \quad (9.44)$$

Deux cas se présentent alors. Soit la matrice  $(A - I)$  est régulière et seule l'origine de l'espace d'état ( $x_e = 0$ ) est un point d'équilibre. Soit  $(A - I)$  est singulière et il faut résoudre (9.44) pour déterminer l'infinité des points d'équilibre.

### 9.5.2.2. Stabilité

Le stabilité d'un point d'équilibre se définit, comme dans le cas des modèles continus, de la façon suivante :

Un état d'équilibre est dit *asymptotiquement stable* si, lorsque le système est écarté de cet état sous l'effet d'une perturbation, il y revient (en un temps infini).

L'état d'équilibre est dit *instable* si, après perturbation, le système s'en éloigne davantage.

L'état d'équilibre est dit *simplement stable* si, après perturbation, le système reste dans un voisinage du point d'équilibre.

Comme pour les modèles continus, quel que soit le point d'équilibre  $x_e$  considéré, la stabilité de ce dernier dépend de  $A$  donc il est logique d'associer la stabilité du système autonome lui-même à la stabilité de son ou ses point(s) d'équilibre.

## 9.5.3. Critère des racines

### 9.5.3.1. Résultat général

Comme dans le cas continu, on se réfère à l'équation du régime libre, à savoir

$$x_k = A^k x_0. \quad (9.45)$$

Une étude tout à fait similaire à celle qui est réalisée en continu, s'appuyant sur les valeurs propres de  $A$  (cf. §5.3.1 page 206), consiste à étudier la convergence



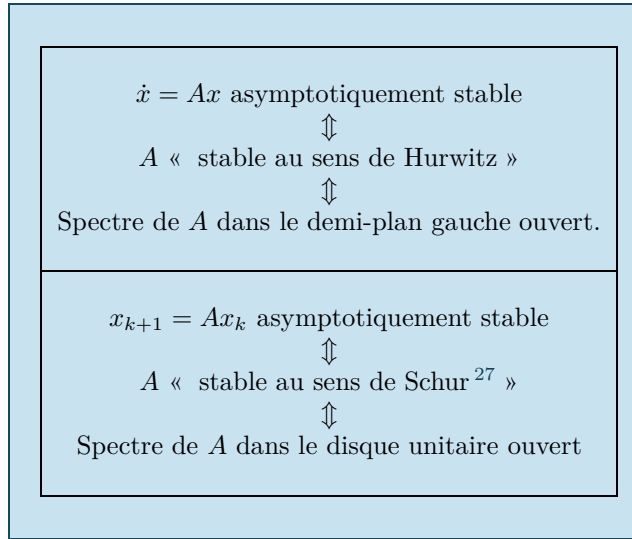
des modes libres de  $x_k$  (voir §9.4.2 page 508), et conduit au résultat suivant :

- $\exists j \mid |\lambda_j| > 1$  : le système est instable ;
- $\nexists j \mid |\lambda_j| > 1$  :
  - $|\lambda_i| < 1 \forall i$  : le système est asymptotiquement stable ;
  - Les blocs de Jordan relatifs aux éventuelles valeurs propres  $\lambda_h$  telle que  $|\lambda_h| = 1$  sont tous scalaires  $\Rightarrow$  le système est simplement stable ;
  - Il existe un bloc de Jordan non scalaire associé à une valeur propre  $\lambda_h$  telle que  $|\lambda_h| = 1 \Rightarrow$  le système est instable.

En cas de stabilité asymptotique, toutes les valeurs propres de  $A$  sont dans le disque unitaire *ouvert* donc  $(A - I)$  est de rang plein et il n'y a qu'un seul point d'équilibre : l'origine de  $\mathbb{R}^n$ . Il est donc naturel de parler alors de stabilité asymptotique du système autonome  $x_{k+1} = Ax_k$  sans évoquer l'unique point d'équilibre  $x_e = 0$ . Par ailleurs, on peut écrire :

Soit le système modélisé par (9.22) page 486. Ce dernier est dit asymptotiquement stable si et seulement si le système autonome associé  $x_{k+1} = Ax_k$  est asymptotiquement stable, c'est-à-dire si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle strictement négative.

Il faut donc en conclure que la région de stabilité asymptotique a changé par rapport au cas continu. Une analogie rapide entre les deux cas conduit à l'encadré suivant.



### 9.5.3.2. Stabilité interne et stabilité BIBO

À l'instar de ce qui a été affirmé pour les modèles à temps continu (cf. §5.3.1.4 page 209), on peut affirmer, par l'étude de l'équation (9.39) page 505 :

Le système décrit par une représentation (9.22) (cf. page 486) et de fonction de transfert  $G(z)$  est BIBO-stable s' il est asymptotiquement stable.  
 Il est BIBO-instable s'il est instable de manière interne.

### 9.5.3.3. Marge de stabilité

On peut définir, comme pour les systèmes continus, la marge de stabilité absolue d'un système discret asymptotiquement stable :

Marge de stabilité absolue : distance minimale, dans le plan complexe, entre un point dont l'affixe est une valeur propre de  $A$  et le cercle unitaire. Mathématiquement, elle s'exprime ainsi :

$$\sigma = \min_i (1 - |\lambda_i|). \quad (9.46)$$

En revanche, on ne définit pas (en tout cas de façon triviale) la marge de stabilité relative.

#### 9.5.4. Critère de Jury

De même que pour les modèles continus, on peut déterminer le polynôme caractéristique  $D(p) = \det(pI - A)$  et analyser le signe de la partie réelle de ses racines par le critère de Routh-Hurwitz<sup>28</sup>, en discret, il est possible de déterminer le polynôme caractéristique  $D(z) = \det(zI - A)$  et d'étudier le module de ses racines grâce au *critère de Schur-Cohn*<sup>29</sup> ou au plus connu *critère de Jury*<sup>30</sup>. Le critère n'est pas détaillé dans ce document. Il est déduit du critère de Routh-Hurwitz par une transformation bilinéaire qui permet de passer du demi-plan gauche au disque unitaire.

#### 9.5.5. Méthode de Liapounov

Ce paragraphe se réfère au paragraphe 5.3.3 page 216. Voici résumée la version discrète de la seconde méthode de Liapounov<sup>31</sup>.

Soit le modèle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) \\ f(0, \dots, 0) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow x_e = 0 \text{ état d'équilibre.} \end{cases}$$

Il s'agit là d'un modèle de système autonome qui possède l'origine pour état d'équilibre.  $f$  est une fonction vectorielle non linéaire à plusieurs variables. L'adaptation de la seconde méthode de Liapounov induit une condition suffisante pour vérifier la stabilité de cet état d'équilibre. Plutôt que de considérer

28. voir les biographies 5.1 et 5.2 de Routh et Hurwitz page 214.

29. Arthur Cohn était un élève d'Issaï Schur.

30. du nom d'Eliahu Ibrahim Jury (1923-), ingénieur états-unien né à Bagdad.

31. mathématicien et physicien russe (1857-1918) : voir sa biographie en annexe page 772.

la décroissance d'une fonction énergétique au travers de sa dérivée, on s'intéresse à un décrement de cette fonction énergétique. S'il existe une fonction  $V$  telle que  $V(x_k) > 0 \forall x_k \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \in \Omega$ , ( $V(0) = 0$ ) et telle que

$$\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0 \quad \forall x_k \in \Omega, x_k \neq 0$$

alors le modèle d'état discret non linéaire est stable pour des conditions initiales dans un voisinage  $\Omega$  de 0. Si par ailleurs,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0,$$

alors on dit que l'origine est asymptotiquement stable.

Si l'on s'intéresse à la stabilité asymptotique d'un système linéaire autonome

$$x_{k+1} = Ax,$$

la seconde méthode permet de voir qu'un tel système est asymptotiquement stable **si et seulement si** il existe une fonction de Liapounov (quadratique)  $V(x_k) = x_k' P x_k > 0$  ( $\Leftrightarrow P = P' > 0$ ) telle que  $\Delta(x_k) < 0, \forall x_k \neq 0$

$$\Leftrightarrow x_k'(A'PA - P)x_k < 0 \quad \forall x_k \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow A'PA - P < 0 \tag{9.47}$$

$$\Leftrightarrow \exists Q = Q' < 0 \text{ et } P = P' > 0 \mid A'PA - P = Q \tag{9.48}$$

Là encore, il n'est plus question de faire référence à l'origine de  $\mathbb{R}^n$  qui est de toute façon l'unique point d'équilibre. La condition devient nécessaire et suffisante. Enfin, il n'est pas restrictif de supposer que  $V(x_k)$  est une fonction quadratique de  $x_k$  ce qui permet d'aboutir, soit à une inégalité matricielle donnée en (9.47), soit à une égalité matricielle donnée en (9.48), dont l'inconnue est, dans les deux cas, une matrice symétrique strictement définie positive. Ce sont, comme dans le cas continu, R. E. Bellman<sup>32</sup>, W. Hahn<sup>33</sup> ou J. Jones qui prouèrent qu'un choix arbitraire de la matrice  $Q$  était possible (cf. §9.11 page 556 et annexe F page 709), mais aussi A. Ostrowski et H. Schneider. On peut donc résumer l'application de la théorie de Liapounov aux modèles linéaires discrets à ceci :

---

32. voir biographie 3.2 page 77.

33. Wolfgang Hahn, mathématicien allemand (1911-1998).

Le modèle d'état discret linéaire (9.22) page 486 est asymptotiquement stable si et seulement si, quelle que soit la matrice symétrique définie négative  $Q$ , l'unique solution  $P$  de l'équation de Lyapunov discrète (ou équation de Stein)

$$-P + A'PA = Q \quad (9.49)$$

est définie positive.

La solution  $P$  peut alors s'exprimer

$$P = - \sum_{k=0}^{\infty} (A')^k Q A^k,$$

même si cette expression n'est pas un bon moyen de calculer  $P$  en comparaison d'une résolution numérique de l'équation (9.49).

L'habitude consiste à choisir  $Q = I$  pour effectuer le test. Il est possible, sous quelques réserves, de considérer une matrice  $Q$  semi-définie négative (voir le paragraphe F.4 de l'annexe F, à la page 713).

L'annexe F reprend quelques aspects évoqués ci-avant. Elle montre notamment que (9.47) et (9.49) ne prouvent pas simplement la stabilité mais aussi sa nature asymptotique.

**En conclusion**, il faut noter que tous ces critères de stabilité ne font intervenir que  $A$ . Ainsi, seule la matrice d'évolution détermine la stabilité du système.

### 9.5.6. Stabilité d'un système échantillonné

On s'intéresse ici au rapport entre la stabilité d'un procédé continu et la stabilité du système discret obtenu par échantillonnage de ce procédé continu.

### 9.5.6.1. Échantillonnage d'une boucle ouverte

On considère le schéma de la figure 9.15 page 498. Le procédé continu admet la réalisation (9.33) page 502. La matrice d'évolution  $A$  du système échantillonné se déduit donc de la matrice d'évolution  $A_c$  du procédé continu par la relation  $A = e^{A_c T}$ . Si l'on note  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ , les valeurs propres de  $A_c$  et  $\mu_i, i = 1, \dots, n$ , les valeurs propres de  $A$ , on a vu qu'elles étaient liées par la relation (cf. §9.3.5.3 page 502) :

$$\mu_i = e^{\lambda_i T}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

d'où l'on déduit l'équivalence :

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \Leftrightarrow |\mu_i| < 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

La stabilité asymptotique d'un procédé linéaire continu est équivalente à la stabilité asymptotique du système discret obtenu par échantillonnage de ce procédé.

Il est possible de vérifier cette assertion en utilisant la théorie de Liapounov. On constate alors que toute matrice de Liapounov  $P$  obtenue pour le procédé continu est aussi matrice de Liapounov pour le modèle échantillonné et réciproquement (cf. annexe F page 709).

### 9.5.6.2. Bouclage d'un système échantillonné

On considère toujours un système échantillonné mais qui est ensuite bouclé comme le montre la figure 9.17.

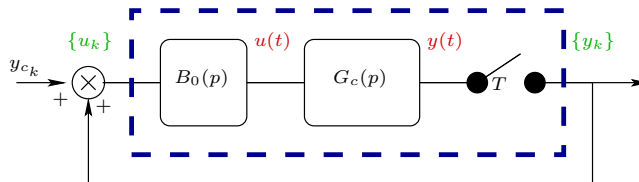


FIGURE 9.17 – Système échantillonné avec bouclage unitaire

Compte tenu de la réalisation continue (9.33) page 502 et des formules d'échantillonnage (9.36) page 503, le bouclage conduit, pour ce système discret bouclé, à la représentation d'état suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = \left( e^{A_c T} + \int_0^T e^{A_c T \alpha} B_c d\alpha \right) (1 - D)^{-1} C x_k M \\ \quad + \left( \int_0^T e^{A_c T \alpha} B_c d\alpha \right) (1 - D)^{-1} y_{c_k}, \\ y_k = (1 + D(1 - D)^{-1}) C x_k \\ \quad + D(1 - D)^{-1} y_{c_k}, \end{array} \right.$$

sous réserve que  $D \neq 1$ . On constate que la matrice dynamique en boucle fermée est grandement dépendante de  $T$  et à ce titre,  $T$  a une grande influence sur la stabilité de ce système discret bouclé. Il n'est donc pas question d'associer cette stabilité éventuelle à la stabilité éventuelle d'un quelconque système continu. Ceci rejoint l'idée formulée dans la remarque 9.5 page 488.

## 9.6. Commandabilité/observabilité d'un modèle discret

Cette partie propose, de façon résumée, un équivalent du chapitre 6 pour le cas des systèmes discrets. Le lecteur est invité à se référer au chapitre 6 page 237.

### 9.6.1. Définitions

#### 9.6.1.1. Commandabilité

Soit le modèle d'état (9.22) page 486 d'un système linéaire dont l'état initial est à une valeur quelconque  $x_0$ .

Le modèle est commandable si, pour toute instance  $x_f$  du vecteur d'état, il existe une séquence finie d'échantillons d'entrée  $u_k$  ( $k < \infty$ ) d'énergie bornée qui permet au système de passer de l'état  $x_0$  à l'état  $x_f$ .

### 9.6.1.2. Observabilité

On s'intéresse toujours au même modèle que dans la partie précédente.

Le modèle est observable si, quel que soit l'état initial  $x_0$ , il existe d'une séquence finie d'échantillons de sortie  $y_k$  (et éventuellement des échantillons d'entrée correspondants  $u_k$ ) qui permet de retrouver  $x_0$ .

## 9.6.2. Critère de Kálmán

### 9.6.2.1. Commandabilité

Le résultat est complètement similaire à celui établi pour les modèles continus :

La paire de matrices  $(A, B)$  (ou le système (9.22) page 486) est commandable si et seulement si

$$\text{rang}(Q_c) = n \quad \text{où} \quad Q_c = [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B ] \quad (9.50)$$

La matrice  $Q_c$  est dite, comme dans le cas continu, *matrice de commandabilité de Kálmán*.

**Démonstration :** soit la réponse de l'état donnée par (9.38) page 505. On note que si  $Q_c$  est de rang plein, son image coïncide avec  $\mathbb{R}^n$ . De ce fait, n'importe quel  $x_f \in \mathbb{R}^n$  admet un antécédent dans l'ensemble des commandes  $\{u_0; u_1; \dots; u_{n-1}\}$ . Il est donc possible d'atteindre  $x_f$  et la condition de Kálmán est suffisante.

De plus, se pose la question de la nécessité.  $Q_c$  est supposée de rang inférieur à  $n$ . Soit la matrice  $Q_i$  définie par

$$Q_i = [ A \quad AB \dots A^{i-1}B ] .$$

Est-il possible qu'il existe une valeur de  $i$  telle que l'image de  $Q_i$  coïncide avec  $\mathbb{R}^n$  ? Le théorème de Cayley Hamilton<sup>34</sup> montre que, quel que soit  $i$ , la matrice  $A^i B$  peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ .

34. du nom du mathématicien britannique Arthur Cayley (1821-1895) et de Sir William Rowan Hamilton dont une biographie est proposée à la page 138.



Ainsi le rang de  $Q_i$  ne peut excéder celui de  $Q_c$  et donc il existe des vecteurs dans  $\mathbb{R}^n$  qui ne peuvent être atteints. QED

**Remarque 9.9** *Tout état  $x_f$  peut être atteint en partant de  $x_0$  grâce à une séquence d'entrée d'au plus  $n$  échantillons.*

### 9.6.2.2. Observabilité

La paire de matrices  $(A, C)$  (ou le système (9.22) page 486) est observable si et seulement si

$$\text{rang}(Q_o) = n \quad \text{où} \quad Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (9.51)$$

La matrice  $Q_o$  est dite *matrice d'observabilité de Kálmán*.

**Démonstration :** si l'on s'intéresse au système autonome, la réponse en  $y_k$  de ce système est

$$y_k = CA^k x_0.$$

Puisque  $y_k$  est de dimension 1 et  $x_0$  de dimension  $n$ , il est nécessaire d'avoir  $n$  valeurs successives de  $y_k$  pour espérer retrouver  $x_0$  à partir des échantillons  $y_k$ . Ceci conduit à écrire

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = Q_o x_0.$$

Le système peut se résoudre en  $x_0$  (unique) si et seulement si  $\text{rang}(Q_o) = n$ . QED

### 9.6.2.3. Dualité des deux concepts

Il est important de noter, comme en continu, l'analogie entre les structures de  $Q_c$  et  $Q_o$ .

Dualité :

La paire  $(A, B)$  est commandable si et seulement si la paire  $(A', B')$  est observable.

La paire  $(A, C)$  est observable si et seulement si la paire  $(A', C')$  est commandable.

### 9.6.3. Critères s'appliquant aux formes de Jordan

Le principe étant rigoureusement le même que pour les modèles continus, le lecteur est invité à se reporter au paragraphe 6.3 page 246. Les résultats qui y sont mentionnés sont valables pour les modèles discrets.

### 9.6.4. Grammiens

Il s'agit ici d'apporter une analogie discrète aux notions présentées au paragraphe 6.4 page 248. Soit le modèle LTI discret donné en (9.22) page 486 et supposé *asymptotiquement stable*. On se propose ici de présenter un critère de commandabilité et d'observabilité qui repose sur les notions de grammiens.

#### 9.6.4.1. Définition des grammiens

Le grammien de commandabilité  $W_c$  et le grammien d'observabilité  $W_o$ , également appelés matrices grammiennes ou matrices de Gram<sup>35</sup>, sont respectivement définies par

$$W_c = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B' (A')^k, \quad (9.52)$$

$$W_o = \sum_{k=0}^{\infty} (A')^k C' C A^k, \quad (9.53)$$

35. du nom mathématicien danois Jørgen Pedersen Gram (1850-1916).

d'où l'on retrouve bien que les deux propriétés sont duales l'une de l'autre.

#### 9.6.4.2. Interprétation des grammien

Le grammien de commandabilité  $W_c$  est lié à l'énergie minimale du signal de commande  $u(t)$  nécessaire pour amener l'état d'une condition initiale à une condition finale en un temps infini. La justification en est renvoyée en annexe G page 723.

La paire stable  $(A, B)$  (respectivement la paire stable  $(A, C)$ ) est commandable (resp. observable) si et seulement si le grammien de commandabilité  $W_c$  (resp. d'observabilité  $W_o$ ) est strictement défini positif.

Comme en continu, les grammien fournissent des conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité ou de commandabilité et ils indiquent le nombre de variables d'état non commandables et non observables. En outre, ils permettent de quantifier cette propriété pour chaque variable d'état mais se limitent à l'étude des modèles asymptotiquement stables.

**Remarque 9.10** *On peut démontrer que, quelle que soit la base de l'espace d'état considérée, le produit  $W_c W_o$  conserve le même spectre (voir annexe G page 723).*

#### 9.6.4.3. Calcul des grammien

Les sommes définies en (9.52) et (9.53) sont difficilement utilisables pour le calcul des grammien. Il est facile, à l'instar de ce qui se fait en continu (cf. §6.4.3 page 250), d'affirmer :

Soit la réalisation (9.22) page 486, supposée asymptotiquement stable. Le grammien de commandabilité  $W_c$  et celui d'observabilité  $W_o$  sont les solutions respectives des équations de Liapounov, également appelées, dans le cas discret, équations de Stein,

$$-W_c + AW_cA' = -BB', \quad (9.54)$$

$$-W_o + A'W_oA = -C'C. \quad (9.55)$$

### 9.6.5. Test PBH

Il existe en discret, comme en continu, un critère dit de *Popov-Belevitch-Hautus* pour tester la commandabilité ou l'observabilité d'un système discret.

#### Test de Popov-Belevitch-Hautus

Les paires de matrices  $(A, B)$  et  $(A, C)$  sont respectivement commandable et observable si et seulement si (respectivement)

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} (\lambda I - A) & B \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

et

(9.56)

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} C \\ (\lambda I - A) \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ce test est donc exactement le même qu'en continu et la démonstration en est également la même (voir § 6.5 page 251) puisqu'elle repose sur le critère de Kálmán.

### 9.6.6. Modèles et structures

Il n'y a pas de différence majeure avec le cas continu et le lecteur peut se référer au paragraphe 6.6 page 253 pour y retrouver les principales notions. On retient

juste :

L'équation récurrente ne représente que la partie observable du système discret.

La fonction de transfert en  $z$  ne représente que la partie commandable et observable du système discret.

### 9.6.7. Réalisation minimale

Là encore, il est inutile de reprendre toute l'étude pour le cas discret et, en se référant au cas continu, on peut écrire :

On appelle réalisation *minimale* ou *irréductible* d'un système LTI discret toute représentation d'état ne décrivant que la partie commandable et observable du système.

De ceci l'on déduit que l'ensemble des pôles de la fonction de transfert en  $z$  d'un système discret coïncide avec l'ensemble des valeurs propres de toute réalisation *minimale* du système. Le terme « minimal » est important. En effet, il est possible qu'une fonction de transfert d'un système soit stable au sens de Schur mais qu'une réalisation non minimale de cette fonction de transfert fasse apparaître une instabilité. Ceci correspond à une valeur propre instable qui n'est pas commandable ou pas observable, et qui n'apparaît donc pas dans la fonction de transfert  $G(z)$ .

### 9.6.8. Décomposition de Kálmán

Il est inutile de refaire tout un développement. Les justifications et les résultats sont totalement analogues à ceux exposés dans la partie 6.8 page 263 .

Les formes canoniques de Kálmán relatives à la commandabilité et à l'observabilité sont respectivement données par

$$\begin{cases} z_{c_{k+1}} &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} z_{c_k} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] z_{c_k} + Du_k \end{cases} \quad (9.57)$$

et

$$\begin{cases} z_{o_{k+1}} &= \begin{bmatrix} \check{A}_{11} & 0 \\ \check{A}_{21} & \check{A}_{22} \end{bmatrix} z_{o_k} + \begin{bmatrix} \check{B}_1 \\ \check{B}_2 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= [\check{C}_1 \quad 0] z_{o_k} + Du_k. \end{cases} \quad (9.58)$$

La fonction de transfert vérifie alors

$$G(z) = D + C(zI - A)^{-1}B = D + \tilde{C}_1(zI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1 = D + \check{C}_1(zI - \check{A}_{11})^{-1}\check{B}_1.$$

La décomposition de Kálmán complète s'écrit quant à elle

$$\begin{cases} z_{k+1} &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} z_k + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= [C_1 \quad 0 \quad C_3 \quad 0] z_k + Du_k. \end{cases} \quad (9.59)$$

ou encore

$$\begin{cases} z_{k+1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} \end{bmatrix} z_k + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_3 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = [C_1 \ C_2 \ 0 \ 0] z_k + D u_k. \end{cases} \quad (9.60)$$

Elle fait apparaître la réalisation minimale  $(A_{11}, B_1, C_1, D)$  et la fonction de transfert vérifie

$$G(z) = D + C(zI - A)^{-1}B = D + C_1(zI - A_{11})^{-1}B_1.$$

## 9.7. Commande par retour d'état

Cette partie s'intéresse à la commande par retour d'état des systèmes discrets. Elle se réfère très largement au chapitre 7 page 297. Avant de brièvement jeter les bases de ce « retour d'état discret », un paragraphe est dédié aux différentes approches de la commande numérique des systèmes échantillonnés de façon plus générale. Une fois l'une des approches privilégiées, le problème du placement de pôles par retour d'état est abordé.

### 9.7.1. Les différentes approches de la commande numérique

Soit le principe de commande illustré par la figure 9.13 page 489. Il existe deux stratégies pour envisager cette commande :

- déterminer une loi de commande en continu, sur la base de  $G_c(p)$ , la fonction de transfert du procédé continu, ou d'une réalisation continue, puis approcher cette loi de commande analogique par une commande discrète qui aurait des performances similaires. Cette stratégie ne peut s'envisager que si  $T$ , la période d'échantillonnage, est faible (règle pratique de Shannon largement respectée). Dans ce cas de figure, deux options quelque

peu différentes sont alors possibles :

- ◇ implanter la commande analogique en réalisant une approximation numérique de chacun des éventuels intégrateurs ( $1/p$ ) et dérivateurs ( $p$ ) (approche classique pour un régulateur PID) ;
- ◇ prévoir par une transformation appropriée (reposant sur l'approximation de  $p$  ou de  $1/p$  par une fonction en  $z$  (« Euler avant (explicite) », « Euler arrière (implicite) », « Tustin »<sup>36</sup>) . La loi de commande discrète se déduit alors de la loi de commande analogique par application de cette transformation. La commande discrète obtenue s'implante sous forme de récurrence.

Il faut cependant remarquer qu'un simple retour d'état est identique en continu et en discret puisqu'il s'agit d'une loi de commande statique.

- déterminer le modèle échantillonné puis en déduire une loi de commande discrète avant de l'implanter telle quelle.

C'est la seconde stratégie qui est ici privilégiée. Elle prend mieux en compte l'approximation liée à l'échantillonnage et par ailleurs, elle est utilisable pour un système discret non issu d'un échantillonnage temporel (discret par essence).

### 9.7.2. Retour d'état discret

Le principe du retour d'état est le même que pour les modèles continus, à savoir qu'il suppose que toutes les composantes du vecteur d'état sont mesurées ce qui permet d'envisager la loi de commande suivante :

$$u_k = Hy_{c_k} + Kx_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (9.61)$$

Cette loi de commande, appliquée à un système discret décrit par (9.22) page 486

<sup>36</sup>. du nom de de Leonhard Euler, célèbre mathématicien et physicien suisse (1707-1783) et d'Arnold Tustin, ingénieur britannique (1899-1994).



conduit au modèle discret bouclé :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= (A + BK)x_k + BH y_{c_k} \\ y_k &= (C + DK)x_k + DH y_{c_k}. \end{cases} \quad (9.62)$$

### 9.7.3. Placement de pôles par retour d'état

Comme on peut le voir dans (9.62), la matrice dynamique en boucle fermée est  $A_f = A + BK$ . Le problème de placement de pôles se formule donc toujours ainsi :

Placement de pôles :

Soient une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et un vecteur  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , déterminer le vecteur  $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  tel que le spectre de  $A + BK$  coïncide avec un spectre donné.

#### 9.7.3.1. Commandabilité et placement de pôles

La condition pour pouvoir placer  $n$  pôles est la même qu'en continu, à savoir :

Le problème de placement de pôles par retour d'état admet une solution si et seulement si la paire  $(A, B)$  est commandable.

#### 9.7.3.2. Technique de placement de pôles

Il est absolument inutile de détailler cette technique puisqu'elle est exactement la même que pour les modèles continus. Le lecteur doit donc se référer aux paragraphes 7.2 page 300 et 7.3 page 308, tant pour le calcul de la matrice de retour  $K$  que pour celui de la matrice de précommande  $H$ . Il y retrouvera l'algorithme

de Bass-Gura<sup>37</sup>. Il faut toutefois prendre deux précautions pour s'assurer de l'efficacité de la loi de commande.

### Performances transitoires

Le choix des pôles est évidemment prépondérant dans les performances transitoires (cf. figure 9.16 pages 511). Ce choix est moins facile qu'en continu. Une technique peut consister à choisir des pôles désirés pour un modèle continu et à chercher le polynôme caractéristique discret équivalent.

### Performances statiques

Pour assurer un gain statique unitaire en boucle fermée, il faut se souvenir que le régime permanent d'un système continu correspond à  $p = 0$ . Pour un modèle discret, il correspond à  $z = e^0 = 1$  (en effet, le régime statique s'exprime  $x_{k+1} = x_k$  ce qui se traduit dans le domaine en  $z$  par  $zX(z) = X(z) \Leftrightarrow z = 1$ ). Ceci conduit à la formule :

$$H = [D + (C + DK)(I - A - BK)^{-1}B]^{-1}. \quad (9.63)$$

### Rejet de perturbation

De même qu'en continu, on peut insérer un intégrateur pour rejeter les perturbations en échelon se trouvant en amont de cet intégrateur dans la chaîne directe. Un intégrateur discret admet pour fonction de transfert

$$I(z) = \frac{1}{z - 1},$$

de sorte que si l'on adapte la figure 7.4 page 312 au cas discret, la récurrence liant  $\bar{u}_k$  et  $u_k$  s'exprime

$$u_{k+1} = u_k + \bar{u}_k.$$

En considérant  $u$  comme une nouvelle variable d'état et  $\bar{u}$  comme la nouvelle commande, on augmente de 1 l'ordre du modèle avec intégrateur et l'on peut

<sup>37</sup>. du nom de Robert W. Bass (cf. biographie 7.1 page 329) et de son étudiant Ira Gura.

ensuite calculer une loi de placement de pôles sur ce modèle d'ordre  $(n + 1)$ . Il s'agit là de l'analogie discrète de la première approche présentée en §7.4.1 page 310. Cependant, la seconde approche présentée en §7.4.2 page 315 s'étant révélée plus appropriée, plus élégante, il est préférable de considérer sa contrepartie discrète qui consiste à élaborer une loi de commande

$$u_k = Kx_k + Jv_k \quad \text{avec} \quad v_k = \varepsilon_k - v_{k-1}. \quad (9.64)$$

Avec une telle loi de commande,  $\{v_k\}$  représente l'intégrale discrète de  $\{\varepsilon_k\}$  et la technique de placement de pôles par calcul de  $\overline{K} = \begin{bmatrix} K & J \end{bmatrix}$  est similaire à celle présentée en §7.4.2 page 315 (mais avec un choix de pôles compatible avec les performances transitoires souhaitées pour un système discret : cf. §9.4.2 page 508). Toutefois, le modèle augmenté équivalent, c'est-à-dire la contrepartie discrète du modèle (7.21) page 316 est un peu différent. Plutôt que de détailler ces aspects ici, le lecteur peut se reporter à correction d'un exercice présentée en §11.4.2 page 614.

#### 9.7.4. Stabilisabilité et détectabilité

Les notions de *stabilisabilité* et *détectabilité* se définissent pour les modèles discrets de la même manière que pour les modèles continus. En effet, il convient de se souvenir que les définitions données au paragraphe 7.5 page 321 se réfèrent à des paires de matrices (la paire  $(A, B)$  pour la stabilisabilité et la paire  $(A, C)$  pour la détectabilité) et non à des systèmes complets. Il est vivement conseillé de se reporter à ce paragraphe. En rappelant qu'une matrice est dite *Schur-stable* ou stable au sens de Schur si et seulement si toutes ses valeurs propres ont un module strictement inférieur à 1, les deux notions se définissent donc toujours brièvement comme suit.

$$\begin{aligned} (A, B) \text{ stabilisable} &\Leftrightarrow \exists K : (A + BK) \text{ est Schur-stable.} \\ (A, C) \text{ détectable} &\Leftrightarrow \exists K : (A + KC) \text{ est Schur-stable.} \end{aligned}$$

Comme dans le cas des modèles à temps continu, la stabilisabilité est la possibilité de stabiliser le modèle. Elle est donc assurée par la commandabilité.

Ainsi, la stabilisabilité d'un modèle discret signifie que ses éventuelles « parties instables » (exemple : les pôles instables, hors du disque unitaire) sont commandables. Comme la détectabilité est duale de la stabilisabilité, elle exprime le fait que les éventuelles « parties instables » du système (exemple : les pôles instables) sont observables. Il vient donc toujours

Commandabilité  $\Rightarrow$  Stabilisabilité ;  
Observabilité  $\Rightarrow$  Détectabilité.

Il est possible d'étudier la stabilisabilité de  $(A, B)$  ou la détectabilité de  $(A, C)$  à travers la version discrète du test PBH. Ainsi, en s'inspirant du paragraphe 7.5.1 page 323, par analogie, il vient :

#### Test de Popov-Belevitch-Hautus

Les paires de matrices  $(A, B)$  et  $(A, C)$  sont respectivement stabilisable et détectable si et seulement si (respectivement)

$$\begin{aligned} \text{rang} \left( \begin{bmatrix} (\lambda I - A) & B \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall \lambda \in \mathcal{D}^C \\ \text{et} \\ \text{rang} \left( \begin{bmatrix} C \\ (\lambda I - A) \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall \lambda \in \mathcal{D}^C. \end{aligned} \tag{9.65}$$

$\mathcal{D}^C$  désigne l'extérieur du disque unitaire ouvert (c'est-à-dire que  $\mathcal{D}^C$  inclut le cercle unitaire). On s'intéresse, dans ce test, uniquement à la commandabilité ou l'observabilité des « valeurs propres non asymptotiquement stables » de  $A$ . Cela étant, le test reste tout aussi peu utilisé que dans le cas continu, en tout cas en tant que test pratique. Il est plus utile à des fins de démonstration.

#### 9.7.5. Stabilisation

De manière proche de ce qui a été vu pour les systèmes continus au paragraphe 7.6 page 326, il est possible de s'appuyer sur les critères de stabilisabilité

(ou de détectabilité) du paragraphe 9.7.4 page 531 et sur les critères de Liapounov présentés au paragraphe 9.5.5 page 515. Plus précisément, il est possible d'appliquer la proposition suivante.

La paire de matrices  $(A, B)$  est Schur-stabilisable (respectivement la paire de matrices  $(A, C)$  est Schur-détectable) si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et un vecteur ligne (colonne)  $L \in \mathbb{R}^n$  tels que :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -P & AP + BL \\ PA' + L'B' & -P \end{bmatrix} < 0 \\ (\text{resp. } & \begin{bmatrix} -P & A'P + L'C' \\ PA + CL & -P \end{bmatrix} < 0). \end{aligned} \quad (9.66)$$

Un vecteur de retour d'état (resp. d'injection de sortie)  $K$  stabilisant est

$$K = LP^{-1} \quad (\text{resp. } K = P^{-1}L). \quad (9.67)$$

En appliquant les changements de variable (9.67) dans les inégalités (9.66), il vient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -P & (A + BK)P \\ P(A + BK)' & -P \end{bmatrix} < 0 \\ (\text{resp. } & \begin{bmatrix} -P & (A' + K'C')P \\ P(A + KC) & -P \end{bmatrix} < 0). \end{aligned} \quad (9.68)$$

Ces inégalités sont équivalentes aux inégalités

$$-P + (A + BK)P(A + BK)' < 0 \quad (\text{resp. } -P + (A + KC)'P(A + KC) < 0).$$

Ces inégalités sont des inégalités de Liapounov, respectivement duale et primale, appliquée l'une à la matrice d'état  $(A + BK)$ , et l'autre à la matrice

d'état  $(A + KC)$ . Cette équivalence n'est pas démontrée ici mais elle peut se justifier par la notion de *complément de Schur*. En réalité, pour les systèmes discrets, on parle d'inégalités de Stein plutôt que d'inégalités de Liapounov car il s'agit d'un résultat purement mathématique qui donne une condition nécessaire et suffisante d'appartenance des valeurs propres d'une matrice au disque unitaire ouvert. Liapounov a en fait peu à voir avec ce travail qui peut néanmoins se formuler comme une analogie discrète à son propre travail (voir § 9.5.5 page 515).

Par ailleurs, il faut noter que si les inégalités de Stein ont des solutions, les égalités correspondantes en ont (on peut choisir arbitrairement une matrice définie négative  $Q$  comme membre de droite). Cependant, il est assez difficile en discret d'exploiter ces équations alors que les boîtes à outils logicielles de résolution des inégalités matricielles linéaires permettent de résoudre les inégalités données par (9.66) pour des valeurs raisonnables de  $n$ .

### 9.7.6. Stabilisabilité, détectabilité, et décomposition de Kálmán

De manière totalement analogue à ce qui a été présenté au paragraphe 7.5.2 page 324, on peut raisonner à partir des formes canoniques. Ainsi, soient les formes canoniques de Kálmán relatives à la commandabilité et l'observabilité exprimées en (9.57) et (9.58) (voir page 526), il est clair que :

La paire  $(A, B)$  est stabilisable si et seulement si  $\tilde{A}_{22}$  est Schur-stable.

La paire  $(A, C)$  est détectable si et seulement si  $\check{A}_{22}$  est Schur-stable.

## 9.8. Commande par retour de sortie

Cette partie résume la version discrète du chapitre 8. L'idée est donc de construire un système discret qui observe l'évolution de l'état  $x_k$  (*observateur discret*) et d'utiliser son estimation de  $x_k$  pour réaliser ensuite une loi de commande par retour d'état. On se contente ici d'envisager la synthèse d'un observateur d'ordre  $n$  de vecteur d'état  $\hat{x}_k$  qui répond à la formulation suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k + Z(\hat{y}_k - y_k), \\ \hat{y}_k &= C\hat{x}_k. \end{cases} \quad (9.69)$$

Si l'on définit l'écart d'observation par

$$\epsilon_k = \hat{x}_k - x_k,$$

alors la dynamique de l'observateur est donnée par l'équation

$$\dot{\hat{x}} = (A + ZC)\hat{x} + Bu - Zy. \quad (9.70)$$

Il faut d'abord donner l'assertion fondamentale qui est la même que pour les modèles continus :

Soit le système discret décrit par (9.22) page 486. On peut construire un observateur d'état si et seulement si la paire  $(A, C)$  est observable.

En outre, ce problème, comme en continu, peut être vu de manière purement matricielle et est dual du problème de placement de pôles. Par conséquent, il est inutile de reproduire la logique de calcul dans cette partie et le lecteur peut se référer au paragraphe 8.3 page 383 et en particulier au paragraphe 8.3.2 page 386 pour calculer  $Z$  et placer les pôles de  $(A + ZC)$ . Il va de soi qu'il faut choisir judicieusement la localisation des pôles à l'intérieur du disque unitaire pour fixer la dynamique de l'observateur discret.

Il est bien sûr possible d'envisager d'autres structures d'observation et en particulier les observateurs type « Luengerber », les observateurs d'ordre réduit et ceux à entrée inconnue (voir chapitre 8). En outre, le résultat du paragraphe 8.9 page 421 qui explique quand un compensateur dynamique d'ordre plein admet une structure d'observateur d'ordre plein avec retour d'état reconstruit peut être appliqué tel quel au cas des systèmes discrets.

Il apparaît assez inopportun à l'auteur de reproduire tous les détails qui ont été donnés dans le cas continu. Le rendement en serait bien faible pour le lecteur.

## 9.9. Exercices

### 9.9.1. Petit système de premier ordre

Soit le système à temps continu décrit par la réalisation

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + u, \\ y = x. \end{cases}$$

Questions :

- Calculer la fonction de transfert en  $p$ .
- Utiliser la réponse précédente pour calculer la fonction de transfert en  $z$  du système échantillonné à  $T = 1$ s et à l'aide un bloqueur d'ordre zéro.
- Déterminer une réalisation du système échantillonné à partir de la réalisation continue fournie.
- Utiliser cette réalisation pour retrouver la fonction de transfert en  $z$ .
- Exprimer la réponse indicielle du système échantillonné pour une condition initiale  $x_0 = 4$ .
- Retrouver les expressions de  $y_0, y_1$  et  $y_2$  de deux façons.
- Le système échantillonné est-il stable?
- Si  $a = 2$ , quelle période d'échantillonnage peut-on considérer pour obtenir une information raisonnable en sortie?

### 9.9.2. Le revenu national

Le revenu national d'un pays à l'année  $k$  est noté  $y_k$ . Il résulte de la somme de quatre termes :

$$y_k = c_k + i_k + u_k + e_k,$$

où les quatre termes sont ainsi définis :

- $c_k$ , les dépenses de consommation;
- $i_k$ , l'investissement privé;
- $u_k$ , les dépenses de l'état;
- $e_k$ , l'épargne des ménages (perçue par les économistes comme une perturbation!).



Par ailleurs,  $c_{k+1} = \alpha y_k$  où  $\alpha$ , la propension à la consommation, vérifie  $0 < \alpha < 1$ .

Il faut aussi prendre en compte

$$i_{k+1} = \beta(c_{k+1} - c_k),$$

où  $\beta$  est un coefficient de croissance vérifiant  $\beta > 0$ .

Questions :

- Donner un modèle d'état du système admettant  $u_k$  comme commande,  $y_k$  comme sortie et  $e_k$  comme perturbation.
- Calculer les pôles du système pour les paires de valeurs ( $\alpha = 0,75, \beta = 1$ ) et ( $\alpha = 0,75, \beta = 1,5$ ).
- Le système est-il stable ?
- Est-il commandable ?
- Est-il observable ?

### 9.9.3. Nouveau plongeon dans la cuve

*Dans cet exercice, le système étudié présente deux entrées et deux sorties ce qui conduit à des difficultés dans le calcul à la main des solutions, voir dans l'application des techniques présentées dans ce document. Pour cette raison, l'exercice peut se résoudre à l'aide de MATLAB<sup>©</sup>. Même si le lecteur n'a pas MATLAB<sup>©</sup>, il peut se lancer dans la résolution de ce problème car les solutions sont données. Il lui suffira de voir s'il appliquerait la bonne instruction (par exemple en se référant à l'annexe H page 735). Ce serait le signe que les notions sont comprises.*

Il s'agit de contrôler le niveau de fluide et la température de ce dernier dans la cuve déjà modélisée en §3.9.15 page 123. Mais cette commande est réalisée en temps discret de sorte qu'il convient d'abord d'obtenir un modèle discretisé de cette cuve.

Question :

- Discrétiser le procédé en supposant qu'il est précédé d'un bloqueur d'ordre zéro et que la période d'échantillonnage est  $T = 6min = 360s$ .

L'application numérique réalisée sous MATLAB<sup>©</sup> (cf. annexe H page 735), qui peut se faire à l'aide des lignes de code suivantes,

```
>> the=20;q=20*1e-3/60;ths=50;
>> h=.6;p=20*1e3;s=1;
>> ac=[-q/(2*s*h) 0;0 -q/(s*h)];
>> bc=[1/s 0;(the-ths)/(s*h) q*(ths-the)/(s*h*p)];
>> cc=eye(2);dc=zeros(2);
>> T=360;sh=s*h;dtet=the-ths;
>> a11=exp(-q*T/(2*sh));
>> a22=exp(-q*T/sh);
>> a=[a11 0;0 a22];
>> b11=-(2*h/q)*(exp(-q*T/(2*sh))-1);
>> b21=-(dtet/q)*(exp(-q*T/sh)-1);
>> b22=(dtet/p)*(exp(-q*T/sh)-1);
>> b=[b11 0;b21 b22];
>> c=cc;
>> d=dc;
>> sysc=ss(ac,bc,cc,dc);
>> sys=c2d(sysc,T,'zoh');
>> [A,B,C,D]=ssdata(sys);
>> a-A
>> b-B
>> c-C
>> d-D
```

conduit à

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.905 & 0 \\ 0 & 0.819 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 343 & 0 \\ -16314 & 2.72 \times 10^{-4} \end{bmatrix} u_k, \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k. \end{cases}$$

Question :

- Prendre un peu de temps pour analyser les lignes de code MATLAB<sup>©</sup>.
- Que donnent les quatre dernières lignes ?

Maintenant que l'on dispose d'un modèle d'état du procédé échantillonné, il est possible de déterminer, grâce à la fonction `dstep` de MATLAB<sup>®</sup>, la réponse indicielle de ce système discret. Cependant, comme en continu, il serait irréaliste de supposer un débit entrant augmentant brutalement de  $1\text{m}^3/\text{s}$  et une variation de puissance électrique de seulement  $1\text{W}$ . C'est pourquoi, là aussi, la première colonne de  $B$  est multipliée par  $10^{-5}$  et la seconde par  $10^3$  avant de tracer les courbes afin de simuler des variations en entrée de  $10\text{ml/s}$  et de  $1\text{kW}$

```
>> b(:,1)=b(:,1)*1e-5; % Mise à l'échelle
    % de la première colonne de B
>> b(:,2)=b(:,2)*1e3; % Mise à l'échelle
    % de la seconde colonne de B
>> subplot(221),dstep(a,b,c(1,:),d(1,:),1,60);
>> gtext('Echelon en débit->');
>> gtext('Variation de niveau');
>> subplot(222),dstep(a,b,c(2,:),d(2,:),1,60);
>> gtext('Echelon en débit->');
>> gtext('Variation de température');
>> subplot(223),dstep(a,b,c(1,:),d(1,:),2,60);
>> gtext('Echelon en puissance->');
>> gtext('Niveau constant');
>> subplot(224),dstep(a,b,c(2,:),d(2,:),2,60);
>> gtext('Echelon en puissance->');
>> gtext('Variation de température');
```

**Remarque 9.11** *Tout code suivant, sur une même ligne, le caractère '%' est un commentaire. Il n'est pas pris en compte dans l'exécution et est donc facultatif.*

Les quatre courbes sont données par la figure 9.18.

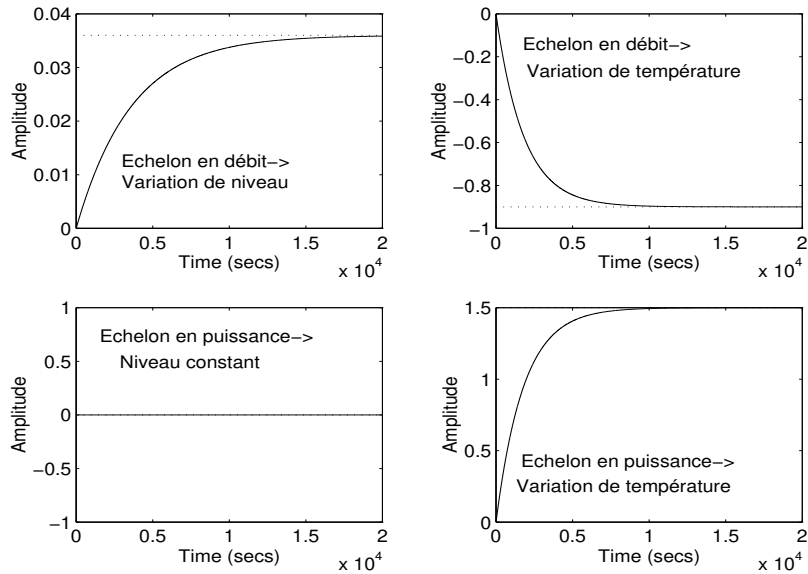


FIGURE 9.18 – Visualisation du couplage entre les commandes

Question :

Commenter les réponses.

Il s'agit maintenant de mettre en œuvre une régulation par retour d'état

$$u_k = Kx_k + Hy_{ck},$$

avec  $K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  et

$$y_{ck} = \begin{bmatrix} h_{ck} \\ \theta_{ck} \end{bmatrix},$$

(où  $h_{ck}$  et  $\theta_{ck}$  sont des consignes de niveau et de température) telle que les constantes de temps du système bouclé soient de 15 min et 16 min.

**Remarque 9.12** *Attention, la consigne est constituée de deux signaux à l'instar de la sortie qui se confond avec l'état ( $y_k = x_k$ ). De même, la commande est composée de deux signaux. Le système étudié est donc multivariable. De ce fait,  $K$  et  $H$  sont des matrices et non un simple vecteur et un simple scalaire.*

Questions :

- Donner le principe de calcul, avec MATLAB<sup>©</sup>, de la matrice  $K$  qui permet d'atteindre l'objectif désiré quant au régime transitoire (voir annexe H page 735).
- Calculer, toujours avec MATLAB<sup>©</sup>, la matrice de précommande  $H$  qui assure le découplage des commandes de température et de niveau en régime permanent.

Les résultats à trouver sont :

$$K = \begin{bmatrix} -6,846 \times 10^{-4} & 0 \\ -410,7311 & -483,4116 \end{bmatrix}$$

et

$$H = \begin{bmatrix} 9,612 \times 10^{-4} & 0 \\ 575,9 & 1149,7 \end{bmatrix}.$$

#### 9.9.4. Egalité et inégalité de Stein

L'enjeu de cet exercice est l'analyse de stabilité du système autonome décrit par

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & -1 \end{bmatrix} x_k = Ax_k.$$

Cette analyse peut se faire rapidement par un simple calcul des valeurs propres de la matrice d'état.

Question :

Calculer les valeurs propres de  $A$  et conclure.

Mais l'idée est ici de s'initier au critère de Stein, qui est le pendant

discret de la seconde méthode de Liapounov appliquée aux systèmes linéaires (cf. §9.5.5 page 515). Ce critère de Stein stipule que la stabilité asymptotique du système est équivalente à l'existence d'une matrice symétrique définie positive  $P$  telle que l'égalité (9.48) page 516 est satisfaite pour un choix arbitraire de  $Q$ , symétrique définie négative (égalité de Stein).

Question :

Résoudre l'égalité de Stein pour un choix simple de  $Q$  et conclure sur la stabilité.

Toutefois, le choix arbitraire de  $Q$  n'est pas impératif et il est possible, dans ce cas simple, de considérer directement l'inégalité de Stein, à savoir (9.47) page 516.

Question :

Déterminer une solution de l'inégalité de Stein et conclure sur la stabilité.

Mieux vaut bien sûr conclure trois fois la même chose !

## 9.10. Correction des exercices

### 9.10.1. Petit système de premier ordre

La fonction de transfert en  $p$  est donnée par la formule classique

$$G_c(p) = C_c(pI - A_c)^{-1}B_c + D_c,$$

avec, ici,  $A_c = -a$ ,  $B_c = C_c = 1$  et  $D_c = 0$ . Il vient donc

$$G_c(p) = \frac{1}{p+a}.$$

D'après le paragraphe 9.3.5.2 page 499, la fonction de transfert du système discret obtenu par échantillonnage à une période  $T$  et à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro est donnée par (formule (9.27) page 500)

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{G_c(p)}{p} \right) \right].$$

Avec le présent système, il vient

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{p(p+a)} \right) \right] \\ \Leftrightarrow G(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{ap} - \frac{1}{a(p+a)} \right) \right], \end{aligned}$$

après décomposition en éléments simples de l'expression en  $p$ . Ainsi, en utilisant le tableau donné en annexe au paragraphe E.3 page 706, on a

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{a(z-1)} - \frac{z}{a(z-e^{-aT})} \right) \\ \Leftrightarrow G(z) &= \frac{z-1}{az} \left( \frac{z(z-e^{-aT}) - z(z-1)}{(z-1)(z-e^{-aT})} \right) \\ \Leftrightarrow G(z) &= \frac{(1-e^{-aT})}{a(z-e^{-aT})}. \end{aligned}$$

En partant de la réalisation continue, une réalisation discrète peut être obtenue par les formules (9.36) page 503, ce qui, ici, conduit à

$$A = e^{-aT}, \quad B = \int_0^T e^{-a\alpha} d\alpha = \frac{1}{a}(1 - e^{-aT}),$$

$$C = 1, \quad D = 0.$$

(Le bloqueur d'ordre zéro est toujours pris en compte.) De ce fait il est facile de retrouver la fonction de transfert en  $z$  :

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B = \frac{(1 - e^{-aT})}{a(z - e^{-aT})}.$$

Pour obtenir la réponse indicielle de ce système discret, la relation (9.43) page 506 peut être utilisée et conduit, pour  $x_0 = 4$ , à

$$y_k = 4(e^{-aT})^k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{a}(e^{-aT})^{k-j-1}(1 - e^{-aT}).$$

L'application de cette formule donne les premiers échantillons (après de légers calculs) :

$$y_0 = 4, \quad y_1 = \frac{1}{a} \left( 4 - \frac{1}{a} \right) e^{-aT}, \quad y_2 = 4e^{-aT} + \frac{1}{a} (1 - e^{-2aT}).$$

La seconde méthode consiste simplement à remarquer que  $y_k = x_k$  et à utiliser l'équation récurrente (première équation du modèle d'état discret)

$$x_{k+1} = e^{-aT}x_k + \frac{1}{a}(1 - e^{-aT})u_k$$

avec  $u_k = 1 \forall k \in \mathbb{N}$ . Ceci conduit bien sûr aux mêmes valeurs de  $y_k$ .

Le système échantillonné est asymptotiquement stable si l'unique pôle  $e^{-aT}$  (forcément réel) possède un module strictement inférieur à 1. Il est clair que

$$e^{-aT} < 1 \Leftrightarrow a > 0.$$

De façon alternative, le système échantillonné est stable si et seulement si le modèle continu de départ l'est. Or, ce dernier est stable si son



unique pôle  $-a$  (réel) est négatif ce qui s'exprime aussi  $a > 0$ .

Enfin, si  $a = 2$ , cela veut dire que l'unique fréquence qui caractérise la dynamique du système continu est de 2Hz ou encore que l'unique constante de temps est de 0,5s ce qui, si la règle **pratique** de Shannon, donnée en §9.3.3 page 490, est appliquée, conduit à prendre une période d'échantillonnage au moins dix fois plus petite :

$$T \leq 0,05\text{s.}$$

### 9.10.2. Le revenu national

Il convient de prendre comme vecteur d'état celui qui contient des variables pour lesquelles il existe une expression à l'instant  $(k + 1)$  :

$$x_k = \begin{bmatrix} c_k & i_k \end{bmatrix}'.$$

Or,

$$c_{k+1} = \alpha y_k = \alpha c_k + \alpha i_k + \alpha u_k + \alpha e_k$$

et

$$i_{k+1} = \beta(c_{k+1} - c_k) = \beta(\alpha - 1)c_k + \beta\alpha i_k + \beta\alpha u_k + \beta\alpha e_k.$$

Il en résulte que

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta(\alpha - 1) & \beta\alpha \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta\alpha \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta\alpha \end{bmatrix} e_k, \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_k + u_k + e_k. \end{cases}$$

Pour  $\alpha = 0,75$  et  $\beta = 1$ , la matrice  $A$  est égale à

$$A = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,75 \\ -0,25 & 0,75 \end{bmatrix}$$

Son polynôme caractéristique s'écrit

$$D(z) = (z - 0,75)^2 + 0,75 \times 0,25 = z^2 - 1,5z + 0,75.$$

Les racines de ce dernier sont  $0,75 \pm 0,433i$  dont les modules sont tous deux égaux et inférieurs à 1. Le système est donc stable (cf. §9.5.2 page 511).

Pour  $\alpha = 0,75$  et  $\beta = 1$ , la matrice  $A$  est égale à

$$A = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,75 \\ -0,375 & 1,125 \end{bmatrix}$$

Son polynôme caractéristique s'écrit

$$D(z) = (z - 0,75)(z - 1,125) + 0,75 \times 0,375 = z^2 - 1,875z + 1,125.$$

Les racines de ce dernier sont proches de  $0,9375 \pm 0,4961i$  dont les modules sont tous deux supérieurs à 1. Le système est donc instable (cf. §9.5.2).

La matrice de commandabilité de Kálmán est (cf. §9.6.2 page 520)

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = Q_c = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha^2(\beta + 1) \\ \beta\alpha & \beta\alpha(2\alpha - 1) \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang plein dans les gammes autorisées pour  $\alpha$  et  $\beta$ , ce qui implique la commandabilité (par la commande  $u_k$  bien sûr).

La matrice d'observabilité de Kálmán est (cf. §9.6.2 page 520)

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha - \beta + \alpha\beta & \alpha + \beta\alpha \end{bmatrix}.$$

Elle est toujours de rang plein ce qui implique l'observabilité.

### 9.10.3. Nouveau plongeon dans la cuve

L'application des formules données en (9.36) page 503 conduit à

$$A = e^{A_c T} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{QT}{2SH}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{QT}{SH}} \end{bmatrix}$$

$$B = \int_0^T e^{A_c \alpha} B_c d\alpha$$

$$B = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-\frac{Q\alpha}{2SH}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{Q\alpha}{SH}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 \\ \frac{\theta_e - \theta_s}{SH} & \frac{Q(\theta_s - \theta_e)}{SHP} \end{bmatrix} d\alpha$$

$$B = \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{1}{S} e^{-\frac{Q\alpha}{2SH}} & 0 \\ \frac{(\theta_e - \theta_s)}{SH} e^{-\frac{Q\alpha}{SH}} & \frac{Q(\theta_e - \theta_s)}{SHP} e^{-\frac{Q\alpha}{SH}} \end{bmatrix} d\alpha$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{2H}{Q} \left( e^{-\frac{QT}{2SH}} - 1 \right) & 0 \\ -\frac{(\theta_e - \theta_s)}{Q} \left( e^{-\frac{QT}{SH}} - 1 \right) & \frac{(\theta_e - \theta_s)}{P} \left( e^{-\frac{QT}{SH}} - 1 \right) \end{bmatrix}$$

Dans les lignes de code MATLAB<sup>©</sup> proposées, `ac`, `bc`, `cc`, et `dc` désignent les matrices de la réalisation continue. Puis les composantes des matrices de la réalisation discrète sont constituées une à une et servent à construire, selon les expressions ci-avant, les matrices `a`, `b`, `c`, et `d` qui forment donc une réalisation discrétisée du procédé. Il faut noter que les unités utilisées étant les unités de base du système international, la période d'échantillonnage  $T$  est exprimée en secondes. Ensuite, l'instruction `c2d` permet d'obtenir de façon alternative et plus directe le même modèle échantillonné qui est « rangé » dans les variables `A`, `B`, `C`, et `D`. Elles contiennent alors les mêmes valeurs que `a`, `b`, `c`, et `d`. Les quatre dernières lignes de code proposées conduisent donc toutes à des matrices, vecteurs ou scalaires nuls. Il s'agit là d'une simple vérification.

Sur les réponses indicielles, on constate un certain couplage entre les grandeurs physiques du système. Ainsi, une excitation sur la première entrée entraîne, certes, une réponse de la première sortie mais aussi de la seconde. En revanche, une excitation sur la seconde entrée, si elle implique bien sûr une évolution de la seconde sortie, n'entraîne pas de variation de la première sortie. Ceci s'explique simplement : en effet, si l'on augmente le débit entrant (consigne sur la première entrée), le niveau doit augmenter (évolution de la première sortie : +4cm) mais aussi la température du fluide en sortie (seconde sortie diminuée de 1°C par cet apport de fluide à la température  $\theta_e$ ). À l'opposé, lorsque l'on augmente le chauffage (excitation sur la seconde entrée), s'il est normal que la température du fluide sortant augmente (seconde sortie : +1,5°C), le niveau (première sortie), en l'absence d'évolution des débits ou d'évaporation, ne doit pas varier.

On souhaite imposer au procédé continu des performances en termes de temps de réponse, à savoir, 15 min et 16 min, c'est-à-dire  $\tau_1 = 900$  s et  $\tau_2 = 960$  s. Ces temps de réponse correspondent à des pôles du système continu de  $\lambda_1 = -1/\tau_1$  et  $\lambda_2 = -1/\tau_2$ . Ceci revient à placer les pôles suivants sur le système échantillonné à la période  $T = 6$  min = 360 s :

$$\mu_1 = e^{\lambda_1 T} = e^{-\frac{T}{\tau_1}} = e^{-0.4} \quad ; \quad \mu_2 = e^{\lambda_2 T} = e^{-\frac{T}{\tau_2}} = e^{-\frac{3}{8}}$$

Dès lors, il faut calculer une matrice de retour d'état  $K$  qui puisse placer les valeurs propres de  $A+BK$ . Ceci ne peut malheureusement pas se faire par la technique présentée au chapitre 7 (c'est-à-dire la formule de Bass-Gura) car celle-ci ne s'applique qu'aux systèmes à une seule commande. Les extensions aux systèmes à plusieurs commandes existent mais sont un peu fastidieuses à étudier. Il est également impossible d'utiliser la formule d'Ackermann<sup>38</sup> (cf. annexe C). Aussi opte-t-on ici pour une solution numérique offerte par MATLAB<sup>©</sup> et la fonction `place`. Elle peut s'utiliser ici car les pôles sont distincts donc de multiplicité moindre que le nombre de commandes. Les instructions à utiliser sont :

```
>> format long
>> K=-place(A,B,[exp(-360/900) exp(-360/960)])
place: ndigits= 15
```

K =

1.0e+04 \*

```
-0.00000006845518  -0.0000000000000000
-4.10731065281363  -0.04834115605057
```

Il faut être prudent car l'instruction `place` introduit un signe '-' dans la loi de commande ( $u = -Kx$ ) d'où le signe '-' dans la seconde instruction.

L'instruction `format` permet de faire apparaître plus de chiffres significatifs car les arrondis pourraient avoir des conséquences sur la localisation des pôles. Le fait qu'un résultat soit trouvé garantit la commandabilité. Il est toutefois possible de la vérifier en tapant

```
>> rank(ctrb(A,B))
```

qui donne le rang de la matrice de commandabilité de Kalman  $Q_c$ . Le résultat est bien égal à  $n = 2$ .

Pour calculer la matrice  $H$  de précommande, on peut se référer au paragraphe 7.3 page 308 et l'adapter au cas discret (voir §9.7.3.2, page 529) mais il faut être prudent puisque le système comporte deux entrées et deux sorties. Cependant, comme le système reste carré (nombre de commandes égal au nombre de sorties), la logique reste bien la même. Pour que les transferts consignes-sorties soient découplés en régime permanent, il faut que le gain statique du système bouclé, précédé du bloc de précommande  $H$ , soit égal à la matrice identité d'ordre  $n = 2$ .

$$G_{bf}(z) = C(zI_n - A - BK)^{-1}BH = I_n \quad \text{pour } z = 1$$

$$\Rightarrow H = ((I_n - A - BK)^{-1}B)^{-1}$$

Ce qui change, donc, par rapport à §7.3 page 308, c'est que le gain statique est calculé en  $z = 1$  (et non en  $p = 0$ ) et qu'il ne doit plus être égal à 1 mais à  $I_2$  (deux entrées et deux sorties). De ce fait l'inversion à réaliser est matricielle. Le calcul numérique est réalisé avec MATLAB<sup>©</sup> grâce aux lignes de code suivantes :

```
>> Abf=A+B*K;
>> H=inv(inv(eye(2)-Abf)*B)
```

H =

```
1.0e+04 *

0.00000009623296    0.000000000000000
5.77397731969620    0.11500782271618
```

Ceci se traduit donc par

$$H = \begin{bmatrix} 9,612 \times 10^{-4} & 0 \\ 575,9 & 1149,7 \end{bmatrix}.$$

Il est possible de vérifier que les performances souhaitées sont atteintes grâce à la simulation suivante :

```
>> Bbf=B*H; % matrice de commande en boucle fermée
>> nn=0:30; % nombre d'échantillons simulés
>> yc1=ones(1,31); % échelon sur la première consigne
>> yc2=zeros(1,31); % rien sur la seconde
>> yc=[yc1;yc2]; % construction de la consigne
% globale (deux signaux)
>> y=dlsim(Abf,Bbf,C,D,0.1*yc); % consigne de 10 cm = 0.1m
% et calcul de la sortie
>> plot(nn,y(:,1),'*'); % tracé de la première
% sortie (niveau) avec des '*'
>> hold on; % figure figée
>> plot(nn,y(:,2),'o'); % tracé la seconde sortie
>> % (température) sur la même courbe mais avec des 'o'.
>> hold off; % suraffichage inhibé.
>> plot(nn,y(:,2),'o'); % tracé de la réponse
% en température (seconde sortie)
% => changement d'échelle.
```

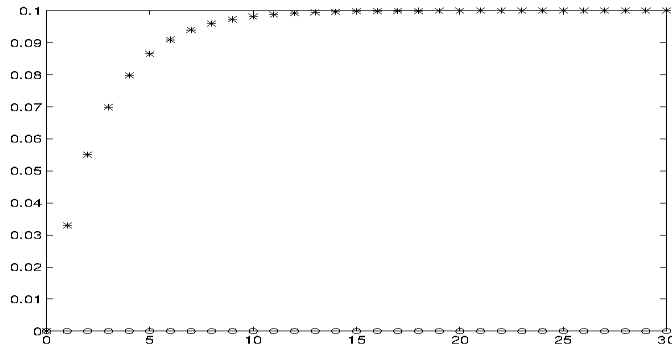


FIGURE 9.19 – Réponse des deux sorties à une consigne en échelon de 10cm

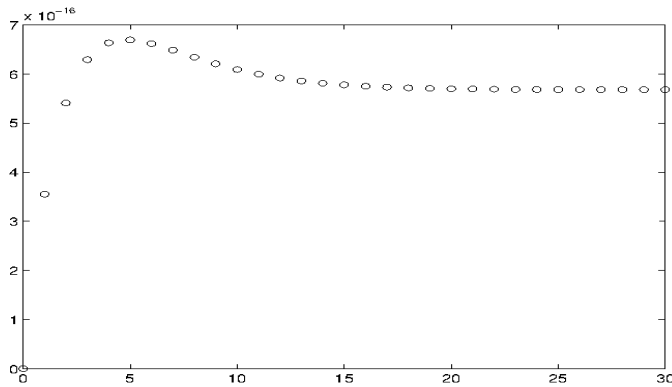


FIGURE 9.20 – Réponse en température à une consigne en échelon de 10cm

```
>> yc=[yc2;yc1]; % inversion des deux signaux
% => échelon sur la première consigne.
```

```
>> y=dlsim(Abf,Bbf,C,D,10*u'); % consigne de 10 degrés  
% et calcul de la sortie.  
>> plot(nn,y(:,2),'o'); % tracé de la seconde sortie  
% (température) avec des 'o'.  
>> hold on; % figure figée  
>> plot(nn,y(:,1),'*'); % tracé de la première sortie  
% (niveau) avec des '*' sur la même courbe.  
>> hold off; % suraffichage inhibé.  
>> plot(nn,y(:,1),'*'); % tracé de la réponse en niveau  
% (première sortie) sur une courbe à part.
```

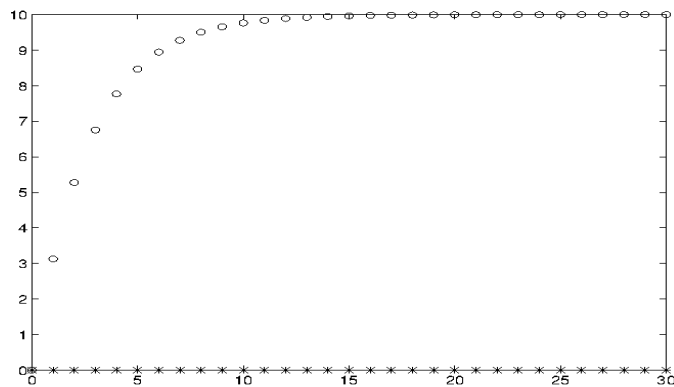


FIGURE 9.21 – Réponse des deux sorties à une consigne en échelon de 10°C



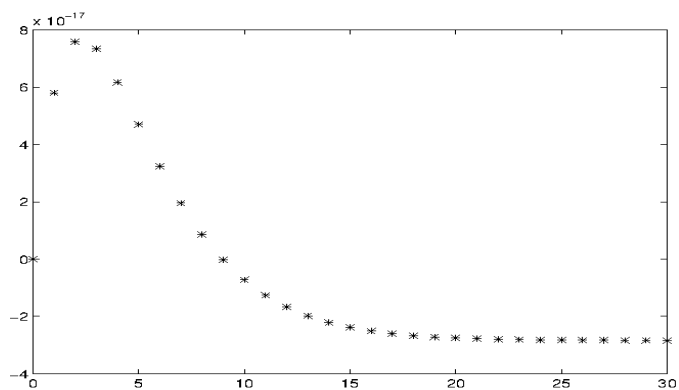


FIGURE 9.22 – Réponse en niveau à une consigne en échelon de 10°C

Ces instructions permettent de tracer les réponses indicielles du système discret bouclé à un échelon de 0,1 m sur la consigne en niveau puis à un échelon de 10°C sur la consigne en température ('\*' représente l'évolution du niveau et 'o' représente l'évolution de la température).

À chaque échelon, on donne les réponses des deux sorties sur le même graphique puis la réponse de la sortie qui est sensée rester nulle en régime permanent (cf figures 9.19 à 9.22).

On constate sur ces courbes que les temps de réponse espérés sont atteints et que le découplage souhaité est effectif en régime permanent mais également excellent en régime transitoire ce qui n'était pas garanti par le calcul de  $H$  (c'est une surprise agréable mais qui n'a pas de raison de se reproduire sur un autre exemple). Les gains statiques sont bien unitaires.

#### 9.10.4. Egalité et inégalité de Stein

Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\det(pI - A) = p^2 + p + 0.5.$$

Ses racines (les pôles du système) sont  $-\frac{1}{2} \pm \frac{j}{2}$  dont les modules sont égaux à  $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ . Le système est donc asymptotiquement stable.

Pour résoudre l'égalité de Stein, le choix le plus simple est de prendre  $Q = -I_2$ , qui est bien symétrique définie négative. Il faut alors déterminer

$$P = P' = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

de telle sorte que

$$-P + A'PA = -I_2.$$

Ceci conduit au système d'équations

$$\begin{cases} 0,25p_3 - p_1 & = & -1, \\ 0,5p_3 - 1,5p_2 & = & 0, \\ p_1 - 2p_2 & = & -1. \end{cases}$$

Ce système admet comme solution

$$p_1 = \frac{11}{5}, \quad p_2 = \frac{8}{5}, \quad p_3 = \frac{24}{5}.$$

Il faut maintenant vérifier la définition positive de  $P$ , ce qui peut se faire en utilisant le test des mineurs (c'est-à-dire le critère de Sylvester donné en annexe, §A.2.2 page 668) :

$$p_1 = \frac{11}{5} > 0 \quad \text{et} \quad p_1p_3 - p_2^2 = 8 > 0.$$

Tous les mineurs principaux dominants sont strictement positifs donc la matrice de Stein  $P$  est strictement définie positive ce qui signifie que le système est asymptotiquement stable.

Si l'on se contente d'utiliser l'inégalité de Stein, c'est-à-dire si l'on s'affranchit du choix de  $Q < 0$ , alors cette inégalité revient à  $-P + A'PA < 0$ , que l'on peut écrire  $P - A'PA > 0$  et qui, toujours selon le critère de Sylvester, est équivalente à

$$\begin{cases} 0,25p_3 - p_1 & > & 0, \\ (0,25p_3 - p_1)(p_1 - 2p_2) - (0,5p_3 - 1,5p_2)^2 & > & 0. \end{cases}$$

Il existe une infinité de solutions à cette inégalité (il s'agit d'un ensemble convexe dans l'espace de dimension 3 des vecteurs  $p = [p_1 \ p_2 \ p_3]'$ ). Parmi les solutions possibles, en voici une :

$$p_1 = 3, \quad p_2 = 1, \quad \text{et} \quad p_3 = 16.$$

Comme précédemment, il vient

$$p_1 = 16 > 0 \quad \text{et} \quad p_1 p_3 - p_2^2 = 47 > 0,$$

donc la matrice  $P$  est strictement définie positive, prouvant ainsi la stabilité asymptotique du système.

**Remarque 9.13** *C'est une assertion non triviale que de dire que toute solution trouvée à l'inégalité de Stein (comme à celle de Liapounov en continu) est obligatoirement strictement définie positive dès lors que le système est asymptotiquement stable. Autrement dit, lorsque la matrice  $A$  est Schur-stable (resp. Hurwitz-stable en continu) il est impossible de trouver dans l'ensemble des solutions de l'inégalité de Stein (resp. de Liapounov) une solution  $P$  qui ne soit pas strictement définie positive.*

## 9.11. Notes et références

Les équations récurrentes sont des entités classiques en mathématiques qui remontent à des temps fort lointains. L'auteur ne s'aventure donc pas à en brosser un bref historique, ce par peur du ridicule. Le lecteur peut se référer à quantité d'ouvrages sur l'histoire des mathématiques. Voilà tout ce qui sera écrit ici sur le premier modèle externe. Quant à la représentation d'état discrète, elle n'est que l'extension matricielle naturelle de ces équations récurrente, et une fois l'idée connue de passer des équations différentielles à la représentation d'état continue, l'analogie au cas discret semble elle aussi naturelle. S'il fallait citer des références à ce propos, beaucoup de celles du chapitre 3 semblent appropriées.

Pour ce qui est du modèle externe, la fonction de transfert en  $z$ , comme il a été mentionné au paragraphe 9.2.2.2 page 481, la transformation en  $z$  aurait été plus ou moins attribuée à Pierre S. de Laplace<sup>39</sup>. Sans doute Laplace n'avait-il pas formalisé cet outil aussi précisément que cela est fait aujourd'hui. Certains auteurs font même remonter cette notion à Leonardo Fibonacci, dit Leonardo Pisano<sup>40</sup>. En effet, il avait un outil « systématique » pour résoudre les problèmes liés à ses fameuses suites éponymes, cet outil pouvant s'apparenter à la transformation en  $z$ . L'auteur croit pourtant qu'il ne faut pas remonter jusqu'à cette époque pour évoquer  $\mathcal{Z}$ . Certes,  $\mathcal{Z}$  peut être exploitée pour résoudre les problèmes de Fibonacci de façon assez équivalente à ce qu'il faisait lui-même et l'on trouve aujourd'hui de nombreux ouvrages illustrant l'application de  $\mathcal{Z}$  à l'étude des suites de Fibonacci. Ce n'est pas pour autant qu'il faille conclure que Fibonacci avait « inventé » avant l'heure la transformation en  $z$ . À la vue des définitions formelles qui en sont données, on voit bien que  $\mathcal{Z}$  va un peu plus loin que cela, sans rien enlever au mérite du grand mathématicien pisan. L'auteur se contente donc d'évoquer des sources plus récentes et à ce titre, Laplace mérite sans doute plus d'y figurer. Quelle que soit l'origine de  $\mathcal{Z}$ , cette transformation fut remise au goût du jour et popularisée par J. R. Ragazzini<sup>41</sup> et L. Zadeh<sup>42</sup>, comme rappelé en §9.2.2.2 page 481 [1]. Cependant, loin de s'attribuer la paternité de cet outil, Ragazzini et Zadeh citèrent Witold Hurewicz<sup>43</sup>

---

39. voir biographie 2.1 page 40.

40. mathématicien italien du XIIIe siècle (1175-1250).

41. voir biographie 9.1 page 483.

42. Lotfi Aliasker Zadeh (1921-2017), mathématicien et ingénieur d'origine azeri et russe, spécialiste d'électricité, d'informatique et d'intelligence artificielle, reconnu comme le père la logique floue.

43. mathématicien polonais (1904-1956)

et firent remonter cette « découverte » à 1947. Il est aussi possible de de référer au travail d'Eliahu I. Jury<sup>44</sup> [2] pour en connaître un peu plus.

Mais les mathématiciens virent dans cet outil la même idée que celles des séries génératrices introduites dans la théorie des probabilités par Abraham de Moivre<sup>45</sup> en 1730, comme expliqué dans [3] : le fait que, du point de vue strictement mathématique, la transformation en  $z$  est une application qui transforme une suite, définie sur les entiers, en une fonction d'une variable complexe nommée  $z$ . Mais même si des outils comparables existaient bien avant le travail de W. Hurewicz, il faut tout de même s'attarder sur ce qui préoccupe un automaticien. Du point de vue de l'auteur, l'introduction de  $\mathcal{Z}$  compte aussi pour le cadre dans lequel elle intervint. En effet, il serait possible de mettre en évidence de façon plus précise et plus rigoureuse les liens existant entre  $\mathcal{L}$  (la transformation de Laplace),  $\mathcal{F}$  (celle de Fourier) ou encore la transformation de Fourier discrète, et  $\mathcal{Z}$ . Et ce fut bien dans les travaux plus récents de W. Hurewicz ou dans les écrits de Ragazzini, Zadeh et quelques autres, consacrés à l'étude des systèmes *échantillonnés*, que ces liens devinrent patents. Le point de vue mathématique sur  $\mathcal{Z}$  envisage souvent le signal (ou le système) comme un système discret indépendamment d'un éventuel échantillonnage antérieur, il n'offre pas toujours cette vision fréquentielle que suggère les travaux plus récents.

Ce qui ressort de tout cela, c'est qu'il n'est pas aisé de déterminer avec certitude l'origine ou la paternité de  $\mathcal{Z}$ . Comme bien souvent, ce sont plusieurs contributions qui aboutirent à des concepts qui sont aujourd'hui véhiculées sous des formes à peu près arrêtées. Beaucoup de découvertes sont associées à un seul nom mais on sait bien que ce sont des bouillons de culture qui, souvent, font émerger les grandes idées (avec parfois, il est vrai, l'aide du hasard) et l'Histoire préfère ne retenir qu'un seul nom.

Cette difficulté objective à attribuer la paternité d'une découverte ou d'un résultat se retrouve avec le théorème de Shannon<sup>46</sup>. La référence la plus communément admise concernant ce théorème est [4] où Shannon jeta les prémisses de sa future *théorie de l'information*. Il y démontra ledit théorème. Ce théorème est ainsi appelé depuis environ 1960 mais entre 1949 et 1960, il était plutôt appelé « théorème de Nyquist-Shannon » car il semble que des travaux antérieurs de Nyquist<sup>47</sup> avaient posé en 1928 de bonnes bases à l'établissement du théorème [5]. Il semble aussi qu'à l'usage, la contribution de Nyquist n'ait plus

---

44. ingénieur états-unien né à Bagdad (1923-).

45. mathématicien français (1667-1754).

46. voir biographie 9.2 page 492.

47. cf. biographie 2.4 page 43.

été retenue. Il n'appartient pas à l'auteur de trancher sur une question aussi subtile. Mieux vaut sans doute conserver ce que la cuisine interne des Laboratoires Bell a souhaité conserver. Il faut cependant noter un autre résultat, dû à Karl Küpfmüller<sup>48</sup> en 1928, comparable semble-t-il au travail de Shannon, et de source totalement différente : [6]. D'autres auteurs remarquent que Vladimir A. Kotelnikov<sup>49</sup> avait aussi établi une proposition comparable au théorème de Shannon [7]. Comme il peut-être de nouveau compris, il n'est pas simple de rendre à César<sup>50</sup> ce qui lui appartient. Du reste Shannon ne s'attribue en aucun cas cette découverte et, s'il propose son point de vue et une démonstration dans le cadre d'une utilisation, il présente même ce résultat comme étant bien connu dans la théorie de la communication. Aussi, sans doute conviendrait-il de faire preuve de prudence en parlant plutôt de théorème d'échantillonnage comme le fait Christopher C. Bissell<sup>51</sup> dans [9]. C'est d'autant plus vrai que, comme pour la transformation en  $z$ , les mathématiciens avaient établi ce résultat sous des formes différentes. Ce fut le cas de Edmund T. Whittaker<sup>52</sup> [10], de son fils John M. Whittaker<sup>53</sup>, et de Dennis Gabor<sup>54</sup> [8].

Le critère de stabilité de Jury, seulement évoqué au paragraphe 9.5.4 page 515, est une déduction faite du critère de Routh-Hurwitz présenté au paragraphe 5.3.2 page 211. Une transformation bilinéaire de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  sur  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  permet en effet de transformer le disque unitaire en le demi-plan complexe gauche. Un polynôme en  $z$  dont on veut tester la stabilité au sens de Schur<sup>55</sup> (discret) peut donc être ainsi transformé en un polynôme en  $w$  (c'est la notation souvent utilisée après la transformation bilinéaire) qui doit être stable au sens de Hurwitz (continu). L'application du critère de Hurwitz est réinterprétée en termes de conditions sur les coefficients du polynôme original en  $z$  ce qui conduit à la formulation du *critère de Jury* qui fut donc établi en 1971 par Eliahu I. Jury [12,13]. Il faut souligner que si le critère de Jury est resté dans les annales, il existait déjà un critère mathématique pour affirmer l'appartenance des racines d'un polynôme

---

48. ingénieur allemand (1897-1977).

49. théoricien russe de l'information (1908-2005).

50. Jules César, *alias Caius Julius Caesar IV*, général politicien et écrivain romain (100-44 av. J C.) qui s'est inventé une victoire dans un lieu qui n'existe pas, à savoir Alésia ou Alégia.

51. scientifique britannique connu entre autres pour ses travaux sur l'histoire de l'Automatique.

52. Edmund Taylor Whittaker, mathématicien britannique (1873-1956).

53. John Macnaghten Whittaker, mathématicien britannique (1905-1984).

54. ou encore Denés Gábor, physicien et ingénieur électricien hongrois (1900-1979).

55. du nom d'Issai Sadi Schur, mathématicien d'origine russe (1875-1941).

au disque unitaire : celui de Schur-Cohn<sup>56</sup>, qui apparut pour la première fois dans [14,15]. Ceci explique que cette stabilité soit souvent appelée *stabilité au sens de Schur*.

Concernant les développements sur les versions discrètes de l'inéquation et de l'équation de Liapounov<sup>57</sup> qui figurent au paragraphe 9.5.5 page 515 et qui sont exploitées pour la commande au paragraphe 9.7.5 page 532, il convient de savoir que ce ne sont que l'analogie discrète de ce qui fut tiré de l'exploitation de l'œuvre de Liapounov en continu [16]. Mais les versions discrètes ne furent pas établies par Liapounov. Elles sont plutôt attribuées à P. Stein [17]. Ceci n'empêche pas une interprétation énergétique en termes de fonction de Liapounov dont on constaterait le décrétement au cours du temps. Le lecteur pourra tirer profit de l'annexe F et, surtout, des références qui y sont citées.

Enfin pour ce qui relève de l'étude des modèles discrets en général, l'auteur se contentera essentiellement d'une seule référence en anglais, même s'il en existe beaucoup d'autres : l'incontournable livre de K. Ogata [18]. Peut-être les livres [19,20] peuvent-ils accompagner cette référence. Sur le plan plus « historique », outre [23], on peut citer [21,22]. Par ailleurs, en Français, un polycopié de cours très bien fait mais peut-être difficile à trouver est celui de Bernard Pardin : [23].

1. **J. R. Ragazzini et L. A. Zadeh** : The Analysis of Sampled-Data Systems. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 71(II), p.225-234, 1952.  
*Une des toutes premières références (souvent la première citée) sur la transformation en  $z$ .*
2. **E. I. Jury** : *Sampled-Data Control Systems*. John Wiley & Sons, 1958.  
*Un des premiers ouvrages de référence sur les systèmes échantillonnés.*
3. **E. I. Jury** : *Theory and Application of the Z-Transform Method*. John Wiley & Sons, 1964.  
*Où l'on trouve beaucoup d'information sur la transformation en  $z$ .*
4. **C. E. Shannon** : Communication in the Presence of Noise. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 37(1), p.10-20, 1949.

---

56. Arthur Cohn était un élève d'Issaï Schur.

57. mathématicien et physicien russe (1857-1918) : voir sa biographie en annexe page 772.

- Réédité dans *Proceedings of the IEEE*, 68(2), p. 447-457, 1998.  
Le théorème de Shannon par lui-même, avec la démonstration.
5. **H. Nyquist** : Certain Topics in Telegraph Transmission Theory. *AIEE Transactions*, avril 1928. Réédité dans *Proceedings of the IEEE*, 90(2), p. 280-305, 2000.  
*Nyquist préparant peut-être le « futur » théorème de Shannon.*
  6. **K. Küpfmüller** : Über die Dynamiker der Selbsttätigen Verstärkungsregler. *Elektrische Nachrichtentechnik*, 5(11), p. 459-467, 1928.  
*Shannon avant l'heure par un ingénieur allemand ?*
  7. **V. A. Kotelnikov** : On the transmission capacity of "ether" and wire in electrocommunications. Dans *Modern Sampling Theory : Mathematics and Applications*, Birkhauser (Boston) 2000. Version anglaise du texte original paru dans *Izd. Red. Upr. Svyazzi RSKA*, 1933.  
*Encore le théorème de Shannon avant l'heure par un théoricien russe des communications. Le titre est amusant !*
  8. **D. Gabor** : Theory of communication : Part 1 : The analysis of information. *Journal of the Institute of Electrical Engineering*, 93(3), p. 429-457, 1946.  
*Encore le théorème de Shannon juste un peu avant l'heure par un ingénieur hongrois*
  9. **C. Bissell** : The Sampling Theorem *Communications Engineers, IET, United Kingdom, 2007.*  
*Une histoire du théorème de l'échantillonnage par C. Bissell.*
  10. **E. T. Whittaker** : On the Functions Which are Represented by the Expansions of the Interpolation Theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 35, p. 181-194, 1915.  
*Peut-être le premier théorème d'échantillonnage mais vu par un mathématicien.*
  11. **J. M. Whittaker** : *Interpolation function theory.* collection « Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics », Cambridge University Press., 1935.  
*Ou quand l'œuvre du père est achevée par le fils (voir [10]).*
  12. **E. I. Jury** : Inners, approach to some problems of system theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16, p. 233-240, 1971.  
*Le critère de Jury dans sa version originale.*
  13. **E. I. Jury** : *Inners and stability of dynamic systems.* John Wiley & Sons, 1974.



Un ouvrage de référence sur la stabilité avec un point de vue polynomial et des références « historiques ».

14. **I. Schur** : Über Potenzenreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (I). *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 147, p. 205-232, 1917.

Le critère aujourd'hui appelé Critère de Schur-Cohn, initialement dû à Schur et qui explique que la stabilité des systèmes discrets soit appelée stabilité au sens de Schur.

15. **I. Schur** : Über Potenzenreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (II). *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 148, p. 122-145, 1918.

La seconde partie de l'article [14].

16. **A. M. Liapounov** : *Problème général de stabilité du mouvement*. Annales de la faculté de sciences de Toulouse, vol 9. p.203-474, 197. Traduit du texte original russe, publié dans Comm. Soc. Math., Kharkov, 1892. Une véritable mine d'idées à la fois simples mais très fortes, très puissantes, qui inspirèrent et inspirent encore de très nombreux automaticiens mais aussi bien des chercheurs d'autres disciplines scientifiques. C'est essentiellement sa « seconde méthode » ou « méthode directe » qui génère (toujours) de nombreux travaux sur la stabilité des systèmes.

17. **P. Stein** : Some general theorems on iterants. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 48, p. 82-83, 1952.

La version discrète de l'équation de Lyapunov pour analyser la « stabilité » au sens de Schur d'une matrice (donc d'un système linéaire discret).

18. **K. Ogata** : *Discrete-time control systems- Second edition* Prentice Hall, 1995.

Ouvrage très complet spécifiquement dédié à l'analyse et la commande des systèmes linéaires discrets.

19. **K. J. Aström and B. Wittenmark** : *Computer Controlled Systems : Theory and Design* Prentice Hall, 1984.

Une référence possible pour comprendre les systèmes discrets.

20. **G. F. Franklin, J. D. Powell and M. L. Workman** : *Digital Control of Dynamic Systems* Deuxième édition, Addison-Wesley Publishing, 1990  
Une référence assez didactique sur les systèmes discrets.

21. **J. R. Ragazzini et G. F. Franklin** : *Sampled-Data Control Systems* Prentice Hall, 1958.

Une référence sur les systèmes discrets par des pionniers dans le domaine.

22. **J. T. Tou** : *Digital Sampled-Data Control Systems* McGraw Hill, 1959.  
*Une autre référence, ancienne, sur les systèmes discrets.*
23. **B. Pradin** : *Polycopié de cours d'Automatique* : « *Automatique linéaire - Systèmes à temps discret* » INSA de Toulouse, 4ème année spécialité AEI. Edition 1995.  
*Notes de cours particulièrement didactiques pour s'initier aux joies des systèmes linéaires discrets.*

## Chapitre 10

### *Étude d'un cas d'école : asservissement d'une boule en sus- pension magnétique*

Dans ce chapitre, un exemple académique est étudié : celui de l'asservissement de l'altitude d'une boule métallique en suspension dans l'air grâce à la force magnétique générée par un électroaimant. Ce type de procédé est connu sous l'appellation de *suspension magnétique*, *sustentation magnétique* ou encore *lévitation magnétique*.

Il s'agit pour l'étudiant de retrouver quelques concepts vus dans certains chapitres antérieurs et de voir leur application sur un cas concret, pas forcément trivial. Le but recherché en présentant cette étude de cas, est de montrer que, même si les divers outils ou procédures exposés dans ce cours peuvent parfois être, respectivement, utilisés « clef en main » ou suivis « à la lettre », ils fournissent avant tout au futur ingénieur des éléments de compréhension des fondements de la discipline qui lui permettront ensuite de s'adapter aux divers problèmes rencontrés. Si le lecteur parvient à suivre tout le raisonnement de ce chapitre, il peut estimer que sa compréhension des chapitres 1 à 7 est assez bonne.

## Sommaire

---

<b>10.1</b>	<b>Présentation du système . . . . .</b>	<b>565</b>
<b>10.2</b>	<b>Modélisation du procédé . . . . .</b>	<b>568</b>
10.2.1	Obtention d'un premier modèle non linéaire . . . . .	568
10.2.2	Linéarisation du modèle . . . . .	570
10.2.3	Réduction du modèle linéaire . . . . .	572
<b>10.3</b>	<b>Identification des paramètres . . . . .</b>	<b>574</b>
10.3.1	Idée initiale : utilisation des formes canoniques de deuxième ordre . . . . .	575
10.3.2	Stabilisation du modèle . . . . .	576
10.3.3	Identification de la boucle fermée . . . . .	580
10.3.4	Identification de la boucle ouverte . . . . .	581
<b>10.4</b>	<b>Asservissement en position . . . . .</b>	<b>582</b>
<b>10.5</b>	<b>À propos du train à suspension magnétique . . . . .</b>	<b>587</b>
<b>10.6</b>	<b>Notes et références . . . . .</b>	<b>591</b>

---

Il convient de remarquer que la suspension magnétique est un « classique » des ouvrages d'Automatique, pour ce qui relève de l'approche fréquentielle. Elle est nettement moins souvent abordée dans le cadre de la représentation d'état (qui est de toute façon elle-même bien moins détaillée). Pour faciliter la compréhension du lecteur, un certain nombre de points seront légèrement travestis par rapport à la réalité (valeurs numériques arrondies, courbes de réponses nettoyées des bruits de mesure, légers aménagements pratiques éludés etc.) mais l'ensemble de la démarche peut néanmoins tout à fait s'appliquer sur un exemple réel, comme pourrait en témoigner l'expérience de l'auteur.

Après une présentation du système et de l'objectif à atteindre, une phase de modélisation est détaillée. Il ne s'agit pas tant de décrire avec précision le comportement du système que de l'approcher par un modèle linéaire d'état. Dans le modèle d'état obtenu, certains paramètres seront inconnus et difficiles à mesurer ou évaluer. Il faudra donc dans une autre étape recourir à une procédure d'identification de ces paramètres. La difficulté résidera dans la nécessité de stabiliser au préalable le système afin d'appliquer une technique (très classique) d'identification. Une fois le modèle complètement établi, l'ultime étape consistera à déterminer une loi de commande, simple à mettre en œuvre, qui puisse assurer l'asservissement de l'altitude de la boule en suspension.

Toute l'étude est réalisée en considérant des modèles à temps continu.

## 10.1. Présentation du système

Le principe de la suspension magnétique est de maintenir un objet métallique (éventuellement ferromagnétique) en lévitation dans l'air sans contact physique, ceci en compensant le poids de l'objet par une force magnétique. Un tel procédé est notamment utilisé dans l'industrie ferroviaire. En effet, il existe entre autres au Japon, en Chine ou plus récemment en Corée du Sud, des trains capables de se déplacer en lévitation au dessus des rails, ce qui présente l'immense avantage de supprimer une source intense de frottements (voir §10.5 page 587). La présente étude ne traite pas du déplacement du train mais simplement, d'une certaine manière, de sa suspension dans l'air (à altitude constante, pensez donc ! point n'est question de concurrencer les compagnies aériennes!). La suspension magnétique dans une acception plus large peut également servir à développer des afficheurs très originaux, des roulements sans contact, certaines centrifugeuses, voire à améliorer les performances d'un régulateur à boules ou, pour l'effet spectaculaire, à faire léviter une grenouille vivante (peut-être la réincarnation d'un moine tibétain qui avait lui-même, en son temps, lévité) : voir par exemple la [page internet](#) traitant du sujet sur l'encyclopédie en ligne *Wikipedia*. On peut aussi citer les volants d'inertie servant à stabiliser certains satellites, des dispositifs d'usinage à très haute vitesse, des pompes capables d'obtenir un vide très poussé, des procédés de filtrage de particules, etc. Enfin, un objet en suspension magnétique revêt très vite un caractère un peu magique comme l'ont bien compris certains commerçants vendant (assez cher !) des petits globes terrestres en suspension.

Dans le cas étudié ici, l'objet est une simple boule en fer de masse  $m$ , voire presque une sphère puisqu'elle est évidée afin de réduire son poids  $P$ . Ce poids doit être compensé par une force magnétique  $F$  qui est générée par un électroaimant placé au dessus de la boule. Ce dernier est constitué d'une bobine traversée par un courant  $i$ , qui génère ainsi un champ magnétique dont les lignes sont amplifiées et canalisées par un circuit magnétique. La boule est distante de l'électroaimant d'une quantité  $\mu$  appelée position, qui est donc liée à l'altitude. Il est possible de mesurer le courant  $i$  via un *shunt* de sorte que l'on obtient une tension proportionnelle à  $i$  :  $v_i = \beta i$  où  $\beta$  est une constante positive

connue (résistance de *shunt*). La bobine est elle-même excitée par une tension d'entrée  $v$  qui génère le courant d'intensité  $i$ .

La description du procédé donnée ci-avant est résumée par la figure 10.1.

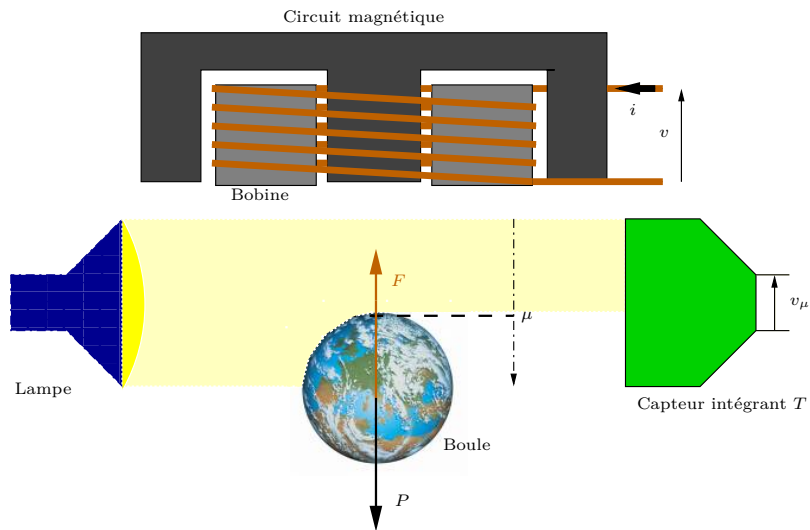


FIGURE 10.1 – Suspension magnétique d'une boule de fer

La position  $\mu$  de la boule par rapport à l'électroaimant doit être mesurée. Il existe plusieurs capteurs qui se prêtent à cette mesure. On peut citer le proxémètre (ou télémètre) à courants de Foucault<sup>1</sup> qui consiste à placer sous la boule une seconde bobine excitée en hautes fréquences et dont l'inductance (mesurée) varie en fonction de la proximité de la boule, permettant de déduire la position  $\mu$ . On peut aussi citer le capteur inductif à effet Hall<sup>2</sup> qui peut générer une tension à l'image d'une variation de champ magnétique. Ici, c'est un capteur optique qui est retenu. Une lampe éclaire la zone où la boule lévite et émet une radiation lumineuse en direction d'un phototransistor  $T$  situé en vis-à-vis.

1. du nom de Jean Bernard Léon (ou Léon) Foucault, physicien français (1819-1868).  
2. du nom d'Edwin Herbert Hall, physicien états-unien (1855-1938).

L'éclairement que reçoit ce dernier est proportionnel à  $\mu$ . En effet, lorsque  $\mu$  diminue, la boule remonte et fait de l'ombre au transistor qui s'en trouve d'autant moins éclairé. Le phototransistor est dimensionné et instrumenté de telle sorte que l'ensemble du procédé électronique de capture basé sur ce transistor délivre une tension  $v_\mu$  proportionnelle à l'opposé de  $\mu$ . On a donc  $v_\mu = -c\mu$  où  $c$  est une constante positive connue. La tension  $v_\mu$  est donc une image de l'altitude de la boule qui sera donc considérée comme la sortie du système. Pour l'instant l'entrée est la tension  $v$ .

L'enjeu est donc de déterminer une loi de commande telle que l'on puisse asservir l'altitude de la boule, au travers de son image  $v_\mu$ . Les consignes d'altitude sont supposées constantes. Tout changement de consigne est donc un échelon. Ainsi, en termes d'Automatique, il s'agit de réaliser un *asservissement de position*. Les lois de commande proposées doivent répondre au critère de simplicité suivant : leur structure ne doit pas être plus compliquée que celle d'un régulateur PID (proportionnel intégral dérivé).

Il est clair qu'un tel procédé n'est pas stable. Avant de le vérifier théoriquement, il est possible de le comprendre intuitivement. Si un point d'équilibre est atteint, correspondant à une altitude  $v_{\mu_0}$ , cela signifie que la force  $F$  compense très exactement le poids  $P$  de la boule. Cependant, la précarité d'un tel équilibre semble évidente. En effet, dès lors que le courant  $i$  varie quelque peu, même très faiblement, dans la bobine, une alternative se présente : soit la force  $F$  diminue et l'effet immédiat est la chute de la boule ; soit  $F$  augmente et la boule vient quasi instantanément se coller à l'électroaimant. Il s'agit là d'un point d'équilibre instable. Ceci révèle la complexité du problème puisque le système ne peut être étudié expérimentalement en boucle ouverte. Cette contrainte induit une difficulté majeure : on ne peut réaliser l'identification du système (ou simplement de ses paramètres) en boucle ouverte. Cette opération ne peut se concevoir qu'en boucle fermée. D'où la nécessité d'un premier modèle obtenu par une modélisation classique (tout du moins en apparence!), sur la base des lois de la physique. Ce modèle doit permettre un bouclage stabilisant, autorisant ainsi une identification en boucle fermée. Cette modélisation fait l'objet de la partie suivante.

## 10.2. Modélisation du procédé

### 10.2.1. Obtention d'un premier modèle non linéaire

Tout d'abord, toutes les équations décrivant le comportement du modèle sont établies, selon les lois de l'électricité, de l'électromagnétisme et de la mécanique.

La relation fondamentale de la dynamique d'un solide en translation (ici, la boule) permet d'écrire

$$m \frac{d^2 \mu(t)}{dt^2} = m\mathbf{g} - F(t),$$

où  $\mathbf{g}$  est la constante de gravitation. Dans cette équation,  $F$  peut être un peu explicitée sans entrer dans les détails de l'électromagnétisme. Cette force magnétique peut en effet s'exprimer de la façon suivante (en édulant la dépendance en  $t$ ) :

$$F = -\frac{dW_{mec}}{d\mu} = -\frac{i^2}{2} \frac{dL(\mu)}{d\mu}.$$

En effet,  $W_{mec}$  représente ici le travail mécanique associé à la force magnétique. Cette énergie émane de l'énergie magnétique générée par l'électroaimant, qui émane elle-même de l'énergie électrique stockée dans la bobine, donc du courant  $i$  et de l'inductance  $L$ . Cette énergie se calcule en utilisant la loi de Faraday<sup>3</sup>. Malheureusement, cette inductance  $L$  est celle du circuit magnétique global (la pièce ferromagnétique et l'air alentour que traversent les lignes d'induction magnétique auxquels il faut ajouter la boule de fer elle-même). Elle dépend donc de la position de la boule et l'on peut montrer qu'elle est grossièrement de la forme

$$L(\mu) = L_0 + \frac{b_1}{(1 + b_2\mu)}.$$

Il en résulte que

$$F(t) = \frac{b_1 b_2 i^2}{2(1 + b_2\mu)^2}$$

$$\Rightarrow F(t) = F(v_i(t), \mu(t)) = \frac{b_1 b_2 \beta^2 v_i^2}{2(1 + b_2\mu)^2}.$$

---

3. du nom de Michael Faraday, physicien et chimiste britannique (1791-1867).



Il conviendra surtout de voir  $F$  comme une fonction non linéaire de  $v_i$  et de  $\mu$ . Il suffit même pour le présent besoin, de noter que  $F$  s'accroît lorsque  $v_i$  augmente (ce qui se comprend aisément) mais diminue lorsque  $\mu$  augmente. Quoi qu'il en soit, on se contente d'écrire  $F = F(\mu, v_i)$  et il vient

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \mu(t)}{dt^2} &= m\mathbf{g} - F(\mu(t), v_i(t)) \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 \mu(t)}{dt^2} &= \mathbf{g} - \frac{1}{m} F(\mu(t), v_i(t)) = \tilde{f}_2(\mu(t), v_i(t)). \end{aligned} \quad (10.1)$$

Une seconde équation décrit les phénomènes électriques dans la bobine et traduit le lien entre  $v$  et  $i$  ou  $v_i$ . La loi des mailles conduit en effet à

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt},$$

$L$  et  $R$  étant respectivement l'inductance et la résistance de l'enroulement électrique. Cependant, il a été vu plus avant que l'inductance est une fonction de  $\mu$ . Ceci amène

$$\Leftrightarrow \frac{dv_i(t)}{dt} = -\frac{R}{L(\mu)} v_i(t) + \frac{\beta}{L(\mu)} v(t) = \tilde{f}_3(\mu, v_i(t), v(t)). \quad (10.2)$$

À ces équations s'ajoute une troisième déjà introduite dans la partie précédente, à savoir

$$v_\mu(t) = -c\mu(t) = \tilde{g}(\mu(t)). \quad (10.3)$$

Le choix du vecteur d'état se porte tout naturellement sur les grandeurs physiques dérivées. Soit le vecteur d'état  $q$  donné par

$$q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(t) \\ \frac{d\mu(t)}{dt} \\ v_i(t) \end{bmatrix}. \quad (10.4)$$

Soit aussi la fonction vectorielle (avec un petit abus de notation)

$$f(q(t), v(t)) = \begin{bmatrix} \dot{\mu}(t) & = & f_1(q_2(t)) & = & f_1(q(t), v(t)) \\ \tilde{f}_2(\mu(t), v_i(t)) & = & f_2(q_1(t), q_3(t)) & = & f_2(q(t), v(t)) \\ \tilde{f}_3(\mu, v_i(t), v(t)) & = & f_3(q_1(t), q_3(t), v(t)) & = & f_3(q(t), v(t)) \end{bmatrix}.$$

En outre, si l'on pose  $\tilde{g}(\mu(t)) = \tilde{g}(q_1(t)) = g(q(t), v(t))$ , Il est clair qu'un modèle non linéaire d'état du procédé est donné par :

$$\begin{cases} \dot{q} &= f(q(t), v(t)), \\ v_\mu(t) &= g(q(t), v(t)). \end{cases} \quad (10.5)$$

### 10.2.2. Linéarisation du modèle

La linéarisation implique bien souvent de considérer que les grandeurs en jeu subissent de petites variations autour d'un point de fonctionnement (qui est aussi un point d'équilibre) caractérisé ici par les valeurs constantes suivantes : une tension d'entrée  $v_0$ , induisant une tension  $v_{i_0}$  et une position  $\mu_0$ , donc un état  $q_0$  et une sortie  $v_{\mu_0} = -c'\mu_0$ . C'est d'autant plus vrai dans le cas présent que la zone du phototransistor éclairable par la lampe est en pratique assez restreinte n'autorisant pas une très grande variation d'altitude (de l'ordre de quelques centimètres néanmoins). En prenant en compte les petites variations suggérées, l'entrée, les composantes du vecteur d'état et la sortie totales s'expriment respectivement

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) = v_0 + \underbrace{\delta v(t)}_{\tilde{u}(t)}, \\ q_1(t) = \mu_0 + \underbrace{\delta \mu(t)}_{z_1(t)}, \\ q_2(t) = \frac{dq_1(t)}{dt} = 0 + \underbrace{\frac{d(\delta \mu(t))}{dt}}_{z_2(t)}, \\ q_3(t) = v_{i_0} + \underbrace{\delta v_i(t)}_{z_3(t)}, \\ v_\mu(t) = \underbrace{-c\mu_0}_{Y_0} + \underbrace{\delta v_\mu(t)}_{y(t)}. \end{array} \right.$$

La linéarisation consiste ici à décrire le comportement du modèle d'état non linéaire (10.5) autour du point de fonctionnement en donnant un modèle linéaire

approximatif, c'est-à-dire un modèle linéarisé tangent décrivant la dynamique des petites variations. L'approximation se fait par un développement de Taylor<sup>4</sup> de  $f$  et  $g$  au premier ordre. Autrement dit, le modèle d'état (10.5) d'entrée  $v$ , d'état  $q$  et de sortie  $v_\mu$  est ici remplacé par son linéarisé tangent d'entrée  $\tilde{u}$ , d'état  $z = [z_1 \ z_2 \ z_3]'$  et de sortie  $y$ , grâce à la formule (3.2) donnée au paragraphe 3.2 page 70 (à partir de maintenant, la dépendance en  $t$  est omise dans les équations) :

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}\tilde{u}, \\ y = \tilde{C}z + \tilde{D}\tilde{u}, \end{cases} \quad (10.6)$$

avec

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial q_1}(q_0, v_0) = 0 \right| \left. \frac{\partial f_1}{\partial q_2}(q_0, v_0) = 1 \right| \left. \frac{\partial f_1}{\partial q_3}(q_0, v_0) = 0 \right. \\ \hline \left. \frac{\partial f_2}{\partial q_1}(q_0, v_0) = a \right| \left. \frac{\partial f_2}{\partial q_2}(q_0, v_0) = 0 \right| \left. \frac{\partial f_2}{\partial q_3}(q_0, v_0) = -b \right. \\ \hline \left. \frac{\partial f_3}{\partial q_1}(q_0, v_0) = e \right| \left. \frac{\partial f_3}{\partial q_2}(q_0, v_0) = 0 \right| \left. \frac{\partial f_3}{\partial q_3}(q_0, v_0) = h \right. \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial v}(q_0, v_0) = 0 \right. \\ \hline \left. \frac{\partial f_2}{\partial v}(q_0, v_0) = 0 \right. \\ \hline \left. \frac{\partial f_3}{\partial v}(q_0, v_0) = w \right. \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = \left[ \left. \frac{\partial g}{\partial q_1}(q_0, v_0) = -c \right| \left. \frac{\partial g}{\partial q_2}(q_0, v_0) = 0 \right| \left. \frac{\partial g}{\partial q_3}(q_0, v_0) = 0 \right],$$

$$\tilde{D} = \frac{\partial g}{\partial v}(q_0, v_0) = 0.$$

Le premier modèle linéaire d'état d'ordre 3 se résume donc au quadruplet de matrices (regroupé en une seule matrice),

4. du nom de Brook Taylor, mathématicien anglais (1865-1731).

$$\left[ \begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & -b & 0 \\ e & 0 & h & w \\ \hline -c & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (10.7)$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $h$  et  $w$  sont des constantes **inconnues**, qu'il faudrait éventuellement déterminer. La suite consiste à réduire le modèle ce qui permettra de ne pas identifier toutes ces « inconnues ».

Il est bien sûr possible de détailler l'expression des inconnues. À titre d'information, après calcul,

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial f_2}{\partial q_1}(q_0, v_0) = \frac{b_1 b_2^2 \beta^2 v_{i_0}^2}{m(1 + b_2 \mu_0)^3} > 0, \\ b &= -\frac{\partial f_3}{\partial q_1}(q_0, v_0) = \frac{b_1 b_2 \beta^2}{2m(1 + b_2 \mu_0)^2} > 0, \\ e &= \frac{\partial f_3}{\partial q_1}(q_0, v_0) = \left. \frac{\partial f_3}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial \mu} \right|_{q_0, v_0} = \frac{b_1 b_2}{L_0(1 + b_2 \mu_0) + b_1)^2} (Rv_{i_0} - \beta v_0), \\ h &= \frac{\partial f_3}{\partial q_3}(q_0, v_0) = -\frac{R(1 + b_2 \mu_0)}{L_0(1 + b_2 \mu_0) + b_1} > 0, \\ w &= \frac{\partial f_3}{\partial v}(q_0, v_0) = \frac{\beta(1 + b_2 \mu_0)}{L_0(1 + b_2 \mu_0) + b_1} > 0. \end{aligned}$$

Mais de telles expressions ne peuvent être évaluées sans la connaissance de  $L_0$ ,  $b_1$  et  $b_2$  qui sont très difficiles à connaître ou à obtenir empiriquement. Toutefois, ce ne sera pas nécessaire.

### 10.2.3. Réduction du modèle linéaire

Avant de tenter l'identification des paramètres, tels que  $a$  et  $b$  par exemple, il est possible de recourir à une nouvelle simplification du modèle. C'est l'occasion de rappeler que le modèle n'est qu'une approximation du comportement réel d'un système et que tout est affaire de compromis entre description fidèle

du procédé et adéquation du modèle au calcul d'une loi de commande. Ainsi, après avoir réalisé une première approximation inhérente à la linéarisation, une seconde approximation consiste à réduire l'ordre du modèle de 3 à 2 comme il sera montré dans la suite du paragraphe.

La réduction de modèle constitue un pan entier de l'Automatique mais il ne s'agit pas ici d'appliquer une technique rigoureuse comme il en existe de très subtiles. On se contente ici de procéder à un premier bouclage correspondant à la régulation proportionnelle de  $v_i$ . Le but est d'accélérer la dynamique électrique du procédé (celle de  $q_3$ ) pour mieux la négliger (un phénomène stable qui se produit très vite peut souvent être négligé au niveau transitoire). En d'autres termes, une première partie de la loi de commande globale est appliquée et s'exprime par

$$v = \gamma(U - v_i),$$

où  $U$  est une nouvelle tension d'entrée du système et où  $\gamma$  est un gain que l'on peut choisir très grand (en prenant toutefois garde de ne pas provoquer de saturation des signaux) dans le but d'accélérer le phénomène électrique. Au niveau des petites variations autour du point de fonctionnement, ceci revient à écrire

$$\tilde{u} = \gamma(u - z_3),$$

où  $u$  est la petite variation autour de la grandeur  $U_0$  correspondant au point d'équilibre (c.-à-d. que  $U = U_0 + u$ ). Compte tenu de cette commande, le modèle d'état associé au quadruplet de matrices (10.7) se réécrit

$$\begin{cases} \dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & -b \\ e & 0 & h - w\gamma \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w\gamma \end{bmatrix} u, \\ y &= [-c \ 0 \ 0] z. \end{cases} \quad (10.8)$$

La troisième équation d'état s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= ez_1 + (h - w\gamma)z_3 + w\gamma u \\ \Leftrightarrow \frac{\dot{z}_3}{\gamma} &= \frac{e}{\gamma}z_1 + \frac{h - w\gamma}{\gamma}z_3 + wu. \end{aligned}$$

Lorsque le gain  $\gamma > 0$  est pris suffisamment grand, le membre de gauche de cette égalité ainsi que le terme en  $z_1$  deviennent négligeables et il s'ensuit que<sup>5</sup>

$$z_3 \simeq -\frac{w\gamma}{w\gamma - h}u. \quad (10.9)$$

En injectant cette équation dans le modèle (10.8), et en posant

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

on obtient un modèle réduit d'ordre 2,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases}, \quad \text{avec} \quad \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & -d \\ \hline -c & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (10.10)$$

où

$$d = \frac{bw\gamma}{w\gamma - h} = \frac{b\beta\gamma}{\beta\gamma - R} = \frac{b_1b_2\beta^3\gamma}{2m(1 + b_2\mu)^2(\beta\gamma - R)}.$$

Il s'agit d'une valeur positive puisque  $\gamma$  est grand. Mais il n'est pas aisé de l'évaluer. L'idée est plutôt d'identifier les paramètres de ce modèle qui sont donc maintenant  $a$  et  $d$  ( $c$  est connu car  $c$ 'est un paramètre du capteur optique qui peut être aisément identifié à part).

### 10.3. Identification des paramètres

On dispose maintenant d'un modèle simplifié dont la structure est bien établie mais dont, hélas, certains paramètres sont inconnus, à savoir  $a$  et  $d$ . Là encore, l'identification des paramètres d'un modèle constitue un autre pan de

5. Le phénomène est suffisamment rapide pour être approximativement décrit par une équation algébrique (statique) qui, en toute rigueur, décrirait plutôt un phénomène instantané (infiniment rapide).

l'Automatique mais il n'est pas nécessaire de le maîtriser pour résoudre le présent problème. Il suffit de se rappeler quelques rudiments sur les systèmes de deuxième ordre.

### 10.3.1. Idée initiale : utilisation des formes canoniques de deuxième ordre

Des connaissances élémentaires sur l'approche fréquentielle permettent à un ingénieur d'identifier les paramètres d'un modèle linéaire de deuxième ordre sous forme canonique (au sens des fonctions de transfert), c'est-à-dire lorsque ce dernier correspond à la fonction de transfert

$$G_c(p) = \frac{G_0}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \quad (10.11)$$

Les paramètres à identifier sont alors le gain statique  $G_0$ , le coefficient d'amortissement  $\zeta > 0$  (ce qui implique la stabilité asymptotique) et la pulsation propre non amortie  $\omega_0$ . Ils sont obtenus par l'intermédiaire de quelques mesures effectuées par exemple sur la réponse indicielle, notamment lorsque  $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Il est légitime de se poser la question suivante : le modèle (10.10) peut-il être associé à une fonction de transfert canonique de deuxième ordre ?

La réponse est assez facile à obtenir. En effet, la représentation d'état (10.10) correspond quasiment à une forme canonique de commande (voir §3.5.1.2 page 84) où  $A$  est compagne horizontale (seul un gain supplémentaire de  $(-d)$  intervient dans  $B$ ). La fonction de transfert associée est donc

$$G_{bo} = \frac{cd}{p^2 - a},$$

qui n'est pas une forme canonique de deuxième ordre.

En outre, il est facile de voir que les pôles de la fonction de transfert sont  $\sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$ . Le modèle est donc instable. Il est absolument exclu de travailler à partir de sa réponse indicielle.

L'idée est alors de boucler le système afin de le stabiliser et, si possible, de pouvoir l'assimiler à une fonction de transfert canonique de deuxième ordre. Une fois le modèle bouclé établi, il suffit de « remonter » par calcul aux paramètres du modèle en boucle ouverte.

### 10.3.2. Stabilisation du modèle

Il faut d'abord vérifier que le système est facilement stabilisable. Le critère de Kálmán expliqué au paragraphe 6.2.1 page 240 peut être appliqué. La matrice de commandabilité définie en (6.2) s'écrit ici

$$Q_c = [ B \quad AB ] = \begin{bmatrix} 0 & -d \\ -d & 0 \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang plein donc la paire de matrices  $(A, B)$  est commandable ce qui signifie que l'on peut arbitrairement placer les valeurs de  $(A + BK_s)$  par un choix judicieux du vecteur de retour d'état ici noté  $K_s$ . Une façon alternative de constater la commandabilité est de remarquer qu'il n'y a pas de simplification entre numérateur et dénominateur dans l'expression de  $G_{bo}(p)$  qui est une fonction de transfert de second ordre (voir §6.6 page 253). Il suffit alors de choisir des pôles à partie réelle négative pour assurer la stabilité.

Cependant, une contrainte définie au début de ce chapitre stipule que les lois de commande ne doivent pas être plus compliquées qu'un régulateur PID. Il est de toute évidence illusoire de vouloir placer deux pôles dans le demi-plan gauche avec un régulateur proportionnel qui ne comporte qu'un seul degré de liberté. En revanche, il est montré ici qu'un régulateur proportionnel dérivé (PD), inséré dans la boucle de retour, tel que celui illustré par la figure 10.2, peut répondre au problème de stabilisation. Cette structure de commande est exprimée par

$$\begin{aligned} u(t) &= y_c(t) - \alpha_1 y(t) - \alpha_2 \frac{dy(t)}{dt} & (10.12) \\ \Leftrightarrow u(t) &= y_c(t) + \underbrace{\alpha_1 c}_{k_1} x_1(t) + \underbrace{\alpha_2 c}_{k_2} x_2(t) \\ &\Leftrightarrow u(t) = y_c(t) + K_s x(t), \end{aligned}$$

ce qui correspond en fait à une loi de commande de type retour d'état où le vecteur de retour d'état est donné par  $K_s = [ k_1 \quad k_2 ]$ .

Or, puisque le système est stabilisable par un retour d'état, il l'est par la loi de commande (10.12) qui, dans le domaine de Laplace, correspond à

$$U(p) = Y_c(p) + R(p)Y(p),$$

avec



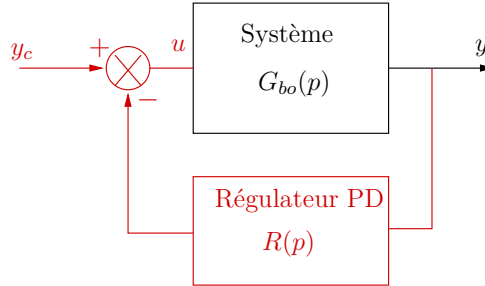


FIGURE 10.2 – Stabilisation du système par insertion d'un régulateur PD

$$R(p) = \alpha_1 + \alpha_2 p.$$

Cette fonction de transfert  $R(p)$  est celle d'un correcteur PD.

Il faut donc déterminer  $k_1$  et  $k_2$  (ou de manière équivalente  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ) pour placer les valeurs propres de  $(A + BK_s)$  à gauche de l'axe imaginaire. Par ailleurs, même si la stabilité est recherchée, il ne faut pas que le système soit « trop stable ». En effet, une légère oscillation facilitera l'identification du coefficient d'amortissement de la boucle fermée. De plus, le régulateur  $R(p)$  ne comporte pas d'intégrateur ce qui signifie qu'il y aura une erreur de position et que la valeur finale de  $y$  ne correspondra pas à celle de  $y_c$ . Or si cet écart est trop important, il se peut, en pratique, que  $y$  ne figure plus dans l'intervalle des valeurs mesurables (la boule pourrait sortir de la zone de mesure du phototransistor). La consigne est donc à choisir minutieusement. Bref, tout ceci fait beaucoup de paramètres à régler :  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  (ou  $k_1$  et  $k_2$ ) et  $y_c$ . Pour simplifier un peu la démarche, il est possible de supposer que  $R(p)$  prend une forme dite *série* :

$$R(p) = k_s \left( 1 + \frac{p}{\omega_d} \right),$$

où  $k_s > 0$  et  $\omega_d > 0$ . Ceci correspond au choix  $\alpha_1 = k_s$  et  $\alpha_2 = \frac{k_s}{\omega_d}$ . La pulsation  $\omega_d$  peut être arbitrairement fixée (ici à  $\omega_d = 100 \text{ rad.s}^{-1}$ ). Il vient donc  $k_1 = k_s c$  et  $k_2 = \frac{k_s c}{\omega_d}$ . La représentation d'état en boucle fermée devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A_s x + B y_c, \\ y = C x + D u, \end{array} \right. , \text{ avec } \left[ \begin{array}{c|c} A_s & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ (a - dck_s) & -\frac{dck_s}{\omega_d} & -d \\ \hline -c & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (10.13)$$

dans laquelle  $A$  reste sous forme compagne horizontale (voir §3.5.1.2 page 84). Le polynôme caractéristique en boucle fermée est donc

$$D_s(p) = p^2 + \frac{dck_s}{\omega_d} p + (dck_s - a).$$

Il est facile de voir, à partir de ce polynôme de second degré, que ses racines sont toutes à partie réelle négative dès lors que  $k_s$  est suffisamment grand pour que tous les coefficients soient positifs (critère de Routh-Hurwitz, voir §5.3.2 page 211). Il existe donc toute une gamme de valeurs de  $k_s$  qui stabilisent le système.

Comme  $A_s$  est compagne horizontale, il est facile de déduire la fonction de transfert associée au système en boucle fermée,

$$G_s(p) = \frac{cd}{D_s(p)} = \frac{\frac{cd}{dck_s - a}}{\frac{p^2}{dck_s - a} + \frac{dck_s}{\omega_d(dck_s - a)}p + 1}, \quad (10.14)$$

qui est une forme canonique de deuxième ordre identifiable.

Le principe est donc le suivant : on ajuste le gain  $k_s$  et la consigne globale  $Y_c = Y_{c_0} + y_c$  de sorte que soit obtenu un point d'équilibre. Cette étape peut être un peu longue et l'on peut recourir à plusieurs essais avant d'obtenir un point d'équilibre de consigne  $Y_{c_0}$  et d'altitude  $\mu_0$ . Ensuite, on applique un léger échelon sur  $Y_c$  (donc un échelon de  $Y_{c_0}$  à  $(Y_{c_0} + y_c)$ ) pour observer la réponse indiciaire du système bouclé et procéder, si possible, à l'identification à partir de cette réponse. La difficulté réside, comme il a été expliqué plus avant, dans le fait qu'un mauvais choix de  $Y_{c_0}$  peut ne pas conduire à une position  $\mu_0$  mesurable par le capteur et dans le fait qu'un mauvais choix de  $k_s$  peut conduire

à l'instabilité ( $k_s$  insuffisant) mais aussi ne pas engendrer suffisamment d'oscillations pour une identification correcte. En pratique, après quelques essais éventuellement infructueux, on parvient à un couple de valeurs  $\{Y_{c0}; k_s\}$ .

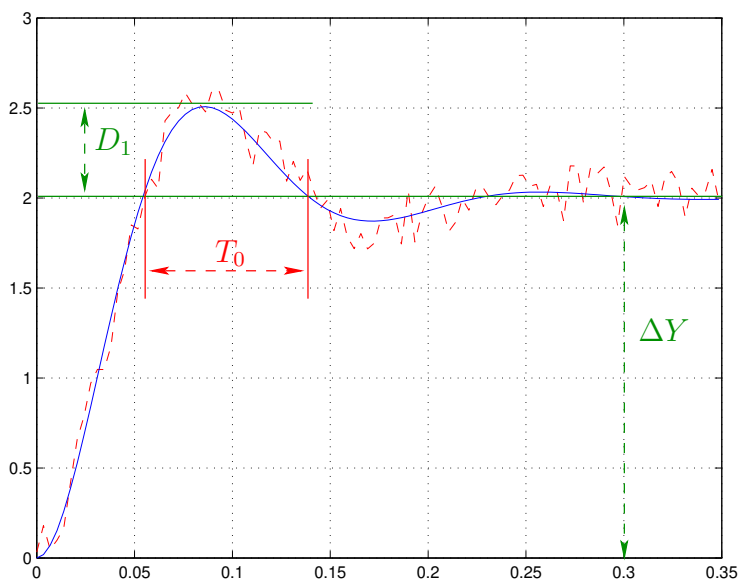


FIGURE 10.3 – Réponse en  $y$  du système stabilisé  $G_s(p)$  à un échelon unitaire sur  $y_c$

Pour l'exemple de ce chapitre, le photocapteur est tel que  $c = 0,2$ . Quelques essais amènent à  $k_s = 1$  pour une consigne d'équilibre  $Y_{c0}$  appropriée (la valeur n'est pas requise pour la suite). Il vient donc  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 = 0,01$ . L'échelon est unitaire et la réponse indicielle normalisée<sup>6</sup> est donnée par la figure 10.3 (courbe en trait pointillé). La courbe en trait plein correspond à une interpolation qui permet de ne pas prendre en compte les bruits de mesure et de recouvrer une

6. c.-à-d. la réponse à un échelon d'amplitude quelconque mise à l'échelle d'un échelon unitaire.

réponse type de fonction de transfert canonique de deuxième ordre (un filtrage est aussi possible). Il faut remarquer que, par souci de simplification, c'est la réponse de  $y$  qui est donnée et non celle de  $Y = Y_0 + y$  obtenue en pratique. C'est pourquoi la valeur initiale est nulle et non égale à  $Y_0$ .

### 10.3.3. Identification de la boucle fermée

L'identification se fait sur la réponse « moyennée » qui est donc assimilable à la réponse indicelle de  $G_s(p)$  ou celle de la fonction de transfert canonique de deuxième ordre donnée en (10.11). Il faut alors se référer aux caractéristiques d'une telle réponse qui peuvent être trouvées dans tout bon cours sur l'approche fréquentielle des systèmes linéaires mono-entrée - mono-sortie. On peut ainsi mesurer, sur la figure 10.3, la variation totale de la sortie  $y$  en régime permanent c.-à-d.  $\Delta Y = 2$ , de même que le premier dépassement indicel relatif  $d_1$ , défini par

$$d_1 = \frac{D_1}{\Delta Y} = \frac{0,51}{2} = 0,255,$$

où  $D_1$  est le premier dépassement absolu matérialisé sur la figure 10.3. La pseudo-période des oscillations  $T_0$ , également mise en évidence sur la figure 10.3, est mesurée :

$$T_0 = 0,1702\text{s}.$$

À partir de ces trois valeurs, il est possible de remonter au gain statique  $G_0$ , au coefficient d'amortissement  $\zeta$  et à la pulsation propre non amortie  $\omega_0$  de  $G_s(p)$ . Tout d'abord, puisque l'échelon est unitaire, il vient

$$G_0 = \frac{\Delta Y}{1} = \Delta Y = 2.$$

Ensuite, il faut se servir de l'expression connue de  $d_1$  en fonction de  $\zeta$ , rappelée ci-après :

$$d_1 = e^{-\left(\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}.$$

La résolution en  $\zeta$  de cette équation conduit à deux racines, l'une positive et l'autre négative. La seule pertinente est bien sûr la racine positive qui est donnée par

$$\zeta = -\frac{\ln(d_1)}{\sqrt{\pi^2 - \ln^2(d_1)}} = 0,4002 \simeq 0,4.$$

Enfin la pseudo-période  $T_0$  s'exprime

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}},$$

ce qui permet de déduire la pulsation propre non amortie

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \simeq 40,3 \text{ rad.s}^{-1}.$$

#### 10.3.4. Identification de la boucle ouverte

Il s'agit maintenant d'identifier l'expression de  $G_s(p)$  donnée en (10.14) et celle de  $G_c(p)$  donnée en (10.11) afin de déduire  $a$  et  $d$ . Par l'identification des coefficients des termes de second degré des dénominateurs, il vient :

$$\omega_0^2 = (40,28)^2 \simeq 1624 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2} = dck_s - a. \quad (10.15)$$

L'identification des gains statiques conduit à

$$\frac{cd}{dck_s - a} = 2 \Rightarrow d = 2\omega_0^2 c = 16240.$$

En injectant la valeur de  $d$  dans (10.15), on déduit que

$$a = dck_s - \omega^2 = 1624.$$

Il n'est même pas nécessaire de poursuivre l'identification des deux dénominateurs puisque les deux valeurs recherchées sont maintenant connues :

$$\begin{cases} a = 1624, \\ d = 16240. \end{cases} \quad (10.16)$$

**Remarque 10.1** Dans beaucoup d'ouvrages où cette identification est réalisée dans un cadre fréquentiel, la stabilisation se fait grâce à un régulateur PD placé en amont du système et non dans la boucle de retour, pour se conformer au très classique schéma d'asservissement. Une telle stabilisation est en effet tout à fait possible dans le cas présent. Toutefois, l'identification qui en découle est nettement moins évidente. En effet, la fonction de transfert de deuxième ordre qui en résulte en boucle fermée présente un numérateur non constant. Ce n'est donc pas une forme canonique de fonction de transfert. Certains auteurs poursuivent néanmoins l'identification, à l'instar de ce qui vient d'être fait, mais en négligeant l'influence du zéro. Ceci complique singulièrement la tâche car en pratique l'effet de ce zéro est loin d'être négligeable et les valeurs des paramètres obtenues sont faussées. Il arrive que ceci n'empêche pas de poursuivre la démarche et un asservissement peut alors être réussi. Cependant, regarder la boule léviter n'est pas une garantie de la qualité et de la reproductibilité de la procédure.

## 10.4. Asservissement en position

Il s'agit maintenant d'utiliser le modèle complètement identifié pour appliquer une loi de commande capable d'asservir l'altitude de la boule à une consigne donnée. Les variations de consigne se feront par des échelons sur  $y_c$ .

Puisqu'il s'agit, au sens de l'Automatique, d'un *asservissement de position*, l'adjonction d'un intégrateur dans la chaîne directe en amont du procédé assure la *précision en position* dès lors que la boucle fermée est stable. Cet intégrateur a par ailleurs l'avantage de rejeter d'éventuelles perturbations en échelon qui interviendraient en aval (tel un *offset* sur la commande  $u$ ). L'adjonction de l'intégrateur peut se faire selon le schéma-bloc de la figure 10.4.

La loi de commande est donc très semblable à un régulateur proportionnel intégral dérivé (PID) et s'exprime dans le domaine temporel par

$$u(t) = \alpha_1 \int_0^t \varepsilon(\theta) d\theta - \alpha_2 y(t) - \alpha_3 \frac{dy(t)}{dt}. \quad (10.17)$$

Les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ne sont bien sûr plus les mêmes que lors de l'identification en boucle fermée mais doivent maintenant, avec  $\alpha_3$ , être déterminés de façon à, non seulement stabiliser le système bouclé, mais aussi façonner le régime transitoire. Un modèle d'état pour le système bouclé peut être établi,

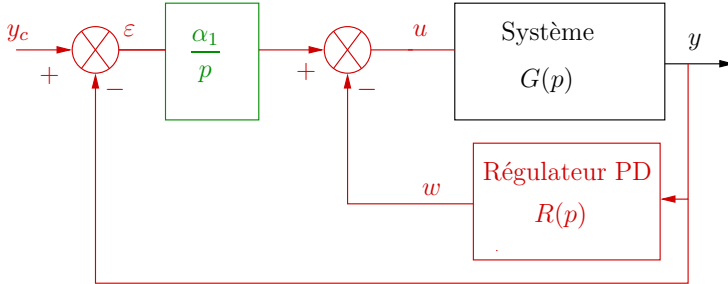


FIGURE 10.4 – Schéma d’asservissement d’altitude de la boule

par exemple, en choisissant comme vecteur d’état

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{c} \int_0^t \varepsilon(\theta) d\theta \right) \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}.$$

On peut alors utiliser un raisonnement très proche de celui tenu au paragraphe 7.4.2 page 315. Après quelques transformations simples des équations, ce modèle d’état devient

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}_f \bar{x} + \bar{B}_f y_c, \\ y = \bar{C}_f \bar{x}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{A}_f = \bar{A} + \hat{B}\bar{K}, \\ \bar{C}_f = \bar{C} + \hat{D}\bar{K} \end{cases} \quad \text{et} \quad (10.18)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{C} = [ 0 \quad -c \quad 0 ]; \quad \hat{D} = 0; \quad \bar{K} = [ \alpha_1 c \quad \alpha_2 c \quad \alpha_3 c ] = [ \bar{k}_1 \quad \bar{k}_2 \quad \bar{k}_3 ],$$

c’est-à-dire que la réalisation en boucle fermée est donnée par

$$\bar{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -d\bar{k}_1 & (a - d\bar{k}_2) & -d\bar{k}_3 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{C}_f = [ 0 \quad -c \quad 0 ].$$

La différence avec le paragraphe 7.4.2 page 315 réside simplement dans l'ordre des composantes du vecteur d'état. Ce léger changement n'altère pas le raisonnement mais en l'occurrence, il permet de préserver, sur le modèle en boucle fermée, la structure compagne horizontale de la matrice dynamique.

La stabilité asymptotique de ce système bouclé ne dépend que de  $\bar{A}_f$ . Par ailleurs, les performances transitoires sont très étroitement liées aux valeurs propres de cette même matrice. Or, placer les valeurs propres de cette matrice revient à choisir  $\bar{K}$ , à condition de s'assurer que la paire de matrices  $(\bar{A}, \hat{B})$  est commandable.

Soit la matrice de commandabilité de Kalman

$$Q_c = \begin{bmatrix} \hat{B} & \bar{A}\hat{B} & \bar{A}^2\hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d \\ 0 & -d & 0 \\ -d & 0 & -ad \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est clairement de rang 3 donc la paire de matrices  $(\bar{A}, \hat{B})$  est commandable et l'on peut placer ses valeurs propres. Afin de tenter d'atteindre des temps de réponse de l'ordre de 0,02s, on peut se fixer trois pôles désirés à  $(-50)$  ce qui conduit au polynôme caractéristique désiré

$$D_d(p) = (p + 50)^3 = p^3 + 150p^2 + 7500p + 125000.$$

Comme  $\bar{A}_f$  est une matrice compagne horizontale, le polynôme caractéristique en boucle fermée s'écrit

$$D_f(p) = p^3 + d\bar{k}_3p^2 + (d\bar{k}_2 - a)p + d\bar{k}_1.$$

Il suffit alors de procéder à une identification de  $D_f(p)$  et  $D_d(p)$  ce qui revient sensiblement à appliquer la procédure de placement de pôles vue au paragraphe 7.2.2 page 302 (donc l'algorithme de Bass-Gura) mais lorsque le calcul du gain de retour peut se faire directement dans la base canonique de commande. Il vient alors

$$\begin{cases} \frac{\bar{k}_1}{c} = \frac{125000}{dc} = 38,49 = \alpha_1, \\ \frac{\bar{k}_2}{c} = \frac{7500 + a}{dc} = 1,809 = \alpha_2, \\ \frac{\bar{k}_3}{c} = \frac{150}{dc} = 0,04618 = \alpha_3. \end{cases} \quad (10.19)$$



Normalement, à ce stade, l'essentiel du travail est fait. La stabilité asymptotique est assurée par les trois pôles réels négatifs. La précision en position est obtenue grâce à la présence de l'intégrateur dans la chaîne directe (avec rejet potentiel de perturbation en échelon à la clef). Le régime transitoire est censé donner satisfaction grâce au choix des pôles. Il faut toutefois s'assurer que le numérateur n'induit pas de modification majeure de ce transitoire. Ceci peut être vérifié en simulation ou en pratique. La réponse indicielle normalisée en présence de la loi de commande établie est donnée par la figure 10.5. Cette réponse est très satisfaisante et l'on conserve donc l'algorithme de commande établi, à savoir

$$u(t) = -1,809y(t) + 38,49 \int_0^t \varepsilon(\theta)d\theta - 0,04618 \frac{dy(t)}{dt}. \quad (10.20)$$

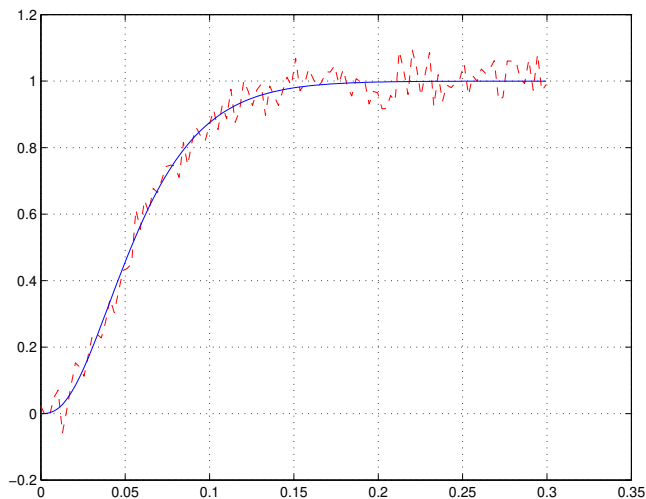


FIGURE 10.5 – Réponse en  $y$  du système asservi à un échelon unitaire sur  $y_c$

En pratique, cet algorithme s'applique alors sur les grandeurs physiques totales, pas seulement sur les petites variations autour du point de fonctionnement (en d'autres termes sur  $U(t)$ , à partir de  $Y_c(t)$  et  $Y(t)$ ). De plus, si l'on ajoute la commande proportionnelle visant à négliger la constante de temps électrique, il convient d'appliquer la loi de commande globale

$$v(t) = \gamma \left( -1,809Y(t) + 1,809Y_0 + 38,49 \int_0^t (Y_c(\theta) - Y(\theta))d\theta - 0,04618 \frac{dY(t)}{dt} - v_i(t) \right). \quad (10.21)$$

Une fois la boule maintenue à l'altitude désirée, il est possible de la faire tourner très longtemps sur elle-même en amorçant simplement la rotation avec la main (sans couper le faisceau lumineux!). La seule force qui ralentit ce mouvement est liée aux frottements de l'air.

**Remarque 10.2** *Il faut noter que cette commande PID n'est pas classique puisque l'intégration porte sur l'écart  $\epsilon = y_c - y$  alors que le terme proportionnel et la dérivation ne concernent que la sortie  $y$ . Il s'agit là d'un avantage. Le fait de ne pas dériver  $y_c$  évite les à-coups au moment des changements de consigne. En effet, si la boule doit suivre un signal carré, à chaque changement de valeur (instantané), la dérivée de  $y_c$  est infinie ce qui, en pratique, se traduit par un à-coup visible à l'œil sur la boule et de nature à potentiellement déstabiliser le modèle non linéaire complet en l'éloignant trop brutalement du point d'équilibre (en non linéaire, la stabilité d'un point d'équilibre n'est que locale). Le fait de ne pas non plus prendre en compte  $y_c$  dans le terme proportionnel permet également d'éviter l'apparition d'un zéro néfaste. Ce dernier induirait des dépassements qui pourraient faire sortir la boule de la zone de mesure du phototransistor (ce qui revient à couper la boucle et rompre l'équilibre stable). Enfin, pour éviter les inéluctables bruits de mesure sur la sortie, amplifiés par la dérivation, il est conseillé, comme souvent dans le cas d'une régulation PID, de filtrer soit le terme dérivé seul, soit l'ensemble de la commande  $u$ . Il existe bien quelques autres petits obstacles en pratique mais seule l'expérimentation conduirait le lecteur à les appréhender et les contourner.*

## 10.5. À propos du train à suspension magnétique

Cette partie est dédiée à une petite digression sur le train à sustentation magnétique. Le lecteur n'y trouvera aucun concept d'Automatique.

Il existe plusieurs technologies de train à sustentation magnétique qui ne peuvent en aucun cas être détaillées ici. Toutefois, le principe global du déplacement du train peut être évoqué. Les objets ferromagnétiques sont en fait des aimants fixés aux wagons et des bobines conductrices peuvent être installées au niveau des rails pour jouer le rôle d'électroaimants. La force magnétique de lévitation qui s'oppose au poids est donc ici une force de répulsion qui permet de maintenir une garde entre le bas du wagon et le rail. Ce problème est grossièrement le même que celui résolu dans ce chapitre. Il va de soi, cependant, qu'il faut abandonner l'idée décrite plus avant, d'un capteur optique à base d'une lampe et d'un phototransistor. Par ailleurs, la forme des wagons épouse celle des rails<sup>7</sup> de sorte que le wagon « flotte » au dessus des rails sans jamais les toucher y compris de côté (ceci suppose que l'on maintienne aussi une garde sur les côtés des rails selon un principe proche). Enfin, il convient de faire avancer le train (c'est tout de même le but). Si le système d'avancement est également électromagnétique, il n'est plus basé sur le principe de la suspension magnétique mais sur celui du *moteur linéaire synchrone*. D'autres bobines et d'autres aimants sont placées respectivement sur les rails et les wagons. L'excitation des bobines est pensée de telle sorte qu'elles attirent d'abord les aimants avant de les repousser, générant un mouvement de translation du train. Il existe des trains qui circulent grâce à ce moteur linéaire sans pour autant être en suspension magnétique. Il existe aussi, au Japon, des remontées mécaniques qui utilisent des moteurs linéaires.

Les trains à suspension magnétique sont souvent répertoriés sous l'appellation *Maglev*, comme abbréviation du vocable anglais *Magnetic levitation*, c.-à-d. lévitation magnétique. Le déplacement du train repose sur deux principes :

- celui du moteur linéaire synchrone dont le premier brevet semble remonter à A. Zehden<sup>8</sup> auquel il faut ajouter celui de E. R. Laithwaite<sup>9</sup>

---

7. Le plus souvent les wagons circulent le long d'un seul rail. On parle de train monorail.

8. Alfred Zehden, ingénieur poméranien (1876-1933).

9. Eric Roberts Laithwaite, ingénieur anglais, professeur à l'*Imperial College* de Londres (1921-1997).

- celui de la lévitation magnétique de laquelle H. Kemper<sup>10</sup> semble avoir jeté les bases.

Les avantages d'un train à suspension magnétique sont :

- une plus grande vitesse ;
- une meilleure accélération ;
- la possibilité d'envisager des pentes plus élevées ;
- celle d'envisager des rayons de courbure de la voie plus faibles ;
- un moindre risque de déraillement (un accident lors d'un essai en Allemagne en 2006, issu d'une collision à plus de 200 km.h<sup>-1</sup> entre le train et un véhicule technique, a fait de nombreuses victimes mais le train est resté sur ses rails) ;
- l'espoir d'un rendement énergétique meilleur ;
- de moindres nuisances sonores en l'absence de contact avec les rails (toutefois, l'augmentation de la vitesse tend à accroître le bruit aérodynamique).

Toutefois, ces projets stagnent parfois pour les raisons qui suivent :

- coût élevé de la construction (il faut envisager une grande quantité d'aimants et d'électroaimants, ces derniers étant parfois remplacés par des bobines supraconductrices dont les propriétés ne sont conservées que si elles sont maintenues à une température proche du zéro absolu!) ;
- aiguillages plus difficiles à mettre en œuvre ;
- réseau ferroviaire à refaire impliquant un gros effort d'investissement ;
- technologie peu adaptée à du fret lourd, mais plutôt au transport de voyageurs.

Concernant la circulation réelle de ces trains, il existe actuellement, à la connaissance de l'auteur, au moins cinq trains en circulation<sup>11</sup> :

- Le *Transrapid* allemand permet de relier depuis 2004 l'aéroport de Shanghai au centre ville sur un tronçon de 30km. Capable d'avancer à 431km.h<sup>-1</sup>, il a une vitesse moyenne, sur le parcours, de 251km.h<sup>-1</sup> ;

---

10. Hermann Kemper, ingénieur allemand (1892-1977).

11. liste sans doute non exhaustive.

- Le *High Speed Surface Transport (HSST)* et sa ligne *Linimo* est un train japonais plus modeste qui correspond à un tronçon de 8,9km à Aichi, au Japon. Le train y circule avec une vitesse moyenne de  $31\text{km.h}^{-1}$  pour une vitesse de pointe à  $100\text{km.h}^{-1}$  ;
- Le *Incheon Airport Maglev* est un train coréen qui relie l'aéroport d'Incheon à la gare de Yongyu, soit un trajet de 6.1km à  $110\text{km.h}^{-1}$  maximum ;
- Depuis 2008, à Daejon, toujours en Corée du Sud, un train à lévitation magnétique permet de parcourir un tronçon de seulement 1km ;
- Le Changsha Maglev Express est un *Maglev* Chinois de fabrication locale qui depuis 2016 relie l'aéroport international Huanghua de Changsha à la gare du sud de la ville, sur un tronçon de 18.5km à une vitesse de  $120\text{km.h}^{-1}$  maximum.

Les autres trains sont encore des projets<sup>12</sup> et d'autres ont été abandonnés : c'est le cas de ce train parcourant un trajet de 600m entre l'aéroport et la gare ferroviaire de Birmingham, en Angleterre, qui a circulé entre 1984 et 1995 avant d'être remplacé par un simple tramway. C'est aussi le cas de ce train allemand qui parcourait 1,6km à Berlin entre 1989 et 1991 ou du train canadien (de fabrication japonaise) ayant circulé à Vancouver de 1986 à 1987.

Aujourd'hui, le projet le plus marquant concerne le *SCMaglev (superconducting maglev)* japonais de la *Railway Technical Research Institute*. Une liaison devant relier Tōkyō à Nagoya en 2027 (soit un tronçon de 286km à parcourir en 40 min) prolongeable à Ōsaka pour 2045, a été testée le 13 novembre 2014. Il a atteint la vitesse de  $502\text{km.h}^{-1}$  au grand plaisir des passagers venus le tester. Ce record a été battu par le même système le 21 avril 2015 avec une vitesse de  $603\text{km.h}^{-1}$ , mettant fin au record du TGV français<sup>13</sup>. Le coût total du projet de base reliant Tōkyō à Nagoya est de 65 milliard d'euros.

Tous ces trains présentent bien sûr des technologies différentes même si les principes de base sont similaires. Toutefois, plus récemment, un principe supplémentaire s'est ajouté à la suspension magnétique et au moteur linéaire synchrone : il s'agit de faire circuler le train, ou plutôt de simples capsules, dans un tube, un tunnel, sous basse pression, pour encore améliorer les performances en réduisant les frottements de l'air. Le projet emblématique de cette technologie est

---

12. Un projet de train et un autre de métro en Suisse, des projets de trains en Inde (à 22 millions d'euros le km construit), en Malaisie, Singapour, en Iran et à Taïwan

13. Est-ce vrai ? Ou n'est-ce qu'une légende dans le genre de celle de la bataille d'Alésia (ou Alégia) ?

l'*Hyperloop One* ou *Hyperloop 1* du milliardaire Elon Musk<sup>14</sup>. Les concepteurs de ce système prétendent que la vitesse atteinte pourra dépasser  $1100\text{km.h}^{-1}$  même si pour l'instant, les premiers test ont permis d'atteindre  $309\text{km.h}^{-1}$  sur un tronçon de  $8\text{km}$  en 2017. Il existe d'autres projets similaires.

On est un peu loin du compte avec la boule en suspension et la modeste loi de commande établie dans ce chapitre mais il s'agit juste du principe initial.

---

14. Entrepreneur canado-états-unien d'origine sud-africaine (1971-), fondateur de *PayPal*, *SpaceX* et PDG du constructeur automobile *Tesla*. Le 6 février 2018, la société *SpaceX* a propulsé dans l'espace, à l'aide de son lanceur *Falcon Heavy*, une voiture électrique *Tesla*, conduite par un mannequin baptisé *Starman*, et diffusant en boucle la chanson *Space Oddity* de David Bowie (chanteur anglais (1947-2016) que l'on aurait aimé immortel et qui d'ailleurs l'est peut-être). Ceci prouve qu'excentricité, mégalomanie, entrepreneuriat à tous crins ne riment pas toujours avec mauvais goût artistique. Il n'y a pas de son dans l'espace, mais ce n'est pas une raison pour diffuser n'importe quoi, donc bravo Monsieur Musk! Si en outre la voiture venait à être récupérée par de gentils Martiens sur une planète où le son serait audible, autant que ces Martiens aient une bonne image de nous, même si *Life on Mars* leur plairaient peut-être plus... question d'orgueil.

## 10.6. Notes et références

La suspension magnétique est un exemple quelque peu avancé mais néanmoins assez classique des ouvrages d'Automatique. Comme il peut être compris de la lecture de chapitre, s'il est assez facile de le traiter en théorie (l'ordre du modèle non linéaire est modeste), la pratique réserve cependant quelques obstacles. Il faut garder présent à l'esprit que le modèle non linéaire est plus complexe que la version linéarisée et simplifiée, que ce modèle non linéaire n'est pas aussi simplement établi qu'il n'y paraît dans les lignes précédentes (surtout si l'on souhaite rigoureusement exprimer la force magnétique  $F$ ) et que des phénomènes ont été inéluctablement ignorés. Pour des versions davantage simplifiées, les ouvrages [1,2] sont assez plaisants à consulter.

Du point de vue moins académique, l'utilisation de la lévitation magnétique, comme il a été mentionné plus avant, est assez bien expliqué sur la page internet

[http://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic\\_levitation](http://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_levitation)

ainsi que sur plusieurs autres pages telles que, par exemple,

<https://en.wikipedia.org/wiki/Maglev>

ou

<https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperloop>.

Il est par ailleurs possible de trouver sur Internet de nombreux documents qui offrent une description du modèle, ainsi qu'une méthode de calcul de la loi de commande (généralement par l'approche fréquentielle). Certains d'entre eux offrent des précisions sur le matériel qui peut-être utilisé pour fabriquer soi-même un tel procédé. Il existe même des sites qui proposent des *kits* « tout faits ». En effet, les maquettes didactisées présentes sur le marché sont très onéreuses.

Le lecteur prendra garde à ne pas trop consulter les comptes-rendus de travaux pratiques mis en ligne par des étudiants sans la correction de leurs enseignants. Mais certains documents sont néanmoins très intéressants (ils ne peuvent être tous cités). Toutefois, rares sont ceux qui abordent avec précision la modélisation *complète* du système par les lois de l'électromagnétisme... et pour cause, c'est moins simple qu'il n'y paraît et pas forcément vraiment nécessaire.

Il est un ouvrage que l'auteur tient à citer, celui de Dominique Jacob [3], dont un chapitre entier est consacré à ce cas d'école, en utilisant l'approche fréquentielle. Même si c'est l'approche temporelle qui est retenue ici, les grandes lignes de la démarche sont les mêmes, avec quelques nuances. L'auteur tient en outre à remercier Dominique Jacob de lui avoir mis deux exemples de suspension magnétique de sa propre conception entre les mains, ce qui a conduit à ce que le lecteur peut lire ici.

Pour suivre la méthode et le raisonnement suivis par l'auteur dans ce chapitre (identification et commande), les livres [4,5] peuvent se révéler utiles... comme d'autres.

1. **R. C. Dorf et R. H. Bishop** : *Modern Control Systems*. Neuvième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.  
*La réédition permanente de cet ouvrage en dit long sur sa popularité. Les nombreux exemples constituent une vraie mine d'exercices pour un enseignant.*
2. **G. F. Franklin, J. D. Powell et A. Emami-Naemi** : *Feedback Control of Dynamic Systems*. Quatrième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.  
*Assez riche en exemples et agréable dans la forme. Plutôt didactique.*
3. **D. Jacob** : *Régulation PID en génie électrique - Études de cas* Collection « Technosup », Éditions Ellipses, 2000.  
*Des cas concrets traités par l'approche fréquentielle.*
4. **J. C. Gille, P. Decaulne et M. Pellegrin** : *Technique de l'Automatisme : Théorie et Calcul des Asservissements*. Deuxième édition. Éditions Dunod, 1958.  
*L'ouvrage de référence en enseignement de langue française pendant longtemps.*
5. **B. Pradin et G. Garcia** : *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Presses Universitaires du Mirail, 2010.  
*Que dire de cet ouvrage si ce n'est que c'est celui qu'il faut acheter! Incontestablement le meilleur rapport qualité/prix.*



# Chapitre 11

## *Minuscule introduction à la commande optimale*

Dans ce chapitre, une très brève introduction à la *commande optimale* est proposée. Bien loin de prétendre à l'exhaustivité, elle renvoie au contraire le lecteur véritablement intéressé par ce sujet spécifique aux nombreux cours et ouvrages traitant du sujet. Ici, nulle question de théorie mathématique de l'optimisation pour établir les résultats. Il s'agit juste d'une vision « par le petit bout de la lorgnette », une lorgnette qui, enrichie du prisme de l'« approche Liapounov », autorise tout de même à recouvrer un résultat fondamental de la commande dite *linéaire quadratique*.

Les modèles continus sont d'abord abordés puis une contrepartie discrète est proposée.

### Sommaire

---

<b>11.1 Commande LQ des systèmes à temps continu . . .</b>	<b>594</b>
11.1.1 Position du problème . . . . .	594
11.1.2 Interprétation du critère . . . . .	595
11.1.3 Établissement du résultat . . . . .	596

<b>11.2</b>	<b>Commande LQ des systèmes discrets . . . . .</b>	<b>600</b>
11.2.1	Position du problème . . . . .	600
11.2.2	Interprétation du critère . . . . .	601
11.2.3	Établissement du résultat . . . . .	602
<b>11.3</b>	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>606</b>
11.3.1	Commande LQ du tangage . . . . .	606
11.3.2	Commande LQ du pendule inverse . . . . .	607
<b>11.4</b>	<b>Correction des exercices . . . . .</b>	<b>611</b>
11.4.1	Commande LQ du tangage . . . . .	611
11.4.2	Commande LQ du pendule inverse . . . . .	614
<b>11.5</b>	<b>Notes et références . . . . .</b>	<b>620</b>

## 11.1. Commande LQ des systèmes à temps continu

### 11.1.1. Position du problème

Le cadre de ce travail reste celui des modèles invariants dans le temps décrits par une représentation d'état

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{11.1}$$

où la paire de matrices  $(A, B)$  est *stabilisable* (voir § 7.5 page 321). Dans l'approche présentée ci-après, il est possible de considérer un système à plusieurs entrées. Ainsi  $u(t)$  peut être un vecteur et  $B$  peut présenter plusieurs colonnes. L'objectif est de déterminer une loi de commande de type retour d'état (sans précommande)

$$u(t) = Kx(t), \tag{11.2}$$

dans laquelle la matrice de retour d'état  $K$  est calculée de sorte à minimiser le critère

$$J = \int_0^\infty (x'(\tau)Qx(\tau) + u'(\tau)Ru(\tau)) d\tau, \quad \text{où } Q = Q' \geq 0 \text{ et } R = R' > 0. \tag{11.3}$$

Les matrices  $Q$  et  $R$  sont des matrices *de pondération* symétriques, respectivement semi-définie positive et définie positive (cf. §A.2.2 page 668 en annexe). Dans le cas d'un modèle monovariable,  $R$  est un scalaire.

Il s'agit là d'un critère *quadratique* que l'on cherche à minimiser sous une contrainte qui n'est autre que le système linéaire (11.1) muni de sa loi de commande (11.2) (qui conserve la linéarité). Pour cette raison, on parle de commande *linéaire quadratique* ou commande LQ.

**Remarque 11.1** *Il existe un résultat non trivial (et non détaillé ici) qui permet d'affirmer qu'il est inutile de chercher une loi de commande non linéaire  $u = h(x, t)$  pour minimiser le critère  $J$ . L'optimalité est obtenue grâce une loi linéaire telle que (11.2).*

### 11.1.2. Interprétation du critère

Le critère  $J$  se présente comme l'intégrale de la somme de deux termes quadratiques, l'un portant sur l'état  $x(t)$ , l'autre sur la commande  $u(t)$ . Les matrices  $Q$  et  $R$  sont des pondérations qui offrent un degré de liberté quant au choix du critère minimiser. Il est parfois bien difficile de traduire une performance désirée en termes de matrices de pondération  $Q$  et  $R$  et, bien souvent, en pratique,  $Q$  et  $R$  sont choisies diagonales :  $Q = \text{diag}_{i=1, \dots, n} \{q_i\}$ ,  $q_i \geq 0$  et  $R = \text{diag}_{j=1, \dots, m} \{r_j\}$ ,  $r_j > 0$ . Ainsi, chaque élément  $q_i$  de la diagonale de  $Q$  est associé à la composante  $x_i$  du vecteur d'état  $x$  et chaque élément  $r_j$  de la diagonale de  $R$  est associé à la composante  $u_j$  du vecteur de commande  $u$ . On rappelle que  $u$  ou  $R$  se résument à des scalaires dans le cas mono-entrée qui est celui essentiellement considéré dans ce document. La terminologie usuelle du cadre multivariable est cependant conservée sans pour autant engendrer de difficulté particulière de compréhension.

Une forte pondération sur  $x$  (des coefficients  $q_i$  élevés) pourra par exemple correspondre à une volonté de ne pas générer des états trop grands à des fins de sécurité, de confort, voire d'atténuation de certaines perturbations. Une forte pondération sur  $u$  (des coefficients  $r_j$  élevés) correspondra plutôt à un désir d'éviter d'éventuelles saturations des actionneurs ou d'économiser l'énergie de commande pour des raisons financières ou écologiques.

De façon résumée, le critère  $J$  peut être interprété comme un critère énergétique faisant apparaître deux termes, l'un représentant une énergie interne du système exprimée en fonction de  $x$ , l'autre représentant une énergie transmise au système exprimée en fonction de  $u$ , ces termes étant respectivement pondérées par  $Q$  et  $R$ .

Il convient de noter que l'intégrale  $J$  est exprimée sur un horizon infini de temps. Dans les approches classiques de la commande optimale, on commence généralement par considérer des horizons finis de temps et des modèles  $(A(t), B(t))$  pouvant varier dans le temps pour établir un certain panel de résultats qui mènent ensuite, entre autres, au cas très utile de l'horizon infini de temps et des modèles invariants dans le temps, traité brièvement dans ce chapitre. Les approches rigoureuses permettent bien mieux que ne le fait ce chapitre d'appréhender les diverses subtilités et extensions de la commande optimale. (Le lecteur désireux de se spécialiser ne peut en aucun cas se contenter de la lecture de ce chapitre qui ne présente qu'un court-circuit vers la commande linéaire quadratique (LQ) via une approche de type Liapounov<sup>1</sup>.)

### 11.1.3. Établissement du résultat

Tout d'abord la minimisation de  $J$  suggère *a priori* la convergence des composantes du vecteur d'état  $x$ , ce qui est assurée par la stabilité asymptotique du système bouclé. La matrice  $K$ , solution du problème, doit donc être telle que  $A_f = A + BK$  soit stable au sens de Hurwitz (ses valeurs propres doivent toutes être à partie réelle négative).

Par ailleurs, la loi de commande (11.2) implique que le critère  $J$  se réexprime

$$J = \int_0^{\infty} x'(\tau)(Q + K'RK)x(\tau)d\tau,$$

ou encore

$$J = \int_0^{\infty} x'(\tau)\bar{Q}x(\tau)d\tau \quad (11.4)$$

avec

$$\bar{Q} = Q + K'RK. \quad (11.5)$$

On peut noter qu'étant donnés les signes de  $Q$  et  $R$ , la matrice  $\bar{Q}$  est semi-définie positive. Il a été vu au chapitre 5, § 5.3.3 page 216, que la stabilité asymptotique du système bouclé est équivalente, selon la seconde méthode de Liapounov appliquée aux modèles linéaires (cf. l'annexe F), à l'existence d'une matrice symétrique définie positive  $P$  et d'une matrice semi-définie négative  $\tilde{Q}$

1. mathématicien et physicien russe (1857-1918) : voir sa biographie en annexe page 772.

(notée  $Q$  en §5.3.3 page 216 ou en §F.4 page 713) telles que la matrice dynamique en boucle fermée  $A_f = A + BK$  vérifie

$$A'_f P + P A_f = \tilde{Q}. \quad (11.6)$$

Ceci signifie, comme expliqué dans le paragraphe 5.3.3, qu'il existe une fonction quadratique de Liapounov,

$$V(x(t)) = x'(t) P x(t), \quad (11.7)$$

définie positive et dont la dérivée, qui n'est autre que

$$\frac{d}{dt}(x'(t) P x(t)) = x'(t)(A'_f P + P A'_f)x(t)$$

est semi-définie négative, ce qui peut s'exprimer par l'existence de  $\tilde{Q} \leq 0$  telle que

$$\frac{d}{dt}(x'(t) P x(t)) = x'(t) \tilde{Q} x(t).$$

En effet, au paragraphe 5.3.3 page 216, ainsi qu'au paragraphe F.4 page 713, il est rappelé (et même montré) que le choix de la matrice (semi- ou strictement) définie négative  $\tilde{Q}$  est arbitraire (sous quelques réserves : voir remarque 11.2). Il en résulte que l'on peut choisir

$$\tilde{Q} = -\bar{Q}.$$

Ainsi, le critère  $J$  peut s'exprimer

$$J = \int_0^\infty x'(\tau) \bar{Q} x(\tau) d\tau = \int_0^\infty -x'(\tau) \tilde{Q} x(\tau) d\tau = \int_0^\infty \left( -\frac{d}{d\tau} x'(\tau) P x(\tau) \right) d\tau$$

$$\Leftrightarrow J = [-x'(t) P x(t)]_0^\infty = -x'(\infty) P x(\infty) + x'(0) P x(0).$$

où la notation  $x(\infty)$  signifie  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ . De plus, la stabilité asymptotique du système bouclé impose que  $x(\infty) = 0$  ce qui implique que le critère à minimiser vérifie

$$J = x'(0) P x(0). \quad (11.8)$$

Étant donné qu'il est difficile d'agir sur la condition initiale  $x(0)$ , on peut comprendre de cette expression que  $J$  dépend de la matrice définie positive  $P$  qui est

elle-même fonction des paramètres de l'équation (11.6), à savoir  $A_f = A + BK$  et  $\tilde{Q} = -\bar{Q} = -(Q + K'RK)$ . Comme les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  et  $R$  sont données, c'est donc un choix judicieux de  $K$  qui conduit à une matrice  $P$  associée, qui amène elle-même le minimum de  $J$ .

Le minimum en question satisfait la condition nécessaire d'extrémalité locale bien connue

$$\frac{\partial J}{\partial K} = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial K} = 0. \quad (11.9)$$

On cherche à savoir ce qu'implique cette contrainte pour  $K$ .

Soit la factorisation de Cholesky<sup>2</sup> de la matrice  $R$  (voire annexe A, § A.2.2 page 668)

$$R = T'T,$$

où  $T$  est une matrice carrée de même dimension que  $R$ . Une telle matrice  $T$  existe toujours et est non singulière (c.-à-d. de rang plein et de fait inversible, voir §A.1.11 page 651). La factorisation de Cholesky est un classique du calcul numérique et ne pose pas de problème aux logiciels de calcul matriciel. L'équation (11.6) se réécrit

$$\begin{aligned} M &= A'_f P + P A_f - \tilde{Q} = (A + BK)'P + P(A + BK) + \bar{Q} = 0 \\ &\Leftrightarrow M = (A + BK)'P + P(A + BK) + Q + K'RK = 0 \\ &\Leftrightarrow M = A'P + PA + K'B'P + PBK + Q + K'T'TK = 0 \\ &\Leftrightarrow M = A'P + PA + K'T'(T')^{-1}B'P + PBT^{-1}TK \\ &\quad + K'T'TK + PBT^{-1}(T')^{-1}B'P - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \\ &\Leftrightarrow M = A'P + PA + (K'T' + PBT^{-1})(TK + (T')^{-1}B'P) - PBR^{-1}B'P + Q = 0. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Puisque  $M$  est constante (nulle), la dérivation de  $M$  par rapport à  $K$  mène de toute évidence à

$$\frac{\partial M}{\partial K} = 0,$$

---

2. du nom d'André-Louis Cholesky dit René Cholesky, ingénieur et militaire français (1875-1918), mort au champ d'honneur.

qui, compte tenu de la condition nécessaire d'extrémalité (11.9), conduit aisément à déduire que

$$TK + (T')^{-1}B'P = 0 \Leftrightarrow K = -T^{-1}(T')^{-1}B'P.$$

Cette dernière équation fournit l'unique matrice  $K$  compatible avec l'extrémalité, qui se réexprime ainsi :

$$K = -R^{-1}B'P \quad (11.11)$$

La condition n'engendre donc qu'un *seul point critique* qui ne peut correspondre qu'à l'extrémum global recherché (le problème est convexe). De plus, il s'agit d'un minimum puisqu'il est facile de voir qu'une augmentation des composantes de  $K$  conduit à une augmentation du critère  $J$ , comme le montrent bien les deux équations (11.4) et (11.5). La matrice de retour d'état recherchée est donc de la forme donnée par (11.11).

La matrice  $K$  dépend de  $P$ , qui n'est pas déterminée à ce stade du raisonnement. En injectant l'expression (11.11) dans l'équation (11.10), il vient l'équation fondamentale de la commande LQ :

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (11.12)$$

Cette équation est appelée *équation algébrique de Riccati*<sup>3</sup> ou simplement *équation de Riccati*. (À cette équation il convient de rajouter la contrainte  $P = P' > 0$ .) Il existe des méthodes pour la résoudre, essentiellement de manière numérique. On peut même dire que la littérature scientifique regorge d'articles proposant des méthodes de résolution numérique d'une telle équation. On peut retenir simplement qu'il ne s'agit pas d'un obstacle à la résolution du problème de commande LQ et qu'il existe généralement une *unique* solution définie positive.

3. du nom de Jacopo Francesco Riccati, mathématicien et physicien italien (1676-1754).

**Remarque 11.2** Pour s'assurer de l'existence d'une solution définie positive unique à l'équation de Riccati (11.12), il faut et il suffit que, d'une part, la paire  $(A, B)$  soit stabilisable (hypothèse déjà initialement retenue pour stabiliser le système, voir §7.5, page 321) et que, d'autre part, la paire  $(A, S)$ , où  $S$  est une matrice de rang plein telle quelque  $Q = S'S$ , soit détectable (voir encore §7.5, page 321). Cependant, il vaut mieux que  $(A, B)$  et  $(A, S)$  soient respectivement commandable et observable (voir §6.2.1 page 240) car cela autorise plus de possibilités sur les dynamiques en boucle fermée. Si la commandabilité n'est pas totale, les pôles stables non commandables en boucle ouverte seront aussi pôles en boucle fermée sans possibilité de les modifier. Ces points ne sont pas démontrés ici.

De ce raisonnement découle le très simple algorithme suivant.

### Algorithme :

Étape 1 Résolution de l'équation de Riccati (11.12)  $\Rightarrow$  détermination de l'unique solution symétrique définie positive  $P = P' > 0$ .

Étape 2 Calcul de  $K$  selon la formule (11.11).

Une fois l'algorithme mené à son terme, la valeur optimale du critère est donnée par

$$J_{\text{opt}} = x'(0)Px(0). \quad (11.13)$$

## 11.2. Commande LQ des systèmes discrets

### 11.2.1. Position du problème

L'invariance dans le temps des modèles est toujours supposée mais le système est maintenant discret et décrit par la représentation d'état linéaire

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (11.14)$$



L'objectif reste de déterminer une loi de commande de type retour d'état (sans précommande)

$$u_k = Kx_k, \quad (11.15)$$

dans laquelle la matrice de retour d'état  $K$  est calculée de sorte à minimiser le critère

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k' Q x_k + u_k' R u_k), \quad \text{où } Q = Q' \geq 0 \text{ et } R = R' > 0. \quad (11.16)$$

Les matrices  $Q$  et  $R$  sont des matrices *de pondération* symétriques, respectivement semi-définie positive et définie positive (dans le cas d'un modèle monovarié,  $R$  est un scalaire).

Il s'agit de nouveau d'un critère *quadratique* que l'on cherche à minimiser sous une contrainte qui n'est autre que le système linéaire (11.14) muni de sa loi de commande (11.15) (qui conserve la linéarité). Pour cette raison, on parle toujours de commande *linéaire quadratique* ou commande LQ.

### 11.2.2. Interprétation du critère

Il est inutile de reprendre tout ce qui a déjà été écrit dans le cas des systèmes continus. Le critère  $J$  se présente comme une somme infinie de termes, eux mêmes constitués par la somme de deux termes quadratiques, l'un portant sur l'état  $x_k$ , l'autre sur la commande  $u_k$ . Les matrices  $Q$  et  $R$  sont donc, comme en continu, des pondérations qui offrent un degré de liberté quant au choix du critère minimiser. On peut donc parler de pondérations entre deux énergies, mais cette fois-ci au sens discret du terme.

Le critère  $J$  est exprimé par une somme infinie de termes. Dans les approches classiques de la commande optimale, on commence généralement par considérer une somme finie pour établir un certain panel de résultats qui mènent ensuite, entre autres, au cas présent de la somme infinie. Encore une fois, il convient de préciser que les approches rigoureuses portent un éclairage sur les diverses subtilités et extensions de la commande optimale. Ce chapitre ne présente quant à lui qu'une vague initiation à quelques concepts liés à ce pan de l'Automatique.

### 11.2.3. Établissement du résultat

La minimisation de  $J$  suggère la convergence *a priori* des composantes du vecteur d'état  $x_k$ , ce qui est assuré par la stabilité asymptotique du système bouclé. La matrice  $K$ , solution du problème, doit donc être telle que  $A_f = A + BK$  soit stable au sens de Schur (ses valeurs propres doivent toutes être strictement localisées dans le disque unitaire).

Par ailleurs, la loi de commande (11.15) implique que le critère  $J$  se réexprime

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k'(Q + K'RK)x_k),$$

ou encore

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x_k' \bar{Q} x_k \quad (11.17)$$

avec

$$\bar{Q} = Q + K'RK. \quad (11.18)$$

On peut noter qu'étant donnés les signes de  $Q$  et  $R$ , la matrice  $\bar{Q}$  est semi-définie positive. Il a été vu au paragraphe 9.5.5 page 515, que la stabilité asymptotique du système bouclé est équivalente, selon la seconde méthode de Liapounov appliquée aux modèles linéaires discrets (cf. l'annexe F et plus particulièrement le paragraphe F.4 page 713), à l'existence d'une matrice symétrique définie positive  $P$  et d'une matrice (strictement ou semi-)définie positive telle que la matrice dynamique en boucle fermée  $A_f$  vérifie

$$-P + A_f' P A_f = \tilde{Q}. \quad (11.19)$$

Ceci signifie, comme expliqué dans le paragraphe 9.5.5, qu'il existe une fonction quadratique de Liapounov,

$$V(x_k) = x_k' P x_k, \quad (11.20)$$

définie positive et qui présente un décrement entre deux valeurs successives, c.-à-d. que

$$\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) = x_k' (-P + A_f' P A_f) x_k \leq 0.$$

Ceci peut s'exprimer par l'existence de  $\tilde{Q} \leq 0$  telle que

$$\Delta V(x_k) = x_k' \tilde{Q} x_k.$$

Or, au paragraphe F.4 page 713, il est rappelé que le choix de la matrice semi-définie négative  $\tilde{Q}$  (notée  $Q$  en §9.5.5) est arbitraire (sous des réserves qui sont les mêmes que celles évoquées à la remarque 11.2). Il en résulte que l'on peut choisir

$$\tilde{Q} = -\bar{Q}.$$

Ainsi, le critère  $J$  peut s'exprimer

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k' \bar{Q} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} -x_k' \tilde{Q} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} -(-V(x_{k+1}) + V(x_k)) \\ &\Leftrightarrow J = -V(x_{\infty}) + V(x_0). \end{aligned}$$

où  $x_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ . De plus, la stabilité asymptotique du système bouclé impose que  $x_{\infty} = 0$  ce qui implique que  $V(x_{\infty}) = 0$  et donc que le critère à minimiser vérifie

$$J = V(x_0) = x_0' P x_0. \quad (11.21)$$

Étant donné qu'il est difficile d'agir sur la condition initiale  $x_0$ , on peut comprendre de cette expression que  $J$  dépend de la matrice définie positive  $P$  qui est elle-même fonction des paramètres de l'équation (11.6), à savoir  $A_f = A + BK$  et  $\tilde{Q} = -\bar{Q} = -(Q + K'RK)$ . Comme les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  et  $R$  sont données, c'est donc un choix judicieux de  $K$  qui conduit à une matrice  $P$  associée, qui amène elle-même le minimum de  $J$ .

Le minimum en question satisfait la condition nécessaire de d'extrémalité locale, identique à celle du cas continu, à savoir (11.9). On cherche à savoir ce qu'implique cette contrainte pour  $K$ .

L'équation (11.19) se récrit

$$\begin{aligned} M &= -P + (A + BK)'P(A + BK) + Q + K'RK = 0 \\ \Leftrightarrow M &= -P + Q + A'PA + K'(R + B'PB)K + (K'B'PA + A'PBK) = 0 \\ \Leftrightarrow M &= -P + Q + A'PA - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA + \end{aligned}$$

$$[K'(R+B'PB)^{\frac{1}{2}} + A'PB(R+B'PB)^{-\frac{1}{2}}][(R+B'PB)^{\frac{1}{2}}K + (R+B'PB)^{-\frac{1}{2}}B'PA] = 0. \quad (11.22)$$

La dérivation de la matrice constante  $M$  par rapport à  $K$  mène de toute évidence à

$$\frac{\partial M}{\partial K} = 0,$$

qui, compte tenu de la condition nécessaire d'extrémalité (11.9), conduit aisément à déduire que

$$K = -(R + B'PB)^{-1}B'PB. \quad (11.23)$$

Il faut noter que  $R$  et  $P$  étant strictement positives, l'inversion est possible dans l'équation ci-avant.

La condition n'engendre encore une fois qu'un *seul point critique* qui ne peut correspondre qu'à l'extrémum global recherché (problème convexe). De plus, il s'agit d'un minimum puisqu'il est facile de voir qu'une augmentation des composantes de  $K$  conduit à une augmentation du critère  $J$ , comme le montrent bien les deux équations (11.17) et (11.18). La matrice de retour d'état recherchée est donc de la forme donnée par (11.23).

La matrice  $K$  dépend de  $P$ , qui n'est pas déterminée à ce stade du raisonnement. En injectant l'expression (11.23) dans l'équation (11.22), il vient l'équation fondamentale de la commande LQ discrète :

$$-P + Q + A'PA - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA = 0 \quad (11.24)$$

Cette équation est appelée *équation algébrique discrète de Riccati* ou simplement *équation de Riccati discrète*. (À cette équation il convient de rajouter la contrainte  $P = P' > 0$ .) Là encore, la littérature scientifique propose des méthodes de résolution numérique d'une telle équation. On peut retenir simplement qu'il ne s'agit pas d'un obstacle à la résolution du problème de commande LQ discrète et qu'il existe une *unique* solution définie positive (voir de

nouveau les hypothèses quelque peu restrictives très brièvement évoquées à la remarque 11.2).

De ce raisonnement découle le très simple algorithme suivant.

**Algorithme :**

Étape 1 Résolution de l'équation de Ricatti (11.24)  $\Rightarrow$  détermination de l'unique solution symétrique définie positive  $P = P' > 0$ .

Étape 3 Calcul de  $K$  selon la formule (11.23).

Une fois l'algorithme mené à son terme, la valeur optimale du critère est donnée par

$$J_{\text{opt}} = x_0' P x_0. \quad (11.25)$$

## 11.3. Exercices

*Dans ce chapitre, il n'y a que deux exercices. Le premier illustre par un calcul littéral la procédure de synthèse d'une commande LQ continue. Le second est plus sophistiqué. Il s'agit d'appliquer sur une version discrétisée du pendule inverse, la procédure de synthèse d'une commande LQ discrète à l'aide MATLAB<sup>©</sup>, tout en enrichissant cette commande d'un intégrateur discret à des fins de maîtrise du régime statique. Ceci permet également d'illustrer la technique très vite abordée au paragraphe 9.7.3.2, rubrique « rejet de perturbation ».*

### 11.3.1. Commande LQ du tangage

Le modèle considéré ici est celui du tangage de la maquette d'hélicoptère pour laquelle une commande a déjà été calculée en §7.10.2 page 344. Les matrices d'état et de commande sont rappelées ci-après :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

L'objectif est de calculer une loi de commande répondant à la structure de retour statique d'état

$$u(t) = Kx(t).$$

Toutefois, il ne s'agit plus ici de placer les pôles en boucle fermée mais de synthétiser une commande LQ visant à minimiser le critère  $J$  donné en (11.3) page 594. La matrice  $P = P' > 0$  solution de l'équation de Riccati (11.12) page 599 est ainsi détaillée :

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}.$$

Dans un premier temps la matrice  $Q$  est choisie semi-définie positive :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}, \quad q \in \mathbb{R}^{+*}.$$

La matrice  $R$  se résume à un scalaire  $R = r > 0$ .

Questions :

- Résoudre l'équation de Riccati en  $P$ .
- Tenter d'expliquer le problème rencontré.

La matrice  $Q$  est maintenant choisie strictement définie positive :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}, \quad q \in \mathbb{R}^{+*}.$$

La pondération sur la commande est toujours  $r > 0$ .

Question :

Appliquer l'algorithme de la commande LQ pour exprimer  $K$  en fonction de  $q$  et  $r$ .

**11.3.2. Commande LQ du pendule inverse**

L'idée de cet exercice est de reprendre le modèle du pendule inversé établi en §3.10.9 page 138 pour concevoir une commande LQ qui vise à asservir le chariot en position tout en maintenant le pendule en équilibre, verticalement bien sûr. Le principe est le suivant : la sortie est maintenant la position du chariot ; le modèle est discrétisé ; un retour d'état associé à un intégrateur discret est utilisé pour asservir ce système échantillonné ; le pendule doit éviter d'osciller trop autour de la position verticale (il ne faut pas oublier que le modèle est en réalité non linéaire et que si  $\theta$  s'éloigne de zéro, l'approximation linéaire peut devenir grossière). Étant donné l'ordre du système, le logiciel MATLAB<sup>©</sup> est utilisé pour les calculs (cf. annexe H page 735).

Questions :

- Rappeler le modèle linéarisé obtenu en §3.10.9 mais en considérant la position du chariot  $q$  comme sortie.
- Faire l'application numérique pour  $M = 2\text{kg}$ ,  $m = 0,1\text{kg}$  et  $l = 0,5\text{m}$ .
- Déterminer le modèle discret obtenu par échantillonnage à la période  $T = 0,1\text{s}$  et à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro.

Il s'agit donc de reprendre l'idée du paragraphe 9.7.3.2 page 529, plus précisément la partie sur le rejet de perturbation en échelon qui avait été assez peu détaillée. En fait, le principe est de concevoir une commande qui impose la présence d'un intégrateur en amont du procédé afin d'assurer le gain statique unitaire du système et potentiellement de rejeter certaines perturbations en échelon (exemple : un *offset* sur la commande  $u = f$ ). Cependant, le système étant discret, il est temps d'approfondir quelques aspects volontairement omis en § 9.7.3.2. En outre, au paragraphe 9.7.3.2, il était question d'assurer les performances transitoires par un choix judicieux de pôles (ce qui est pertinent). Ici des performances comparables seront spécifiées par le choix d'un critère à optimiser, c'est-à-dire par un choix de matrices  $Q$  et  $R$ .

La commande à calculer répond donc à la structure de la figure 11.1 qui est le pendant discret de la figure 7.5 page 316.

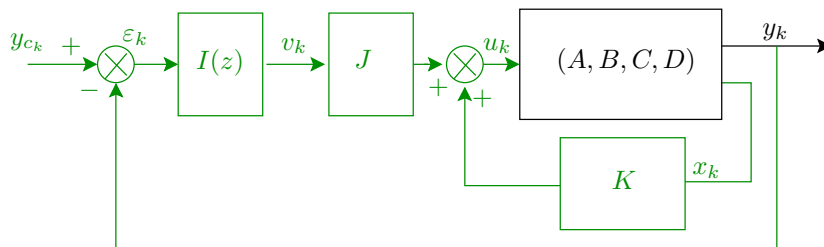


FIGURE 11.1 – Commande discrète par retour d'état avec intégrateur

Sur cette figure, la fonction de transfert de  $I(z)$  est celle d'un intégrateur discret et s'exprime donc (cf. §9.7.3.2 page 529)

$$I(z) = \frac{1}{z - 1}.$$

La loi de commande à calculer répond à la structure

$$u_k = Kx_k + Jv_k.$$

Les questions suivantes proposent un peu de calcul littéral tel qu'il aurait pu être introduit au praragraphe §9.7.3.2.



Questions :

- Traduire la fonction de transfert  $I(z)$  en termes de récurrence.
- Écrire le modèle augmenté constitué du procédé et de l'intégrateur en prenant pour vecteur d'état  $\bar{x}_k = [x'_k \ v_k]'$  (les deux entrées du système sont la commande  $u_k$  et la consigne de position  $y_{c_k}$ ).
- Montrer que la loi de commande correspond à un retour de l'état augmenté  $\bar{x}_k$ .
- Calculer le modèle en boucle fermée.
- Montrer que la sortie tend vers la consigne en régime permanent si le système bouclé est asymptotiquement stable.


L'intégrateur  $I(z)$  a donc pour but d'assurer l'asservissement rigoureux de la position du chariot. La stabilité asymptotique est évidemment requise. Il est clair que le retour au point d'équilibre est alors assuré, ce qui garantit  $\theta = 0$  en régime permanent, c'est-à-dire la position verticale du pendule inverse. Toutefois, il faut également faire en sorte que le régime transitoire ne présente pas trop d'oscillations pour éviter de s'écarter du cadre de l'approximation linéaire, et pour limiter le temps de réponse tout en assurant une certaine verticalité transitoire. Pour ce faire, il est ici proposé de minimiser le critère

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{x}'_k Q \bar{x}_k + u'_k R u_k),$$

où

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q' > 0 \quad \text{et} \quad R = 10 > 0.$$

L'idée est donc de principalement minimiser l'énergie associée à  $q$  (pas trop de variation (donc d'oscillation) de la position du chariot) mais aussi celle associée à  $\theta$  (verticalité transitoire recherchée). En outre, par le choix de  $R$ , un petit effort de minimisation est consacré à réduire l'énergie de la commande  $f$ , ceci pouvant de surcroît éviter d'éventuelles saturations de l'actionneur.

  
Questions :

- Utiliser MATLAB<sup>©</sup> pour calculer les valeurs optimales de  $K$  et  $J$  (s'aider de l'annexe H page 735).
- Toujours avec MATLAB<sup>©</sup>, tracer la réponse de  $q$  et celle de  $\theta$  à un échelon unitaire discret. Commenter.

## 11.4. Correction des exercices

### 11.4.1. Commande LQ du tangage

L'équation de Riccati (11.12) page 599 conduit à

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \\ \frac{1}{r} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire au système d'équations

$$\begin{cases} -\frac{9}{r}p_2^2 & = 0, \\ p_1 - \frac{9}{r}p_2p_3 & = 0, \\ q + 2p_2 - \frac{9}{r}p_3^2 & = 0. \end{cases}$$

Les deux premières équations de ce système amènent

$$p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0,$$

ce qui interdit que  $P$  puisse être définie positive. Ainsi, les conditions requises pour le calcul d'une commande LQ ne sont pas satisfaites.

Or, il a été vu en §7.10.2 page 344 que la paire  $(A, B)$  est commandable, et *a fortiori* stabilisable. Cependant, soit  $S$  la matrice définie par

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{q} \end{bmatrix}$$

et qui vérifie donc  $Q = S'S$ . La paire  $(A, S)$  n'est clairement pas observable. En effet, la matrice

$$\begin{bmatrix} S \\ SA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

n'est clairement pas de rang plein (elle possède une ligne ou une colonne nulle). Par ailleurs, puisque l'unique valeur propre (double) de  $A$  est nulle, il n'y a pas non plus détectabilité de  $(A, S)$ . Ainsi, conformément à la remarque 11.2 page 600, les conditions d'existence d'une solution unique définie positive à l'équation de Riccati ne sont pas réunies, ce qui explique le blocage rencontré.

Si maintenant la matrice  $Q$  s'écrit

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix},$$

alors l'équation de Riccati devient

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \\ & \frac{1}{r} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

qui conduit au système d'équations

$$\begin{cases} -\frac{9}{r}p_2^2 + 1 & = 0, \\ p_1 - \frac{9}{r}p_2p_3 & = 0, \\ q + 2p_2 - \frac{9}{r}p_3^2 & = 0, \end{cases} \quad (11.26)$$

auquel il faut ajouter la contrainte de définition positive de  $P$  qui, d'après le critère de Sylvester (cf §A.2.2 page 668), mène au système suivant :

$$\begin{cases} p_1 & > 0, \\ p_3 & > 0, \\ p_1p_3 - p_2^2 & > 0. \end{cases} \quad (11.27)$$

La première équation de (11.26) système induit

$$p_2 = \pm \frac{\sqrt{r}}{3},$$

ce qui laisse deux possibilités. Mais cette équation induit aussi

$$\frac{9}{r}p_2 = \frac{1}{p_2}.$$

De cette dernière égalité et de la deuxième équation de (11.26), il résulte que

$$p_2 = \frac{p_3}{p_1}. \quad (11.28)$$

Or, les deux premières inégalités du système (11.27), prises en compte dans l'expression de  $p_2$  ci-avant, impliquent que  $p_2$  ne peut être que positif donc seule la valeur

$$p_2 = \frac{\sqrt{r}}{3}$$

doit être retenue.

La troisième égalité de (11.26) conduit à

$$\begin{aligned} p_3^2 &= \frac{r}{9}(2p_2 + q) \\ \Leftrightarrow p_3^2 &= \frac{r}{9} \left( \frac{2\sqrt{r} + 3q}{3} \right) = \frac{r}{27}(2\sqrt{r} + 3q). \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que  $p_3$  est positif, il vient

$$p_3 = \frac{\sqrt{r}\sqrt{2\sqrt{r} + 3q}}{3\sqrt{3}}.$$

L'équation de (11.28) se réécrit

$$p_1 = \frac{p_3}{p_2}.$$

Avec les expressions obtenues pour  $p_2$  et  $p_3$ , il vient

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\sqrt{r}\sqrt{3\sqrt{r} + 3q}}{2\sqrt{3}} \times \frac{3}{\sqrt{r}} \\ \Leftrightarrow p_1 &= \frac{\sqrt{2\sqrt{r} + 3q}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{r} + 3q}{3}}, \end{aligned}$$

qui est clairement positif. Il est possible de vérifier la définition positive de  $P$  en s'assurant de la satisfaction de la troisième inégalité de (11.27). En effet,

$$\begin{aligned}
 p_1 p_3 - p_2^2 &= \frac{\sqrt{2\sqrt{r} + 3q} \cdot \sqrt{r}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2\sqrt{r} + 3q}}{\sqrt{3}} - \frac{r}{9} \\
 \Leftrightarrow p_1 p_3 - p_2^2 &= \frac{(2\sqrt{r} + 3q)\sqrt{r} - r}{9} = \frac{r + 3q\sqrt{r}}{9} \\
 &\Rightarrow p_1 p_3 - p_2^2 > 0.
 \end{aligned}$$

En résumé, l'unique solution symétrique définie positive de l'équation de Riccati s'exprime

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2\sqrt{r} + 3q}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{r}}{3} \\ \frac{\sqrt{r}}{3} & \frac{\sqrt{r}\sqrt{2\sqrt{r} + 3q}}{3\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Pour déterminer le vecteur de retour d'état optimal, il suffit d'instancier la relation (11.11) :

$$\begin{aligned}
 K &= -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2\sqrt{r} + 3q}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{r}}{3} \\ \frac{\sqrt{r}}{3} & \frac{\sqrt{r}\sqrt{2\sqrt{r} + 3q}}{3\sqrt{3}} \end{bmatrix} \\
 \Leftrightarrow K &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{r}} & -\sqrt{\frac{2\sqrt{r} + 3q}{3r}} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

### 11.4.2. Commande LQ du pendule inverse

Le modèle donnée en §3.10.9 page 138 peut être réutilisé mais en adaptant l'équation de sortie de manière à prendre en compte le fait que  $x_1 = q$  est maintenant la sortie du système. Quatre matrices constituant une réalisation possible sont donc :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ M \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix},$$

$$C_c = [ 1 \ 0 \ 0 \ 0 ], \quad D_c = 0.$$

L'application numérique issue des valeurs de paramètres proposées conduit à

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,4905 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 20,6010 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C_c = [ 0 \ 0 \ 1 \ 0 ], \quad D_c = 0.$$

L'instruction MATLAB<sup>©</sup> à utiliser pour discrétiser le modèle à  $T = 0,1s$  est `c2d`. Il faut se référer à l'annexe H page 735. Une fois les matrices  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$  et  $D_c$  mémorisées sous MATLAB<sup>©</sup>, il faut entrer les instructions suivantes :

```
>> sysc=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
>> sys=c2d(sysc,1,'zoh')
>> [A,B,C,D]=ssdata(sys)
```

Il en résulte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 & -0,0025 & -0,0001 \\ 0 & 1 & -0,0508 & -0,0025 \\ 0 & 0 & 1,1048 & 0,1035 \\ 0 & 0 & 2,1316 & 1,1048 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,0025 \\ 0,0501 \\ -0,0051 \\ -0,1035 \end{bmatrix},$$

$$C = [ 0 \ 0 \ 1 \ 0 ], \quad D = 0.$$

La multiplication par  $z$  correspondant à l'opérateur d'avance, la traduction en termes d'équation récurrente de  $V(z) = I(z)\varepsilon(z)$  est la suivante :

$$v_{k+1} = v_k + \varepsilon_k. \tag{11.29}$$

Ainsi, si l'on prend comme nouvel état le vecteur  $\bar{x}_k = [x'_k \ v_k]'$ , le modèle du procédé associé à l'intégrateur s'écrit

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \bar{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_1} u_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_2} y_{c_k}, \\ y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \bar{x}_k + \underbrace{0}_{\bar{D}} y_{c_k}. \end{cases}$$

(Il faut noter la composante '1' dans la matrice d'évolution qui est un changement important par rapport au cas continu). Quant à la commande, elle peut se réexprimer, comme dans le cas continu, par

$$u_k = \bar{K}\bar{x}_k,$$

avec

$$\bar{K} = [ K \quad J ].$$

En boucle fermée, c'est-à-dire en appliquant la loi de commande  $u_k = \bar{K}\bar{x}_k$ , il vient

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} A + BK & BJ \\ -C & 1 \end{bmatrix}}_{A_f} \bar{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_f} y_{c_k}, \\ y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}_f} \bar{x}_k + \underbrace{0}_{\bar{D}_f}. \end{cases}$$

Si le système ainsi bouclé est asymptotiquement stable, alors il revient vers l'unique état d'équilibre et lorsque  $k$  tend vers l'infini il vient

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v_\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y_\infty$$

où  $v_\infty$  et  $y_\infty$  sont des constantes,  $y_\infty$  correspondant à la valeur de la sortie en régime permanent. Si la consigne  $y_{c_k}$  est égale à une constante  $\alpha$ , alors l'équation (11.29) s'instancie, lorsque  $k$  tend vers l'infini, en

$$v_\infty = v_\infty + \alpha - y_\infty,$$

d'où l'on tire

$$y_\infty = \alpha.$$

Il n'y a donc pas d'écart en régime permanent et la position requise est bien atteinte.

Avec quel transitoire ?

Il faut d'abord construire le modèle augmenté à l'aide de MATLAB<sup>©</sup> (construction matricielle triviale). Une fois ces matrices  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}_1$ ,  $\bar{B}_2$ ,  $\bar{C}$



et  $\bar{D}$  construites (notées  $A_b$ ,  $B_{1b}$ ,  $B_{2b}$ ,  $C_b$  et  $D_b$  sous MATLAB<sup>©</sup> pour cet exercice), une possibilité est de construire le système augmenté (sans la consigne  $y_{c_k}$ ) ainsi :

```
>> sysb=ss(Ab,B1b,Cb,Db,0.1)
```

Il est important d'ajouter la période d'échantillonnage pour spécifier qu'il s'agit d'un système discret. C'est le système qui sert à calculer la commande LQ, c'est-à-dire  $\bar{K}$  :

```
>> [Kb,P]=lqr(sysb,Q,R)
>> Kb=-Kb;
```

La seconde instruction est introduite car les commandes MATLAB<sup>©</sup> correspondent à des structures de type  $u = -Kx$  alors que le présent document n'introduit pas de signe moins.

Une autre possibilité est d'écrire

```
>> [Kb,P]=dlqr(Ab,B1b,Q,R);
>> Kb=-Kb;
```

sans passer par la variable `sysb`. Dans les deux cas, le résultat est

$$\bar{K} = [ 4,6660 \quad 5,0329 \quad 51,8382 \quad 11,5136 \quad -0,1770 ]$$

$$\Rightarrow K = [ 4,6660 \quad 5,0329 \quad 51,8382 \quad 11,5136 ] \quad \text{et} \quad J = -0,1170.$$

Une fois cette loi de commande calculée, il est possible de construire la réalisation en boucle fermée.

```
>> Abf=Ab+B1b*Kb;
>> Bbf=B2b;
>> Cbf=Cb;
>> Dbf=Db;
>> sysbf=ss(Abf,Bbf,Cbf,Dbf,0.1);
```

La réponse indicielle (c'est-à-dire la réponse en position du chariot à un échelon unitaire) est donnée par

```
>> step(sysbf)
```

Si la réponse en  $\theta$  est souhaitée, il suffit de modifier la matrice  $\bar{C}_f$  :

```
>> Cbf=[0 0 1 0 0];
>> sysbf=ss(Abf,Bbf,Cbf,Dbf,0.1);
```

La réponse en  $\theta$  est alors donnée par

```
>> step(sysbf)
```

Il est possible d'obtenir les mêmes courbes par

```
>> dstep(Abf,Bbf,Cbf,Dbf)
```

puis

```
>> dstep(Abf,Bbf,[0 0 1 0 0],Dbf)
```

Les deux réponses sont données par la figure 11.2.

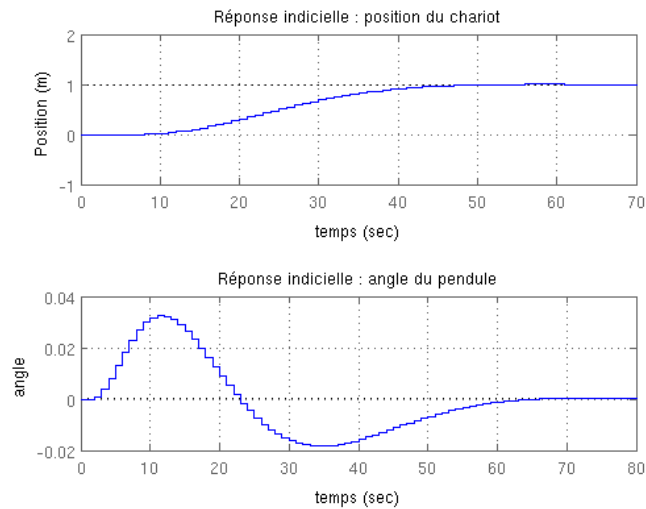


FIGURE 11.2 – Réponses en  $q$  et  $\theta$  à une échelon de consigne

(Elles ont été regroupées sur une même figure au moyen de l'instruction `subplot` et accompagnées d'une grille (instruction `grid`).  
L'instruction

```
>> eig(Abf)
```

permet de faire apparaître les valeurs propres de la matrice d'état en boucle fermée, à savoir

$$0,6339 \pm 0,0198i; \quad 0,9177 \pm 0,0933i; \quad 0,9152$$

Tous les modules sont inférieurs à 1 ce qui prouve la stabilité asymptotique. De plus, toutes les parties réelles sont positives et les parties imaginaires sont faibles ce qui explique les relativement faibles oscillations des réponses, conformément au paragraphe 9.4.2 page 508.

**Remarque 11.3** *Le choix de  $Q$  et de  $R$  peut paraître arbitraire. Il n'en est rien. Cependant, il est assez difficile à opérer à l'instar du choix des pôles lors d'un placement de pôles. Les pondérations sur les différentes composantes du vecteur d'état et la commande sont difficiles à fixer a priori et les premiers choix ne sont souvent pas les bons. Les matrices  $Q$  et  $R$  proposées ici ont été retenues après plusieurs tentatives.*

## 11.5. Notes et références

Il n'est pas dans l'objectif de ce paragraphe de relater l'histoire de la commande optimale ni d'en donner une bibliographie sérieuse. Des ouvrages complets y sont consacrés et proposent une liste de références bien plus complète que l'auteur ne saurait l'établir.

Certains ouvrages et articles de référence peuvent être cités. Il faut se rappeler, comme expliqué au chapitre 3, que c'est l'étude de la théorie de Liapounov [1] et du principe du maximum de Pontryagin<sup>4</sup> [2] qui conduisirent certains chercheurs à développer les techniques de commande optimale aux États-Unis [3,4,5]. L'article plus récent [6] est un peu difficile d'accès en première lecture mais traite avec généralité de la commande optimale en annonçant de façon quasi prophétique quel serait les centres d'intérêt des automaticiens quelque temps plus tard.

Pour de très sérieuses et très complètes références en Anglais sur la commande optimale, voir [7,8,9,10,11]. Pour des références en Français, une approche certes mathématique mais néanmoins destinée aux débutants est proposée dans les deux opuscules [12,13].

Certains polycopiés de notes de cours ou diaporamas didactiques sont très bien faits. Pour une approche par la face nord, très rigoureuse, [14] est de grande qualité. Pour une approche bien plus rapide et plus simple (même si moins complète évidemment), l'auteur tient à citer le travail de son collègue Guillaume Mercère [15]. Voir également le travail de Denis Arzelier [16].

Pour écrire cette petite introduction à la commande optimale, l'auteur s'est essentiellement basé sur le point de vue de [17]. Cela étant, bien d'autres livres du même genre proposent des approches assez similaires. Quelques éléments sont empruntés à [18].

1. **A. M. Liapounov** : *Problème général de stabilité du mouvement*. Annales de la faculté de sciences de Toulouse, vol 9. p.203-474, 197. Traduit du texte original russe, publié dans Comm. Soc. Math., Kharkov, 1892. *Une véritable mine d'idées à la fois simples mais très fortes, très puissantes, qui inspirèrent et inspirent encore de très nombreux automaticiens mais aussi bien des chercheurs d'autres disciplines scientifiques. C'est es-*

---

4. mathématicien soviétique (1908-1988).

essentiellement sa « seconde méthode » ou « méthode directe » qui génère (toujours) de nombreux travaux sur la stabilité des systèmes.

2. **L. S. Pontryagin, V. G. Boltyansky, R. V. Gamkrelidze et E. F. Mishchenko** : *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley, New York, 1962.  
*Un livre en anglais pour connaître le travail de Pontryagin.*
3. **R. Bellman** : *Dynamic Programming* Princeton University Press, New Jersey, 1957.  
*Introduction à l'optimisation dynamique, au principe d'optimalité. « Vraie naissance de la commande optimale » dans la communauté automatisée occidentale.*
4. **R. E. Kalman** : Contributions to the Theory of Optimal Control *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 5, p. 102-119, 1960.  
*Article de Kalman souvent cité, relatif à la commande optimale.*
5. **R. E. Kalman** : When Is a Linear Control System Optimal? *Transactions of the ASME (Journal of Basic Engineering)*, 86D(1), p. 51-60, 1964.  
*Tout est dans le titre!*
6. **J. C. Willems** : Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6), p. 621-634, 1971.  
*Un des articles les plus denses en informations essentielles que l'auteur ait pu lire.*
7. **M. Athans et P. L. Falb** : *Optimal Control : An Introduction to the Theory and its Applications*. McGraw-Hill, 1967.  
*Contrairement à ce qu'indique le titre, ce n'est pas une introduction mais un livre qui traite de la commande optimale en long, en large et en travers.*
8. **A. E. Bryson et Y.-C. Ho** : *Applied Optimal Control* Blaisdell Publishing co., 1969.  
*Une référence parmi les premières.*
9. **H. Kwakernaak et R. Sivan** : *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, 1997.  
*Une autre référence parmi les premières.*
10. **B. D. O. Anderson et J. B. Moore** : *Optimal Control : Linear Quadratic Methods*. Collection *Dover Books on Engineering* Dover Publications, 2007.

Une référence plus récente, peut-être plus adaptée à la vision de l'enseignement d'aujourd'hui, rigoureuse néanmoins. Les avis sont partagés sur les aspects didactiques de ce livre. Une chose est sûre : son prix est abordable.

11. **F. L. Lewis, D. Vrabie et V. L. Syrmos** : *Optimal Control*. John Wiley & Sons, 2012.  
Une référence plus récente avec des exemples illustratifs parfois assez (trop ?) sophistiqués.
12. **J.-B. Hiriart-Urruty** : *Les mathématiques du mieux faire (Volume 1) : Premier pas en optimisation*. Collection « Opuscules », Ellipses Marketing, 2007.  
Un premier volume dédié à l'optimisation en général. Très didactique.
13. **J.-B. Hiriart-Urruty** : *Les mathématiques du mieux faire (Volume 2) : La commande optimale pour les débutants*. Collection « Opuscules », Ellipses Marketing, 2008.  
Application de [12] à la commande optimale. Toujours très didactique.
14. **P. Rouchon et F. Bonnans** : *Commande et optimisation de systèmes dynamiques*. Polycopié de notes de cours de l'École Polytechnique, 2006  
Très bien fait, très rigoureux, mais attention, il faut être solide sur ses bases mathématiques.
15. **G. Mercère** : *Optimal control : An introduction*. Diaporama de notes de cours, École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers (ENSIP), 2013. Téléchargeable à l'adresse :  
<http://www.lias-lab.fr/perso/guillaumemercere/GMTeaching.html>  
Très facile d'accès pour un cours de niveau ingénieur. Des mathématiques certes, mais pas trop. L'essentiel résumé.
16. **D. Arzelier** : *Commande optimale des systèmes dynamiques*. Diaporama de notes de cours, Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs en construction Aéronautique (ENSICA - ISAE), 2007. Téléchargeable à l'adresse :  
<http://homepages.laas.fr/arzelier/cours.html>  
En Français. Intéressant entre autres pour certains aspects historiques. Didactique avec de bons exemples.
17. **K. Ogata** : *Modern Control Engineering*. Troisième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.  
Ouvrage de référence qui semble en avoir inspiré plus d'un. L'auteur a un petit faible pour cette référence dont la première édition date de 1970.

On y trouve entre autres cette interprétation de la commande LQ au sens de la seconde méthode de Liapounov.

18. **B. Pradin et G. Garcia** : *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Presses Universitaires du Mirail, 2010.

Que dire de cet ouvrage si ce n'est que c'est celui qu'il faut acheter! Incontestablement le meilleur rapport qualité/prix. Malgré une évidente volonté de simplicité, quelques subtilités sur la commande optimale sont proposées.





# Chapitre 12

## *Conclusion*

### Sommaire

---

12.1 Résumé du cours . . . . .	625
12.2 Perspectives . . . . .	626
12.3 Notes et références . . . . .	629

---

### 12.1. Résumé du cours

Ce cours a balayé rapidement les concepts de base de l'Automatique des systèmes linéaires, essentiellement mono-entrée / mono-sortie, dans l'espace d'état. Trois des grands problèmes ont été abordés : la modélisation, l'analyse et la commande.

Concernant la modélisation, un nouveau modèle linéaire a été introduit pour décrire le comportement d'un système monovarié : la représentation d'état. Il a été expliqué que ce modèle n'est pas unique. Les moyens d'obtenir un tel

modèle et le lien avec l'équation différentielle et la fonction de transfert ont été mis en évidence.

Concernant l'analyse, il a été montré que l'on pouvait utiliser la représentation d'état pour déterminer la réponse d'un système. La notion de valeurs propres de la matrice d'état s'est révélée fondamentale non seulement pour comprendre la forme de cette réponse mais également pour conclure quant à la stabilité du système.

Dans la partie relative à la commande, les notions de commandabilité et d'observabilité ont été introduites. Elles sont essentielles pour calculer des lois de commandes dites « par retour d'état », comprenant ou non un observateur d'état. Des techniques d'obtention de telles lois de commande ont été présentées. Il a été vu que l'association de la commande par retour statique d'état et de la synthèse d'un observateur permettait de commander un système linéaire par retour dynamique de sortie.

Une introduction succincte à la représentation d'état discrète a été proposée. Elle reprend brièvement les concepts vus en continu.

Un exemple académique a été traité en détails, celui de l'asservissement en position d'une suspension magnétique. Il permet de reprendre une partie des notions exposées dans ce cours.

Enfin, une très brève introduction à la commande linéaire quadratique a été proposée. Elle permet au lecteur d'aborder ce sujet sans grand investissement mais une étude plus poussée requiert la consultation d'autres ouvrages.

## 12.2. Perspectives

Les perspectives d'étude qu'offre la représentation d'état sont nombreuses. Peuvent entre autres être citées :

- L'étude des systèmes multivariables : la représentation d'état, bien plus directement que la fonction de transfert, se prête à l'extension des concepts étudiés au cas des systèmes possédant plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties. En effet, dans ce cas précis,  $B$  et  $C$  deviennent des matrices

plutôt que de simples vecteurs mais le modèle varie peu. Beaucoup de propositions de ce document, formulées pour des systèmes monovariables, peuvent être applicables en l'état à des systèmes multivariables. Toutefois, les systèmes multivariables génèrent aussi de nouvelles questions, de nouveaux problèmes, qui n'ont pas été abordés ici (couplage entrées/sorties, etc.).

- L'identification : il existe, comme dans l'approche fréquentielle, des techniques d'obtention de modèles qui s'appuient sur l'observation du comportement du système. Lorsque la phase de modélisation ne permet pas d'obtenir un modèle complet, on peut recourir à ces techniques d'identification. Même si la modélisation physique permet parfois d'obtenir un structure précise du modèle du procédé, certaines valeurs de paramètres apparaissant dans le modèle peuvent être obtenues par identification. On parle alors d'*estimation paramétrique*. Ces techniques font souvent l'objet de cours spécifiques.
- La commande optimale : sous ce vocable sont regroupées un ensemble de techniques qui consistent à commander un modèle d'état tout en minimisant un critère de performances. On peut bien entendu citer la commande LQ subreptisement évoquée au chapitre 11, mais aussi un certain nombre de stratégies de commande visant à, formellement, rejeter des perturbations, telles les commandes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  (minimisation de la norme  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  d'un transfert entre des perturbations et les sorties du système)... Il faut noter à ce propos qu'un certain nombre de problèmes d'asservissement sophistiqués, par exemple un suivi de trajectoire, peuvent être reformulés comme un problème de rejet de perturbations. Dès lors, tout un champ d'étude s'ouvre grâce à de telles approches de l'Automatique.
- La robustesse : il s'agit là de faire l'étude de systèmes (analyse et commande) dont les modèles sont incertains. On dit qu'ils sont sujet à des incertitudes. Le principe de l'analyse robuste est de savoir si un système a les propriétés souhaitées quelle que soit l'incertitude dans un ensemble donné. Celui de la commande robuste est de déterminer une loi de commande qui assure les propriétés du modèle pour toute la gamme d'incertitudes possibles.

- La commande stochastique : elle prend en compte l'existence de bruits aléatoires sur les signaux d'entrées sorties (signaux stochastiques). Elle peut être traitée comme un pan de la commande optimale voire de la commande robuste dans une acception assez large. Son outil emblématique est le filtre de Kálmán (version discrète) ou celui de Kálmán-Bucy (version continue)<sup>1</sup>. Ces filtres permettent de résoudre le problème de commande LQG (Linéaire Quadratique Gaussienne), c'est-à-dire le problème de commande LQ en présence de bruits gaussien<sup>2</sup>.
- 
- La commande non linéaire : elle traite bien sûr de la commande des représentations d'état non linéaires par des lois elles-mêmes non linéaires.
- 
- Les systèmes implicites ou singuliers ou encore descripteurs : pour ces systèmes, des équations algébriques viennent contraindre le vecteur d'état en plus des équations différentielles (ou récurrentes pour le cas des modèles discrets), pouvant ainsi conduire à des problèmes de causalité.
  - Les systèmes multidimensionnels : il ne faut pas les confondre avec les systèmes multivariables. Leur particularité vient du fait que l'information ne se propage pas seulement au cours du temps (équations faisant intervenir des dérivées par rapport au temps) mais elle se propage le long de plusieurs dimensions, généralement spatiales ou temporelles. Les domaines d'application de tels modèles sont nombreux. On peut par exemple citer les équations aux dérivées partielles, l'apprentissage itératif, le traitement du signal, de l'image, la sismologie, les réseaux, etc.
- 
- etc.

Comme le lecteur peut le constater, il peut encore étudier longuement avant d'avoir fait le tour de l'Automatique et de la représentation d'état !

---

1. du nom de Rudolf Emil Kálmán (voir biographie en annexe I.2 page 777) de de Richard Snowden Bucy, ingénieur en aérospatial états-unien (1935-).

2. du nom de Johann Carl Friedrich Gauss, mathématicien, physicien et astronome allemand (1777-1855).

## 12.3. Notes et références

Comme il a déjà été mentionné, la représentation d'état se prête assez naturellement à l'extension au cas des systèmes multivariables (plusieurs entrées ou plusieurs sorties). Des ouvrages de référence déjà cités ici y accordent déjà des chapitres. C'est notamment le cas de [1,2]. Mais il existe des ouvrages plus récents qui abordent ces aspects de façon plus systématique comme [3]. Il faut bien comprendre qu'aujourd'hui, un cours de commande avancé à des élèves ingénieurs en fin de cycle d'ingénieur peut difficilement se dispenser d'aborder l'aspect multi-entrées / multi-sorties. L'auteur a bien bénéficié du polycopié [4]. Il existe de nombreux polycopiés de notes de cours sur Internet.

Concernant l'identification, il existe là aussi beaucoup de techniques et de livres sur le sujet, tel que le populaire [5]. L'identification étant basée sur l'utilisation des signaux d'entrée et de sortie, les modèles externes sont plus souvent utilisés que les modèles d'état, même s'il y a des exceptions.

Pour aller plus loin en commande optimale, des références ont déjà été données au chapitre 11. Une première est ici rappelée. Elle est d'importance : [6]. L'auteur y ajoute [7], plus récente et plus accessible.

La robustesse des modèles bouclés vis-à-vis d'incertitudes de modélisation et le rejet de perturbations sophistiquées, en présence de bruit ou non, sont devenus, dans les années 1980, un enjeu de la recherche en Automatique. Leur enseignement a rapidement été intégré dans les cursus des ingénieurs. Un livre très populaire à cet égard est [8] mais il en existe bien d'autres que le lecteur n'aura pas de mal à trouver. Dans celui-ci, les aspects de commande optimale sont aussi abordés. De fait, les problèmes de rejet de perturbations sont souvent interprétés au sens d'une commande optimale. Pour une référence plus récente, l'auteur apprécie bien [9]. Pour des références en Français, le lecteur peut se procurer [10,11,12], ou encore de très bons polycopiés de cours que l'on peut parfois trouver sur Internet.

Pour aller vraiment plus loin sur les systèmes multivariables, la robustesse et certains aspects de l'optimalité, ce par une approche moderne basée sur les inégalités matricielles linéaires ou LMI (de l'anglais *Linear Matrix Inequalities*), l'auteur ne saurait trop conseiller les excellentes notes de cours de Carsten W. Scherer et Siep Weiland [13].

Concernant les systèmes non linéaires, essentiellement abordés dans l'espace d'état, trois références sont rappelées, à savoir [14,15] et [16].

Les systèmes linéaires implicites font l'objet de nombreux articles, mais l'auteur préfère citer trois ouvrages : [17,18] et [19], le dernier utilisant une approche LMI.

Il est assez difficile de trouver des ouvrages un minimum didactisés sur les modèles multidimensionnels. Ce sont de vrais documents de recherche. Certains articles proposent de meilleures introductions que les livres mais l'auteur ne peut s'aventurer à les citer (ils sont de toute façon durs à se procurer). Un livre assez général peut toutefois être mentionné : [20].

Bien entendu toutes ces références vont bien plus loin que ne le fait le présent document et la marche qui permet de passer du contenu de ce cours à celui des divers ouvrages cités peut parfois se révéler assez haute.

1. **T. Kailath** : *Linear Systems*. Prentice Hall, 1979.  
*Un vrai ouvrage de référence, pas très facile à aborder par son style et sa forme mais redoutablement complet. Pratiquement une « bible ».*
2. **P. J. Antsaklis et A. N. Michel** : *Linear Systems*. McGraw-Hill, 1997.  
*Fanquement pas le plus accessible mais très rigoureux mathématiquement. Très bien mais déconseillé pour une première approche.*
3. **S. Skogestad et I. Postlethwaite** : *Multivariable Feedback Control : Analysis and Design*. Deuxième édition - Wiley-Blackwell, 2005.  
*Un des ouvrages possibles pour aborder le cas multivariable.*
4. **B. Pradin** : *Systèmes Multivariables*. Polycopié de cours d'Automatique, INSA de Toulouse, 5ème année spécialité AEI. 1994.  
*Très bonne approche pour passer du cas mono-entrée / mono-sortie au cas multi-entrée / multi-sortie.*
5. **L. Ljung** : *System Identification : Theory for the User* Deuxième édition - Prentice Hall, 1998.  
*Un livre cité régulièrement pour découvrir l'identification.*
6. **M. Athans et P. L. Falb** : *Optimal Control : An Introduction to the Theory and its Applications*. McGraw-Hill, 1967.

Contrairement à ce qu'indique le titre, ce n'est pas une introduction mais un livre qui traite de la commande optimale en long, en large et en travers.

7. **B. D. O. Anderson et J. B. Moore** : *Optimal Control : Linear Quadratic Methods*. Collection *Dover Books on Engineering* Dover Publications, 2007.

Une référence plus récente, peut-être plus adaptée à la vision de l'enseignement d'aujourd'hui, rigoureuse néanmoins. Les avis sont partagés sur les aspects didactiques de ce livre. Une chose est sûre : son prix est abordable.

8. **K. Zhou, J. C. Doyle et K. Glover** : *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1995.

Un livre qui aborde la commande optimale et la commande robuste. Il en existe bien d'autres plus récents mais celui-ci a eu son heure de gloire.

9. **R. E. Skelton, T. Iwasaki et K. Grigoriadis** : *A Unified Algebraic Approach To Control Design*. Collection « Series in Systems and Control », CRC Press, 1997.

Une approche assez générale et très méthodique pour aborder de nombreux problèmes de l'Automatique.

10. **D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit et G. Ferreres** : *Robustesse et commande optimale*. Éditions Cépaduès, 2000.

Une bonne référence en Français.

11. **H. Guillard et H. Bourlès** : *Commandes des systèmes - Performance & robustesse - Régulateurs monovariables, multivariables - Applications - Cours & exercices corrigés*. Collection « Technosup », Ellipses Marketing, 2012.

Une autre référence en Français, plus récente.

12. **G. Duc et S. Font** : *Commande  $H_\infty$  et  $\mu$ -analyse*. Collection « Pédagogique d'automatique », Hermes Science Publications, 2000.

Sans doute le premier ouvrage en français traitant de la commande  $H_\infty$ . Assez court mais néanmoins très complet et très didactique. Cet ouvrage a contribué à l'introduction de l'enseignement des techniques modernes de l'automatique (la commande  $H_\infty$  notamment) dans les cursus d'ingénieurs et universitaires.

13. **C. W. Scherer et S. Weiland** : *Linear Matrix Inequalities in Control*. Notes de cours, Delft Center for Systems and Control, 2005.

Téléchargeable à l'adresse :

[www.dscs.tudelft.nl/cscherer/lmi/notes05.pdf](http://www.dscs.tudelft.nl/cscherer/lmi/notes05.pdf)

Excellente approche de la commande des systèmes multivariables basée sur les LMI. Très bien rédigé mais pas forcément simple pour autant car très subtil et très rigoureux. L'auteur aime beaucoup ce polycopié. Vraiment pour aller beaucoup plus loin.

14. **M. Vidyasagar** : *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, 1978.  
*Première édition d'un ouvrage assez prisé des « non-linéaristes », et des étudiants découvrant le sujet.*
15. **M. Vidyasagar** : *Nonlinear Systems Analysis*. SIAM Editions, collection « Classics in Applied mathematics », 1982.  
*Seconde édition de l'ouvrage précédent plutôt bien actualisée.*
16. **H. Khalil** : *Nonlinear Systems*. Troisième édition Prentice Hall, 1981.  
*L'autre grosse référence sur les systèmes non linéaires.*
17. **L. Dai** : *Singular Control Systems*. Collection *Lectures Notes in Control and Information Science*. Springer, Berlin, 1989  
*Le tout premier ouvrage de référence sur les systèmes singuliers.*
18. **G.-R. Duan** : *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*. Collection *Advances in Mechanics and Mathematics*. Springer-Verlag New York Inc., 2010  
*Un autre ouvrage sur les systèmes singuliers.*
19. **A. Rehm** : *Control of Linear Descriptor Systems : A Matrix Inequality Approach* VDI Verlag, Düsseldorf, 2004  
*Un troisième ouvrage sur les systèmes singuliers avec une approche LMI. Moins connu que les deux précédents mais pas moins intéressant.*
20. **N. K. Bose** : *Multidimensional Systems Theory and Applications* Kluwer Academic Publishers, 2010  
*Un livre assez récent sur les systèmes  $nD$ , pas forcément simple, par un pionnier du thème.*



# Annexes

Dans ces annexes, sont présentés quelques concepts qui permettent, soit d'appréhender un peu mieux le contenu du cours, c'est-à-dire d'obtenir quelques compléments d'information de nature scientifique ou culturelle.





# Annexe A

## *Rappels de mathématiques*

Quelques notions d'algèbre linéaire (ou plutôt, pour être honnête, de calcul matriciel) et d'analyse sont ici brièvement rappelées. Il ne s'agit pas de présenter un petit cours de mathématiques mais simplement de rafraîchir la mémoire du lecteur s'il en est besoin.

### Sommaire

---

<b>A.1</b>	<b>À propos des matrices</b>	<b>636</b>
A.1.1	Vecteurs	636
A.1.2	Vectorisation d'une matrice	637
A.1.3	Transposition-conjugaison	637
A.1.4	Matrices carrées	638
A.1.5	Opérations sur les matrices	639
A.1.6	Normes de matrices	645
A.1.7	Déterminant d'une matrice carrée	646
A.1.8	Mineurs d'une matrice	648
A.1.9	Cofacteurs et matrice adjointe	650
A.1.10	Polynôme caractéristique d'une matrice carrée	651
A.1.11	Rang d'une matrice	651
A.1.12	Matrices inverses	652

A.1.13 Complément orthogonal . . . . .	658
A.1.14 Valeurs propres d'une matrice . . . . .	659
A.1.15 Trace d'une matrice . . . . .	664
A.1.16 Valeurs singulières d'une matrice . . . . .	665
A.1.17 Rang, déterminant, valeurs propres et valeurs singulières d'une matrice carrée . . . . .	666
<b>A.2 À propos de la définition positive . . . . .</b>	<b>667</b>
A.2.1 Fonction définie positive . . . . .	667
A.2.2 Matrices hermitiennes définies en signe . . . . .	668
<b>A.3 Système d'équations linéaires . . . . .</b>	<b>670</b>
<b>A.4 Notes et références . . . . .</b>	<b>672</b>

## A.1. À propos des matrices (et des vecteurs)

Quelques définitions et propriétés des matrices sont ici données. Une matrice  $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$  peut être vue comme un « tableau » de  $m \times n$  scalaires complexes  $m_{ij}$  à  $m$  lignes et  $n$  colonnes où  $m_{ij}$  est l'élément situé en  $i^{\text{ème}}$  ligne et en  $j^{\text{ème}}$  colonne. Une telle matrice est en réalité souvent une représentation d'une application linéaire de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^m$ .

Exemple :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 + 3\mathbf{i} & 6 \\ -4 & 7 & 5 + \mathbf{i} \end{bmatrix}$$

### A.1.1. Vecteurs

On se contentera ici d'une simple définition rapide. Une matrice ne comportant qu'une ligne est un *vecteur ligne*. Une matrice ne comportant qu'une colonne est un *vecteur colonne*. Par *vecteur*, on entend généralement par défaut « vecteur colonne ».

### A.1.2. Vectorisation d'une matrice

Il est parfois utile, dans certains calculs, notamment dans la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires, d'associer à une matrice un vecteur contenant les composantes de la matrice. Pour ce faire, on définit  $\text{vec}(M)$ , le vecteur colonne obtenu en concaténant (c'est-à-dire en empilant) toutes les colonnes de la matrice  $M$ .

Exemple :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 + 3\mathbf{i} \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{vec}(M) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 + 3\mathbf{i} \\ 7 \end{bmatrix}.$$

### A.1.3. Transposition-conjugaison

Soit la matrice  $M = [m_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ .  
Soit aussi la matrice  $N = [n_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times m}$ .

- $N$  est la transposée de  $M$  si et seulement si  $n_{ij} = m_{ji}$ ,  $\forall \{i; j\}$  (les lignes de  $M$  sont les colonnes de  $N$  et réciproquement). On note alors  $N = M^T$ .
- $N$  est la transposée conjuguée de  $M$  si et seulement si  $n_{ij} = \tilde{m}_{ji}$ ,  $\forall \{i; j\}$  où  $\tilde{m}_{ij}$  désigne le conjugué du scalaire  $m_{ij}$  (les lignes de  $M$  sont les colonnes conjuguées de  $N$  et réciproquement). On note alors  $N = M'$ .

Ces notations ont été retenues pour cet ouvrage mais ne sont pas universelles.

Exemple :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 + 5i \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 + 5\mathbf{i} & 7 \end{bmatrix} \\ M' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 - 5\mathbf{i} & 7 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Dans le cas de matrices réelles ( $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ), les deux opérateurs peuvent être confondus.

### A.1.4. Matrices carrées

Une matrice est dite carrée si elle comporte le même nombre de lignes et de colonnes. Ce nombre est parfois appelé *ordre* ou *dimension* de la matrice. Cette dernière représente une application de  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) vers  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^n$ ) qui est donc susceptible d'être automorphique.

Parmi les matrices carrées, certaines sont particulières, telles la *matrice nulle*, notée  $0$ , dont toutes les composantes sont nulles ( $m_{ij} = 0, \forall \{i, j\}$ ) et la *matrice identité*, notée  $I$ , dont toutes les composantes sont nulles à l'exception de celles de sa diagonale principale qui sont égales à 1 ( $m_{ii} = 1 \forall i$  et  $m_{ij} = 0 \forall \{i, j \neq i\}$ ). La matrice  $0$  est l'élément neutre de l'addition des matrices de même dimension et l'élément absorbant de la multiplication. La matrice  $I$  est l'élément neutre de la multiplication<sup>1</sup> (voir ci-après).

Une matrice *triangulaire supérieure* n'a que des composantes nulles en dessous de sa diagonale principale ( $m_{ij} = 0 \forall \{i, j < i\}$ ). Une matrice *triangulaire inférieure* n'a que des composantes nulles au dessus de sa diagonale principale ( $m_{ij} = 0 \forall \{i, j > i\}$ ). Une matrice triangulaire inférieure et supérieure est dite *diagonale* ( $m_{ij} = 0, \forall \{i, j \neq i\}$ ).

La matrice carrée complexe  $M$  est dite *hermitienne*<sup>2</sup> quand  $M = M'$ . Dans le cas où  $M$  est réelle, on a  $M' = M^T = M$  et l'on dit alors de la matrice qu'elle est *symétrique*.

#### Exemples :

La matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est la matrice nulle (notée  $0$  ou  $0_2$ ) des matrices carrées de dimension 2.

La matrice

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. sous réserve de compatibilité des dimensions.

2. du nom de Charles Hermite, mathématicien français (1822-1901).

est la matrice identité des matrices carrées de dimension 2, parfois simplement notée  $I$  en omettant la dimension.

Les matrices  $0_2$  et  $I_2$  sont toutes deux diagonales.

La matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est triangulaire supérieure alors que la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

est triangulaire inférieure. Les matrices  $0_2$  et  $I_2$  sont toutes deux triangulaires supérieures et inférieures.

La matrice réelle

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

est symétrique. Puisqu'elle est réelle, elle est aussi hermitienne. La matrice complexe

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 + \mathbf{i} \\ 3 + \mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}$$

est symétrique mais elle n'est pas hermitienne. En revanche, la matrice complexe

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 + \mathbf{i} \\ 3 - \mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}$$

n'est pas symétrique mais elle est hermitienne.

## A.1.5. Opérations sur les matrices

### A.1.5.1. Addition de matrices

Soient deux matrices  $M = [m_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$  et  $N = [n_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$  de mêmes dimensions alors leur somme  $S = [s_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$  est définie par

$$s_{ij} = m_{ij} + n_{ij} \quad \forall \{i; j\}.$$

Cette somme est notée  $S = A + B$ . Les propriétés de l'addition matricielle sont les suivantes :

- $A + B = B + A$  (commutativité) ;
- $A + (B + C) = (A + B) + C$  (associativité) ;
- $s(A + B) = sA + sB, \forall s \in \mathbb{C}$  ;
- $\exists C \mid A + C = B$  et  $C$  est notée  $C = A - B$  (différence) ;
- $A + 0 = A$  (élément neutre) ;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$  (transposition de la somme) ;
- $(A + B)' = A' + B'$  (transposition-conjugaison de la somme).

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

### A.1.5.2. Multiplication de matrices

Soient le vecteur  $v = [v_1 \dots v_n]^T$  et le vecteur  $w = [w_1 \dots w_n]^T$  de même taille. On définit le *produit scalaire* de  $v$  et  $w$  par

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

À partir de ce produit scalaire de deux vecteurs, on peut définir le produit de deux matrices. Si l'on suppose que  $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$  et  $N \in \mathbb{C}^{n \times q}$  sont respectivement la concaténation en colonne de  $m$  vecteurs lignes  $v^{[i]}$ ,  $i = 1, \dots, m$  et la concaténation en ligne de  $q$  vecteur colonnes  $w^{[j]}$ ,  $j = 1, \dots, q$ ,

$$M = \begin{bmatrix} v^{[1]} \\ \vdots \\ v^{[m]} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N = [ w^{[1]} \quad \dots \quad w^{[q]} ],$$

alors le *produit*  $P = [p_{ij}] = M \times N = MN \in \mathbb{C}^{m \times q}$  est défini par



$$p_{ij} = \langle v^{[i]}, w^{[j]} \rangle = \sum_{k=1}^n v_k^{[i]} w_k^{[j]} \quad \forall \{i; j\} \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, q\}.$$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

On note que la multiplication de deux matrices  $M$  et  $N$  n'est définie que si le nombre de colonnes de  $M$  est égal au nombre de lignes de  $N$ .

Le produit de deux matrices correspond à la composition de deux applications linéaires.

Les propriétés de la multiplication de matrices sont :

- $A(B + C) = AB + AC$  (distributivité à droite) ;
- $(A + B)C = AC + BC$  (distributivité à gauche) ;
- $A(BC) = (AB)C$  (associativité) ;
- $AB \neq BA$  (non-commutativité) ;
- $A \times I = A$  (élément neutre) ;
- $A \times 0 = 0$  (élément absorbant) ;
- $AB = 0$  n'implique pas toujours  $A = 0$  ou  $B = 0$  ;
- $AB = AC$  n'implique pas toujours  $B = C$  ;
- $(AB)^T = B^T A^T$  (transposition du produit) ;
- $(AB)' = B' A'$  (transposition-conjugaison du produit).

**Remarque A.1** Une matrice  $A$  carrée peut être élevée à une puissance  $k$  en définissant  $A^k = A^{k-1}A$  et  $A^0 = I$ . Une matrice qui devient nulle pour une valeur de  $k$  est qualifiée de nilpotente.

### A.1.5.3. Exponentielle de matrice

La puissance d'une matrice carrée  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  permet de définir son exponentielle, notée  $\exp(A)$  ou  $e^A$ , par

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

où  $k!$  désigne la factorielle de l'entier naturel  $k$ , à savoir  $k! = \prod_{i=1}^k i$ . L'exponentielle est donc définie par une série convergente.

Exemple :

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elle est nilpotente puisqu'il est facile de vérifier que  $A^2 = 0_2$ . Dès lors, il vient

$$e^A = I_2 + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### A.1.5.4. Produit de Kronecker

On définit le produit matriciel de Kronecker<sup>3</sup> de deux matrices  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$  par

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nm}B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{np \times mq}.$$

3. du nom du mathématicien et logicien allemand Leopold Kronecker (1823-1891).

Le produit de Kronecker n'est pas commutatif mais ses propriétés sont, entre autres<sup>4</sup> (considérant que les diverses matrices ont des dimensions appropriées et que  $\alpha \in \mathbb{C}$ ) :

- Multiplication par un scalaire :

$$\alpha(A \otimes B) = (\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B).$$

- Transposition conjugaison :

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B'.$$

- Associativité :

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$

- Distributivité à droite et à gauche sur l'addition :

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C \quad \text{et} \quad A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C.$$

- Distributivité sur le produit matriciel :

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

- $A \otimes B$  et  $B \otimes A$  ont les mêmes valeurs singulières ce qui implique

$$\|A \otimes B\|_2 = \bar{\sigma}(A \otimes B) = \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B) = \|A\|_2 \|B\|_2.$$

- Si  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées d'ordres respectifs  $m$  et  $n$ , alors :

- ◊  $\det(A \otimes B) = \det(B \otimes A) = \det(A)^m \det(B)^n$ .
- ◊  $\text{trace}(A \otimes B) = \text{trace}(B \otimes A) = \text{trace}(A)\text{trace}(B)$ .
- ◊  $A \otimes B$  normale  $\Rightarrow B \otimes A$  normale<sup>5</sup>.
- ◊  $A$  et  $B$  normales  $\Rightarrow B \otimes A$  normale.
- ◊  $A$  et  $B$  (semi-)définies positives (négatives)  $\Rightarrow A \otimes B$  (semi-)définie positive (négative).
- ◊  $A$  et  $B$  hermitiennes  $\Rightarrow A \otimes B$  hermitienne.

---

4. Pour comprendre certaines propriétés, il convient de se référer à quelques paragraphes ultérieurs car certaines notions n'ont pas encore été introduites.

5. Une matrice  $M$  est dite normale si  $MM' = M'M$ .

- ◇  $A \otimes B$  unitaire  $\Rightarrow B \otimes A$  unitaire<sup>6</sup>.
- ◇ Inversion (si les matrices sont de rang plein) :

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

- ◇ Propriété de similarité : s'il existe deux matrices de rang plein  $T$  et  $S$  telles que  $A = T^{-1}MT$  et  $B = S^{-1}NS$ , alors

$$(A \otimes B) = (T \otimes S)^{-1}(M \otimes N)(T \otimes S).$$

- ◇ Ainsi, si  $A$  et  $B$  sont jordanisables par des matrices de passage respectives  $V_A$  et  $V_B$ , il vient

$$(A \otimes B) = (V_A \otimes V_B)(J_A \otimes J_B)(V_A \otimes V_B)^{-1}.$$

où  $J_A$  et  $J_B$  sont des formes de Jordan associées respectivement aux valeurs propres de  $A$ ,  $\lambda_i(A)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , et à celles de  $B$ ,  $\lambda_j(B)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . La diagonale de  $(J_A \otimes J_B)$  nous montre que

$$\lambda_l(A \otimes B) = \lambda_i(A)\lambda_j(B).$$

Donc,  $A \otimes B$  et  $B \otimes A$  ont les mêmes valeurs propres.

- ◇ Condition de commutation (lorsque  $A$  et  $B$  ont les mêmes dimensions) :

$$A \otimes B = B \otimes A \quad \Rightarrow \quad A = \alpha B \quad \text{ou} \quad B = \alpha A.$$

### Exemple :

On se contentera d'un petit exemple de calcul à partir de deux matrices de petite taille. Soient les matrices  $A$  et  $B$  données par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Les produits matriciels de Kronecker  $A \otimes B$  et  $B \otimes A$  sont respectivement égaux

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

---

6. Une matrice  $U$  est dite unitaire si sa transposée conjuguée est aussi son inverse *i.e.*  $U'U = UU' = I$

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

## A.1.6. Normes de matrices

### A.1.6.1. Définition et propriétés des normes

La norme est un opérateur qui permet de quantifier un scalaire, un vecteur, une fonction vectorielle (ex : un vecteur de signaux temporels), une matrice, une matrice de transfert... Tous ces exemples ne seront pas envisagés. La norme permet d'ordonner les éléments d'un ensemble qui n'est *a priori* pas muni d'une relation d'ordre. Une norme est généralement notée  $\|u\|_{\bullet}$  où  $u$  est l'élément dont on calcule la norme et  $\bullet$  désigne la nature de la norme considérée. Plusieurs normes différentes peuvent donc être utilisées mais elles doivent toutes vérifier les propriétés suivantes :

- (i)  $\|u\|_{\bullet} \geq 0$
- (ii)  $\|u\|_{\bullet} = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- (iii)  $\|au\|_{\bullet} = |a| \cdot \|u\|_{\bullet}, \quad \forall a \in \mathbb{C}$
- (iv)  $\|u + v\|_{\bullet} \leq \|u\|_{\bullet} + \|v\|_{\bullet}$

La propriété (iii) fait apparaître la valeur absolue  $|\cdot|$  sur le corps des complexes. La propriété (iv) est connue sous le nom d'*inégalité triangulaire*.

### A.1.6.2. Norme euclidienne d'un vecteur

Le produit scalaire de deux vecteurs (lignes ou colonnes, peu importe!) a été défini au début du paragraphe A.1.5.2 page 640 pour introduire la multiplication matricielle. Il peut aussi servir à définir la norme euclidienne<sup>7</sup> d'un vecteur, également appelée norme-2. Elle se définit en effet, pour un vecteur  $u \in \mathbb{C}^n$ , par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

7. du nom d'Euclide, mathématicien grec (vers 300 av. J. C.).

Il s'agit de la norme « naturelle », que tout un chacun utilise dans la vie quotidienne pour évaluer les distances. Les propriétés des normes sont calculées sur celles de la norme euclidienne.

Exemple : Le vecteur

$$u = [ 1 \quad \sqrt{6} \quad 3 ]$$

a pour norme euclidienne

$$\|u\|_2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{6})^2 + 3^2} = 4.$$

### A.1.6.3. Norme 2 d'une matrice

On peut définir une norme matricielle en l'induisant d'une norme vectorielle. Dans ce document, seule la norme-2 d'une matrice est définie. Elle est induite par la norme euclidienne de la façon suivante.

$$\|M\|_2 = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \left( \frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2} \right) = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \sqrt{\frac{x' M' M x}{x' x}}.$$

Au paragraphe A.1.16.1 page 665, il lien sera établi avec la notion de *valeur singulière maximale*.

### A.1.7. Déterminant d'une matrice carrée

La définition du *déterminant* d'une matrice est un peu formelle pour nos besoins. Elle repose sur la notion permutation et pour des raisons de concision, elle n'est pas rappelée ici. On se contente de rappeler les règles de calcul pour des matrices carrées d'ordre 2 ou 3.

On note d'abord que le déterminant d'une matrice est un scalaire qui se déduit par calcul des composantes de la matrices.

### A.1.7.1. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit la matrice carrée  $A$  ainsi composée :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de  $A$  est ainsi calculé :

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemple :

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = 1 \times 4 - (-2) \times 3 = 10$$

### A.1.7.2. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 ou plus

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n = 3$ . On affecte un signe à chacune de ses composantes, en quinconce, de la façon suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^- & a_{13}^+ \\ a_{21}^- & a_{22}^+ & a_{23}^- \\ a_{31}^+ & a_{32}^- & a_{33}^+ \end{bmatrix}.$$

Chaque signe est noté  $\text{sign}(i, j)$ .

On note  $\det_{ij}(A)$  le déterminant de la matrice  $2 \times 2$  issue de  $A$  par élimination de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne. Il suffit alors de raisonner par rapport à la ligne (ou la colonne)  $k$ . On calcule :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n \text{sign}(k, j) a_{kj} \det_{kj}(A) = \sum_{j=1}^n \text{sign}(j, k) a_{jk} \det_{jk}(A).$$

En notant que  $\text{sign}(i, j) = (-1)^{(i+j)}$ , il vient

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{(k+j)} a_{kj} \det_{kj}(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{(j+k)} a_{jk} \det_{jk}(A). \quad (\text{A.1})$$

Exemple :

On raisonne, dans l'exemple ci-après, par rapport à la première ligne :

$$\det \left( \begin{bmatrix} 2^+ & 3^- & 5^+ \\ 1^- & 0^+ & 1^- \\ 2^+ & 1^- & 0^+ \end{bmatrix} \right) =$$

$$2 \det \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) - 3 \det \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right) + 5 \det \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = 9$$

La technique de calcul présentée ci-avant peut s'étendre à des matrices de dimension plus élevée c'est-à-dire que la formule (A.1) est valable pour  $n > 3$ .

### A.1.7.3. Quelques propriétés du déterminant

- Une ligne ou une colonne nulle  $\Rightarrow \det(A) = 0$ .
- $\det(A^T) = \det(A)$ .
- $\det(A') = \det(\tilde{A}) = \widetilde{(\det(A))}$ .
- Ligne ou colonne multipliée par  $s \in \mathbb{C} \Rightarrow \det(A)$  multiplié par  $s$ .
- Si  $B$  est obtenue à partir de  $A$  en ajoutant à la  $i^{\text{ème}}$  ligne (colonne) le produit d'un scalaire par une autre ligne (colonne) alors  $\det(B) = \det(A)$ .
- $\det(I_m + MN) = \det(I_n + NM)$  (attention aux dimensions de  $M$  et  $N$  :  $MN$  et  $NM$  doivent être carrées).

### A.1.8. Mineurs d'une matrice

Les *mineurs* d'une matrice  $M = [m_{ij}]$  sont les déterminants de ses sous-matrices carrées. Ainsi si  $M$  est une matrice de taille  $m$  par  $n$ , est appelé mineur d'ordre  $k$  tout déterminant d'une sous-matrice carrée de taille  $k$  obtenue en supprimant  $(m - k)$  lignes et  $(n - k)$  colonnes de la matrice initiale est appelé *mineur d'ordre*  $k$ .



Si le mineur d'une matrice carrée est obtenu par extraction d'une sous-matrice de  $M$  issue de la suppression de lignes et de colonnes de mêmes indices, il est dit *mineur principal*.

Enfin les *mineurs principaux dominants* d'une matrice carrée  $M$  sont les mineurs d'ordre  $k$  issus d'une sous-matrice carrée où ne seraient conservées que les  $k$  premières lignes et  $k$  premières colonnes de  $M$ . Il sont généralement notés  $\Delta_k(M)$ .

Exemples :

Soit la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ses mineurs sont

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \text{et} \quad 6,$$

c'est-à-dire chacune de ses composantes, ainsi que

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \right) = -3 \quad \text{et} \quad \det \left( \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \right) = -3.$$

N'étant pas carrée, la matrice  $M$  n'a pas de mineurs principaux, encore moins de mineurs principaux dominants.

Soit maintenant la matrice carrée

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ses mineurs sont

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad \text{et} \quad 5,$$

c'est-à-dire chacune de ses composantes, ainsi que

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \right) = -3.$$

Parmi eux, ses mineurs principaux sont

$$1, \quad 5, \quad \text{et} \quad \det \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \right) = -3.$$

Et, parmi tous les mineurs principaux, les mineurs principaux dominants sont

$$\Delta_1(N) = 1, \quad \text{et} \quad \Delta_2(N) = \det \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \right) = -3.$$

### A.1.9. Cofacteurs et matrice adjointe

Les *cofacteurs* d'une matrice carrée  $A = [a_{ij}]$  sont définis par

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det_{ij}(A).$$

(Au passage, il peut être noté que  $\det_{ij}(A)$  est un mineur principal.) On remarque que le déterminant de  $A$  s'exprime alors (cette formule est dite « formule de Laplace »<sup>8</sup>)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{kj} \alpha_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{jk} \alpha_{jk}.$$

En outre, la *matrice adjointe* de  $A$ , notée  $\text{adj}(A)$ , est définie par la transposée des cofacteurs, à savoir

$$A = [a_{ij}] \Rightarrow \text{adj}(A) = [\alpha_{ji}].$$

#### Exemple :

Soit la matrice carrée

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sa matrice adjointe est donnée par

$$\text{adj}(M) = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

---

8. du nom de P.-S. de Laplace, voir biographie 2.1 page 40

### A.1.10. Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Le *polynôme caractéristique* d'une matrice carrée  $A$  est le polynôme en  $\lambda$  défini par

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Par ailleurs, l'équation  $P(A) = 0$  est dite *équation caractéristique* associée à  $A$ . À ce propos, il convient de présenter le théorème de Cayley-Hamilton<sup>9</sup>

**Théorème de Cayley-Hamilton :** toute matrice carrée vérifie sa propre équation caractéristique.

Exemple :

Soit encore la matrice carrée

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\lambda I - M) = \det \left( \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \right) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 5) - (-2)(-4) = \lambda^2 - 6\lambda - 3. \end{aligned}$$

### A.1.11. Rang d'une matrice

Le *rang*  $r$  d'une matrice  $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , noté  $\text{rang}(M)$ , est défini par le nombre maximal de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes de cette matrice. Elle est de rang plein si et seulement si  $\min(m, n) = r$ . Si ce n'est le cas, la matrice est dite *déficiente en rang* ou présente une *déficience de rang*.

9. du nom du mathématicien britannique Arthur Cayley (1821-1895) et de Sir William Rowan Hamilton dont une biographie est proposée à la page 138.

Une matrice carrée  $A$  de rang plein est dite *régulière*. Dans ce cas, il vient  $\det(A) \neq 0$ . Par opposition, une matrice déficiente en rang est dite *singulière* et il vient alors  $\det(A) = 0$ . Bien souvent, le qualificatif « *non-singulière* » est préféré à « *régulière* ».

Exemples :

La matrice  $M$  de l'exemple du paragraphe A.1.10 est de rang (-3) donc elle est non singulière. En revanche, la matrice

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

est singulière. On peut le voir en calculant son déterminant qui est nul. On peut aussi voir que sa seconde ligne est égale à 3 fois sa première ligne ou encore que sa seconde colonne est égale à 2 fois sa première colonne. Les lignes (ou les colonnes) ne sont donc pas linéairement indépendantes.

## A.1.12. Matrices inverses

### A.1.12.1. Définition et calcul

Une matrice carrée  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  admet une *inverse* de même dimension notée  $A^{-1}$  si et seulement si

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Une condition d'existence de  $A^{-1}$  est la non-singularité de  $A$  (voir §A.1.11).

Pour calculer une inverse, on doit donc d'abord savoir si elle existe c'est-à-dire savoir si  $A$  est de rang plein, en montrant par exemple que  $\det(A) \neq 0$ . Puis les deux techniques de calcul les plus classiques sont :

- on résout le système linéaire à  $n$  équations et  $n$  inconnues (fastidieux même pour un ordre faible) ;

— on applique la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

Exemple :

Soit encore la matrice carrée

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(M) = -3.$$

Son déterminant n'étant pas nul, elle admet une inverse. On a vu au paragraphe A.1.9 que sa matrice adjointe est

$$\text{adj}(M) = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

et on a

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{adj}(M) = \frac{1}{(-3)} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

On peut vérifier que

$$M^{-1}M = MM^{-1} = I_2.$$

De façon plus générale, pour ce cas des matrices carrées d'ordre 2, on a :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

L'inversion d'une matrice intervient notamment, en Automatique, lorsqu'on calcule la fonction de transfert à partir de la représentation d'état, par la formule (3.17) page 88. On a alors besoin de calculer  $(pI - A)^{-1}$ . Or, une relation non triviale relie les coefficients  $a_i$  du polynôme caractéristique rendu unitaire à  $\text{adj}(pI - A)$ , à savoir

$$\text{adj}(pI - A) = p^{n-1}I + p^{n-2}(A + a_{n-1}) + \dots + (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I).$$

Elle permet de déduire une expression de  $G(p)$

$$G(p) = \frac{p^{n-1}CB + p^{n-2}(CAB + a_{n-1}CB) + \dots + (CA^{n-1}B + \dots + a_1CB)}{P(p)} + D. \quad (\text{A.3})$$

### A.1.12.2. Propriétés des inverses

Sous réserve de compatibilité des dimensions et d'existence des diverses inverses :

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  (inverse du produit) ;
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$  (inverse de la transposée) ;
- $(A')^{-1} = (A^{-1})'$  (inverse de la transposée-conjuguée) ;
- $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$  (*lemme d'inversion des matrices* dit aussi *Identité matricielle de Woodbury*, ou *formule de Woodbury*, ou encore *Formule de Sherman-Morrison-Woodbury*)<sup>10</sup> ;
- $(I + A)^{-1} = I - (A^{-1} + I)^{-1}$  (lemme d'inversion des matrices simplifié).

### A.1.12.3. Matrice unitaire

On appelle *matrice unitaire* toute matrice carrée dont la transposée conjuguée est aussi une inverse, c'est-à-dire toute matrice carrée  $M$  telle que  $M'M = MM' = I$ . (On parle de *matrice orthogonale* dans le cas particulier d'une matrice réelle.)

Exemple : bien entendu la matrice identité est unitaire. Toute matrice de rotation d'un angle  $\theta$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

est également unitaire.

### A.1.12.4. Pseudo-inverse

Lorsqu'une matrice  $M$  est rectangulaire de rang plein, elle n'est pas inversible (car non carrée). Il est toutefois possible de trouver une « inverse dans un sens »,

<sup>10</sup>. Globalement, on sent que le mathématicien états-unien Max A. Woodbury y est pour quelque chose.

c'est-à-dire une inverse à droite ou à gauche, selon la structure de  $M$ . De telles matrices sont appelées *pseudo-inverses*.

Si  $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$  est rectangulaire haute ( $m > n$ ) de plein rang  $n$ , il est possible de calculer une inverse à gauche notée  $M^\bullet \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , de rang  $n$ , telle que  $M^\bullet M = I_n$ . En revanche  $MM^\bullet$  est déficiente en rang et diffère donc de la matrice identité  $I_m$ .

Si  $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$  est rectangulaire basse ( $m < n$ ) de plein rang  $m$ , il est possible de calculer une inverse à droite notée  $M^\circ \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , de rang  $n$ , telle que  $MM^\circ = I_m$ . En revanche  $M^\circ M$  est déficiente en rang et diffère donc de la matrice identité  $I_n$ .

Une pseudo inverse connue, à droite comme à gauche, est la *pseudo-inverse de Moore-Penrose*<sup>11</sup>. Elle satisfait (pour une matrice  $M$  quelconque) les propriétés suivantes (et quelques autres) :

- $(M^+)' = (M')^+$  ;
- $(\widetilde{M^+}) = (\widetilde{M})^+$  ;
- $MM^+M = M$  ;
- $M^+MM^+ = M^+$  ;
- $(MM^+)' = MM'$  ;
- $(M^+M)' = M^+M$  ;
- $(M^+)' = (M')^+$  ;
- $(aM)^+ = a^{-1}M^+$ , pour  $(a \neq 0) \in \mathbb{C}$ .

Dans le cas d'une matrice  $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$  rectangulaire haute ( $m > n$ ) de plein rang  $n$ , la pseudo-inverse de Moore-Penrose peut se calculer analytiquement par la formule

$$M^+ = (M'M)^{-1}M'. \quad (\text{A.4})$$

Dans le cas d'une matrice  $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$  rectangulaire basse ( $m < n$ ) de plein rang  $m$ , la pseudo-inverse de Moore-Penrose peut aussi se calculer analytiquement par la formule

11. du nom du mathématicien états-unien Eliakim Hastings Moore (1862-1932) et du mathématicien et physicien britannique Roger Penrose (1931-).

$$M^+ = M'(MM')^{-1}. \quad (\text{A.5})$$

Lorsque, par exemple,  $M$  est une matrice *déficiente en rang*, il est impossible de déterminer une pseudo-inverse telle que  $M^\bullet M = I$  ou  $MM^\circ = I$ . Cependant, on peut calculer sa pseudo-inverse de Moore-Penrose, mais pas avec les formules données ci-avant (les inversions y apparaissant sont impossibles). Il faut recourir à des procédures numériques telles que celles proposées par le logiciel MATLAB<sup>©</sup> (voir §H.1 page 736), qui ne sont pas détaillées ici. La matrice de Moore-Penrose obtenue vérifie alors les propriétés vues précédemment, notamment  $MM^+M = M$  et  $M^+MM^+ = M^+$ .

Si  $M$  est carrée non singulière, alors la pseudo-inverse de Moore-Penrose peut se calculer par les formules (A.4) ou (A.5), l'une ou l'autre indifféremment, et l'on a alors  $MM^+ = M^+M = I$ , ce qui signifie que  $M^+ = M^{-1}$ . Dans ce cas, la pseudo-inverse de  $M$  est donc unique et c'est l'inverse de  $M$ .

### Exemples :

Soit la matrice rectangulaire haute

$$N = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Il est facile de voir qu'une pseudo inverse à gauche possible est

$$N^\bullet = [ 1 \quad 0 ]$$

en ce sens que  $N^\bullet N = 1$ . De même si l'on considère la matrice rectangulaire basse

$$M = N' = [ 1 \quad 2 ],$$

alors

$$M^\circ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

peut servir de pseudo-inverse à droite en ce sens que  $MM^\circ = 1$ . Toutefois, il est plus indiqué de calculer la pseudo-inverse de Moore-Penrose dont les propriétés



sont plus complètes. Par exemple, en utilisant la formule (A.5), il vient

$$\begin{aligned} M^+ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (5)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

qui vérifie bien  $MM^+ = 1$ . De la même manière, en utilisant la formule (A.4), on peut calculer une autre instance de  $N^\bullet$  mais puisque  $N = M'$ , il est plus facile de noter que  $N^+ = (M^+)'$ .

Si l'on considère maintenant la matrice carrée *déficiente en rang*

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

Il est impossible de déterminer  $T^\bullet$  ou  $T^\circ$  telles que l'on aurait respectivement  $T^\bullet T = I_2$  ou  $TT^\circ = I_2$ . Cependant, il reste possible de calculer la pseudo-inverse de Moore-Penrose par une procédure numérique (voir §H.1 page 736), à savoir

$$T^+ = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

On vérifie bien que  $T^+TT^+ = T^+$  et  $TT^+T = T$ .

Si, maintenant, on considère une matrice carrée de rang plein, telle que

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

alors la formule (A.4) permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
 V^+ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

De la même manière, la formule (A.5) permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
 V^+ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Les deux formules conduisent bien sûr à la même valeur qui n'est autre que  $V^{-1}$ . Bien entendu, dans un tel cas de figure (matrice carrée non singulière), il est inutile de recourir à  $V^+$  et il est plus rapide de calculer  $V^{-1}$ .

### A.1.13. Complément orthogonal

Le *complément orthogonal* d'une matrice  $M$  est une matrice de rang plein  $M_{\text{orth}}$  telle que

$$M_{\text{orth}}M = 0. \quad (\text{A.6})$$

Par ailleurs, on définit ici le *complément orthogonal à droite* d'une matrice  $M$  par une matrice de rang plein  $M_{\perp}$  telle que

$$MM_{\perp} = 0. \quad (\text{A.7})$$

(Cette notation est spécifique à l'ouvrage car d'ordinaire, c'est plutôt le complément orthogonal simple qui est défini).

Il est clair que

$$M_{\perp} = (M'_{\text{orth}})'. \quad (\text{A.8})$$

Si l'on considère le sous-espace vectoriel  $E_1$  engendré par les colonnes de  $M$ , alors les colonnes de  $M_{\perp}$  engendrent un autre sous-espace vectoriel  $E_2$ , complémentaire de  $E_1$  dans l'espace vectoriel de référence. Le sous-espace  $E_2$  est appelé *noyau* de l'application associée linéaire à  $M$ . Par abus de langage, l'on parle de *noyau à droite* de  $M$ .

Une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes n'admet pas de noyau à droite ( $M_{\perp} = \emptyset$ ).

### Exemple :

Soit la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

il est clair que l'on a

$$M_{\text{orth}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si l'on considère  $N = M'$ , alors, il vient immédiatement  $N_{\perp} = M'_{\text{orth}}$ .

## A.1.14. Valeurs propres d'une matrice

### A.1.14.1. Structure propre d'une matrice

$\lambda \in \mathbb{C}$  est *valeur propre* de  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  si et seulement si

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0 \quad (\text{A.9})$$

Une matrice de dimension  $n$  a nécessairement  $n$  valeurs propres  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Pour simplifier, l'on supposera que celles-ci sont distinctes. Lorsque  $A$  est réelle, les valeurs propres constituent un ensemble auto-conjugué. Autrement dit, si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ , sa quantité conjuguée l'est aussi. Tous ces scalaires constituent un ensemble de cardinal  $n$  appelé *spectre* de  $A$  et parfois noté  $\lambda(A)$ .

Il existe  $n$  vecteurs  $v_i \in \mathbb{C}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$  non nuls, appelés *vecteurs propres à droite*, tels que :

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{A.10})$$

Ces vecteurs propres sont tous définis à un facteur près.

Si l'on définit  $V$ , *matrice modale*, par :

$$V = [v_1, \dots, v_n] \quad (\text{A.11})$$

alors, il vient la relation :

$$\Lambda = V^{-1}AV \quad (\text{A.12})$$

où  $\Lambda$  est une matrice diagonale définie par

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \quad (\text{A.13})$$

La détermination de  $\Lambda$  passe par celle de  $V$ . On parle de diagonalisation de matrice. Cette diagonalisation n'est pas toujours possible lorsque les valeurs propres ne sont pas distinctes. Des formes canoniques de Jordan peuvent néanmoins être calculées mais ceci n'est pas explicité ici.

On peut aussi définir les *vecteurs propres à gauche*  $u_i$  (également définis à un facteur multiplicatif près) par la relation

$$u'_i A = \lambda_i u'_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (\text{A.14})$$

En définissant la matrice  $U$  par la concaténation

$$U = [u_1, \dots, u_n], \quad (\text{A.15})$$

il apparaît, entre les matrices  $U$  et  $V$ , pour des choix de  $u_i$  et  $v_i$  convenablement mis à l'échelle, la *condition d'orthogonalité*

$$U'V = I. \quad (\text{A.16})$$

L'ensemble constitué des valeurs propres et des vecteurs propres à gauche et à droite est appelé *structure propre*.

Exemple :

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est égal à (cf. §A.1.10 page 651)

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\lambda I_2 - A) = \det \left( \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= (\lambda - 3)\lambda + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme sont  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 = 2$ . Ce sont les valeurs propres de  $A$  et elles sont distinctes. On peut calculer une matrice  $V = [v_1 \ v_2]$  des vecteurs propres à droite (matrice modale) où  $v_1$  est vecteur propre associé à  $\lambda_1$  et  $v_2$  est vecteur propre associé à  $\lambda_2$ . Pour ce faire, les vecteurs  $v_i$ , pour  $i = 1, 2$ , doivent vérifier l'équation de la structure propre à droite (A.10). Si l'on décompose  $V$  en

$$V = [ v_1 \mid v_2 ] \left[ \begin{array}{c|c} v_{11} & v_{21} \\ \hline v_{12} & v_{22} \end{array} \right],$$

alors l'équation  $Av_1 = \lambda_1 v_1$  conduit au système

$$\begin{cases} 3v_{11} - v_{12} = v_{11}, \\ 2v_{11} = v_{12}, \end{cases}$$

qui se réduit à

$$\begin{cases} v_{11} = v_{11}, \\ v_{12} = 2v_{11}, \end{cases}$$

Une solution simple de ce système est  $v_{11} = 1$  et  $v_{12} = 2$  qui donne le vecteur

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

De la même façon, l'équation  $Av_2 = \lambda_2 v_2$  conduit au système

$$\begin{cases} 3v_{21} - v_{22} = 2v_{21}, \\ 2v_{21} = 2v_{22}, \end{cases}$$

qui se réduit à

$$\begin{cases} v_{21} = v_{21}, \\ v_{22} = v_{21}, \end{cases}$$

Une solution simple de ce système est  $v_{21} = 1$  et  $v_{22} = 1$  qui donne le vecteur

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient finalement la matrice

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

La formule (A.2) page 653 permet de déduire

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

et de vérifier que

$$\begin{aligned}\Lambda &= V^{-1}AV \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

qui est bien une matrice diagonale dont la diagonale fait apparaître les valeurs propres de  $A$ .

#### A.1.14.2. Propriétés des valeurs propres

Il est à noter que les valeurs propres d'une matrice carrée  $A$  vérifient les propriétés suivantes :

- $\lambda(A) = \lambda(A^T)$  ;
- $\lambda_i \in \lambda(A) \Rightarrow -\lambda_i \in \lambda(-A)$  ;
- $\lambda_i \in \lambda(A) \Rightarrow \tilde{\lambda}_i \in \lambda(A')$  ;
- $\lambda_i \in \lambda(A) \Rightarrow \lambda_i^k \in \lambda(A^k)$  ;
- $\lambda_i \in \lambda(A) \Rightarrow s + \lambda_i \in \lambda(sI + A), \forall s \in \mathbb{C}$  ;
- les éléments diagonaux d'une matrice triangulaire sont ses valeurs propres.
- Les valeurs propres d'une matrice symétrique ou Hermitienne sont réelles.

#### A.1.14.3. Propriétés des vecteurs propres

Il est à noter que les vecteurs propres d'une matrice carrée  $A$  vérifient les propriétés suivantes :

- ils sont linéairement indépendants et constituent donc une base de  $\mathbb{C}^n$  ;
- ils sont orthogonaux pour une matrice Hermitienne diagonalisable (c.-à-d.  $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \forall \{i; j \neq i\}$ ) et constituent donc une base orthogonale (et même orthonormale puisqu'ils peuvent être normalisés). On peut alors écrire

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i'.$$

Ces propriétés sont aussi vraies pour les vecteurs propres à gauche.

## A.1.15. Trace d'une matrice

La trace d'une matrice carrée  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est définie par :

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

La trace de  $A$  est donc la somme de ses éléments diagonaux. On peut par ailleurs montrer que c'est la somme de ses valeurs propres c.-à-d. :

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

De ce fait, toutes les matrices semblables ont la même trace. La trace est un scalaire complexe, également réel si  $A$  est réelle ou si  $A$  est complexe mais Hermitienne. En outre, sous réserve de compatibilité des dimensions, on a :

$$\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA) \quad \text{si les produits } AB \text{ et } BA \text{ sont carrés} \quad (\text{A.17})$$

$$\text{trace}(A + B) = \text{trace}(B + A) = \text{trace}(A) + \text{trace}(B) \quad (\text{A.18})$$

$$\text{trace}(aA) = a \text{trace}(A), \quad a \in \mathbb{C} \quad (\text{A.19})$$

$$\text{trace}(A^T) = \text{trace}(A) \quad (\text{A.20})$$

$$\text{trace}(A') = \widetilde{\text{trace}(A)} \quad (\text{A.21})$$

Exemple :

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sa trace est égale à

$$\text{trace}(A) = 3 + 0 = 3.$$



Au paragraphe A.1.14.1, il a été vu que  $A$  était semblable à la matrice diagonale

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

On peut vérifier que

$$\text{trace}(\Lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2 = 3 = \text{trace}(A).$$

## A.1.16. Valeurs singulières d'une matrice

### A.1.16.1. Décomposition en valeurs singulières

Toute matrice  $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$  admet une *décomposition en valeurs singulières* :

$$M = U\Sigma W'. \quad (\text{A.22})$$

$U \in \mathbb{C}^{m \times m}$  et  $W \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sont deux matrices unitaires (cf. §A.1.12.3 page 654), c'est-à-dire telles que

$$UU' = I_m \quad \text{et} \quad WW' = I_n, \quad (\text{A.23})$$

et  $\Sigma$ , lorsque  $q = \min\{m, n\}$ , est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma = \left[ \begin{array}{cccc|c} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_q & 0 \end{array} \right] \quad \text{si } q = m, \\ \\ \Sigma = \left[ \begin{array}{cccc} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_q \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \quad \text{si } q = n, \\ \\ \Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_q\} \quad \text{si } q = m = n. \end{array} \right. \quad (\text{A.24})$$

Les scalaires  $\sigma_i$  sont appelés valeurs singulières de  $M$ . Ces valeurs sont réelles, positives ou nulles, et l'on peut déterminer  $U$  et  $W$  de telle sorte que

$$\bar{\sigma}(M) = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_q = \underline{\sigma}(M) \geq 0. \quad (\text{A.25})$$

Parmi ces valeurs singulières, il en est une qui revêt peut-être plus d'importance que les autres. En effet :

La valeur singulière maximale d'une matrice  $M$  n'est autre que sa norme-2 (cf. §A.1.6 page 645) :

$$\|M\|_2 = \bar{\sigma}(M). \quad (\text{A.26})$$

La décomposition en valeurs singulières s'effectue numériquement, par exemple grâce au LOGICIEL MATLAB<sup>©</sup>, comme le montre un exemple numérique traité au paragraphe H.1 page 736.

### A.1.16.2. Valeurs singulières et valeurs propres

Les valeurs singulières de  $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$  sont égales aux racines carrées des valeurs propres de  $MM'$  (si  $m \leq n$ ) ou celles de  $M'M$  (si  $n \leq m$ ). Si  $M$  est Hermitienne, alors ses valeurs singulières sont égales aux valeurs absolues de ses valeurs propres (qui sont elles-mêmes réelles).

### A.1.17. Rang, déterminant, valeurs propres et valeurs singulières d'une matrice carrée

Dans le cas d'une matrice carrée, on peut lier la notion de rang à celles de valeurs propres, de valeurs singulières et de déterminant.

Les cinq propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) La matrice  $A$  est inversible.
- (ii) La matrice  $A$  est non-singulière (de rang plein).
- (iii)  $0 \notin \lambda(A)$ .
- (iv)  $\det(A) \neq 0$ .
- (v)  $\underline{\sigma}(A) \neq 0$ .

Par ailleurs le rang d'une matrice rectangulaire est égal au nombre de ses valeurs singulières non nulles.

## A.2. À propos de la définition positive

### A.2.1. Fonction définie positive

Une fonction  $V(x, t)$  de  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$  est dite localement *définie* (respectivement *semi-définie*) *positive* s'il existe une boule  $\mathcal{B}$  incluant l'origine de  $\mathbb{C}^n$  telle que :

- (i)  $V(0, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$  ;
- (ii)  $V(x, t) > 0$  (resp.  $V(x, t) \geq 0$ ),  $\forall \{x; t\} \in \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+$ .

Lorsque la boule  $\mathcal{B}$  peut s'étendre à l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^n$ , la fonction  $V$  est simplement dite *définie* (resp. *semi-définie*) *positive*.

Si  $V$  est (localement) définie (resp. semi-définie) positive alors la fonction  $-V$  est dite (localement) définie (resp. semi-définie) négative.

Un cas particulier est d'un grand intérêt. Il s'agit de celui où la fonction  $V$  est une *forme quadratique* c'est-à-dire que la fonction  $V$  répond à la formulation  $V(x) = x'Px$  où  $P$  est une matrice hermitienne. Ce cas particulier conduit à la notion de définition positive d'une matrice (voir paragraphe suivant).

### A.2.2. Matrices hermitiennes définies en signe

Une matrice hermitienne  $P$  est *définie* (resp. *semi-définie*) *positive* si et seulement si

$$x'Px > 0 \text{ (resp. } x'Px \geq 0), \quad \forall x \neq 0$$

Si la propriété est vérifiée, alors la matrice hermitienne  $-P$  est *définie* (resp. *semi-définie*) *négative*.

La définition en signe d'une matrice hermitienne est par définition équivalente à celle de la forme quadratique associée.

Quelques propriétés :

- $P = P' > 0 \Leftrightarrow \lambda(P) \subset \mathbb{R}^+$  ;
- $P = P' \geq 0 \Leftrightarrow 0 \in \lambda(P) \subset \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}$  ;
- $P = P' > 0 \Leftrightarrow P^{-1} = (P^{-1})' > 0$  ;
- $P = P' > 0 \Rightarrow \det(P) \neq 0$  ;
- $P = P' \geq 0 \Rightarrow \det(P) = 0$  ;
- $P = P' > 0 \Rightarrow P$  admet une racine carrée notée  $P^{1/2}$  telle que

$$\begin{cases} P = (P^{1/2})^2 ; \\ P^{1/2} > 0 ; \\ ((P^{1/2})^{-1})^2 = P^{-1} ; \end{cases}$$

- $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $\det(M) \neq 0 \Rightarrow P = M'M > 0$  ;
- $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $\det(M) = 0 \Rightarrow P = M'M \geq 0$  ;
- $P > 0$  (resp.  $\geq 0$ )  $\Rightarrow P$  admet une décomposition  $P = S'S$  avec  $\det(S) \neq 0$  et  $S$  carrée (resp.  $S$  rectangulaire haute). Si  $P > 0$ , alors  $S$  peut être calculée de sorte à être triangulaire supérieure et la décomposition est dite de *Cholesky*<sup>12</sup>.

Enfin, en se référant à la définition des mineurs d'une matrice introduite en §A.1.8

12. du nom de André-Louis Cholesky dit René Cholesky, ingénieur et militaire français (1875-1918), mort au champ d'honneur.

page 648, le critère de Sylvester<sup>13</sup> permet de tester si une matrice est strictement définie positive

### Critère de Sylvester :

Une matrice  $M$  est strictement définie positive si et seulement si tous ces mineurs principaux dominants sont strictement positifs :

$$M > 0 \Leftrightarrow \Delta_k(M) > 0 \forall k.$$

Attention cependant, ceci ne fonctionne que pour la définition positive et il convient de noter que

$$M < 0 \not\Leftrightarrow \Delta_k(M) < 0 \forall k.$$

Par conséquent, pour tester  $M < 0$  par le critère de Sylvester, mieux vaut tester  $-M > 0$ .

Une matrice  $M$  est dite définie (respectivement semi-définie) supérieure en signe à une matrice  $N$  de même dimension si et seulement si  $M - N > 0$  (resp  $M \geq 0$ ) et elle est dite définie (resp. semi-définie) inférieure en signe à  $N$  si et seulement si  $M - N < 0$  (resp  $M \leq 0$ ). Cette relation d'ordre ne peut pas exister entre toutes les matrices Hermitiennes de même dimension (dès lors que cette dimension est au moins égale à  $n = 2$ ). Ainsi, il peut exister (et il en existe même beaucoup) des paires de matrices  $(M, N)$  telles que la quantité  $x'(M - N)x$  est positive pour certaines valeurs de  $x \in \mathbb{R}^n$  et négative pour d'autres valeurs de  $x$ . C'est pourquoi l'on parle de relation d'ordre partiel (et non total). Cette relation d'ordre est même plus précisément appelée *Relation d'ordre partiel de Löwner*<sup>14</sup>.

13. du nom du mathématicien anglais James Joseph Sylvester (1814-1897).

14. du nom du mathématicien américain d'origine tchèque Karel (Charles) Löwner (1883-1968).

Exemple :

Soit la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elle est hermitienne. On peut calculer ses mineurs principaux dominants

$$\Delta_1(P) = 1, \quad \Delta_2(P) = 1, \quad \Delta_3(P) = \det(P) = -24.$$

Puisque l'un d'entre eux est négatif, la matrice  $P$  n'est pas définie positive. Si l'on calculait ses valeurs propres, on les trouverait réelles (puisque  $P$  est hermitienne) et l'on constaterait que l'une d'entre elles est égale à -2, alors que les deux autres sont positives. Ceci prouve que la matrice n'est pas définie en signe.

### A.3. Pseudo-solution d'un système d'équations linéaires

Soit le système d'équations linéaires s'écrivant, de façon matricielle,

$$Ax = b,$$

où  $A$  est une matrice connue,  $b$  est un vecteur connu, et  $x$  est un vecteur inconnu à déterminer. Si ce système est surdéterminé, c'est-à-dire qu'il comporte plus de contraintes que d'inconnues, il n'existe pas de solution en  $x$ . Il est toutefois possible de s'en rapprocher autant que faire se peut au sens de la norme euclidienne (cf. §A.1.6.2 page 645), en définissant un écart et en cherchant à minimiser sa norme-2 :

$$\min_x \|r\|_2, \quad \text{avec } r = b - Ax.$$

Il existe une solution simple à ce problème qui est un cas particulier de la classe des problèmes dits *de moindres carrés* théorisés par Legendre<sup>15</sup> et Gauss<sup>16</sup>. Cette solution stipule que  $x$  doit vérifier

15. Adrien-Marie Legendre, mathématicien français (1752-1833).

16. Johann Carl Friedrich Gauss, mathématicien, physicien et astronome allemand (1777-1855).

$$(A'A)x = A'b.$$

Ces équations sont dites *équations normales*. Si la matrice  $A'A$  est inversible, il vient

$$x = (A'A)^{-1}A'b.$$

La solution obtenue correspond à la projection orthogonale de  $b$  sur l'ensemble défini par  $Ax$ .

On retrouve dans l'équation ci-avant la formule de la pseudo-inverse de Moore-Penrose donnée en (A.4) page 655, c'est-à-dire que

$$x = A^+b.$$

Si  $A$  est carrée inversible (système bien déterminé), alors  $A^+ = A^{-1}$  et l'on retrouve la solution classique, unique, d'un système bien posé, à savoir  $x = A^{-1}b$ .

## A.4. Notes et références

Tout ce qui est écrit dans ce chapitre peut être trouvé dans n'importe quel cours de mathématiques et l'auteur ne veut pas se lancer dans une litanie de références. Toutefois, il ne résiste pas à l'envie de porter l'attention du lecteur sur des ouvrages particulièrement connus sur l'étude des matrices [1,2,3], ainsi que sur un atlas des mathématiques assez sympathique [4].

Un point peut paraître un peu compliqué en ce qui concerne les références, c'est la formule de Woodbury-Sherman-Morrison. L'auteur s'est inspiré de [5,6].

1. **F. R. Gantmacher** : *The Theory of Matrices (volumes I et II)*. American Mathematical Society, Chelsea Publishing, 1959.  
*Très souvent cité en référence dans des articles d'automatique mais difficile à trouver.*
2. **R. A. Horn et C. R. Johnson** : *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.  
*Pas très agréable dans la forme mais redoutablement complet. Réédité plusieurs fois depuis.*
3. **R. A. Horn et C. R. Johnson** : *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1990.  
*En complément du précédent ou réciproquement. Les points abordés n'y sont pas les mêmes.*
4. **F. Reinhardt et H. Soeder** : *Atlas des Mathématiques*. La Pochotèque, Le Livre de Poche, Librairie Générale Française, 1997.  
Traduit de l'ouvrage original en Allemand *dtv - Atlas zur Matematik*, Deutscher Taschenbuch Verlag, 1974.  
*Un énorme aide-mémoire de mathématiques et même bien plus. Très richement illustré.*
5. **W. J. Duncan** : *Some devices for the solution of large sets of simultaneous equations (with an appendix on the reciprocation of partitioned matrices)*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Seventh Series, vol. 35, pp. 660-670, 1944.  
*Plus vieille référence sur l'identité de Woodbury que l'auteur ait pu trouver et lire.*



6. **K. S. Riedel** : *A Sherman-Morrison-Woodbury Identity for Rank Augmenting Matrices with Application to Centering*. SIAM Journal of Matrix Analysis, vol. 13, no. 2, pp. 659-662, 1992.  
*Une référence plus récente sur le sujet où l'on retrouve immédiatement l'identité.*



# Annexe B

## *À propos du régime transitoire*

Dans cette annexe, on revient quelque peu sur la notion de régime transitoire ou, plus exactement, sur les éléments qui influent sur le régime transitoire de la réponse d'un modèle linéaire invariant dans le temps (LTI en anglais). Parmi ces éléments, on peut bien sûr citer les pôles dont l'influence a déjà été établie dans le corps de ce document, mais aussi les vecteurs propres et les zéros du système.

### Sommaire

---

<b>B.1</b>	<b>Influence du spectre de la matrice d'état . . . . .</b>	<b>676</b>
<b>B.2</b>	<b>Influence des vecteurs propres de <math>A</math> . . . . .</b>	<b>678</b>
B.2.1	Couplage modes/sorties . . . . .	678
B.2.2	Couplage modes/commandes en boucle fermée . . . . .	679
B.2.3	Couplage modes/consignes en boucle fermée . . . . .	680
B.2.4	En résumé sur les vecteurs propres . . . . .	681
<b>B.3</b>	<b>Influence des zéros . . . . .</b>	<b>681</b>
B.3.1	Zéros d'un modèle d'état . . . . .	681
B.3.2	Contribution des zéros . . . . .	682
<b>B.4</b>	<b>Le cas discret . . . . .</b>	<b>683</b>
<b>B.5</b>	<b>Notes et références . . . . .</b>	<b>684</b>

---

Pour simplifier, la matrice dynamique  $A$  est toujours supposée diagonalisable dans ce qui suit. Il est même supposé que ses valeurs propres sont de multiplicité algébrique 1.

## B.1. Influence du spectre de la matrice d'état

On suppose que le système est en régime libre et est soumis à une perturbation instantanée (impulsionnelle) représentée par une condition initiale  $x_0 = x(t_0)$ . On s'intéresse alors à la réponse du système autonome  $\dot{x} = Ax$  qui est la solution d'un système d'équations différentielles de premier ordre. Elle est donnée par

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Si l'on introduit la structure propre de  $A$  (cf. §A.1.14.1 page 659) dans cette expression, on obtient

$$x(t) = \sum_{i=1}^n v_i e^{\lambda_i t} u_i' x_0. \quad (\text{B.1})$$

Les  $v_i \in \mathbb{C}^n$  sont les vecteurs propres à droite de  $A$  et les  $u_i \in \mathbb{C}^n$  sont ses vecteurs propres à gauche. Or, la décomposition de  $x_0$  dans la base constituée par les vecteurs propres à droite de  $A$  (à ce propos, cf. §A.1.14.3 page 661) peut s'exprimer par la combinaison linéaire suivante :

$$x_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j.$$

D'où l'on obtient

$$x(t) = \sum_{i=1}^n v_i e^{\lambda_i t} u_i' \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right).$$

Compte tenu de la condition d'orthogonalité (A.16) page 661 qui amène  $u_i' v_j = 0$ ,  $\forall \{i, j \neq 0\} \in \{1, \dots, n\}^2$  et  $u_i' v_i = 1$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , il vient

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} v_i. \quad (\text{B.2})$$

On appelle *mode réel* la quantité  $e^{\lambda_i t} v_i$  lorsque  $\lambda_i$  est réel et *mode complexe* la quantité  $(e^{\lambda_i t} v_i + e^{\lambda_j t} v_j) \in \mathbb{R}$  lorsque  $\lambda_i = \bar{\lambda}_j \in \{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$ . Parfois, abusivement, ce sont les valeurs propres  $\lambda_i$  qui sont appelés « modes ». L'expression (B.2) est essentielle car on constate que tous les termes de la réponse convergent vers zéro (donc le système est asymptotiquement stable et *a fortiori* BIBO-stable : voir chapitre 5) si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle négative. Plus précisément, on voit bien que le système retrouve d'autant plus vite sa position d'équilibre à l'origine que les parties réelles des valeurs propres de  $A$  sont très négatives (on parle de *modes lents* ou *dominants* et de *modes rapides* ou *dominés*). La rapidité de la réponse dépend de toute évidence des modes les plus lents. Bien entendu, la valeur de l'état initial  $x_0$  conditionne aussi la forme de la réponse par le biais de  $\{\alpha_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$ .

De plus, on remarque que l'existence de valeurs propres complexes conjuguées induit un comportement oscillatoire dans la réponse du système. En effet, un mode complexe fait apparaître un terme sinusoïdal dans cette réponse. Le caractère oscillatoire d'un mode complexe est d'autant plus marqué que le rapport (en valeur absolue) entre la partie imaginaire et la partie réelle des valeurs propres correspondantes est élevé. Pour des systèmes de deuxième ordre ( $n = 2$ ), ces considérations sont prises en compte pour définir un « coefficient d'amortissement » et une « pulsation propre non amortie » également définis dans le cadre du cours sur l'approche fréquentielle. Selon les valeurs de ces indicateurs, la nature de la réponse peut varier d'une absence d'oscillation à une très forte oscillation en passant par un léger dépassement. On se réfère souvent à ces indicateurs pour caractériser la dynamique dominante d'un système d'ordre plus élevé ( $n > 2$ ) et donc ses performances en termes de temps de réponse, dépassement maximal, etc. Néanmoins, il importe de savoir que l'influence de chaque mode n'est pas toujours simplement dictée par la position de la (ou des) valeur(s) propre(s) associée(s).

Ce qu'il convient de retenir est que la localisation des valeurs propres de  $A$  dans le plan complexe (en particulier les modes dominants) est extrêmement utile pour caractériser le comportement d'un système ou pour spécifier les per-

performances souhaitées d'un procédé à commander. Le spectre de  $A$  revêt donc une importance capitale dans le comportement du système. Les vecteurs propres associés ont également une influence puisqu'ils apparaissent dans (B.2). Leur influence est un peu mieux explicitée dans le paragraphe suivant.

## B.2. Influence des vecteurs propres de $A$

Ce paragraphe peut-être envisagé dans un cadre multivariable.

### B.2.1. Couplage modes/sorties

Dans la réponse du système en régime libre (B.2), on voit clairement apparaître les vecteurs propres à droite de  $A$ . En faisant apparaître explicitement les composantes  $V_{ij}$  de chaque vecteur propre  $v_i$ , cette relation peut être ainsi détaillée :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_{1_1} \\ \vdots \\ v_{1_n} \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} \begin{bmatrix} v_{n_1} \\ \vdots \\ v_{n_n} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

On constate en examinant la relation (B.3) que la composante  $v_{ij}$  distribue l'effet du mode  $\lambda_i$  sur l'état  $x_j$ . Ainsi, annuler  $v_{ij}$  revient à éliminer l'influence de  $\lambda_i$  sur  $x_j$ . On en déduit que :

Les vecteurs propres à droite sont significatifs du couplage entre existant entre le spectre de  $A$  et le vecteur d'état.

Lorsque l'on s'intéresse à la sortie  $y$ , la matrice  $C$  exprime alors le couplage entre  $x$  et  $y$  donc plutôt que les vecteurs propres, ce sont les vecteurs  $Cv_i$  qu'il convient d'étudier. On peut alors analyser le découplage modes/sorties.

Les vecteurs  $Cv_i$  sont significatifs du couplage entre le spectre de  $A$  et la (les) sortie(s)  $y$ .

Cette assertion est vraie pour un système en boucle ouverte (il faut alors regarder les vecteurs propres à droite de la matrice  $A$ ) mais aussi pour un système bouclé (il faut alors étudier les vecteurs propres à droite de la matrice  $A_f = A + BK$ ).

**Remarque B.1** Lorsque  $Cv_i$  est nul, c'est-à-dire lorsque les sorties ne sont pas affectées par le mode  $\lambda_i$ , ceci signifie que ce mode devient non observable.

### B.2.2. Couplage modes/commandes en boucle fermée

On rappelle qu'une loi de commande de type retour d'état est de la forme

$$u(t) = Kx(t).$$

Pour les besoins de l'explication, le terme de précommande est omis c'est-à-dire que le système bouclé est considéré en régime libre. Compte tenu de l'expression de  $x(t)$ , il vient

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i K v_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} k_j v_{ij}. \quad (\text{B.4})$$

La relation (B.4) permet de comprendre comment les vecteurs propres interviennent dans la répartition de l'effet des modes sur la commande du système bouclé<sup>1</sup>. Il va de soi qu'en cas de bouclage comme ci-dessus, les scalaires  $\lambda_i$  désignent les valeurs propres de  $A_f$  et les  $v_i$  désignent leurs vecteurs propres à droite associés.

Dans le cas d'un modèle LTI bouclé par retour d'état  $u(t) = Kx(t)$ , les vecteurs  $Kv_i$  sont significatifs du couplage existant entre le spectre de  $A$  et la (les) commande(s)  $u$ .

1. et non pas sur la consigne du système bouclé.

### B.2.3. Couplage modes/consignes en boucle fermée

Cette fois-ci, la précommande est présente de sorte que le système bouclé n'est pas en régime libre et la loi de commande est :

$$u(t) = Kx(t) + Hy_c(t).$$

La réponse du système au niveau de son vecteur d'état est

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t e^{A_f(t-\tau)} BHy_c(\tau) d\tau \\ \Leftrightarrow x(t) &= V \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} U' BHy_c(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

où  $\Lambda$  est une matrice diagonale semblable à  $A$  faisant apparaître les valeurs propres de  $A$  sur sa diagonale. Il vient

$$x(t) = \sum_i^n v_i \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u'_i BHy_c(\tau) d\tau \quad (\text{B.5})$$

Grâce à (B.5), on comprend que le produit  $u'_i B$  est significatif de l'interaction entre les signaux de consigne et le mode  $\lambda_i$ . Ainsi, si ce produit est nul ( $u_i$  et  $B$  sont alors orthogonaux), le mode  $\lambda_i$  de la matrice dynamique  $A_f = A + BK$  n'est pas excité par les consignes.

Les vecteurs propres à gauche ont une influence prépondérante sur la répartition de l'excitation en consigne sur les modes.

S'il n'existe qu'une seule consigne et une seule commande (cas monovariante), en notant  $b_j$  les composantes de  $B$ , la formule (B.5) peut se récrire

$$x(t) = \sum_i^n v_i \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u'_i b_j Hy_c(\tau) d\tau.$$

**Remarque B.2** Lorsque  $u'_i B$  est nul et qu'ainsi les signaux de consigne n'excitent pas le mode  $\lambda_i$ , alors le mode  $\lambda_i$  est non commandable.



### B.2.4. En résumé sur les vecteurs propres

*Il apparaît que l'effet du monde extérieur sur la dynamique interne d'un système LTI est décrit par la structure propre à gauche alors que la répartition de cette dynamique sur les sorties est essentiellement décrite par la structure propre à droite (phrase empruntée à la thèse de doctorat d'Ibrahim Chouaib).*

## B.3. Influence des zéros

### B.3.1. Zéros d'un modèle d'état

Il est possible de définir les zéros d'un système dans l'espace d'état. Dans le cadre des systèmes multivariables, les définitions sont multiples et conduisent à quatre, voire cinq types de zéros dont les caractérisations ne sont pas équivalentes. En *monovariante*, de manière un peu simpliste, on peut définir les zéros d'un système comme les valeurs de  $z \in \mathbb{C}$  telles que la matrice

$$M(z) = \begin{bmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

présente une déficience de rang. On note qu'il n'est pas aisé de déterminer les zéros d'une réalisation mais cette définition a l'avantage d'utiliser une représentation d'état.

Si la réalisation est minimale (entièrement commandable et observable, cf. §6.6 page 253) alors, les zéros sont les racines du polynôme  $N(p)$ , le numérateur de la fonction de transfert  $G(p)$ . Dans le cas d'une réalisation non minimale, il peut exister des valeurs des zéros de la réalisation qui ne sont pas racines de  $N(p)$ . Ceci résulte d'une compensation dans  $G(p)$  du facteur  $(p - z)$  de  $N(p)$  avec un facteur  $(p - z)$  du dénominateur  $D(p)$  (compensation pôle/zéro caractéristique des modèles non-commandables ou non observables (cf. § 6.6 page 253)).

Par abus de langage, les zéros à partie réelle négative sont qualifiés de *stables* et ceux à partie réelle positive sont qualifiés d'*instables*.

### B.3.2. Contribution des zéros

Même si les zéros ne déterminent pas la stabilité du système LTI, il va de soi qu'ils ont une influence sur le comportement transitoire du système. En effet, si l'on écrit la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{\prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - \lambda_i)},$$

alors une décomposition en éléments simples conduit à

$$G(p) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{(p - \lambda_i)}. \quad (\text{B.6})$$

(Il est rappelé que, par souci de simplification, tous les pôles sont distincts.) On comprend, en appliquant la transformation de Laplace inverse  $\mathcal{L}^{-1}$  (cf. §2.1.3 page 34) à (B.6) et par une comparaison avec (B.1) (comparaison qui n'est pas détaillée ici) que les résidus  $r_i$ , qui sont dépendants de la valeur des zéros  $z_i$ , sont étroitement liés, mais de manière non triviale, aux vecteurs propres  $v_i$  et  $u_i$ . À ce titre, ils ont donc une importance sur le comportement transitoire du système. De même par comparaison avec (B.5).

Mais il est assez difficile et souvent peu rigoureux d'apprécier correctement l'effet d'un zéro sur le régime transitoire. Pour résumer très grossièrement cet effet, et ce sans réelle justification :

- les zéros compensés par des pôles non commandables et non observables n'ont aucun effet sur le régime transitoire d'une réponse de la sortie  $y$  ;
- les zéros proches d'un pôle dans le plan complexe sont faiblement influents ;
- les zéros instables ont tendance à générer un dépassement de la réponse indicielle vers le bas alors que les zéros stables contribuent à l'éventuel dépassement vers le haut.

## **B.4. Le cas discret**

Des raisonnements assez similaires peuvent être tenus dans le cas discret en prenant toutefois garde à la signification de la localisation des pôles (ou valeurs propres) à l'intérieur du disque unitaire et non dans le demi-plan complexe gauche. La rapidité est alors liée au faible module des pôles et le caractère oscillatoire est autant lié à la partie imaginaires de ces pôles qu'à une éventuelle partie réelle négative (voir, par comparaison, les figures 4.1 page 180 et 9.16 page 511 pour différencier les cas continu et discret respectivement).

## B.5. Notes et références

La relation entre les pôles du système (ou des valeurs propres de la matrice d'état) et les formes transitoires de sa réponse est connue de longue date et l'intérêt pour la localisation des pôles au delà de la simple stabilité semble historiquement remonter aux travaux d'I. A. Vichengradski<sup>2</sup> [1]. Le Lecteur familier de l'approche fréquentielle de l'Automatique et des diverses méthodes de commande d'un système monovriable peut se convaincre de l'intérêt du choix des pôles lorsqu'il utilise le lieu d'Evans<sup>3</sup> [2,3]. Évidemment, des explications plus modernes et plus didactiques peuvent aujourd'hui être trouvées dans de nombreux ouvrages tels que [4,5,6,7,8].

Pour une interprétation des performances en discret, ou en échantillonné (notamment à partir des performances transitoires en continu), le livre de référence [9] de K. Ogata est particulièrement conseillé.

Concernant le propos d'Ibrahim Chouaib<sup>4</sup> sur la structure propre d'un système, il faut se référer à son mémoire de thèse [10], un travail remarquable supervisé par un encadrant tout aussi remarquable.

La notion de zéros est beaucoup plus délicate à cerner. Ici, seule une vision mono-entrée - mono-sortie en est donnée ce qui simplifie grandement leur définition (il n'existe alors qu'une seule fonction de transfert). Toutefois, il faut savoir que dans le cas des systèmes multivariables, les définitions et les notions associées deviennent beaucoup plus subtiles et délicates à appréhender. Pour une vision précise de ce concept bien plus ardu qu'il n'y paraît, le lecteur peut se référer à [11] et à [12].

1. **I. A. Vyshnegradskii** : Über Direktwirkende Regulatoren. *Der Civilingenieur*, 23, p.95-137, 1877.

*Une tentative de critère de stabilité des modèles linéaires qui inspire Hurwitz.*

- 
2. Ivan Alekseievitch Vichengradski, scientifique russe (1832-1895).
  3. du nom de Walter Richard Evans, théoricien états-unien de la commande (1920-1999).
  4. chercheur en Automatique syrien (1966-).

2. **W. R. Evans** : Control System Synthesis by Root Locus Method. *Transactions of AIEE*, 69, p.1-4, 1950.  
*L'article à l'origine des méthodes basées sur le fameux lieu d'Evans.*
3. **W. R. Evans** : *Control Systems Dynamics*. McGraw-Hill, New York, 1954.  
*Livre d'Evans où l'on peut retrouver le lieu éponyme avec plus de détails que dans l'article précédent.*
4. **R. C. Dorf et R. H. Bishop** : *Modern Control Systems*. Neuvième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.  
*La réédition permanente de cet ouvrage en dit long sur sa popularité. Les nombreux exemples constituent une vraie mine d'exercices pour un enseignant.*
5. **G. F. Franklin, J. D. Powell et A. Emami-Naemi** : *Feedback Control of Dynamic Systems*. Quatrième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.  
*Assez riche en exemples et agréable dans la forme. Plutôt didactique.*
6. **K. Ogata** : *Modern Control Engineering*. Troisième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.  
*Ouvrage de référence qui semble en avoir inspiré plus d'un. L'auteur a un petit faible pour cette référence dont la première édition date de 1970.*
7. **B. Pradin et G. Garcia** : *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Presses Universitaires du Mirail, 2010.  
*Que dire de cet ouvrage si ce n'est que c'est celui qu'il faut acheter ! Incontestablement le meilleur rapport qualité/prix.*
8. **B. Friedland** : *Control System Design - An Introduction to State-Space Methods* Dover, Mineola, New york, 1985.  
*Cet ouvrage se concentre uniquement sur la représentation d'état et de ce fait, vu sa taille importante, traite bien plus d'aspects que beaucoup d'autres. Les exemples y sont nombreux et bien choisis. Il est parfois un peu dense. Son prix est très raisonnable.*
9. **K. Ogata** : *Discrete-time control systems- Second edition* Prentice Hall, 1995.  
*Ouvrage très complet spécifiquement dédié à l'analyse et la commande des systèmes discrets.*
10. **I. Chouaib** : *Placement et robustesse de structure propre*. Thèse de doctorat, INSA, Toulouse, France, 1994.  
*La thèse de doctorat d'Ibrahim Chouaib, consacrée au placement de*

structure propres, réalisée au [LAAS-CNRS](#) et présentée à l'[INSA de Toulouse](#).

11. **H. H. Rosenbrock** : *State Space and Multivariable Theory*. Nelson, Londres, 1970.  
*Un des premiers livres sur l'espace d'état avec, entre autres, des définitions de zéros qui feront référence.*
12. **A. G. J. MacFarlane et K. Karcanias** : Poles and zeros of linear multivariable systems : a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. *International Journal of Control*, 24(1), p.33-74, 1976.  
*Un article de fond et de référence sur la notion de zéros, et des différentes approches mathématiques qui permettent de l'aborder... ou comment entrer dans un nouveau monde alors que l'on pensait savoir ce que sont les zéros. Assez pointu mais très clair.*

# Annexe C

## *Formule d'Ackermann pour le placement de pôles*

On se propose, dans cette annexe, de résoudre le problème du placement de pôles par retour d'état en utilisant la formule dite « d'Ackermann » .

### Sommaire

---

C.1	Rappel du problème . . . . .	687
C.2	Résolution selon Ackermann . . . . .	688
C.3	Notes et références . . . . .	691

---

### C.1. Rappel du problème

Soit le système différentiel linéaire

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (\text{C.1})$$

On rappelle que le problème du placement de pôles consiste à trouver un vecteur  $K$ , associée à la loi de commande par retour d'état  $u = Kx$ , de sorte que (cf. §7.2 page 300)

$$\det(pI - A_f) = D_d(p) = \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i).$$

La matrice  $A_f = A + BK$  est la matrice dynamique du système bouclé

$$\dot{x} = A_f x. \quad (\text{C.2})$$

Le polynôme  $D_d(p)$  est le polynôme caractéristique désiré pour ce système bouclé. Les scalaires  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont les racines de ce polynôme, c'est-à-dire les pôles désirés. La paire de matrices  $(A, B)$  est supposée commandable (cf. §6.2.1 page 240).

## C.2. Résolution selon Ackermann

Le polynôme  $D_d(p)$  peut être écrit sous forme développée :

$$D_d(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0. \quad (\text{C.3})$$

Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton<sup>1</sup>, rappelé en §A.1.10 page 651, toute matrice carrée vérifie son propre polynôme caractéristique et l'on a

$$D_d(A_f) = 0. \quad (\text{C.4})$$

En utilisant la forme développée (C.3) de  $D_d(p)$ , l'équation (C.4) peut alors se récrire

$$D_d(A_f) = \alpha_0 I + \alpha_1 A_f^1 + \alpha_2 A_f^2 + \dots + \alpha_{n-1} A_f^{n-1} + \alpha_n A_f^n = 0.$$

Cette équation fait intervenir les puissances de la matrice  $A_f$  jusqu'à l'ordre  $n$ . Elles peuvent être ainsi exprimées :

---

1. du nom du mathématicien britannique Arthur Cayley (1821-1895) et de Sir William Rowan Hamilton dont une biographie est proposée à la page 138.



$$\left\{ \begin{array}{l} A_f^0 = I \\ A_f^1 = A + BK \\ A_f^2 = A_f^1(A + BK) = A^2 + ABK + BKA_f \\ A_f^3 = A_f^2(A + BK) = A^3 + A^2BK + ABKA_f + BKA_f \\ A_f^4 = A_f^3(A + BK) \\ \quad = A^4 + A^3BK + A^2BKA_f + ABKA_f^2 + BKA_f^3 \\ \quad \vdots \\ A_f^n = A_f^{n-1}(A + BK) \\ \quad = A^n + A^{n-1}BK + A^{n-2}BKA_f + \dots + ABKA_f^{n-2} + BKA_f^{n-1} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow D_d(A_f) = \begin{array}{l} \alpha_0 I + \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \alpha_n A^n \\ + B(\alpha_1 K + \alpha_2 K A_f + \alpha_3 K A_f^2 + \dots + K A_f^{n-1}) \\ + AB(\alpha_2 K + \alpha_3 K A_f + \alpha_4 K A_f^2 + \dots + K A_f^{n-2}) \\ \quad \vdots \\ + A^{n-1} BK \end{array} = 0$$

$$\Leftrightarrow D_d(A) + \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 K + \alpha_2 K A_f + \alpha_3 K A_f^2 + \dots + K A_f^{n-1} \\ \alpha_2 K + \alpha_3 K A_f + \alpha_4 K A_f^2 + \dots + K A_f^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = 0$$

On reconnaît, dans l'égalité ci-dessus, la matrice de commandabilité de Kálmán (cf. §6.2.1 page 240)

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

qui est inversible puisque la paire  $(A, B)$  est supposée commandable. Ainsi, par inversion de  $Q_c$ , on obtient

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 K + \alpha_2 K A_f + \alpha_3 K A_f^2 + \dots + K A_f^{n-1} \\ \alpha_2 K + \alpha_3 K A_f + \alpha_4 K A_f^2 + \dots + K A_f^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = -Q_c^{-1} D_d(A).$$

Pour obtenir  $K$ , il suffit d'extraire la dernière ligne de cette équation :

$$K = - [ 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 ] Q_c^{-1} D_d(A). \quad (C.5)$$

Cette formule est appelée formule d'Ackermann<sup>2</sup>.

---

2. Jürgen E. Ackermann, automaticien allemand.

### C.3. Notes et références

La formule d'Ackermann apparut pour la première fois dans un article écrit en Allemand par J. Ackermann [1] mais elle est également redémontrée dans nombre d'ouvrages tels ceux déjà cités dans les chapitres précédents, en particulier le livre de K. Ogata [2].

1. **J. Ackermann** : Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum. *Regelungstechnik und Prozessdatenverarbeitung*, 7, p.297-300, 1972.  
*La formule d'Ackermann originale présentée dans la langue de Goethe.*
2. **K. Ogata** : *Modern Control Engineering*. Troisième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.  
*Ouvrage de référence qui semble en avoir inspiré plus d'un. L'auteur a un petit faible pour cette référence dont la première édition date de 1970.*



## Annexe D

### *Placement de pôles et zéros du système*

Il est dit au paragraphe 7.2.2, page 302, plus précisément à la remarque 7.1 page 303, qu'un placement de pôles par retour d'état n'affecte pas les zéros d'un modèle linéaire monovarié en ce sens que le numérateur de la fonction de transfert correspondante n'est pas modifié (sauf en cas de compensation pôle/zéro introduite par le choix des pôles placés). Ceci paraît assez évident au paragraphe 7.2.2 en l'absence de transmission directe. Une justification rigoureuse est ici proposée en présence d'une transmission directe  $D \neq 0$ .

#### Sommaire

---

D.1 Retour d'état et zéros du système . . . . .	694
D.2 Réductibilité de $G_f(p)$ . . . . .	697
D.3 Notes et références . . . . .	700

---

## D.1. Retour d'état et zéros du système

Le plus simple est de raisonner sur la forme canonique de commande (ou forme compagne horizontale : voir §3.5.1.2 page 84) puisque la fonction de transfert est indépendante de la base. Cette forme est ici rappelée (le vecteur d'état est noté  $x$  et non  $\tilde{x}$  comme dans d'autres chapitres car cela n'apporterait rien ici) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u, \\ y = \underbrace{[b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}]}_C x + Du. \end{array} \right. \quad (\text{D.1})$$

Cette réalisation est associée à la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1}}{a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n} + D$$

$$\Leftrightarrow G(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1} + a_0 D + a_1 D p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + D p^n}{a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n}.$$

(Rappel : il est supposé, sans perte de généralité, que  $a_n = 1$  et l'on pose  $b_n = 0$ .) Le degré de  $G(p)$  est égal à l'ordre de la réalisation ce qui signifie que la paire  $(A, B)$  est commandable (cf. §6.2.1 page 240). L'existence même d'une réalisation canonique de commande implique la commandabilité.  $G(p)$  se réécrit

$$G(p) = \frac{(b_0 + a_0 D) + (b_1 + a_1 D)p + \dots + (b_{n-1} + a_{n-1} D)p^{n-1} + (0 + D)p^n}{a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n}$$

$$\Leftrightarrow G(p) = \frac{\sum_{i=0}^n (b_i + a_i D)p^i}{\sum_{i=0}^n (a_i p^i)} = \frac{N(p)}{D(p)}, \quad (\text{D.2})$$

en posant toujours, bien entendu,  $b_n = 0$ .

Au modèle d'état (D.1) est appliquée la loi de commande

$$u = Kx + Hy_c = [k_1 \quad \dots \quad k_n] x + Hy_c.$$

Le modèle bouclé devient donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ -a_0 + k_1 & -a_1 + k_2 & \dots & \dots & -a_{n-1} + k_n \end{bmatrix}}_{A_f} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_f} Hy_c, \\ y = \underbrace{[b_0 + Dk_1 \quad b_1 + Dk_2 \quad \dots \quad b_{n-1} + Dk_n]}_{C_f} x + \underbrace{DH}_{D_f} y_c. \end{array} \right.$$

qui correspond à la fonction de transfert

$$\begin{aligned} & \left( G_f(p) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (b_i + Dk_{i+1})p^i}{\sum_{i=0}^{n-1} ((a_i - k_{i+1})p^i) + p^n} + D \right) H. \\ \Leftrightarrow G_f(p) &= \frac{\left( \sum_{i=0}^n (b_i + Dk_i)p^i + \sum_{i=0}^{n-1} ((a_i - k_{i+1})Dp^i) + Dp^n \right) H}{\sum_{i=0}^{n-1} ((a_i - k_{i+1})p^i) + p^n}. \\ \Leftrightarrow G_f(p) &= \frac{\left( \sum_{i=0}^{n-1} (b_i p^i) + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i D p^i) + D p^n + \sum_{i=0}^{n-1} (D k_{i+1} p^i) - \sum_{i=0}^{n-1} (D k_{i+1} p^i) \right) H}{\sum_{i=0}^{n-1} ((a_i - k_{i+1})p^i) + p^n} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow G_f(p) = \frac{H \left( \sum_{i=0}^{n-1} (b_i + a_i D) p^i + D p^n \right)}{\sum_{i=0}^n (\alpha_i p^i)},$$

avec  $\alpha_i = a_i - k_{i+1}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ . La fraction  $G_f(p)$  s'écrit aussi

$$G_f(p) = \frac{\sum_{i=0}^n (b_i + a_i D) p^i}{H^{-1} \sum_{i=0}^n (\alpha_i p^i)},$$

toujours avec  $b_n = 0$  et en notant que la précommande scalaire  $H$  est inversible, sinon elle n'aurait aucun sens.

Si l'on compare cette dernière expression avec celle de  $G(p)$  donnée en (D.2) alors la fonction de transfert en boucle fermée prend la forme

$$G_f(p) = \frac{N(p)}{D_f(p)}, \quad (\text{D.3})$$

où  $D_f(p) = H^{-1} \sum_{i=0}^n (\alpha_i p^i)$ . Le numérateur  $N(p)$  est resté le même. D'où une première conclusion dont il sera vu qu'elle est peut-être un peu trop hâtive :

Une loi de commande par retour d'état conserve *a priori* le numérateur de la fonction de transfert ; elle conserve donc *a priori* les zéros du système.

En fait, il convient de s'attarder sur l'adverbe « *a priori* » qui semble laisser penser que la démonstration précédente n'est pas complète. En effet, rien ne dit que  $G_f(p)$  est une fraction irréductible. Dans le cas contraire, par simplification pôle-zéro,  $N(p)$  peut être modifié (De même que  $D_f(p)$ , il peut perdre une ou plusieurs racines et son degré peut ainsi diminuer). Il faut alors revoir la conclusion précédente, la compléter.

Une loi de commande par retour d'état ne peut pas modifier les zéros de la fonction de transfert. Elle peut éventuellement en supprimer.



## D.2. Réductibilité possible de la fonction de transfert en boucle fermée

Il est légitime de se poser la question de savoir ce qui se passe exactement dans le cas d'une compensation pole-zéro dans  $G_f(p)$ . Il est bien sûr clair qu'une des valeurs propres placées coïncide avec un zéro de la fonction de transfert du système en boucle ouverte. Du point de vue de l'approche fréquentielle, cette information peut suffire. Mais dans un contexte de modélisation par représentation d'état, on peut se demander ce que cette perte de minimalité implique précisément : perte de commandabilité ? perte d'observabilité ? les deux ?

Comme on l'a vu au chapitre 6 (voir remarque 6.1, page 239), la commandabilité d'une représentation d'état linéaire, se confond avec la propriété d'atteignabilité. Autrement dit, le modèle est commandable si et seulement si, pour tout état  $x_0$ , il existe une commande qui permet de parcourir l'espace d'état de l'état initial  $x_0$  jusqu'à l'état final  $x_f$ . On suppose que le modèle en boucle ouverte (avant le retour d'état) est commandable. Il vérifie donc la propriété qui vient d'être rappelée. Soit  $u^\bullet(t)$  la commande qui lui permet de parcourir le chemin  $[x_0; x_f]$ . Il est facile de voir que pour le même modèle, mais bouclé par la loi de retour d'état  $u(t) = Kx(t) + Hy_c(t)$ , la consigne  $y_c^\bullet(t) = H^{-1}(u^\bullet - Kx^\bullet)$  (qui est donc la nouvelle commande du système bouclé) permet de parcourir le même chemin dans l'espace d'état. On en déduit que le modèle bouclé est commandable puisque pour une condition initiale  $x_0$  quelconque, on peut trouver une commande  $y_c^\bullet(t)$  qui amène à un état  $x_f$  également quelconque. Le retour d'état n'altère donc pas la commandabilité. S'il devait engendrer une compensation pole-zéro dans la fonction de transfert du système bouclé  $G_f(p)$ , ce ne pourrait signifier qu'une perte d'observabilité. Ceci induit également que le retour d'état ne préserve pas l'observabilité, contrairement à la commandabilité.

Pour s'en convaincre autrement, on peut s'attarder sur la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

Ce système est commandable car sa matrice de commandabilité de Kálmán est

$$Q_c = [ B \quad AB ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

et elle est de plein rang  $n = 2$ . Il est également observable car sa matrice d'observabilité de Kálmán est

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

et elle est aussi de plein rang  $n = 2$  (voir les critères de Kálmán au paragraphe 6.2 page 240). La fonction de transfert correspondante est donc irréductible :

$$G(p) = \frac{2p - 3}{(p - 1)(p - 2)}.$$

On applique maintenant un retour d'état  $u = Kx + Hy_c$  avec  $K = [ 0 \quad -0.5 ]$  et  $H = 1$ . La représentation d'état en boucle fermée est<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = [ 1 \quad 1 ] x. \end{cases}$$

La commandabilité, comme annoncé précédemment, est préservée. La matrice de commandabilité de Kálmán est

$$Q_c = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 1 & 1,5 \end{bmatrix},$$

qui est bien de rang  $n = 2$ . En revanche, la matrice d'observabilité de Kálmán est

$$Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

qui n'est que de rang 1, ce qui montre une perte d'observabilité. Il en résulte que la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par

$$G_f(p) = \frac{2p - 3}{(p - 1)(2p - 3)} = \frac{1}{p - 1},$$

---

1. le système est ici instable, mais la stabilité n'a rien à voir avec le présent propos.

dont le dénominateur n'est que de degré 1. Le zéro (1,5) de la boucle ouverte a été compensé par un pôle placé par le retour d'état. Cette perte de minimalité est bien une perte d'observabilité.

Une loi de commande par retour d'état conserve la commandabilité. Elle peut en revanche supprimer un zéro du système en le rendant « inobservable ».

### D.3. Notes et références

On peut reciter ici les articles sur les zéros [1,2] ainsi que quelques ouvrages de référence où l'on aborde le sujet [3,4,5]. Mais il semble que ce résultat aujourd'hui bien connu apparût pour la première dans [6]. Voir aussi [7] où le cas monovarié est particulièrement bien détaillé par R. W. Brockett<sup>2</sup> qui propose également l'exemple numérique du paragraphe D.2.

1. **H. H. Rosenbrock** : *State Space and Multivariable Theory*. Nelson, Londres, 1970.  
*Un des premiers livres sur l'espace d'état avec, entre autres, des définitions de zéros qui feront référence.*
2. **A. G. J. MacFarlane et K. Karcanias** : Poles and zeros of linear multivariable systems : a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. *International Journal of Control*, 24(1), p.33-74, 1976.  
*Un article de fond et de référence sur la notion de zéros, et des différentes approches mathématiques qui permettent de l'aborder... ou comment entrer dans un nouveau monde alors que l'on pensait savoir ce que sont les zéros. Assez pointu mais très clair.*
3. **T. Kailath** : *Linear Systems*. Prentice Hall, 1979.  
*Un vrai ouvrage de référence, pas très facile à aborder par son style et sa forme mais redoutablement complet. Pratiquement une « bible ».*
4. **K. Ogata** : *Modern Control Engineering*. Troisième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.  
*Ouvrage de référence qui semble en avoir inspiré plus d'un. L'auteur a un petit faible pour cette référence dont la première édition date de 1970.*
5. **B. Friedland** : *Control System Design - An Introduction to State-Space Methods* Dover, Mineola, New York, 1986.  
*Cet ouvrage se concentre uniquement sur la représentation d'état et de ce fait, vu sa taille importante, traite bien plus d'aspects que beaucoup d'autres. Les exemples y sont nombreux et bien choisis. Il est parfois un peu dense. Son prix est très raisonnable.*
6. **B. S. Morgan** : The Synthesis of Multivariable Linear Systems by State Variable Feedback. *Proc. Joint Automatic Control Conference*, Stanford,

---

2. Roger Ware Brockett, théoricien états-unien de la commande (1938-).

Californie, p.468-472, 1964.

Où l'invariance des zéros par retour d'état est prouvée pour la première fois.

7. **R. W. Brockett** : Poles, Zeros and Feedback : State-Space Interpretation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 10(2), p129-135, 1965. Un des premiers articles traitant, entre autres, des effets du retour d'état sur les pôles et les zéros du système, particulièrement en monovariable. Il inspire le paragraphe D.2.



# Annexe E

## À propos de $\mathcal{Z}$

Cette annexe rappelle quelques propriétés de la transformation en  $z$  et, au passage, de celle de Laplace

### Sommaire

---

<b>E.1</b>	<b>Rappel des définitions . . . . .</b>	<b>703</b>
<b>E.2</b>	<b>Propriétés de <math>\mathcal{Z}</math> . . . . .</b>	<b>704</b>
<b>E.3</b>	<b>Tableau de transformées . . . . .</b>	<b>706</b>
<b>E.4</b>	<b>Notes et référence . . . . .</b>	<b>708</b>

---

### E.1. Rappel des définitions

La définition de la transformation en  $z$  a déjà été donnée dans le corps du document, au paragraphe 9.2.2.2 page 481. Elle est néanmoins rappelée ci-après.

Soit une suite  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ( $k$  est positif ou nul (signal causal)). La transformation en  $z$  (opérateur symbolisé par  $\mathcal{Z}$ ) de  $\{f_k\}$  est définie par la série entière :

$$\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z) = \mathcal{Z}[\{f_k\}] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}. \quad (\text{E.1})$$

L'image  $F(z)$  de  $\{f_k\}$  est appelée *transformée en  $z$*  de  $\{f_k\}$ .

Même si cette annexe concerne  $\mathcal{Z}$ , le tableau du paragraphe E.3 fait apparaître des transformées de Laplace. Ainsi, toujours à titre de rappel (cf. §2.1.3 page 34), la définition de  $\mathcal{L}$  est donnée. Chaque signal temporel  $f(t)$  *causal*, c'est-à-dire pour lequel  $f(t) = 0, \forall t < 0$ , peut subir une transformation dite de « Laplace », notée  $\mathcal{L}$ , et ainsi définie :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (\text{E.2})$$

$F(p)$ , si elle existe, c'est-à-dire si l'intégrale est calculable, est appelée *transformée de Laplace* de  $f(t)$  et la variable complexe  $p \in \mathbb{C}$  (notée  $s$  dans les ouvrages de culture anglo-saxonne) est connue sous le nom de *variable de Laplace*<sup>1</sup>.

**Remarque E.1** *Les définitions sont particularisées au contexte du document. Ici,  $k$  et  $t$  sont associés à des temps. Ce n'est toutefois pas forcément le cas. Ils peuvent être par exemple associés à des dimensions spatiales. Les vraies définitions mathématiques stipulent simplement que  $k \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ .*

## E.2. Propriétés de $\mathcal{Z}$

Quelques propriétés de  $\mathcal{L}$  sont données au paragraphe 2.1.3, page 34. Voici quelques propriétés de  $\mathcal{Z}$ .

1. voir la biographie de Laplace page 40. Il n'y a pas de biographie de  $z$ , inutile de chercher.



- Linéarité

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{i=1}^n (\alpha_i \{f_k\}_i)\right] = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \mathcal{Z}[\{f_k\}])$$

- Multiplication par  $\alpha^k$

$$\mathcal{Z}[\alpha^k \{f_k\}] = F(\alpha^{-1}z)$$

- Multiplication par  $e^{-\alpha kT}$

$$\mathcal{Z}[e^{-\alpha kT} \{f_k\}] = F(ze^{\alpha T})$$

(Ici,  $T$  désigne la période d'échantillonnage si elle est définie).

- Produit de convolution en discret

$$\mathcal{Z}[\{f * g\}_k] = F(z)G(z)$$

où l'opérateur  $*$  symbolise le produit de convolution  $\{f\}_k * \{g\}_k = \{h\}_k$  défini par

$$h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l g_{k-l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{k-l} g_l \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- Théorème du retard

$$\mathcal{Z}[\{f_{k-l}\}] = z^{-l} \mathcal{Z}[\{f_k\}] = z^{-l} F(z)$$

- Théorème de l'avance

$$\mathcal{Z}[\{f_{k+l}\}] = z^l \left( \mathcal{Z}[\{f_k\}] - \sum_{i=0}^{l-1} f_i z^{-i} \right) = z^l \left( F(z) - \sum_{i=0}^{l-1} f_i z^{-i} \right)$$

- Théorème de la valeur initiale

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

- Théorème de la valeur finale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} ((1 - z^{-1})F(z)),$$

sous réserve que les pôles de  $(1 - z^{-1})F(z)$  soient dans le disque unitaire.

### **E.3. Tableau de transformées**

Voici, sur la page suivante, un tableau de quelques transformées de Laplace et en  $z$  pour des signaux usuels qui peut être complété par ceux proposés dans les nombreux ouvrages d'Automatique ou de mathématiques.

Signal continu $f(t), t \geq 0$	Transformée de Laplace (voire Laplace étoile, cf. p. 474) $F(p)$ (voire $F^*(p)$ )	Signal échantillonné $f_k, k \in \mathbb{N}$	Transformée en $z$ $F(z)$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$ <hr/> Fonction de Kronecker $\delta_d(t)$	$F(p) = 1$ <hr/> $F^*(p) = 1$	$\begin{cases} f_0 = 1, \\ f_k = 0, \forall k \neq 0 \end{cases}$	1
Échelon d'amplitude $E$ c.-à-d. $E\Gamma(t)$	$\frac{E}{p}$	$f_k = E$	$\frac{Ez}{z-1}$
Rampe de pente $b$ c.-à-d. $bt$	$\frac{b}{p^2}$	$f_k = bT$	$\frac{bTz}{(z-1)^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$	$f_k = e^{-akT}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$f_k = kTe^{-akT}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$		$\frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$		$\frac{z(z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
$1 - e^{-aT}$	$\frac{a}{p(p+a)}$		$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
		$a^k$	$\frac{z}{z-a}$
Retard pur c.-à-d. $g(t - hT)$	$e^{-hTp}G(p)$	$f_k = g_{k-h}$	$z^{-h}G(z)$

## E.4. Notes et référence

Il existe de bien trop nombreux ouvrages sur  $\mathcal{L}$  pour se risquer à les citer. L'auteur a emprunté ces quelques résultats à [1,2]. Pour des références à caractère historique, voir le paragraphe 9.11 page 556.

1. **K. Ogata** : *Discrete-time control systems- Second edition* Prentice Hall, 1995.  
*Ouvrage très complet spécifiquement dédié à l'analyse et la commande des systèmes discrets.*
2. **B. Pradin** : *Polycopié de cours d'Automatique : « Automatique linéaire - Systèmes à temps discret »* INSA de Toulouse, 4ème année spécialité AEI. Edition 1995.  
*Notes de cours particulièrement didactiques pour s'initier aux joies des systèmes linéaires discrets.*



# Annexe F

## *Liapounov et les systèmes linéaires*

Cette annexe a pour but de montrer que les inégalités de Liapounov peuvent être obtenues indépendamment de la seconde méthode de Liapounov et de son théorème fondamental. Les cas continu, discret et échantillonné y sont abordés. Cette annexe fait également le lien entre les inégalités et les équations de Liapounov.

### Sommaire

---

<b>F.1</b>	<b>Inégalité de Liapounov dans le cas continu . . . . .</b>	<b>710</b>
<b>F.2</b>	<b>Inégalité de Liapounov dans le cas discret . . . . .</b>	<b>711</b>
<b>F.3</b>	<b>Le cas échantillonné . . . . .</b>	<b>712</b>
<b>F.4</b>	<b>De l'inégalité à l'équation de Liapounov . . . . .</b>	<b>713</b>
<b>F.5</b>	<b>Notes et références . . . . .</b>	<b>719</b>

---

## F.1. Inégalité de Liapounov dans le cas continu

**Théorème.** La matrice  $A$  est stable au sens de Hurwitz si et seulement s'il existe une matrice  $P$  symétrique définie positive (dite matrice de Liapounov), solution de l'*inégalité de Liapounov*

$$M_c = A'P + PA < 0. \quad (\text{F.1})$$

La démonstration (simplifiée) est en fait assez aisée.

Suffisance : (F.1) est supposée vérifiée. Pour toute valeur propre  $\lambda_i$  de  $A$ , il existe un vecteur non nul  $v_i$  tel que  $Av_i = \lambda_i v_i$ . Ainsi,

$$v_i' M_c v_i = (\lambda_i' + \lambda_i) v_i' P v_i < 0.$$

Puisque  $P > 0$ , alors  $v_i' P v_i > 0$ , ce qui implique

$$\lambda_i' + \lambda_i < 0,$$

qui n'est autre que l'équation d'appartenance de  $\lambda_i$  au demi-plan gauche ouvert (stabilité au sens de Hurwitz)<sup>1</sup>.

Nécessité : pour simplifier, on suppose que  $A$  n'a que des valeurs propres distinctes mais ce raisonnement peut s'adapter au cas des valeurs propres multiples. Si ces valeurs propres sont supposées dans le demi-plan gauche ouvert, on a

$$\lambda_i' + \lambda_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Leftrightarrow M_\Lambda = \Lambda' + \Lambda < 0,$$

où

$$\Lambda = \text{diag}_{i=1, \dots, n} \{\lambda_i\}. \quad (\text{F.2})$$

Soit  $V$  la matrice modale de  $A$  telle que  $\Lambda = V^{-1}AV$ , il vient

1. Voir biographie 5.2, page 215

$$M_\Lambda = (V^{-1})'A'V' + VAV^{-1} < 0$$

$$\Rightarrow V'M_\Lambda V = A'V'V + V'VA < 0,$$

qui n'est autre que (F.1) avec le choix  $P = V'V$ . QED

## F.2. Inégalité de Liapounov dans le cas discret

**Théorème.** La matrice  $A$  est stable au sens de Schur si et seulement s'il existe une matrice  $P$  symétrique définie positive (dite matrice de Liapounov), solution de l'inégalité de Liapounov ou inégalité de Stein

$$M_d = -P + A'PA < 0. \quad (\text{F.3})$$

La démonstration (simplifiée) est là encore assez aisée.

Suffisance : (F.3) est supposée vérifiée. Pour toute valeur propre  $\lambda_i$  de  $A$ , il existe un vecteur non nul  $v_i$  tel que  $Av_i = \lambda_i v_i$ . Ainsi,

$$v_i' M_d v_i = (-1 + \lambda_i' \lambda_i) v_i' P v_i < 0.$$

Puisque  $P > 0$ , alors  $v_i' P v_i > 0$ , ce qui implique

$$-1 + \lambda_i' \lambda_i < 0,$$

qui n'est autre que l'équation d'appartenance de  $\lambda_i$  au disque unitaire ouvert (stabilité au sens de Schur<sup>2</sup>).

Nécessité : pour simplifier, on suppose que  $A$  n'a que des valeurs propres distinctes mais ce raisonnement peut s'adapter au cas des valeurs propres multiples. Si ces valeurs propres sont supposées dans le disque unitaire ouvert, on a

2. du nom d'Issaï Sadi Schur, mathématicien d'origine russe (1875-1941).

$$-1 + \lambda_i' \lambda_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Leftrightarrow M_\Lambda = -I_n + \Lambda' + \Lambda < 0,$$

avec (F.2). Soit  $V$  la matrice modale de  $A$ , il vient

$$M_\Lambda = -I_n + (V^{-1})' A' V' V A V^{-1} < 0$$

$$\Rightarrow V' M_\Lambda V = -V' V + A' V' V A < 0,$$

qui n'est autre que (F.3) avec le choix  $P = V' V$ . QED

### F.3. Inégalité de Liapounov dans le cas échantillonné

Ici, il est montré que toute matrice de Liapounov d'un modèle linéaire continu est aussi matrice de Liapounov du modèle échantillonné associé (*la réciproque est fausse !*).

Soit  $P = P' > 0$ , la matrice de Liapounov assurant la stabilité au sens de Hurwitz de  $A_c$ . Il vient

$$M_c = A_c' P + P A_c < 0, \tag{F.4}$$

et par conséquent, si l'on considère la fonction de Liapounov quadratique

$$V(x(t)) = x'(t) P x(t),$$

sa dérivée temporelle  $\dot{V}(x(t)) = x'(t)(A' P + P A)x(t)$  est strictement négative. Ainsi,  $V(x(t))$  est strictement décroissante par rapport au temps et l'on a donc, pour deux instants d'échantillonnage successifs  $kT$  et  $(k+1)T$  (où  $T$  est la période d'échantillonnage),

$$V(x(k+1)T) < V(x(kT)).$$

Or,  $V(x((k+1)T)) = Ax(kT)$  (avec  $A = e^{A_c T}$ ) donc l'inégalité ci-avant se réécrit

$$x'((k+1)T) P x((k+1)T) = x(kT) A' P A x(kT) < x'(kT) P x(kT).$$



Il n'y a pas d'*a priori* sur la valeur de l'état  $x(kT)$  donc de cette dernière inégalité, on déduit l'inégalité de Stein

$$M_d = -P + A'PA < 0, \quad (\text{F.5})$$

qui amène la conclusion suivante :

Toute matrice de Liapounov du modèle linéaire continu d'un procédé est aussi matrice de Liapounov du modèle discret linéaire du système échantillonné associé.

## F.4. De l'inégalité à l'équation de Liapounov

Dans ce paragraphe, on se contente de détailler le passage de l'inégalité de Liapounov à l'équation éponyme pour le cas des systèmes continus. Cependant, le même type de correspondance existe pour le cas des systèmes discrets. Ce dernier cas sera exposé sans démonstration.

Pour démontrer que l'on peut choisir arbitrairement  $Q < 0$  telle que  $M_c = Q$  (respectivement  $M_d = Q$ ) admette une solution unique  $P > 0$ , la technique consiste à montrer que résoudre cette équation revient à résoudre un système linéaire d'équations scalaires possédant une *unique* solution. Cet aspect n'est cependant pas détaillé ici. Toute la subtilité en est de montrer que le système est bien posé. Toutefois, on peut rappeler le fruit des réflexions des mathématiciens ayant travaillé sur le sujet : il existe une solution unique  $P$  à l'équation<sup>3</sup>

$$M_c = A'P + PA = Q \quad (\text{F.6})$$

si et seulement si les spectres de  $A'$  et de  $(-A)$  n'ont pas d'élément commun, c.-à-d.

$$\lambda(A') \cap \lambda(-A) = \emptyset. \quad (\text{F.7})$$

Il est facile de voir qu'une matrice Hurwitz-stable vérifie toujours la condition (F.7) donc la solution est bien unique. Mais il est possible d'aller un peu plus loin. Si  $Q$  est symétrique, alors  $P$  l'est aussi et si  $Q$  est strictement définie

3. À ce stade, aucune supposition n'est faite sur  $Q$ .

négative alors  $P$  est strictement définie positive. En effet, Si  $Q = Q'$ , alors il vient  $A'P + PA = Q = Q' = (A'P + PA)' = A'P' + PA$ , soit à la fois l'équation (F.6) et  $A'P' + PA = Q$ . Il y a donc deux solutions à (F.6) qui sont  $P$  et  $P'$ . Par unicité de la solution, on déduit que  $P = P'$ . Pour voir que  $Q < 0 \Rightarrow P > 0$ , c'est un peu plus complexe. D'abord, il faut invoquer le théorème de Liapounov tel que rappelé au tout début de cette annexe (relation (F.1)), pour déduire que la stabilité au sens de Hurwitz de  $A$  entraîne l'existence d'une matrice symétrique définie positive  $X$  telle que  $A'X + XA < 0$ . On suppose que l'unique solution  $P$  de (F.6) n'est pas définie positive. Il n'en reste pas moins que  $P$  satisfait la même inégalité que  $X$ , à savoir (F.1). Il est facile de voir que l'ensemble des solutions de cette inégalité est convexe. Ainsi, dans cet ensemble de solutions, par continuité, il existe un chemin de  $X > 0$  à  $P \not> 0$  passant par une matrice solution  $Y$  singulière, donc vérifiant  $Yz = 0$ , pour  $z \neq 0$ . Il vient alors

$$z'(AY + AY)z = 0,$$

ce qui contredit le fait que  $Y$  est solution de (F.6), et donc l'hypothèse selon laquelle  $P$  pourrait ne pas être définie positive est fautive. De façon générale, il a été établi que le nombre de valeurs propres positives de toute solution  $P$  est égal au nombre des valeurs propres de  $A$  se situant à gauche l'axe imaginaire. Le cas où  $P > 0$  et  $A$  Hurwitz-stable n'est donc qu'un cas particulier.

En conclusion, il vient :

**Théorème.** La matrice  $A$  est stable au sens de Hurwitz si et seulement si, pour toute matrice symétrique définie négative  $Q$ , il existe une matrice  $P$  symétrique définie positive (dite matrice de Liapounov), solution de

$$A'P + PA = Q. \quad (\text{F.8})$$

De la même manière, il est possible d'établir une contrepartie discrète de cette proposition :

**Théorème.** La matrice  $A$  est stable au sens de Schur si et seulement si, pour toute matrice symétrique définie négative  $Q$ , il existe une matrice  $P$  symétrique définie positive (dite matrice de Liapounov), solution de

$$-P + A'PA = Q. \quad (\text{F.9})$$

Il vient d'être vu que, lorsque  $A$  est Hurwitz-stable, et que  $Q$  est strictement définie négative, alors toute solution  $P$  est strictement définie positive. Cependant, toujours pour une matrice Hurwitz-stable, il est possible d'obtenir  $P$  strictement définie positive alors que  $Q$  n'est que semi-définie négative. C'est l'objet de la discussion suivante.

Si l'on choisit arbitrairement une matrice semi-définie négative  $Q = -S'S$  où  $S$  est de rang plein  $\text{rang}(S) = \text{rang}(Q) < n$ , et ce sans perte de généralité sur la structure de  $Q$ , alors pour toute matrice Hurwitz-stable  $A$  (donc vérifiant la condition (F.7)), il existe une matrice unique  $P$  vérifiant (F.8). La question est de savoir quel est le signe de la matrice  $P$  si elle en a un. En fait,  $P$  est définie positive si et seulement si la paire  $(A, S)$  est observable (cf. §6.1.2 page 239 et §6.2.2 page 242). Ce qui suit le démontre.

La paire  $(A, S)$  est supposée non observable. D'après le raisonnement du paragraphe 6.5 page 251 consacré au test de Popov-Belevitch-Hautus (PBH)<sup>4</sup>, il existe un vecteur (propre) non nul  $q$ , associé à une valeur propre  $\lambda$  de  $A$ , tel que  $Aq = \lambda q$  et  $Sq = 0 \Rightarrow Qq = 0$ . Ainsi, en introduisant la matrice  $X$  telle que  $Q + X = 2PA$ , il vient

$$q'(Q + X)q = q'(2PA)q = 2\lambda q'Pq.$$

et par transposition-conjugaison,

$$q'(Q + X')q = 2\lambda' q'Pq.$$

Si l'on additionne les deux équations ci-avant, on obtient

$$q'(2Q + X + X')q = 2\text{Re}(\lambda)q'Pq.$$

4. voir le paragraphe 6.9 page 275 pour en savoir plus sur ces trois scientifiques.

Puisque, de toute évidence,

$$X + X' = 2PA - Q + 2A'P - Q = A'P + PA - 2Q = 0$$

(c'est l'égalité de départ) alors il vient

$$\begin{aligned} 4\operatorname{Re}(\lambda)q'Pq &= 2q'Qq \\ \Leftrightarrow q'Pq &= \frac{q'Qq}{2\operatorname{Re}(\lambda)}. \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Comme  $A$  est Hurwitz-stable, elle est de rang plein et  $2\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$ . En revanche,  $q'Qq = 0$ , ce qui implique que  $q'Pq = 0$ , c.-à-d. que  $P$  n'est pas de rang plein. Par contraposition, l'inversibilité de  $P$  implique l'observabilité de  $(A, S)$ . Réciproquement, si  $P$  est non singulière alors il existe un vecteur non nul  $z$  tel que  $z'P = 0$  ou  $Pz = 0$ . Il vient donc

$$z'(PA + A'P)z = z'Qz = -z'S'Sz = 0, \quad (\text{F.11})$$

ce qui revient à dire que  $z'P = 0$  entraîne  $z'S' = 0$ . Il vient donc

$$z'(PA + A'P) = -z'S'S = 0$$

et aussi, en réutilisant  $z'P = 0$ ,

$$z'A'P = 0 \Leftrightarrow PAz = 0.$$

Par pré et postmultiplication de (F.11) par  $A'$  et  $A$  respectivement, on déduit que

$$\begin{aligned} z'A'PA^2z + z'(A')^2PAz &= 0 + 0 = 0 = z'A'S'SAz \\ \Rightarrow SAz &= 0. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Donc il s'ensuit que

$$PA^2z + A'PAz = -S'SAz = 0 \Rightarrow PA^2z = 0.$$

On réitère la démarche précédente, à savoir qu'on réitère la pré et postmultiplication de (F.12) par  $A'$  et  $A$  respectivement pour obtenir

$$\begin{aligned} z'(A')^2PA^3z + z'(A')^3PA^2z &= 0 + 0 = 0 = -z(A')^2S'SA^2z \\ \Rightarrow SA^2z &= 0. \end{aligned}$$

Et l'on peut continuer ainsi jusqu'à obtenir  $SA^{n-1}z = 0$ . Il devient alors clair qu'il existe un vecteur non nul  $z$  tel que

$$Q_o(S, A)z = \begin{bmatrix} S \\ SA \\ \vdots \\ SA^{n-1} \end{bmatrix} z = 0.$$

La matrice  $Q_o(S, A)$  n'est pas de rang  $n$ . Ainsi, d'après le critère de Kálmán (§ 6.2.1 page 240), la paire de matrices  $(A, S)$  n'est pas observable.

Il vient donc d'être montré que l'unique solution  $P$  de (F.8) où  $Q = -S'S \leq 0$  est non singulière si et seulement si  $(A, S)$  est observable. Il reste à déterminer son signe si elle en a un. Pour cela, il convient d'aller un peu plus loin. Le système linéaire que constitue l'équation (F.8) peut se résoudre à l'aide la réécriture :

$$\underbrace{(A' \otimes I_n + I_n \otimes A')}_{H(A)} \text{vec}(P) = \text{vec}(Q).$$

Le produit matriciel de Kronecker  $\otimes$  et l'opérateur de vectorisation  $\text{vec}$  sont respectivement définis aux paragraphes A.1.5.4, page 642 et A.1.2 page 637. Lorsque la solution de l'équation est unique, ce qui est le cas ici puisque  $A$  est stable,  $H(A)$  est inversible (ceci est lié aux propriétés du produit de Kronecker) et l'on a

$$\text{vec}(P) = H(A)^{-1} \text{vec}(Q).$$

Dans cette équation, il est possible de retirer des parties redondantes liées à la symétrie des matrices dans le but d'accélérer le calcul mais cela n'a pas d'intérêt ici. Cette équation montre aussi que si les composantes de  $Q$  dépendent continûment d'un paramètre, ce sera également le cas des composantes de  $P$  et donc (et ce n'est pas trivial), des valeurs propres de  $P$ .

Ainsi, soit l'équation

$$A'X + XA = Q - \epsilon I < 0,$$

où  $\epsilon$  est un (petit) paramètre positif. Lorsque  $\epsilon$  tend vers 0,  $Q - \epsilon I$  tend vers  $Q$  et, puisque la solution de l'équation est unique,  $X$  ne peut tendre que vers  $P$ . Or, il a été vu que lorsque le membre de droite est strictement défini négatif, ici  $Q - \epsilon I$ , alors l'unique solution, ici  $X$ , est strictement définie positive. Quand  $X$  tend vers  $P$ , elle ne peut changer de signe et elle reste définie positive. En

atteignant la limite  $P$ , elle ne peut pas changer de signe car par continuité de ses valeurs propres en fonction de  $\epsilon$ , elle devrait se singulariser ce qui est impossible comme on l'a vu précédemment. Donc  $P > 0$ .

De la réflexion précédente découle la proposition ci-après.

**Théorème.** Soit une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  stable au sens de Hurwitz. L'équation de Liapounov (F.6) admet une solution unique définie positive pour un choix d'une matrice  $Q = -S'S$  semi-définie négative (où  $S$  est de rang inférieur à  $n$ ) si et seulement si la paire  $(A, S)$  est observable.

Cette proposition a une contrepartie discrète qui est énoncée ci-après sans justification (les arguments sont assez similaires).

**Théorème.** Soit une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  stable au sens de Schur. L'équation de Liapounov (F.6) admet une solution unique définie positive pour un choix d'une matrice  $Q = -S'S$  semi-définie négative (où  $S$  est de rang inférieur à  $n$ ) si et seulement si la paire  $(A, S)$  est observable.

**Remarque F.1** Deux cas classiques amènent à utiliser les deux théorèmes présentés ci-avant. Le premier correspond aux calculs des grammien via la résolution des équations de Liapounov. Le grammien (de commandabilité ou d'observabilité) (cf. §6.4 page 248), solution unique d'une équation de Liapounov (voir §6.4.3 page 250) est défini positif si et seulement si  $(A, B)$  est commandable (resp.  $(A, C)$  est observable). La remarque reste valable dans le cas discret (voir §9.6.4.3 page 523).

L'autre cas où ce raisonnement intervient est lorsque l'on veut aborder la commande  $LQ$  sur un horizon de temps infini par l'approche « Liapounov » (voir chapitre 11 page 593).

## F.5. Notes et références

La théorie de Lyapunov émane, comme il a été dit au chapitre 5, des travaux du génie russe A.M. Liapounov<sup>5</sup> [1,2]. Mais justement, dans ce chapitre, il n'est nul besoin de maîtriser cette théorie car ce qu'il en ressort pour les systèmes linéaires est redémontré par de simples manipulations matricielles. En fait, la redémonstration des inégalités de Liapounov telle que présentée aux paragraphes F.1 et F.2 s'inspire de celle proposée dans [3]. Les auteurs y traitent d'autres régions que les régions de stabilité, c'est-à-dire d'autres régions dans lesquelles les valeurs propres de la matrice dynamiques se situent ou devraient se situer, ce à des fins de performances transitoires. Ils traitent aussi le cas des valeurs propres multiples qui n'est pas traité ici.

Le passage du cas continu au cas échantillonné en préservant la fonction de Liapounov est une réflexion de l'auteur mais il semble assez simple et intuitif pour figurer, en toutes probabilités, dans bien d'autres documents sans qu'attention lui ait été prêtée par l'auteur.

Pour passer aux égalités, l'auteur utilise ici, entre autres, des arguments puisés dans [4]. Mais le résultat original remonte bien plus loin comme il a été discuté au chapitre 5 (voir par exemple [5,6,7]). Le lecteur pourra trouver de nombreuses précisions subtiles dans l'article [8]

La réflexion portant sur la relation entre la répartition des valeurs propres de la matrice d'état  $A$  et celle de la matrice de Liapounov  $P$  fait l'objet de nombreux articles [9,10,11,12,13,14,15]. De telles considérations sont un peu le pendant matriciel des résultats de Hermite<sup>6</sup> concernant la répartition des racines d'un polynôme [16].

Enfin, la lecture de [17] a été également très profitable à l'auteur pour écrire cette annexe.

1. **A. M. Liapounov** : *Problème général de stabilité du mouvement*. Annales de la faculté de sciences de Toulouse, vol 9. p.203-474, 197. Traduit

---

5. Alexandre Mikhaïlovitch Liapounov, mathématicien et physicien russe (1857-1918) : voir sa biographie en annexe page 772.

6. Charles Hermite, mathématicien français (1822-1901).

- du texte original russe, publié dans Comm. Soc. Math., Kharkov, 1892.  
*Une véritable mine d'idées à la fois simples mais très fortes, très puissantes, qui inspirèrent et inspirent encore de très nombreux automaticiens mais aussi bien des chercheurs d'autres disciplines scientifiques. C'est essentiellement sa « seconde méthode » ou « méthode directe » qui génère (toujours) de nombreux travaux sur la stabilité des systèmes.*
2. **W. Hahn** : *Stability of motion*. Springer Verlag, Berlin, 1967.  
*Un ouvrage de référence sur la stabilité, en particulier sur le travail de Liapounov que finalement peu de gens ont lu directement.*
  3. **M. Chilali et P. Gahinet** :  $H_\infty$  design with pole placement constraints : an LMI approach *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3), p358–367, 1996.  
*Un article sur la synthèse  $H_\infty$  (concept non abordé dans le présent cours) avec contraintes de placement de pôles. C'est un des articles majeurs de l'approche LMI.*
  4. **R. A. Horn et C. R. Johnson** : *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.  
*Pas très agréable dans la forme mais redoutablement complet. Réédité plusieurs fois depuis.*
  5. **W. Hahn** : Eine Bemerkung zur zweiten Method von Lyapunov. *Mathematische Nachrichten*, 14, p.349-354, 1956.  
*Où il est montré pour la première fois que dans l'équation (5.12),  $Q$  peut-être choisie arbitrairement mais doit néanmoins être définie négative.*
  6. **R. Bellman** : *Introduction to matrix analysis*. McGraw Hill, New York, 1960.  
*Une des nombreuses contributions utiles de Bellman où l'on retrouve le même résultat que dans [5].*
  7. **J. Jones** : On the Lyapunov Stability Criteria *Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM)*, 13(4), p.941-945, 1965.  
*Où le résultat de [5] est encore retrouvé.*
  8. **S. Gutman and E. I. Jury** : A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4), p.853-863, 1981.  
*Article sur la façon de tester l'appartenance des valeurs propres d'une matrice à des régions du plan complexe, à l'aide d'équations de Liapounov généralisées . Une mine d'informations.*



9. **A. Ostrowski et H. Schneider** : Some Theorems on the Inertia of General Matrices. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 4, p.72-84, 1962.  
*Un lien entre l'inertie des matrices de Liapounov et la localisation du spectre d'une matrice par rapport à la frontière de la région de stabilité.*
10. **D. Hill** : Matrix Equations and the Separation of Matrix Eigenvalues. *Linear algebra and its applications*, 16, p.83-91, 1977.  
*Un autre lien entre l'inertie des matrices de Liapounov et la localisation du spectre d'une matrice par rapport à la frontière de la région de stabilité. L'approche est différente de celle de [9].*
11. **J. L. Howland** : Eigenvalue Location Using Certain Matrix Functions and Geometric Curves. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 33, p.683-691, 1971.  
*Encore lien entre l'inertie des matrices de Liapounov et la localisation du spectre d'une matrice. Bien que moins connu et peut-être moins rigoureux à certains égards, ce résultat traite aussi des frontières différentes.*
12. **L. Hogben (éditeur)** : *Handbook of linear algebra*. Série « Discrete Mathematics and its applications », Chapman & Hall / CRC, 2006.  
*Où les résultats de [9,11,10] sont retrouvés dans le chapitre écrit par D. Hershkowitz.*
13. **O. Bachelier, D. Henrion, B. Pradin et D. Mehdi** : Robust Matrix Root-Clustering in Intersections or Unions of Subregions. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 43(3), p.1078-1093, 2004.  
*Où les résultats de [9,11,10] sont généralisés et utilisés à des fins d'analyse robuste.*
14. **O. Bachelier et D. Mehdi** : Robust Matrix Root-Clustering Through Extended KYP Lemma. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 16, p.1078-1093, 2004.  
*Une amélioration des résultats de [13].*
15. **O. Bachelier** : *Placement de pôles et D-stabilité robuste : approche temporelle* Mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Poitiers, ENSIP, Poitiers, 2009.  
Téléchargeable à l'adresse :  
<http://www.lias-lab.fr/perso/olivierbachelier/publications.php>  
*Le premier chapitre de ce mémoire propose un petit historique du problème de localisation des pôles avec de nombreuses citations bibliographiques sans forcément en donner tous les détails, avec des références sur*

le problème de la répartition des valeurs propres de  $A$  par rapport à la frontière d'une région du plan complexe. Le reste du mémoire s'attarde de façon plus technique sur un point de vue et une approche personnels de l'analyse et du placement de pôles.

16. **C. Hermite** : Sur le nombre de racines d'une équation algébrique comprise entre des limites données. *Journal für die reine und angewandte Mathematik. Journal de Crelle*, 52, p.39-51, Berlin, 1856.  
*Le critère de Routh-Hurwitz avant l'heure, peut-être même un peu plus général.*
17. **B. Pradin et G. Garcia** : *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Presses Universitaires du Mirail, 2010.  
*Que dire de cet ouvrage si ce n'est que c'est celui qu'il faut acheter! Incontestablement le meilleur rapport qualité/prix.*

# Annexe G

## À propos des grammien

Dans cette annexe, quelques explications sur l'interprétation des grammien et leurs propriétés sont apportées.

### Sommaire

---

G.1	Signification des grammien . . . . .	723
G.2	Grammien et commandabilité en continu . . . . .	726
G.3	Grammien et critère de Kálmán en continu . . . . .	729
G.4	Invariance des valeurs propres de $W_c W_o$ . . . . .	731
G.5	Notes et références . . . . .	733

---

### G.1. Signification des grammien

Après avoir défini les grammien<sup>1</sup> au paragraphe 6.4 page 248, on se propose ici de s'étendre sur le sujet en donnant une signification physique aux grammien

---

1. du nom du mathématicien danois Jørgen Pedersen Gram (1850-1916).

dans le cadre des systèmes discrets. On procède ensuite brièvement par analogie pour traiter le cas des systèmes continus.

Soit le système discret suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= Cx_k \end{cases}$$

On atteste ou non de la commandabilité de ce système selon le rang de la matrice de commandabilité de Kálmán (voir §9.6.2 page 520)

$$Q_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B].$$

On rappelle que l'état final souhaité peut être atteint en  $n$  coups ou plus (cf. Remarque 9.9 page 521). Il faut aussi noter que, partant de l'origine  $x_0 = 0$ , on obtient, par récurrence,

$$x_f = A^{n-1}Bu_0 + A^{n-2}Bu_1 + \dots + ABu_{n-2} + Bu_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow x_f = Q_c U_n$$

où

$$U_n = [u'_{n-1} \ , \ \dots \ , \ u'_0]'$$

La solution  $U_n$  de la commande nécessaire pour atteindre l'état  $x_f$ , du point de vue de la norme minimale de  $U_n$ , est donnée par la résolution d'un problème d'optimisation classique au sens des moindres carrés (voir §A.3, page 670) :

$$U_n = Q'_c(Q_c Q'_c)^{-1} x_f.$$

Ceci veut dire que, pour atteindre l'état final  $x_f$  à partir de  $x_0 = 0$ , il faut une énergie minimale de commande :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u'_k u_k = U'_n U_n = x'_f (Q_c Q'_c)^{-1} x_f$$

On appelle *grammien transitoire de commandabilité* la matrice :

$$W_c(n) = Q_c Q_c^T = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B B' (A^k)'. \quad (\text{G.1})$$

$W_c(n)$  est une matrice définie positive, donc il existe une matrice de transformation (ou de changement de base) unitaire  $U$  telle que

$$W_c(n) = U\mathcal{D}U',$$

où  $\mathcal{D}$  est la matrice diagonale ordonnée

$$\mathcal{D} = \text{diag} (d_i), \quad d_i \geq 0, \quad \forall i \{1, \dots, n\}.$$

Ceci peut être vu en opérant la décomposition en valeurs singulières de  $W_c(n)$  (voir §A.1.16.1 page 665) et en notant que  $W_c(n)$  est une matrice symétrique.

Soit la transformation  $\bar{x}_k = Ux_k$  (qui préserve la norme de  $x$  car  $U$  est une matrice unitaire). Dans la nouvelle base, l'énergie minimale de commande nécessaire pour atteindre  $e_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]'$  est donnée par  $d_i^{-1}$ . Si  $d_i$  est nul, la  $i^{\text{ème}}$  composante de l'état n'est pas commandable (énergie infinie) en  $n$  coups.  $\mathcal{D}$  apparaît donc, dans la nouvelle base, comme la matrice de pondération d'un critère d'énergie de commande (en partant de zéro).

Si l'on ne s'intéresse pas à la commande en  $n$  coups mais en un nombre infini de coups, on peut définir :

$$W_c = \lim_{n \rightarrow \infty} W_c(n) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B' (A^k)' \quad (\text{G.2})$$

qui est dit simplement *grammien de commandabilité*. Or,

$$W_c(n+1) = A W_c(n) A' + B B',$$

Lorsque  $n$  tend vers l'infini, on a  $W_c(n+1) = W_c(n) = W_c$  et l'équation de Liapounov devient :

$$-W_c + A W_c A' = -B B'$$

Dans le cas des systèmes continus, on ne peut donner de signification physique aussi claire à la matrice de commandabilité mais  $W_c(n)$  a pour équivalent le grammien transitoire de commandabilité sur un horizon  $[0; t]$  :

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B' e^{A'\tau} d\tau \quad (\text{G.3})$$

Sur un horizon de temps infini, on obtient le *grammien de commandabilité* (en continu)  $W_c$  donné en (6.9) page 249. Il est rappelé ci-après,

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B' e^{A'\tau} d\tau, \quad (\text{G.4})$$

et vérifie l'équation de Liapounov

$$A W_c + W_c A' = -B B',$$

déjà donnée en (6.11) page 251.

## G.2. Grammien et commandabilité en continu

Il est intéressant de relier  $W_c(t)$  donné en (G.3) à la commandabilité en se remémorant (et en reformulant légèrement) la définition de cette dernière<sup>2</sup>, donnée au paragraphe 6.1.1 page 238 : un système est commandable si et seulement si une commande d'énergie finie parvient à le faire passer de l'état  $x_0 = x(0)$  ( $t_0$  est supposé égal à zéro pour simplifier) à un état donné quelconque  $x_t = x(t)$ , ce en un temps fini  $t$ . Une proposition que l'on doit à l'incontournable Kálmán<sup>3</sup> affirme que la paire  $(A, B)$  est commandable si et seulement si  $W_c(t)$  est inversible pour tout  $t > 0$ . (En fait l'assertion de Kálmán considère le cas des systèmes variant dans le temps mais seules les systèmes linéaires invariants dans le temps sont traités ici.) L'objectif de ce paragraphe est de prouver cette assertion de Kálmán<sup>4</sup> puis de faire le lien, dans le paragraphe suivant, avec le critère de Kálmán présenté en §6.2.1 page 240.

Pour ce faire, il est rappelé que l'expression de la réponse de l'état d'un système soumis à une commande  $u(t)$  a été donnée en (4.14) page 171. Dans le cas d'un instant initial  $t_0 = 0$ , elle devient

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau. \quad (\text{G.5})$$

Cette quantité doit donc être égale à un vecteur donné  $x_t$ . Existe-t-il une commande sur l'intervalle de temps  $[0; t]$ , c'est-à-dire une expression de  $u(\tau)$ ,  $\tau \in [0; t]$ , qui assure cette égalité ? Oui, elle est donnée par

- 
2. plus précisément la définition de l'atteignabilité.
  3. cf. annexe I.2 page 238.
  4. il l'avait prouvée lui-même, que le lecteur se rassure !

$$u(\tau) = -B'e^{A'(t-\tau)}W_c^{-1}(t)(x_t - e^{At}x_0),$$

sous réserve que  $W_c(t)$  soit inversible. Pour le vérifier, il suffit d'injecter cette loi de commande dans (G.5) et d'obtenir

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 - \int_0^t e^{A(t-\tau)}BB'e^{A'(t-\tau)}W_c^{-1}(t)(x_t - e^{At}x_0) d\tau. \\ \Leftrightarrow x(t) &= e^{At}x_0 - \left( \int_0^t e^{A(t-\tau)}BB'e^{A'(t-\tau)} d\tau \right) W_c^{-1}(t)(x_t - e^{At}x_0). \end{aligned}$$

Dans l'intégrale ci-dessus, on peut opérer le changement de variable

$$\alpha = t - \tau \Rightarrow d\alpha = -d\tau. \quad (\text{G.6})$$

Il vient alors

$$x(t) = e^{At}x_0 + \left( \int_0^t e^{A\alpha}BB'e^{A'\alpha} d\alpha \right) W_c^{-1}(t)(x_t - e^{At}x_0)$$

Compte tenu de l'expression (G.3) du grammien de commandabilité  $W_c(t)$ , on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + W_c(t)W_c^{-1}(t)(x_t - e^{At}x_0) \\ \Leftrightarrow x(t) &= e^{At}x_0 + x_t - e^{At}x_0 = x_t. \end{aligned}$$

Ainsi, l'inversibilité de  $W_c(t)$  assure-t-elle de la commandabilité. C'est donc une condition suffisante.

Est-elle aussi nécessaire ? Autrement dit, toute commande permettant de passer de  $x_0$  à  $x_t$  implique-t-elle nécessairement l'inversibilité de  $W_c(t)$  ? N'en existe-t-il pas d'autre qui ne requière pas cette hypothèse ?

Il est possible de raisonner par contraposition et de supposer la singularité de  $W_c(t)$ . Cette supposition implique que certains états ne sont pas atteignables et donc que la commandabilité n'est pas assurée. Pour s'en convaincre, il faut remarquer que si  $W_c(t)$  est singulier, alors il existe un vecteur non nul  $q$  tel que

$$q'W_c(t)q = 0,$$

ce qui, en reprenant l'expression (G.3), devient

$$\int_0^t q' e^{A\tau} B B' e^{A'\tau} q d\tau = 0.$$

Puisque l'intégrande consiste en une forme quadratique, la nullité de l'intégrale est due à la nullité de cette expression quadratique. De ce fait,

$$z(\tau) = B' e^{A'\tau} q = 0. \quad (\text{G.7})$$

Si l'on suppose que l'état initial est nul et que l'état atteint à l'instant  $t$  n'est autre que le vecteur non nul  $x_t = q$ , alors, l'équation (G.5) permet d'exprimer  $q$  ainsi :

$$q = x_t = x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

Par le changement de variable (G.6),  $q$  se réécrit

$$q = - \int_0^t e^{A\alpha} B u(t - \alpha) d\alpha,$$

que l'on peut multiplier à gauche par le vecteur non nul  $q'$  pour obtenir

$$q'q = \int_0^t q' e^{A\alpha} B u(t - \alpha) d\alpha = \int_0^t z'(\alpha) u(t - \alpha) d\alpha.$$

Puisque  $q$  est non nul, le membre de gauche de l'égalité ci-avant est non nul, ce qui n'est pas le cas du membre de droite compte tenu de (G.7). Par conséquent, supposer la singularité de  $W_c(t)$  implique une contradiction. Donc, certains états ne sont pas atteignables à partir de zéro. Il est maintenant clair que la commandabilité de  $(A, B)$  est équivalente à l'inversibilité de  $W_c(t)$ . Le raisonnement précédent est valable quel que soit le temps  $t$  fini. Mais il reste vrai pour un temps infini de sorte que la commandabilité de  $(A, B)$  est équivalente à l'inversibilité de  $W_c$  tel que défini en (6.9) page 249 ou en (G.4). Comme le grammien est l'intégrale d'une forme quadratique clairement semi-définie positive, alors son inversibilité est synonyme de définition positive stricte.

**Remarque G.1 - Rappel :** *pour traiter le grammien d'observabilité, on raisonne par dualité.*



### G.3. Grammien et critère de Kálmán en continu

Dans le paragraphe précédent, il a été vu que la commandabilité de  $(A, B)$  était équivalente à l'inversibilité de  $W_c(t)$ . Dans ce paragraphe, le lien avec la matrice de commandabilité de Kálmán  $Q_c$  définie en §6.2.1 page 240 est établi. Bien que ce lien soit évident par la relation

$$W_c(t) \text{ de rang plein} \Leftrightarrow (A, B) \text{ commandable} \Leftrightarrow Q_c \text{ de rang plein,}$$

une démonstration alternative directe est ici proposée. C'est en fait une preuve qui rejoint un peu la démonstration présentée en §6.2.1 page 240 mais qui fait clairement apparaître le grammien (qui n'avait pas encore été introduit en §6.2.1).

Pour commencer, il est montré que la singularité de  $W_c(t)$  entraîne celle de  $Q_c$ . Comme on l'a vu en §G.2, la singularité de  $W_c(t)$  implique l'existence d'un vecteur  $q$  tel que  $z(\tau) = B'e^{A'\tau}q = 0, \forall 0 \leq \tau \leq t$ . La fonction  $z(\tau)$  étant nulle pour tout  $\tau$ , ses dérivées successives le sont aussi :

$$\begin{cases} \dot{z}(\tau) &= B'A'e^{A'\tau}q &= 0, \\ \ddot{z}(\tau) &= B'(A')^2e^{A'\tau}q &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}z}{d\tau^{n-1}} &= B'(A')^{n-1}e^{A'\tau}q &= 0. \end{cases}$$

L'ensemble de ces équations se résume en une seule équation matricielle faisant apparaître la matrice de commandabilité de Kálmán :

$$Q'_c e^{A\tau} q = 0.$$

Cette égalité montre que le vecteur non nul  $e^{A'\tau}q$  est dans le noyau à droite de  $Q_c$  qui est donc singulière. Ainsi, l'inversibilité de  $W_c(t)$  implique celle de  $Q_c$ . Il reste à faire le chemin en sens inverse.

C'est ici que la présente preuve rejoint la démonstration donnée en §6.2.1. En effet, soit l'interpolation de Lagrange-Sylvester<sup>5</sup> introduite en (6.3) page 241 :

5. du nom de *Giuseppe Lodovico Lagrangia*, Comte de Lagrange, mathématicien, mécanicien et astronome italien naturalisé français (1736-1813) et du mathématicien anglais James Joseph Sylvester (1814-1897)... en bref une histoire de Josephs.

$$e^{A\tau} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k \quad \text{où } \alpha_k(\tau) \in \mathbb{R}. \quad (\text{G.8})$$

Dans cette annexe, on peut s'attarder quelque peu sur le sens de cette interpolation qui n'en ait pas vraiment une. Le théorème de Cayley-Hamilton<sup>6</sup> stipule qu'une matrice vérifie son propre polynôme caractéristique (cf. équation (3.22) page 91 et §A.1.10 page 651). Ainsi, il vient

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_2A^2 - a_1A - a_0I,$$

si l'on considère  $a_n = 1$  (sans perte de généralité). Grâce à ce théorème, il est facile de voir que toute puissance de  $A$  de degré supérieur ou égal à  $n$  s'exprime comme une combinaison linéaire des puissances de  $A$  de degrés 0 à  $(n-1)$ . En rappelant de plus que le développement en série de la fonction exponentielle conduit à

$$e^{A\tau} = I + A\tau + \frac{A^2\tau^2}{2!} + \frac{A^3\tau^3}{3!} + \dots + \frac{A^r\tau^r}{r!} + \dots,$$

il est également facile de déduire (G.8) qui est alors une formule exacte. Il n'est pas nécessaire d'exprimer les fonctions  $\alpha_k(\tau)$  pour le présent besoin. De (G.8), il vient

$$e^{A\tau}B = B\alpha_1(\tau) + AB\alpha_2(\tau) + \dots + A^{n-1}B\alpha_{n-1}(\tau) = Q_c w(\tau),$$

avec le vecteur  $w(\tau)$  défini par

$$w(\tau) = [ \alpha_1(\tau) \quad \dots \quad \alpha_{n-1}(\tau) ]'.$$

Le grammien  $W_c(t)$ , défini en (G.3) s'écrit alors

$$W_c(t) = Q_c \left( \int_0^t w'(\tau)w(\tau)d\tau \right) Q_c'$$

Il va de soi que toute déficience de rang de  $Q_c$  entraîne une déficience de rang de  $W_c(t)$ . Ceci reste vrai lorsque  $t$  tend vers l'infini. Donc, l'équivalence suivante vient d'être directement établie :

$$W_c \text{ de rang plein} \Leftrightarrow Q_c \text{ de rang plein.}$$

**Remarque G.2 Rappel :** pour traiter le cas de l'observabilité, on raisonne toujours par dualité.

6. du nom du mathématicien britannique Arthur Cayley (1821-1895) et de Sir William Rowan Hamilton dont une biographie est proposée à la page 138.

## G.4. Invariance des valeurs propres de $W_c W_o$

On donne ici, dans le cas discret, la démonstration de l'assertion formulée à la remarque 6.5 page 250 selon laquelle les valeurs propres de  $W_c W_o$ , le produit des deux grammiens, sont invariante par changement de base. Le cas continu est traité juste après.

Soit une réalisation  $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$  soumise au changement de variable  $z = T^{-1}x$ , alors :

$$\mathcal{R} = \{A, B, C\} \xrightarrow{T^{-1}} \mathcal{R}_T = \{T^{-1}AT, T^{-1}B, CT\}$$

et, si l'on définit respectivement  $Q_{c_\infty}$  et  $Q_{o_\infty}$  comme les matrices de commandabilité et d'observabilité sur un horizon de temps ou d'échantillons infini, c.-à-d.,

$$\begin{cases} Q_{c_\infty} &= \lim_{k \rightarrow \infty} [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{k-1}B ] \\ Q_{o_\infty} &= \lim_{k \rightarrow \infty} [ C' \quad A'C' \quad \dots \quad (A')^{k-1}C' ]', \end{cases}$$

alors il vient, par application du changement de base,

$$Q_{c_\infty} \xrightarrow{T^{-1}} T^{-1}Q_{c_\infty} \quad \text{et} \quad Q_{o_\infty} \xrightarrow{T^{-1}} Q_{o_\infty}T.$$

Par suite, compte tenu de (G.2), et par dualité :

$$\begin{aligned} W_c &\xrightarrow{T^{-1}} T^{-1}W_c T^{-T} \\ W_o &\xrightarrow{T^{-1}} T^T W_o T. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} W_c W_o &\xrightarrow{T^{-1}} (T^{-1}W_c T^{-T})(T^T W_o T) \\ W_c W_o &\xrightarrow{T^{-1}} T^{-1}W_c W_o T \end{aligned}$$

Le produit des grammiens est transformé en une matrice semblable, donc ses valeurs propres sont conservées. QED.

La démonstration dans le cas continu est quelque peu différente. Soit toujours la matrice de changement de base  $T$ . Compte tenu de l'équation (G.4), il vient :

$$W_c \xrightarrow{T^{-1}} \int_0^\infty T^{-1} e^{A\tau} T T^{-1} B B' (T')^{-1} T' e^{A'\tau} (T')^{-1} d\tau = T^{-1} W_c (T')^{-1}.$$

et

$$W_o \xrightarrow{T^{-1}} \int_0^\infty T' e^{A'\tau} (T')^{-1} T' C' C T T^{-1} e^{A\tau} T d\tau = T' W_o T.$$

La fin de la démonstration est alors identique à celle du cas discret. QED

## G.5. Notes et références

Tous les travaux de Kálmán<sup>7</sup> servent bien sûr de base, de contexte, à cette petite annexe [1,2,3,4,5,6]. Il est possible de retrouver ce genre de développement dans de nombreux ouvrages déjà largement cités au cours des chapitres précédents. Dans cette annexe, l'auteur se contente de mentionner le livre [7] dans lequel il a puisé une vision de l'interprétation énergétique des grammien. Pour la démonstration du critère de commandabilité basé sur les grammien, il s'est inspiré de [8]. La lecture de l'article [9] peut être également très profitable à la compréhension de ce que sont les grammien, et de leur utilité. Pour l'invariance des valeurs propres du produit des grammien, l'auteur se doit de citer sa première lecture sur le sujet, à savoir [10].

1. **R. E. Kálmán** : Canonical Structure of Linear Dynamical Systems. *Proceedings of the National Academy of Science*, 48(4), p.596-600, USA, 1962.  
*Parmi les premières contributions de Kálmán sur les propriétés du modèle d'état.*
2. **R. E. Kálmán** : Mathematical Description of Linear Dynamical Systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics (Series A Control)*, 1(2) : p.152-192, 1963.  
*Description du modèle d'état et de ses propriétés par celui qui introduisit l'essentiel de ces concepts.*
3. **R. E. Kálmán, H. C. Ho et K. S. Narendra** : Controllability of Linear Dynamic Systems. *Contributions to Differential Equations*, 1(2), p.189-213, 1963.  
*Kálmán expliquant encore la commandabilité avec ses collègues .*
4. **R. E. Kálmán** : Irreducible Realizations and the Degrees of a Rational Matrix. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 13(2) : p.520-544, 1965.  
*Sur la minimalité des réalisations.*
5. **R. E. Kálmán** : Algebraic Structure of Finite Dimensional Dynamical Systems. *Proceedings of the National Academy of Science*, 54, p.1503-1508, USA, 1965.  
*Une contribution de plus de Kálmán sur la minimalité et les notions s'y rapportant.*

---

7. cf. biographie en annexe I.2 page 777

6. **R. E. Kálmán** : *Lectures on Controllability and Observability*. CIEM, Bologne, juillet 1968. NASA technical documents. Téléchargeable à l'adresse : [https://archive.org/details/nasa\\_techdoc\\_19700079309](https://archive.org/details/nasa_techdoc_19700079309)  
*Une série de conférences sur la commandabilité et l'observabilité par Kálmán en Italie.*
7. **Ph. de Larminat** : *Automatique*. Éditions Hermes, 2000.  
*Pour ce qui relève de cette annexe, les grammiens y sont particulièrement bien interprétés en termes énergétiques (pour le cas des systèmes discrets mais l'analogie avec les systèmes continus est toujours possible).*
8. **B. Friedland** : *Control System Design - An Introduction to State-Space Methods* Dover, Mineola, New York, 1986.  
*Cet ouvrage se concentre uniquement sur la représentation d'état et de ce fait, vu sa taille importante, traite bien plus d'aspects que beaucoup d'autres. Les exemples y sont nombreux et bien choisis. Il est parfois un peu dense. Son prix est très raisonnable.*
9. **B. C. Moore** : Principal Component Analysis in Linear Systems : Controllability, Observability, and Model Reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1), p.17-32, 1981.  
*Exposition propre et rigoureuse des grammiens de commandabilité, d'observabilité, démonstration d'existence d'une réalisation équilibrée où les deux coïncident et utilisation de cette propriété pour trouver un modèle réduit approximatif aussi proche que possible de l'original.*
10. **A. Rachid et D. Mehdi** : *Réalisation, réduction et commande des systèmes linéaires*. Scientifika, 1993.  
*Plutôt facile d'accès mais non sans originalité puisque, bien qu'assez court, il aborde, par exemple, la réduction de modèle.*



## Annexe H

### *Le logiciel MATLAB<sup>©</sup> et la représentation d'état*

Le logiciel MATLAB<sup>©</sup> de la société THE MATH WORKS INC. est originellement un logiciel de calcul matriciel. Il s'est spécialisé dans différentes disciplines au cours des années en fonction de la clientèle intéressée. Comme de nombreux automaticiens utilisaient MATLAB<sup>©</sup>, il s'est étoffé, entre autres, en fonctions dédiées à l'Automatique, tant pour l'approche fréquentielle que pour l'approche temporelle. Outre le logiciel de base, on peut faire l'acquisition de quelques boîtes-à-outils et certaines d'entre elles sont spécifiques aux problèmes d'Automatique, en particulier la « CONTROL TOOLBOX ».

Initialement plutôt utilisé par des chercheurs, MATLAB<sup>©</sup> est aujourd'hui très répandu dans le monde universitaire mais aussi dans le monde industriel.

Il s'agit ici de présenter quelques fonctions du logiciel accessibles dans la version de base ou dans la boîte-à-outils CONTROL. Ne sont données que des fonctions basiques ou liées à la représentation d'état, voire occasionnellement à la fonction de transfert, reprenant quelques notions de ce cours. Le logiciel est exposé dans sa version 2016, assez ancienne. Il se peut donc que certaines instructions aient évolué.

---

## Sommaire

---

<b>H.1 Fonctions mathématiques de base</b> . . . . .	<b>736</b>
<b>H.2 Fonctions liées au modèle d'état</b> . . . . .	<b>748</b>
<b>H.3 Fonctions liées aux modèles discrets</b> . . . . .	<b>764</b>
<b>H.4 Notes et références</b> . . . . .	<b>770</b>

---

## H.1. Fonctions mathématiques de base

Dans ce qui suit, on considère uniquement des instructions tapées directement dans l'environnement de travail de MATLAB<sup>©</sup>.

Comme MATLAB<sup>©</sup> est un logiciel de calcul matriciel, l'entité de base est une matrice. Aussi, les vecteurs et les scalaires ne sont vus que comme des matrices particulières.

Ainsi, on peut définir, par exemple, un vecteur ligne  $v$  de trois composantes de la façon suivante :

```
>> v=[1 2 3]
```

```
v =
```

```
    1    2    3
```

La première ligne avec le *prompt* “>>” correspond à l'instruction et les autres correspondent au résultat affiché par MATLAB<sup>©</sup>. La variable  $v$  est alors enregistrée dans l'environnement et disponible à tout moment. La liste des variables actives est donnée par l'instruction `who`.

Un vecteur colonne peut être généré de deux façons :



```
>> v=[1;2;3]
```

```
v =
```

```
    1  
    2  
    3
```

```
>> v=[1 2 3]';
```

La première instruction fait apparaître un point virgule entre les composantes pour indiquer un changement de ligne dans une matrice. L'autre utilise l'opérateur de transposition conjugaison sur lequel on reviendra plus loin. Le second résultat (identique au premier) n'est pas affiché par MATLAB<sup>©</sup> comme le stipule le point virgule (facultatif) en fin d'instruction.

Les composantes d'un vecteur ou d'une matrice peuvent être complexes. Ainsi les variables *i* ou *j* sont-elles prédéfinies dans MATLAB<sup>©</sup> et égales à l'unité imaginaire *i*. Il importe donc de ne pas les écraser en redéfinissant des variables avec le même identificateur. On dispose d'un opérateur de conjugaison, comme illustré par les instructions suivantes,

```
>> v=[1 1+i];
```

```
>> conj(v)
```

```
ans =
```

```
    1.0000          1.0000 - 1.0000i
```

et d'un l'opérateur de transposition conjugaison, comme montré ci-après :

```
>> v'
```

```
ans =
```

```
    1.0000  
    1.0000 - 1.0000i
```

**Remarque H.1** Dans l'environnement de travail de MATLAB<sup>©</sup>, `ans` désigne variable contenant le résultat du dernier calcul lorsque ce résultat n'a pas été affecté à une variable explicitement nommée.

Le caractère `'` entraîne donc la conjugaison des éventuelles composantes complexes et une simple transposition doit se faire en associant `conj` et `'`. Pour les matrices réelles, il n'y a pas de différence entre l'opérateur `'` et la transposition simple. Voici donc comment saisir une matrice réelle et la transposer :

```
>> M=[1 2;3 4]
```

```
M =
```

```
    1    2  
    3    4
```

```
>> M'
```

```
ans =
```

```
    1    3  
    2    4
```

Certaines matrices particulières peuvent être saisies par des fonctions spéciales telles que

```
>> I2=eye(2)
```

```
I2 =
```

```
    1    0  
    0    1
```

```
>> zeros(3,2)
```

```
ans =
```

```
    0    0    0
    0    0    0
```

```
>> ones(3,2)
```

```
ans =
```

```
    1    1    1
    1    1    1
```

`eye` permet de construire une matrice identité, `zeros` une matrice nulle et `ones` une matrice emplie de composantes unitaires.

De même, il est facile d'extraire des sous-matrices :

```
>> I2(:,2)
```

```
ans =
```

```
    0
    1
```

```
>> I2(2,2)
```

```
ans =
```

```
    1
```

```
>> M(1:2,2)
```

```
ans =
```

```
2  
4
```

Entre parenthèses apparaissent les lignes et les colonnes conservées. Les deux points seuls indiquent que toutes les lignes ou toutes les colonnes de la matrice sont prises en compte.  $x:y$  correspond aux lignes ou colonnes allant de  $x$  à  $y$ . Il est aussi possible de spécifier une par une quelles lignes ou quelles colonnes sont retenues. Par exemple, on peut inverser les lignes de  $M$  de la façon suivante :

```
>> M([2 1], :)  
  
ans =  
  
     3     4  
     1     2
```

On peut ainsi construire des sous-matrices en ne prélevant que les lignes (colonnes) désirées et en les disposant dans n'importe quel ordre.

MATLAB<sup>©</sup> propose évidemment quantité de fonctions d'analyse matricielle parmi lesquelles `rank` et `det`, qui permettent de calculer le rang ou le déterminant d'une matrice :

```
>> rank(M)  
  
ans =  
  
     2  
  
>> det(M)  
  
ans =  
  
    -2
```

On peut bien sûr calculer la somme de deux matrices (ou plus) ou même le produit :

```
>> M+M
```

```
ans =
```

```
     2     4
     6     8
```

```
>> M*M
```

```
ans =
```

```
     7    10
    15    22
```

ce qui conduit à la possibilité de définir les puissances de matrices :

```
>> M=M^2
```

```
ans =
```

```
     7    10
    15    22
```

L'exposant qui suit l'opérateur  $\wedge$  peut être non entier de sorte que  $\wedge(1/2)$  correspond à la racine carrée matricielle.

Il existe aussi la fonction `expm` qui calcule l'exponentielle d'une matrice :

```
>> expm([0 1;0 0])
```

```
ans =
```

```
    0    1  
    0    0
```

Le produit matriciel de Kronecker<sup>1</sup>  $A \otimes B$  de deux matrices  $A$  et  $B$  est donné par l'instruction `kron` de la façon suivante :

```
>> A=[1 2;2 1]
```

```
A =
```

```
    1    2  
    2    1
```

```
>> B=[0 1;1 2]
```

```
B =
```

```
    0    1  
    1    2
```

```
>> kron(A,B)
```

```
ans =
```

```
    0    1    0    2  
    1    2    2    4  
    0    2    0    1  
    2    4    1    2
```

---

1. du nom du mathématicien et logicien allemand Leopold Kronecker (1823-1891).

Pour calculer l'inverse d'une matrice, on utilise la fonction `inv` :

```
>> inv(M)

ans =

    -2.0000    1.0000
     1.5000   -0.5000
```

Pour calculer la pseudo-inverse de Moore-Penrose d'une matrice (cf. §A.1.12.4 page 654)<sup>2</sup>, on utilise la fonction `pinv` :

```
>> X=[1 2 3;4 5 6]

X =

     1     2     3
     4     5     6

>> pinv(X)

ans =

   -0.9444    0.4444
   -0.1111    0.1111
    0.7222   -0.2222
```

Pour calculer la pseudo-solution d'un système d'équations linéaires surdéterminé (cf. §A.3 page 670) tel que  $Ax = b$  avec

---

2. du nom du mathématicien états-unien Eliakim Hastings Moore (1862-1932) et du mathématicien et physicien britannique Roger Penrose (1931-).

```
>> A=[0 1;1 1;1 0]
```

```
A =
```

```
    0    1
    1    1
    1    0
```

```
>> b
```

```
b =
```

```
    1
    1
    1
```

on peut faire intervenir la pseudo-inverse de Moore-inverse puisque  $x = A^+b$  :

```
>> pinv(A)*b
```

```
ans =
```

```
    0.6667
    0.6667
```

Il est aussi possible de taper

```
>> (b\A)'
```

```
ans =
```

```
    0.6667
    0.6667
```



Pour calculer le complément orthogonal à droite (ou noyau à droite) d'une matrice (cf. §A.1.13 page 658), on utilise l'instruction `null` :

```
>> null(X)
```

```
ans =
```

```
    0.4082  
   -0.8165  
    0.4082
```

Les valeurs propres (cf. §A.1.14 page 659) sont disponibles ainsi :

```
>> L=eig(M)
```

```
L =
```

```
   -0.3723  
    5.3723
```

Mais on peut aussi obtenir une matrice modale (cf. §A.1.14 page 659) :

```
>> [V,L]=eig(M)
```

```
V =
```

```
   -0.8246   -0.4160  
    0.5658   -0.9094
```

```
L =
```

```
   -0.3723     0  
     0     5.3723
```

Les colonnes de  $V$  sont les vecteurs propres à droite.

Enfin, pour tester la définition en signe d'une matrice hermitienne (cf. §A.2 page 667), on peut tester le signe de ses valeurs propres :

```
>> Z=M'*M;  
>> eig(Z)
```

```
ans =
```

```
    0.1339  
   29.8661
```

$Z$  est ici construite de telle sorte qu'elle soit définie positive. Dans ce cas, on vérifie avec l'instruction `eig` que ses valeurs propres sont strictement positives donc la matrice  $Z$  est définie positive.

On peut opérer une décomposition en valeurs singulières de la matrice  $M$  (cf. §A.1.16.1 page 665) grâce à l'instruction `svd` :

```
>> [U,Sigma,W]=svd(M)
```

```
U =
```

```
   -0.4046   -0.9145  
   -0.9145    0.4046
```

```
Sigma =
```

```
    5.4650         0  
         0    0.3660
```

W =

```
-0.5760    0.8174
-0.8174   -0.5760
```

**Sigma** correspond à la matrice diagonale  $\Sigma$  du paragraphe A.1.16.1 dont les éléments diagonaux sont les valeurs singulières de  $M$ . Quant à  $U$  et  $W$ , ce sont deux matrices unitaires, toujours comme indiqué au paragraphe A.1.16.1. Si l'on ne spécifie pas les arguments de sortie entre crochets, on obtient ceci

```
svd(M)
```

```
ans =
```

```
5.4650
0.3660
```

Autrement dit, seules les valeurs singulières (éléments sur la diagonale de **Sigma** sont renvoyées.

On peut calculer la norme-2 de la matrice  $M$  grâce à l'instruction `norm` :

```
norm(M)
```

```
ans =
```

```
5.4650
```

On vérifie alors que cette norme est bien la valeur singulière maximale. On peut appliquer `norm` à un vecteur pour calculer sa norme euclidienne :

```
>> norm(v)
```

```
ans =
```

```
3.7417
```

On peut alors vérifier, grâce à l'instruction `sqrt` qui calcule racine carré d'un scalaire, que cette norme euclidienne est bien la racine carrée du produit scalaire de `v` avec lui-même :

```
>> sqrt(v*v')
```

```
ans =
```

```
3.7417
```

**Remarque H.2** À toute fonction MATLAB<sup>©</sup> est associée une aide en ligne obtenue grâce à l'instruction `help`. Exemple :

```
>> help eig
```

## H.2. Fonctions liées au modèle d'état

Dans cette partie, quelques fonctions MATLAB<sup>©</sup> relatives à l'utilisation du modèle d'état sont présentées. La fonction de transfert intervient un peu également.

On constitue d'abord un système à travers une réalisation :

```
>> A=[-9 -10;5 5];
```

```
>> B=[1;1];  
>> C=[1 0];  
>> D=0;
```

Le spectre de la matrice d'état de ce modèle d'ordre 2 est donné par

```
>> eig(A)  
  
ans =  
  
-2.0000 + 1.0000i  
-2.0000 - 1.0000i
```

On peut regrouper les quatres matrices de la réalisation en une seule variable car MATLAB<sup>©</sup> propose des variables de type « système LTI ».

```
sys=ss(A,B,C,D);
```

La fonction inverse qui permet de récupérer les matrices à partir de la variable `sys` est :

```
[A,B,C,D]=ssdata(sys);
```

Ensuite, on peut tout faire à l'aide de cette variable `sys`. Ainsi, on peut obtenir la fonction de transfert :

```
>> [Num,Den]=tfdata(sys)
```

```
Num =  
  
[1x3 double]
```

Den =

[1x3 double]

Un système étant éventuellement multivariable, il est possible qu'il existe plusieurs numérateurs et dénominateurs pour une ce qui est alors une matrice de transfert. C'est pourquoi MATLAB<sup>©</sup> fournit une « cellule » de numérateurs et une cellule de dénominateurs. Dans le cas monovariante ci-dessus, les cellules ne contiennent qu'un élément que l'on peut extraire :

```
>> Num{1}
```

ans =

```
0    1.0000   -15.0000
```

```
>> Den{1}
```

ans =

```
1.0000    4.0000    5.0000
```

Les vecteurs obtenus contiennent les coefficients du numérateur  $N(p)$  et du dénominateur  $D(p)$  de la fonction de transfert  $G(p)$  dans l'ordre des puissances décroissantes c'est-à-dire que l'on obtient en fait :

$$G(p) = \frac{p - 15}{p^2 + 4p + 5}.$$

On peut aussi appliquer l'instruction

```
>> [Num,Den]=ss2tf(A,B,C,D);
```

si la fonction `sys` n'a pas été utilisée au préalable.

Le passage « inverse » est possible mais la réalisation obtenue peut correspondre à une autre base de l'espace d'état :

```
>> [A,B,C,D]=tf2ss(Num{1},Den{1})
```

A =

```
-4.0000  -5.0000
 1.0000   0
```

B =

```
 1
 0
```

C =

```
 1.0000 -15.0000
```

D =

```
 0
```

La réalisation fournie est de type compagne horizontale<sup>3</sup>. Les instructions

```
>> roots(Num{1})
```

ans =

```
15.0000
```

---

3. Mais pas la forme canonique de commande introduite au paragraphe 3.5.1.2 page 84. En effet, la ligne contenant les coefficients du polynôme caractéristique est la première et non la dernière. Une telle réalisation est dite forme canonique de commandabilité.

```
>> roots(Den{1})
ans =

    -2.0000 + 1.0000i
    -2.0000 - 1.0000i
```

permettent respectivement de calculer les racines de  $N(p)$  et  $D(p)$ , c'est-à-dire les zéros et les pôles de la fonction de transfert. On peut obtenir directement les pôles et les zéros du système `sys` grâce aux fonctions `pole` et `zero` :

```
>> p =pole(sys)

p =

    -2.0000 + 1.0000i
    -2.0000 - 1.0000i

>> zeros=zero(sys)

z =

    15.0000
```

La fonction `zpkdata` permet d'obtenir les deux résultats en une seule instruction :

```
>> [z,p]=zpkdata(sys)

z =

    [15.0000]

p =
```



```
[2x1 double]
```

Les zéros et les pôles sont alors rangés dans des cellules dont il faut extraire les valeurs en utilisant un système d'indexation entre accolades.

```
>> p{1},p{2}
```

```
ans =
```

```
-2.0000 + 1.0000i  
-2.0000 - 1.0000i
```

Une fonction de transfert basée sur la factorisation du numérateur et celle du dénominateur est donnée par<sup>4</sup>

```
>> sys=zpk(sys)
```

```
Zero/pole/gain:
```

```
(s-15)
```

```
-----  
(s2 + 4s + 5)
```

La factorisation se fait dans  $\mathbb{R}$  de sorte que les racines complexes n'apparaissent pas comme c'est le cas ici pour le dénominateur (pôles complexes).

Cette même instruction permet de construire une variable système en utilisant les pôles, les zéros et le gain associé (1 pour l'exemple précédent) :

```
>> sys=zpk(z,p,1)
```

```
Zero/pole/gain:
```

---

4. Il est rappelé que dans le monde anglo-saxon, la variable de Laplace est notée 's'.

$$\frac{(s-15)}{s^2 + 4s + 5}$$

Il est aussi possible d'obtenir une représentation graphique de ces zéros et de ces pôles, dans le plan complexe, à l'aide de l'instruction `pzplot`

```
>> pzplot(sys)
```

Le résultat est donné par la figure H.1. Les pôles sont indiqués par des croix et les zéros par des cercles.

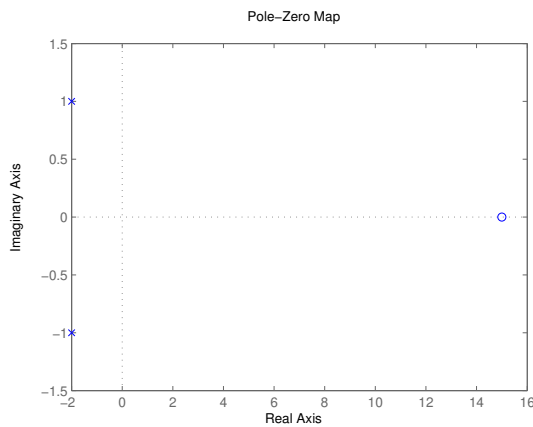


FIGURE H.1 – Lieu des pôles et des zéros du système.

l'instruction `grid`, ou `sgrid` ou encore `zgrid` permet d'obtenir des courbes d'iso-amortissement. Sur la figure H.1, ces courbes ne seraient pas trop parlantes sans un « zoom » sur les pôles.

Le système pris en exemple est asymptotiquement stable comme l'indique la valeur de ses pôles. On peut le vérifier par résolution de l'équation de Liapou-

nov<sup>5</sup> (5.11) page 217 avec  $Q = -I_2$  :

```
>> Q=eye(2);  
>> P=lyap(A,Q)
```

P =

```
    0.7500   -0.5000  
   -0.5000    0.5500
```

```
>> eig(P)
```

ans =

```
    0.1401  
    1.1599
```

La dernière instruction permet de vérifier que les valeurs propres de la matrice de Liapounov  $P$  sont positives et donc que cette matrice est bien définie positive, comme preuve de stabilité.

Les réponses impulsionnelle et indicielle se tracent grâce aux fonctions `impulse` et `step` :

```
>> impulse(sys)  
>> step(sys)
```

Les résultats sont donnés par les figures H.2. et H.3

---

5. du nom d'Alexandre Mikhaïlovitch Liapounov, mathématicien et physicien russe (1857-1918) : voir sa biographie en annexe page 772.

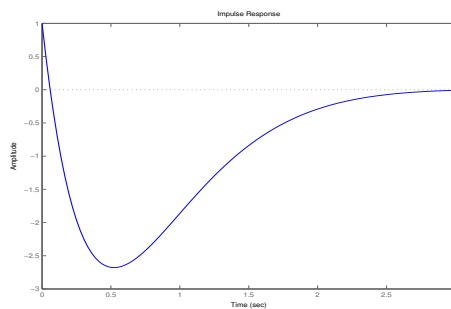


FIGURE H.2 – Réponse impulsionnelle à conditions initiales nulles

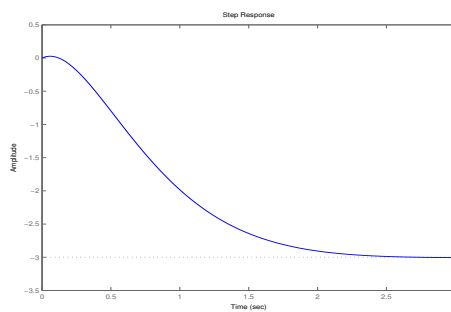


FIGURE H.3 – Réponse indicielles à conditions initiales nulles

Il est possible d'ajouter une grille à une figure avec la fonction `grid`, de modifier les échelles grâce à la fonction `axis`, de tracer plusieurs courbes dans un même repère grâce à `hold on` et `hold off` et de construire une figure avec plusieurs graphes dans des « cases » séparées grâce à `subplot`. L'éditeur de figures per-

met de nombreuses modifications de légendes, etc et l'on peut cliquer sur toute courbe pour connaître les coordonnées du point indiqué.

Il est également possible de tracer une réponse à une condition initiale (`xinitial`) ou encore la réponse à n'importe quelle entrée construite sous forme de vecteur (`lsim`).

La réponse harmonique est également traçable dans ses représentations graphiques classiques :

```
>> bode(sys)
>> grid
>> nyquist(sys)
>> grid
>> nichols(sys)
>> grid
```

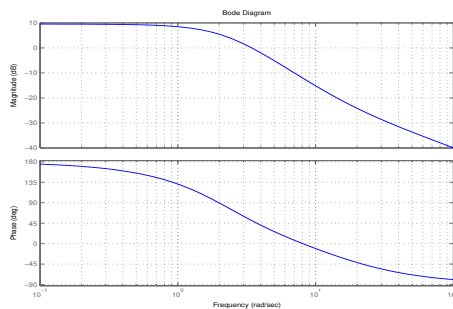


FIGURE H.4 – Diagramme de Bode.

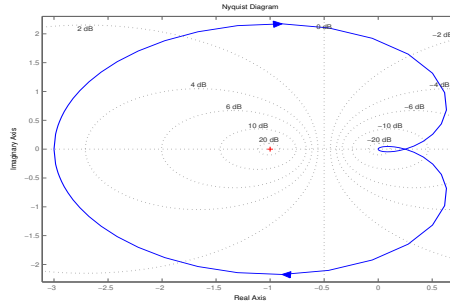


FIGURE H.5 – Lieu de Nyquist

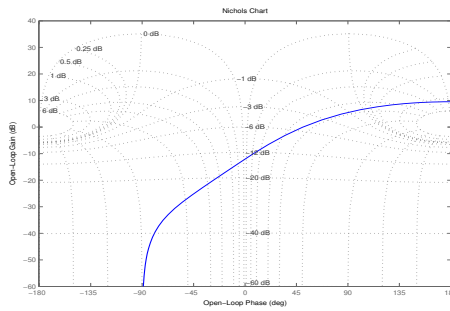


FIGURE H.6 – Diagramme de Black

On reconnaît le diagramme de Bode<sup>6</sup> et le lieu de Nyquist<sup>7</sup>. On note aussi que le diagramme de Black<sup>8</sup>, dont la paternité est parfois aussi attribuée à Nichols<sup>9</sup> correspond à la fonction `nichols` sous MATLAB<sup>©</sup>.

Il est par ailleurs possible de connaître les marges de gain, de phase, et les pulsations associées. Voici un exemple d'utilisation correspondant à un système instable  $q$  :

```
>> [Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(sys)
Warning: The closed-loop system is unstable.
```

```
Gm =
```

```
0.3333
```

```
Pm =
```

```
-129.4032
```

```
Wcg =
```

```
0
```

```
Wcp =
```

```
3.4438
```

Dans l'ordre, sont obtenus la marge de gain, celle de phase et les pulsations auxquelles elles peuvent respectivement être mesurées. Des marges infinies ou des systèmes instables en boucle fermée (comme celui-ci) peuvent générer des

---

6. du nom d'Hendrik Wade Bode, voir biographie 2.5 page 44.

7. du nom d'Harry Nyquist, voir biographie 2.4 page 43

8. du nom d'Harold Stephen Black, voir biographie 2.3 page 42.

9. du nom de Nathaniel B. Nichols, ingénieur états-unien (1914-1997).

messages d'avertissement.

Si l'on s'intéresse à la commandabilité et à l'observabilité du système, on peut tester ces dernières à l'aide des critères de Kálmán<sup>10</sup> (cf. §6.2 page 240) :

```
>> Qc=ctrb(sys)
```

```
Qc =
```

```
    1   -19
    1    10
```

```
>> rank(Qc)
```

```
ans =
```

```
    2
```

```
>> Qo=obsv(sys)
```

```
Qo =
```

```
    1    0
   -9   -10
```

```
>> rank(Qo)
```

```
ans =
```

```
    2
```

Les matrices de commandabilité et d'observabilité  $Q_c$  et  $Q_o$  sont construites ci-dessus et l'on vérifie qu'elles sont de rang plein pour attester des propriétés. On peut aussi passer par les grammians<sup>11</sup> de commandabilité  $W_c$  et d'observabilité

---

10. voir la biographie de Kálmán en annexe I.2 page 777.

11. du nom du mathématicien danois Jørgen Pedersen Gram (1850-1916)



$W_o$  (cf. §6.4 page 248), à condition que le système soit asymptotiquement stable. Ces grammiens sont les solutions d'une équation de Liapounov mais plutôt que d'utiliser `lyap`, on peut utiliser directement la fonction `gram` :

```
>> Wc=gram(sys,'c')
```

```
Wc =
```

```
    5.7500   -5.1250  
   -5.1250    5.0250
```

```
>> eig(Wc)
```

```
ans =
```

```
    0.2497  
   10.5253
```

```
>> Wo=gram(sys,'o')
```

```
Wo =
```

```
    0.7500    1.2500  
    1.2500    2.5000
```

```
>> eig(Wo)
```

```
ans =
```

```
    0.0992  
    3.1508
```

Il convient ensuite de vérifier le signe des valeurs propres de ces deux grammiens. Ils sont ici définis positifs donc le système est commandable et observable.

**Remarque H.3** La fonction `minreal` permet de réduire une réalisation à une forme minimale ou irréductible c'est-à-dire complètement commandable et observable (au cas où elle ne le serait déjà).

Il existe au moins deux possibilités sous MATLAB<sup>©</sup> pour placer les pôles du système mais aucune ne correspond à l'algorithme de Bass-Gura<sup>12</sup>. La fonction `place` est une fonction écrite pour les systèmes multivariables pour lesquels la solution du problème de placement de pôles n'est pas unique. Elle a des avantages qu'il n'est pas facile d'expliquer ici mais pour le cas monovariante elle présente l'inconvénient de ne placer que des pôles distincts. Ainsi peut-on s'en servir pour placer les pôles  $-5$  et  $-4$  et vérifier *a posteriori* que le placement est effectué :

```
>> K=place(A,B,[-5 -4])
```

```
K =
```

```
5.0000 15.0000
```

```
>> Af=A-B*K;
```

```
>> eig(Af)
```

```
ans =
```

```
-5.0000
```

```
-4.0000
```

En revanche la fonction `acker` qui repose sur la formule d'Ackerman<sup>13</sup> (cf. Annexe C page C), même si elle n'est pas applicable en multivariable, permet de lever l'hypothèse des pôles distincts.

```
>> K=acker(A,B,[-5 -5])
```

---

12. du nom de Robert W. Bass (voir biographie 7.1 page 329.) et de celui d'Ira Gura.

13. du nom de Jürgen E. Ackermann, automaticien allemand.

```
K =  
  
    6.0000    20.0000  
  
>> Af=A-B*K;  
>> eig(Af)  
  
ans =  
  
    -5  
    -5
```

Le moyen le plus simple de calculer une commande LQ (cf. §11.1 page 594) à l'aide de MATLAB<sup>©</sup>, ce pour un système continu, est d'utiliser la fonction `lqr`. La syntaxe est la suivante

```
[K,P,v] = lqr(sys,Q,R)
```

Dans cette syntaxe `lqr` signifie *linear quadratic regulator*, `sys` représente le système à commander, `Q` et `R` sont les matrices de pondération  $Q$  et  $R$  qui interviennent dans le critère quadratique (11.3) page 594, `K` est la matrice de retour d'état  $K$  dont l'expression est donnée par (11.11) page 599, `P` est la matrice  $P$ , définie positive, solution de l'équation de Riccati (11.12) page 599<sup>14</sup> et `v` est un vecteur qui contient le spectre de  $A_f = A - BK$  et non celui de  $A + BK$ .

**Remarque H.4 Attention !** *les fonctions `place`, `acker` et `lqr` envisagent une loi de commande  $u(t) = -Kx(t)$ , c'est pourquoi, dans les instructions ci-avant, on vérifie le spectre de  $A_f = A - BK$ .*

**Remarque H.5** *L'instruction `are` (Algebraic Riccati Equation) permet de résoudre les équations de Riccati en continu. Elle peut donc être utilisée pour calculer une commande LQ. Mais il faut ensuite calculer soi-même le retour d'état, en fonction de la solution obtenue et de la matrice de pondération  $R$ , par la formule (11.11) page 599.*

14. du nom de Jacopo Francesco Riccati, mathématicien et physicien italien (1676-1754).

### H.3. Fonctions liées aux modèles discrets

Un certain nombre de fonctions MATLAB<sup>©</sup> peuvent s'adapter aussi bien aux modèles d'état discrets qu'aux modèles d'état continus. Cependant, il existe des instructions *spécifiques* pour manipuler les modèles discrets. Par exemple, la fonction `c2d` permet d'échantillonner un système continu à une fréquence désirée. Si l'on reprend l'exemple du paragraphe 9.3.5.3 page 502, on peut exécuter la suite d'instructions suivante :

```
>> Ac=[0 1;0 -2];Bc=[0;1];Cc=[1 0];Dc=0;
>> sysc=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
>> sys=c2d(sysc,1,'zoh')
```

```
a =
      x1      x2
x1      1  0.4323
x2      0  0.1353
```

```
b =
      u1
x1  0.2838
x2  0.4323
```

```
c =
      x1  x2
y1   1   0
```

```
d =
      u1
y1   0
```

```
Sampling time: 1
Discrete-time model.
```

La variable `sys` contient les informations sur le système discret obtenu à partir du système continu `sysc` par échantillonnage à  $T = 1s$ . L'argument '`zoh`' (*Zero-order hold*) stipule qu'un bloqueur d'ordre zéro est considéré. Par défaut, en l'absence de cet argument, c'est l'option '`zoh`' qui est retenue. Toutefois, il existe d'autres possibilités.

Les matrices de la réalisation calculée peuvent être récupérées comme en continu.

```
>> [A,B,C,D]=ssdata(sys)
```

```
A =
```

```
    1.0000    0.4323  
         0    0.1353
```

```
B =
```

```
    0.2838  
    0.4323
```

```
C =
```

```
    1    0
```

```
D =
```

```
    0
```

De plus, il est possible d'utiliser la fonction réciproque `d2c` pour retrouver le modèle continu :

```
>> sysc=d2c(sys)
```

```
a =  
      x1  x2  
x1    0   1  
x2    0  -2
```

```
b =  
      u1  
x1    0  
x2    1
```

```
c =  
      x1  x2  
y1    1   0
```

```
d =  
      u1  
y1    0
```

En ce qui concerne le tracé des réponses, l'instruction `dimpulse` permet de tracer la réponse impulsionnelle du système discret. Ainsi l'exécution de

```
>> dimpulse(A,B,C,D)
```

conduit, pour le système (instable) construit au début du paragraphe, à la figure H.7, mais cette même réponse est aussi obtenue par

```
>> impulse(sys)
```

En effet, la variable `sys` contient l'information selon laquelle il s'agit d'un modèle discret.

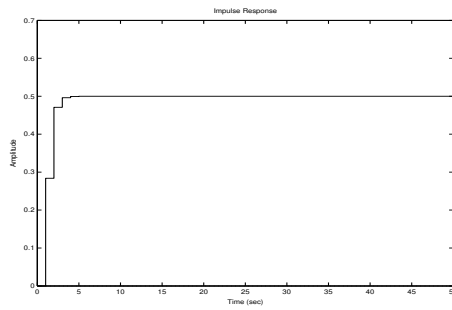


FIGURE H.7 – Réponse impulsionnelle discrète en escalier

On peut noter que la réponse est « en escalier » mais il est possible de faire apparaître plus clairement les échantillons grâce à (voir figure H.8) :

```
>> impulse(sys, 's')
```

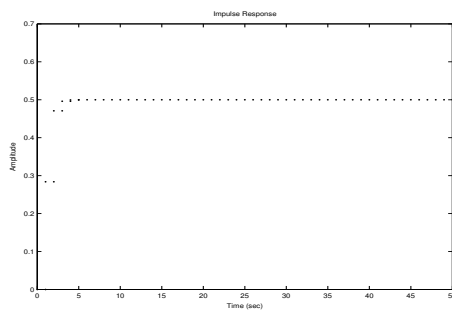


FIGURE H.8 – Réponse impulsionnelle discrète sans effet d'escalier

De même, on peut utiliser indifféremment

```
>> dstep(A,B,C,D)
```

ou

```
>> step(sys)
```

pour obtenir la réponse indicielle du système (figure H.9).

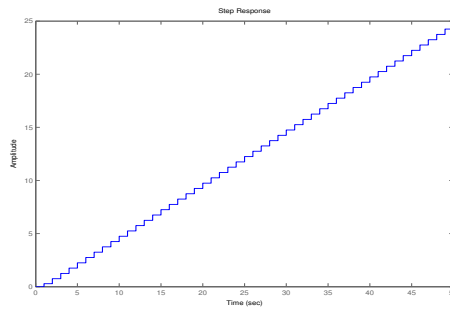


FIGURE H.9 – Réponse indicielle discrète

On peut voir que la réponse indicielle diverge puisque le modèle continu contient un intégrateur. Les instructions `dinitial`, `initial`, `dlsim`, `lsim` permettent de tracer des réponses à des conditions initiales ou à des signaux de commande spécifiés par l'utilisateur.

Il existe les fonctions `dlyap` et `dgram` qui permettent respectivement de résoudre une équation de Liapounov discrète ou équation de Stein (cf. §9.5.5 page 515) et de calculer un grammien discret (cf. §9.6.4.1 page 522), à l'exemple de ce qui peut se faire en continu.

Enfin, un moyen simple de calculer une commande LQ (cf. § 11.2 page 600) à l'aide de MATLAB<sup>©</sup>, ce pour un système discret, est d'utiliser la fonction `dlqr` ou la fonction `lqr`. La syntaxe est la suivante



```
[K,P,v] = dlqr(A,B,C,D,Q,R)
```

ou

```
[K,P,v] = lqr(sys,Q,R)
```

Dans ces syntaxes `dlqr` signifie *discrete linear quadratic regulator*, `sys` représente le système discret à commander, `Q` et `R` sont les matrices de pondération  $Q$  et  $R$  qui interviennent dans le critère quadratique (11.16) page 601, `K` est la matrice de retour d'état  $K$  dont l'expression est donnée par (11.23) page 604, `P` est la matrice  $P$ , définie positive, solution de l'équation de Riccati (11.24) page 604 et `v` est un vecteur qui contient le spectre de  $A_f = A - BK$ .

**Remarque H.6 Attention !** Comme dans le cas continu, la fonction `dlqr` envisage une loi de commande  $u_{k+1} = -Kx_k$ , c'est pourquoi, dans les instructions ci-avant, on évoque le spectre de  $A_f = A - BK$ . En outre, même si cette fonction spécifique aux systèmes discrets est proposée par MATLAB<sup>©</sup>, la fonction `lqr` utilisée dans le cas continu fonctionne aussi dans le cas discret car la nature discrète du procédé est en fait contenue dans la variable `sys`.

**Remarque H.7** À l'instar du cas continu (voir remarque H.5, page 763), l'instruction `dare` permet de résoudre l'équation discrète de Riccati et peut donc être utilisée pour calculer une commande  $LQ$ . Toutefois, il est nécessaire de calculer soi-même le retour d'état, à partir de la solution obtenue et de la matrice de pondération  $R$ , grâce à la formule (11.23) page 604.

**Remarque H.8** Il est à noter que MATLAB<sup>©</sup> propose un outil de simulation avec interface graphique appelé SIMULINK qui permet entre autres de construire des schéma-blocs et de simuler le comportement des modèles associés, MATLAB<sup>©</sup> restant le noyau de calcul.

## H.4. Notes et références

La référence de base pour utiliser MATLAB<sup>©</sup> est bien sûr la documentation du logiciel. Le mieux aujourd'hui, étant donnée l'évolution possible d'un logiciel, est de renvoyer le lecteur à la page internet que lui consacrent les développeurs,

<http://www.mathworks.fr/help/index.html>

et qui est la version constamment actualisée de [1]. De nombreux ouvrages de référence d'Automatique proposent des développements en langage MATLAB<sup>©</sup>. C'est notamment le cas de [2,3,4]. Lors de son apprentissage, en plus des excellents enseignements de Bernard Pradin et Germain Garcia, l'auteur a tiré profit d'un livre en Français assez bien construit et finalement assez original pour l'époque : [5].

1. MATLAB<sup>©</sup> *user's guide : Getting started with MATLAB<sup>©</sup>* - Version 6. The Math Works Inc, 2000.  
<http://www.mathworks.com>  
*Une édition papier de la documentation officielle de MATLAB<sup>©</sup>.*
2. **R. C. Dorf et R. H. Bishop** : *Modern Control Systems*. Neuvième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.  
*La réédition permanente de cet ouvrage en dit long sur sa popularité. Les nombreux exemples constituent une vraie mine d'exercices pour un enseignant.*
3. **G. F. Franklin, J. D. Powell et A. Emami-Naemi** : *Feedback Control of Dynamic Systems*. Quatrième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.  
*Assez riche en exemples et agréable dans la forme. Plutôt didactique.*
4. **K. Ogata** : *Modern Control Engineering* Troisième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.  
*Ouvrage de référence qui semble en avoir inspiré plus d'un. L'auteur a un petit faible pour cette référence dont la première édition date de 1970.*
5. **M. Mokhtari et A. Mesbah** : *Apprendre et maîtriser Matlab*. Springer-Verlag, 1998.  
*Malgré quelques coquilles, un ouvrage intéressant et très didactique, très progressif pour s'initier à MATLAB<sup>©</sup>. Hélas, il concerne des versions un peu anciennes. Il existe sûrement des équivalents aujourd'hui. Sont-ils aussi bons ?*

# Annexe I

## *Biographies*

Sont présentées ici de brèves biographies de deux scientifiques dont les travaux apparaissent comme essentiels aux développements de l'approche temporelle, c'est-à-dire de type « espace d'état » en Automatique.

Bien qu'encore très restreintes, ces biographies sont un peu plus étoffées que celles qui figurent dans le corps du document. L'auteur fait ici le choix, certainement contestable, de mettre en lumière deux savants dont les travaux lui semblent avoir influencé, plus que les autres, l'approche temporelle de l'Automatique, en tout cas la compréhension qu'il en a.

### Sommaire

---

<b>I.1</b>	<b>Alexandre Liapounov</b>	<b>772</b>
I.1.1	Sa vie	772
I.1.2	L'influence de son œuvre	774
<b>I.2</b>	<b>Rudolf Kálmán</b>	<b>777</b>
<b>I.3</b>	<b>Notes et références</b>	<b>782</b>

---

Le premier scientifique retenu pour ces biographies, Alexandre Liapounov, n'a pas à proprement parler contribué à l'élaboration des représentations d'état mais son travail à la charnière des XIX<sup>ème</sup> et XX<sup>ème</sup> siècles fut un réservoir extraordinaire pour les multiples développements dans l'espace d'état. Ce réservoir

n'est sans doute pas encore épuisé aujourd'hui.

Le second, Rudolf Kálmán, est quant à lui celui qui peut sans doute être considéré comme le père de la représentation d'état linéaire. Il a su non seulement en jeter les idées fondamentales mais aussi contribuer de manière intensive aux développements relatifs aux systèmes linéaires.

## 1.1. Alexandre Liapounov

*Essentiellement d'après un article de P. C. Parks, du Royal Military College of Science (Cranfield, Royaume Uni).*

### 1.1.1. Sa vie



Alexandre Mikhaïlovitch Liapounov naît le 6 juin 1857 à Iaroslav (Empire russe) où son père dirige un lycée. Ce dernier décède en 1868 ce qui contraint, en 1870, Madame Liapounov-Mère, accompagnée de ses trois enfants, à déménager vers la ville de Nizhny-Novgorod (anciennement Gorki). C'est dans cette ville qu'Alexandre suit sa scolarité pour obtenir brillamment l'équivalent du baccalauréat (on lui attribue une médaille d'or). Il étudie alors les mathématiques à l'Université de Saint-Pétersbourg où il s'imprègne des cours du

Professeur Tchebychev<sup>1</sup>. Diplômé en 1880, empochant au passage une nouvelle médaille d'or, il poursuit des études à la faculté de Mécanique. Il y soutient, en 1884, sa thèse sur *la stabilité des formes ellipsoïdales d'états d'équilibre des fluides en rotation* (traduite en Français en 1907).

L'année 1885 est marquée par deux événements : il se marie avec son amie d'enfance et cousine au premier degré, Natalia Rafailovna Sechenova et est nommé

---

1. Pafnouti Lvovitch Tchebychev, mathématicien russe (1821-1894).

*privat-docent*<sup>2</sup> au département de Mécanique de l'Université de Kharkov. Si de 1885 à 1888, Liapounov consacre surtout son temps à l'élaboration de ses enseignements, de 1888 à 1892, il travaille sur son sujet de prédilection : la stabilité du mouvement. Ce travail aboutit en 1892 à sa célèbre thèse<sup>3</sup> : *Problème général de la stabilité du mouvement*. Il défend ainsi, à Moscou, son point de vue en présence de N. I. Joukovski<sup>4</sup>, considéré comme le père de l'aviation russe, ce qui lui vaut un poste de professeur à Kharkov. Cette fameuse thèse fut traduite en Français (en 1907, à l'Université de Toulouse, par E. Davaux<sup>5</sup>) mais seulement un siècle plus tard de Français en Anglais (en 1992, par A. T. Fuller) .

Parallèlement à ses activités principales, Liapounov s'intéresse à l'hydrostatique, à la mécanique céleste, à la théorie des potentiels, aux probabilités (théorème central-limite de Laplace dont il propose une élégante nouvelle démonstration) et il devient membre de la Société Mathématique de Kharkov. En 1901, il entre à l'Académie des sciences de Russie. Suite à la mort de Tchebychev en 1894, Liapounov lui succède en 1902 en tant qu'« Académicien » à l'Université de Saint-Pétersbourg. Il étudie alors le problème des formes d'équilibre *des corps constitués de particules de fluide en rotation sous l'effet d'une attraction gravitationnelle newtonienne*<sup>6</sup> mutuelle. Il démontre par exemple que pour les fluides dits « en forme de poire », les états d'équilibre sont instables, contredisant ainsi une théorie d'astronomie en vogue à l'époque, en particulier un modèle de G. H. Darwin<sup>7</sup>, fils du célèbre naturaliste Charles<sup>8</sup>.

En juin 1917, la famille Liapounov déménage à Odessa, pour raisons de santé. La femme de Liapounov est tuberculeuse et lui-même craint la cécité. Le 31 octobre 1918, son épouse décède. Très affecté par ce drame mais aussi par l'incendie, déclenché par les révolutionnaires bolchéviques, qui ravage la bibliothèque familiale que son grand-père puis son père avaient constituée sur les bords de la Volga, Liapounov, dépressif, se suicide le jour-même à l'aide d'un pistolet. Il ne meurt que trois jours plus tard, le jour des funérailles de son épouse.

---

2. titre universitaire dont l'intitulé est issu de la tradition allemande.

3. Il semblerait que cette thèse soit plus à comparer à ce qui était appelé, auparavant, en France, une thèse d'état.

4. Nikolai Iegorovitch Joukovski, scientifique russe puis soviétique (1847-1921).

5. Édouard Davaux, ingénieur de la marine française.

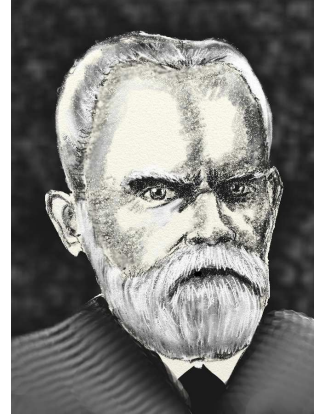
6. du nom de Sir Isaac Newton, philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome britannique (1642 ou 1643-1727).

7. Sir George Howard Darwin, astronome anglais (1845-1912).

8. Charles Darwin, naturaliste anglais (1809-1882).

### 1.1.2. L'influence de son œuvre

Parmi les contributions significatives de Liapounov, on retient surtout sa thèse. On peut citer trois points importants de ce travail : les exposants de Liapounov, la première méthode de Liapounov et la seconde méthode (également dite méthode directe) de Liapounov. En Automatique, c'est surtout la seconde méthode qui tient le haut du pavé. L'application de cette méthode au cas des systèmes linéaires est présentée au paragraphe 5.3.3 page 216 et en annexe F page 709. C'est à Liapounov que l'on doit un principe fondamental : un système peut-être instable par rapport à une mesure et stable par rapport à l'autre. Cette idée peut paraître anodine dans le formalisme des modèles LTI monovariables mais elle clarifie beaucoup d'idées à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle. Parmi les travaux de Liapounov, on peut aussi noter qu'il exprime la stabilité dans le plan de phase (espace d'état) ouvrant ainsi des perspectives à l'approche temporelle. En théorie des systèmes non linéaires, la définition de stabilité la plus souvent invoquée pour les états d'équilibres d'un système, est celle proposée par Liapounov. Il reformule aussi des résultats de Liouville<sup>9</sup> relatifs aux systèmes hamiltoniens<sup>10</sup>.



Comme il a été mentionné ci-avant, le point clef des travaux de Liapounov pour un automaticien est la seconde méthode. Elle s'inspire des contributions de Laplace<sup>11</sup>, Lagrange<sup>12</sup>, Dirichlet<sup>13</sup> et Liouville ou encore de problèmes d'astronomie (le maintien en orbite consiste en un système simplement stable). Elle donne une interprétation énergétique de la stabilité en ce sens que la fonction  $V$  (cf. paragraphe 5.3.3 page 216), dite de Liapounov, est une énergie (au sens mathématique, donc général) qui doit décroître pour assurer la stabilité. Elle permet de comprendre qu'il n'est pas toujours nécessaire, même dans une approche temporelle, de résoudre le système différentiel pour conclure quant à la stabilité.

9. Joseph Liouville, mathématicien français (1809-1882).

10. du nom de Sir William Rowan Hamilton dont une biographie est proposée à la page 138.

11. voir biographie 2.1 page 40.

12. *Giuseppe Lodovico Lagrangia*, Comte de Lagrange, mathématicien, mécanicien et astronome italien naturalisé français (1736-1813).

13. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, mathématicien allemand (1805-1859).

Les conséquences scientifiques de la seconde méthode sont importantes tant en nombre qu'en qualité scientifique. En URSS, elles interviennent surtout avant 1960. Si Liapounov ne propose que très peu d'exemples pratiques, I. G. Malkin<sup>14</sup> et N. G. Chetayev<sup>15</sup> comprennent que la seconde méthode peut être appliquée dans un cadre aéronautique ou militaire. Ils obtiennent, vers 1930, des résultats leur permettant de stabiliser la position angulaire d'une fusée ou d'un obus, résultats qui ne sont pas sans conséquence. De même, A. I. Lur'e<sup>16</sup> et A. M. Letov<sup>17</sup> montrent, respectivement en 1957 et 1961, l'applicabilité de la méthode directe à certains problèmes de commande des modèles non linéaires.

Comme mentionné au paragraphe 3.3 page 74, les Soviétiques parviennent à mettre Spoutnik 1 en orbite en 1957, les travaux de Liapounov, Chetayev, Malkin et autres n'étant pas étrangers à cette réussite (c'est un euphémisme). C'est pourquoi le professeur Solomon Lefschetz<sup>18</sup> décide de créer au USA un groupe de recherche chargé de promouvoir en occident la théorie de Liapounov, groupe parmi lequel figurent J.-P. LaSalle<sup>19</sup>, R. E. Kálmán<sup>20</sup>, J. E. Bertram<sup>21</sup>, R. E. Bellman<sup>22</sup>, J. R. Ragazzini<sup>23</sup>, etc. Dès lors, l'approche temporelle connaît un regain d'intérêt.

En juin 1960, au premier congrès de la fédération internationale d'Automatique (*International Federation of Automatic Control (IFAC)*) de Moscou, Kálmán fait sensation et tout le monde (... ou presque) souhaite la bienvenue aux représentations d'état linéaires. Certes, au début, certains pensent qu'elles n'apportent rien de plus que de simples équations différentielles mais l'utilisation des outils

---

14. Ioel R. Malkin, scientifique soviétique, élève de Chetayev.

15. Nikolai Gurevitch Chetayev, scientifique soviétique, spécialiste de la mécanique (1902-1959).

16. Anatoliy Isakovitch Lur'e, ingénieur et mathématicien appliqué soviétique, spécialiste des systèmes non linéaires (1901-1980).

17. Alexandre Mikhaïlovitch Letov, scientifique soviétique, spécialiste des systèmes non linéaires (1911-1974).

18. Solomon Lefschetz, mathématicien russe d'origine turque (1884-1972) : voir biographie 3.1 page 76.

19. Joseph Pierre (Joe) LaSalle, ingénieur états-unien spécialiste des systèmes dynamiques (1916-1983).

20. voir §I.2 ci-après.

21. l'un des principaux collaborateurs de Kálmán, sans doute impliqué dans sa formalisation de la représentation d'état.

22. voir biographie 3.2 page 3.2.

23. voir biographie 9.1 page 483.

de l'algèbre linéaire va montrer la pertinence de l'outil et engendrer l'« Automatique moderne ». C'est à partir de ce moment que l'on s'intéresse de nouveau au plan de phase (espace d'état) donc aux travaux de Liapounov.

En 1964, P. C. Parks retrouve, dans l'espace d'état, les résultats de Routh-Hurwitz<sup>24</sup>. On applique la seconde méthode de Liapounov aux systèmes linéaires à temps continu donnant naissance à ce que l'on appelle l'équation de Liapounov ( $A'P + PA = Q < 0$ ) et son équivalent en temps discret ( $-P + A'PA = Q < 0$ ) déjà déterminée par Stein en 1952. Elle permet aussi l'établissement de critères de stabilité (même en non linéaire) tels celui de Popov<sup>25</sup> ou celui du cercle (contributions de Popov, Kálmán, Brockett<sup>26</sup>). Initialement, l'application des idées de Liapounov n'avait conduit qu'à des inégalités qui ne pouvaient être efficacement résolues dans la plupart des cas. C'était ce que l'on appelle des inégalités matricielles, dont l'importance a été soulignée plus tard par Willems<sup>27</sup>, ce dès 1971. Ce dernier avait senti qu'elles reviendraient au goût du jour. Et lorsqu'il a été enfin possible de les résoudre numériquement (dès lors qu'elles étaient linéaires comme les inégalités de Liapounov et de Stein), un engouement est né autour de cette approche dite « LMI » (*Linear Matrix Inequalities*). Les auteurs du premier ouvrage de référence sur le sujet considèrent Liapounov comme le « grand-père » (à son insu) de cette approche.

Les autres développements importants, plus ou moins connexes, de la seconde méthode sont nombreux : étude des systèmes dissipatifs, commande optimale et tous les problèmes de type Riccati<sup>28</sup> (commande  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$ , optimisation mixte), problème d'encloisonnement des pôles (équations de Liapounov généralisées (A. G. Mazko<sup>29</sup> en 1980, S. Gutman<sup>30</sup> et E. I. Jury<sup>31</sup> en 1979 et 1981)), un pan entier de la commande robuste, certaines approches d'étude des systèmes non linéaires (techniques de mode de glissement), systèmes à paramètres répartis ou réseaux de neurones, etc.

Encore de nos jours, des conférences sont intégralement dédiées aux applications

24. voir les biographies de Routh et Hurwitz page 214.

25. Vasile Mihai Popov, voir biographie 6.1 page 275.

26. Roger Ware Brockett, théoricien états-unien de la commande (1938-).

27. Jan Camiel Willems, mathématicien belge, théoricien des systèmes (1939-2013).

28. du nom de Jacopo Francesco Riccati, mathématicien et physicien italien (1676-1754).

29. Alexey Grigorjevitch Mazko, mathématicien ukrainien (1955-).

30. Shaul Gutman, ingénieur israélien (1945-).

31. Eliahu Ibrahim Jury (1923-), ingénieur états-unien né à Bagdad, dont la contribution à l'Automatique des systèmes discrets est particulièrement importante.



des travaux de Liapounov (exemple : Irkoutsk, 1995) et susceptibles d'intéresser les mathématiciens, les physiciens, les mécaniciens, les automaticiens et tant d'autres. En juillet 2017, au congrès mondial de l'IFAC à Toulouse, des sessions étaient encore consacrées à son héritage scientifique.

De nombreux hommages lui sont bien sûr régulièrement rendus, surtout dans sa patrie d'origine. Un astéroïde porte son nom, ainsi que des rues, des plaques commémoratives, etc.

Si Liapounov était un scientifique consciencieux, scrupuleux, et passionné voire obsessionnel au point de paraître associal aux yeux de certains, sa famille et ses collègues les plus proches le dépeignaient comme un homme enthousiasmé par la vie sous toutes ses formes, la nature, le jardinage, l'art, etc. C'étaient un génie que d'aucuns situent au niveau des plus grands savants de l'Humanité.

## 1.2. Rudolf Kálmán

*Essentiellement d'après le Centre Historique de IEEE (Institute of Electrical & Electronics Engineers Inc.).*

Rudolf Emil Kálmán est né à Budapest le 19 mai 1930.

Il décide de suivre les traces de son père, ingénieur électricien. Il émigre aux USA puis obtient son baccalauréat. Il reçoit du MIT (Massachusetts Institute of Technology) son master en génie électrique en 1954. Il quitte le MIT pour continuer ses études à l'Université Columbia où il accède au doctorat es sciences en 1957, sous la direction du professeur John R. Ragazzini<sup>32</sup>. Son sujet de thèse : *Analysis and Synthesis of Linear Systems Operating on Randomly Sampled Data...* donc les systèmes échantillonnés chers à Ragazzini.



---

32. voir biographie 9.1 page 483.

Ses études au MIT et à Colombia démontrent très tôt son intérêt pour la théorie des systèmes et l'Automatique. Ses premières recherches sur la notion de variable d'état sont à la fois très avancées sur le plan mathématique mais également motivées par un vrai souci de résoudre des problèmes pratiques. Son premier article notable date de cette époque : il est publié en 1957.

En 1957 et 1958, Kálmán est employé comme ingénieur dans un laboratoire de recherche d'IBM à Poughkeepsie, état de New York. Pendant cette période, il contribue activement à la recherche dans la conception de lois de commande pour les systèmes échantillonnés, par l'utilisation de critères quadratiques caractérisant les performances de ces derniers. Il exploite aussi la théorie de Liapounov pour l'analyse et la commande des systèmes en général. Il comprend dès cette époque la pertinence de l'outil numérique pour la commande des systèmes à large échelle.

En 1958, Kálmán rejoint le RIAS (Research Institute for Advanced Study), équipe de recherche créée par le professeur Solomon Lefschetz<sup>33</sup> avec comme but, entre autres, de promouvoir davantage la théorie de Liapounov en occident. Il y débute en tant que chercheur en mathématiques et est vite promu Directeur associé de recherche. C'est durant cette période (1958-1964) qu'il réalise ses contributions les plus significatives pour l'Automatique moderne. Ses conférences et publications sont symptomatiques de son incroyable créativité et de sa volonté d'établir une théorie unifiée de l'automatique. L'article où la représentation d'état linéaire est rigoureusement introduite fait sensation lors de sa présentation au premier congrès IFAC (International Federation of Automatic Control) à Moscou en 1960. Non seulement il y présente la représentation d'état linéaire mais il y introduit aussi des concepts aujourd'hui essentiels tels que la commandabilité et l'observabilité. Il développera par la suite ces concepts permettant ainsi de consolider les bases théoriques de l'ingénierie des systèmes. Il clarifie notamment le lien entre fonctions de transfert et représentation d'état et développe la théorie de la réalisation. Il comprend l'intérêt de sa représentation d'état pour les systèmes variant dans le temps, systèmes pour lesquels le modèle fréquentiel est mal adapté. Il unifie les outils d'analyse et de conception de lois commande des systèmes minimisant un critère quadratique et ce, en temps continu comme en temps discret. Il réalise un travail crucial pour l'exploitation des résultats du mathématicien Constantin Carathéodory (1873-1950) en

---

33. Solomon Lefschetz, mathématicien russe d'origine turque (1884-1972) : voir biographie 3.1 page 76.

commande optimale, pour la clarification des connexions entre le principe du maximum de L. S. Pontryaguine<sup>34</sup> et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman<sup>35</sup>, de même que pour le calcul variationnel en général. C'est Kálmán qui fournit le premier la solution du problème LQ sur un horizon de temps quelconque<sup>36</sup>. C'est donc lui qui met en évidence l'utilité de l'équation de Riccati. Non seulement sa recherche met l'accent sur les aspects de mathématiques générales mais elle inclut aussi des aspects très pratiques comme la prise en compte d'un ordonnateur comme partie intégrante du système pour implanter la loi de commande. Kálmán est à la fois un mathématicien et un ingénieur : bien qu'intéressé par la technologie et les aspects pratiques de la discipline, il voit les systèmes comme des objets mathématiques. Pour lui, la théorie des systèmes parle de ces objets mathématiques. Il introduit par exemple la théorie des anneaux, celle des modules ou encore la géométrie algébrique dans la théorie des systèmes linéaires. Il contribue grandement en cela à un changement de regard sur l'Automatique. À cet égard, il est perçu comme le père de l'Automatique moderne qu'il a pour ainsi dire « façonné ».

C'est aussi au cours de son séjour au sein du RIAS que Kálmán développe ce qui est peut-être sa contribution la plus célèbre, le « filtre de Kálmán » (grossièrement, ce filtre permet de reconstruire, d'observer l'état du système en présence de bruit). Il obtient des résultats relatifs à la version discrète de ce problème vers la fin de 1958 et au début de 1959. Sa solution au problème discret l'amène naturellement à une solution en temps continu qu'il développe en 1960-61 en collaboration avec R. S. Bucy<sup>37</sup>, inventant le « filtre de Kálmán-Bucy ». Il transpose ainsi dans l'espace d'état des travaux fondamentaux de N. Wiener<sup>38</sup>, A. N. Kolmogorov,<sup>39</sup> H. W. Bode<sup>40</sup>, C. E. Shannon<sup>41</sup>, et bien d'autres. D'un point de vue strictement théorique, ce filtre établit un lien entre filtrage et commande et met en lumière la dualité des deux problèmes. Plus précisément, l'établissement d'un filtre de Kálmán ou de Kálmán-Bucy constitue un problème dual de celui

---

34. Lev Semionovitch Pontryaguine, mathématicien soviétique (1908-1988).

35. du nom de Sir William Rowan Hamilton dont une biographie est proposée à la page 138, de Carl Gustav Jakob Jacobi, mathématicien allemand (1804-1851) et de Richard Ernest Bellman dont une biographie est proposée à la page 77.

36. Le chapitre 11 ne fait qu'en donner une version très édulcorée pour un horizon de temps infini.

37. Richard Snowden Bucy, ingénieur en aérospatial états-unien (1935-).

38. Norbert Wiener, mathématicien états-unien (1894-1964).

39. Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov, mathématicien soviétique (1903-1987).

40. cf. biographie 2.5 page 44.

41. cf. biographie 9.2 page 492.

de la synthèse d'une commande LQ (cf. chapitre 11). L'association des deux solutions obtenues de façon indépendante constitue une solution au problème *linéaire quadratique gaussien (LQG)*. Le filtre de Kálmán ou de Kálmán-Bucy et la commande LQG, ainsi que leurs extensions aux problèmes non linéaires, trouvent un nombre incalculable d'applications pratiques et le filtre est peut-être l'outil le plus appliqué de l'Automatique moderne. Il est en effet utilisé en navigation spatiale (par exemple, sur les engins « Apollo ») ou sur les radars. On peut encore citer, par exemple, les pilotes automatiques, le GPS, la vision par ordinateur, la prévision météorologique, la commande des moteurs, la surveillance médicale, la gestion de trafic, la gestion des titres financiers, le traitement des données sismiques, le génie des procédés, l'instrumentation des centrales électriques, la commande des sous-marins, des aéronefs (civils ou militaires), des missiles de croisière, etc. On s'essoufflerait à tout citer. La popularité de ce résultat est aussi due à la possible prise en compte des aspects numériques tant dans la conception que dans l'implantation elle-même. On peut mesurer cette popularité par une recherche sur Internet. En tapant « *Kalman Filter* » sur *Google Scholar* en 2017, on obtenait environ 608 000 références. Ce nombre grimpeait à environ 1 410 000 références tous sites confondus.

En 1964, Kálmán vient travailler au département de génie électrique, mécanique et recherche opérationnelle de l'Université de Stanford. Il s'y intéresse à la théorie des réalisations et la théorie algébrique des systèmes. Une fois encore, sa contribution est significative et il ouvre de nouvelles perspectives de recherche.

En 1971, Kálmán est nommé *graduate research professor* de l'Université de Floride à Gainesville. Il crée le Centre de Théorie Mathématique des Systèmes et en prend la direction. Ses activités de recherche et d'enseignement sont liées aux départements de génie électrique, de mathématiques et d'ingénierie pour l'industrie. Il intervient aussi comme consultant en recherche pour l'École des Mines de Paris.

Kálmán ne modifie pas seulement la vision scientifique de l'Automatique moderne mais il contribue aussi fortement à promouvoir l'application des théories associées. Sa personnalité charismatique et ses nombreux cours, exposés, tant à l'Université que dans le monde industriel, attirent un nombre incalculable de chercheurs qui sont grandement influencés par sa conception de l'Automatique. Il agit comme un catalyseur pour un échange international d'idées. Son nom est associé à juste titre au fameux *lemme de Kálmán-Yakoubovitch-Popov* ou *lemme*

de Kálmán-Yakoubovitch-Popov-Anderson<sup>42</sup> qui génère encore aujourd'hui quantité de contributions en Automatique.

Kálmán publie plus de cinquante articles techniques en revues de haut niveau. En 1962, il est élu « jeune éminent chercheur » de l'année par l'Académie des sciences du Maryland. Il devient membre IEEE<sup>43</sup> en 1964 et est par ailleurs membre de plusieurs autres associations professionnelles ou savantes. Il devient aussi membre de l'Académie nationale des sciences des États-Unis, de l'Académie américaine de l'ingénierie, de l'Académie américaine des arts et des sciences, des Académies des sciences russe, française et hongroise. De nombreux titres de docteurs *honoris causa* lui sont attribués par des universités étrangères. Il est co-auteur du fameux ouvrage *Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill, 1969*. Il reçoit la médaille d'honneur IEEE en 1974 pour ses « travaux pionniers sur les méthodes modernes en théorie des systèmes, incluant les concepts de commandabilité, observabilité, filtrage et structures algébriques ». En 2009, il reçoit des mains de Barack Obama<sup>44</sup> la médaille nationale de la science pour ses travaux sur le filtre qui porte son nom, qualifié de « découverte de nature à changer l'Histoire ».

Rudolf Kálmán s'éteint le 2 juillet 2016 à l'âge de 86 ans. Une session spéciale d'exposés lui a été dédiée au congrès international IFAC de 2017 à Toulouse. L'histoire ne s'arrête sans doute pas là...

---

42. une synthèse de divers travaux de Rudolf Emil Kálmán, de Vladimir Andreevitch Yakoubovitch, théoricien russe de l'Automatique (1926-2012), de Vasile Mihai Popov (voir biographie 6.1 275), plus tard unifié dans une formulation unique par Brian David Outram Anseron, mathématicien australien spécialiste de l'Automatique et du génie électrique (1941-).

43. *The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.*

44. Barack Hussein Obama (1961-), 44<sup>ème</sup> président des États-Unis, plus fin, plus élégant, et ayant beaucoup plus de classe que son successeur.

### I.3. Notes et références

Un article de P. C. Parks retrace l'œuvre de A. M. Liapounov [1]. Il est rappelé que l'essentiel de son travail peut être consulté dans [6] que l'on peut trouver sur internet en libre accès. On peut trouver des informations très intéressantes, sur sa vie et son œuvre, sur internet et dans de nombreux articles tels que [2,3]. L'article de J. C. Willems sur l'importance des LMI est [4]. Le livre de référence sur les LMI mentionné plus avant est [5].

Le visage d'A. M. Liapounov figure sur un timbre postal de l'URSS. L'auteur n'est pas sûr qu'il en eût été fier.

La biographie de R. E. Kálmán peut être consultée sur la page internet

[http://www.ieeeeghn.org/wiki/index.php/Rudolf\\_E.\\_Kalman](http://www.ieeeeghn.org/wiki/index.php/Rudolf_E._Kalman)

ou encore

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Kalman.html>

Parmi ses principales contributions, [7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19] peuvent être citées, en particulier [10] qui introduit la représentation d'état linéaire au premier congrès mondial IFAC. Mais les plus célèbres sont peut-être [20,21] qui introduisent le filtre de Kálmán, respectivement en version discrète et continue. On peut y ajouter le « fameux ouvrage » mentionné plus avant : [22].

Un certain nombre de communications présentées en session spéciale au congrès international IFAC de 2017 à Toulouse ont été utiles à la rédaction de cette biographie de Rudolf Kálmán, à savoir [23,24,25,26,27].

1. **P. C. Parks** : A. M. Liapounov's stability theory - 100 years on. *IMA Journal of Mathematical Control Information*, 9, p. 275-303, 1992.  
*Biographie et œuvre résumées du génie russe.*
2. **P. Shcherbakov** : Alexander Mikailovitch Lyapunov : On the centenary of his doctoral dissertation on stability of motion. *Automatica*, 28, p. 865-871, 1992.  
*Un peu de concurrence à l'article précédent.*
3. **N. A. Pakshina** : Alexandr Lyapunov : remembered by his contemporaries. *Proc. 20th World IFAC Congress*, Toulouse, juillet 2017.

*Liapounov, sa vie, un tout petit peu son œuvre, et surtout des témoignages de sa famille et ses collègues.*

4. **J. C. Willems** : Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6), p. 621-634, 1971.

*Un des articles les plus denses en informations essentielles que l'auteur ait pu lire.*

5. **S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron et V. Balakrishnan** : *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Editions, volume 15 de la série "SIAM Studies in Applied Mathematics", USA, 1994.

*Ouvrage ayant popularisé la notion de LMI dans la communauté automatique.*

6. **A. M. Liapounov** : *Problème général de stabilité du mouvement*. Annales de la faculté de sciences de Toulouse, vol 9. p.203-474, 197. Traduit du texte original russe, publié dans Comm. Soc. Math., Kharkov, 1892. *Une véritable mine d'idées à la fois simples mais très fortes, très puissantes, qui inspirèrent et inspirent encore de très nombreux automaticiens mais aussi bien des chercheurs d'autres disciplines scientifiques. C'est essentiellement sa « seconde méthode » ou « méthode directe » qui génère (toujours) de nombreux travaux sur la stabilité des systèmes.*

7. **R. E. Kálmán** : *Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear control automatic control*. *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 79, p. 553-563, 1957.

*Premier article notable de Kálmán.*

8. **R. E. Kálmán and J. E. Bertram** : Control System Analysis and Design via the "second method" of Lyapunov I. Continuous-time Systems. *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 82(2), p. 371-393, 1960.

*Premier article expliquant l'intérêt de la seconde méthode de Lyapunov pour l'étude des systèmes continus.*

9. **R. E. Kálmán and J. E. Bertram** : Control System Analysis and Design via the "second method" of Lyapunov II. Discrete-time Systems. *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 82(2), p. 394-400, 1960.

*La suite du précédent article mais pour l'étude des systèmes discrets.*

10. **R. E. Kálmán** : On the General Theory of Control Systems. *Proc. First World IFAC Congress*, Moscou, 1960.  
*Probablement l'article fondateur sur la représentation d'état linéaire.*
11. **R. E. Kálmán** : Mathematical Description of Linear Dynamical Systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics (Series A Control)*, 1(2), p.152-192, 1963.  
*En complément du précédent, un article de revue, avec peut-être un peu plus de recul (si c'est possible!).*
12. **B. L. Ho et R. E. Kálmán** : Effective construction of linear state-variable models from input/output functions. *Automatisierungstechnik*, vol. 14, 1966.  
*Passage de la fonction de transfert à la représentation d'état.*
13. **R. E. Kálmán** : Canonical Structure of Linear Dynamical Systems. *Proceedings of the National Academy of Science*, 48(4), p.596-600, USA, 1962.  
*Parmi les premières contributions de Kálmán sur les propriétés du modèle d'état.*
14. **R. E. Kálmán, H. C. Ho et K. S. Narendra** : Controllability of Linear Dynamic Systems. *Contributions to Differential Equations*, 1(2), p.189-213, 1963.  
*Kálmán expliquant encore la commandabilité avec ses collègues .*
15. **R. E. Kálmán** : Irreducible Realizations and the Degrees of a Rational Matrix. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 13(2) : p.520-544, 1965.  
*Sur la minimalité des réalisations.*
16. **R. E. Kálmán** : Algebraic Structure of Finite Dimensional Dynamical Systems. *Proceedings of the National Academy of Science*, 54, p.1503-1508, USA, 1965.  
*Une contribution de plus de Kálmán sur la minimalité et les notions s'y rapportant.*
17. **R. E. Kálmán** : *Lectures on Controllability and Observability*. CIEM, Bologne, juillet 1968. NASA technical documents. Téléchargeable à l'adresse : [https://archive.org/details/nasa\\_techdoc\\_19700079309](https://archive.org/details/nasa_techdoc_19700079309)  
*Une série de conférences en Italie sur la commandabilité et l'observabilité par Kálmán.*
18. **R. E. Kalman** : Contributions to the Theory of Optimal Control *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 5, p. 102-119, 1960.  
*Article de Kalman souvent cité, relatif à la commande optimale.*



19. **R. E. Kálmán** : When Is a Linear Control System Optimal? *Transactions of the ASME (Journal of Basic Engineering)*, 86D(1), p. 51-60, 1964.  
*Tout est dans le titre!*
20. **R. E. Kálmán** : A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems *Transactions of the ASME (Journal of Basic Engineering)* 82 : p. 35-45, 1960.  
*Introduction du filtre de Kálmán (donc en version discrète).*
21. **R. E. Kálmán and R. S. Bucy** : New Results in Linear Filtering and Prediction Theory *Transactions of the ASME (Journal of Basic Engineering)* 83 : p. 95-107, 1961.  
*Introduction du filtre de Kálmán-Bucy (donc en version continue).*
22. **R. E. Kálmán, P. L. Falb and M. A. Arbib** : *Topics in Mathematical System Theory*. Pure & Applied Mathematics Series, McGraw-Hill Education, 1969.  
*Un livre de Kálmán qui a eu son heure de gloire.*
23. **V. Kučera** : Rudolf E. Kalman and the Riccati Equation *Proc. 20th World IFAC Congress*, Toulouse, juillet 2017.  
*Vladimír Kučera explique comment Kálmán a compris l'importance de l'équation de Riccati et ce qu'il a apporté à la commande LQ.*
24. **V. Kučera** : Rudolf E. Kalman and the Riccati Equation : Life and Works *Proc. 20th World IFAC Congress*, Toulouse, juillet 2017.  
*Vladimír Kučera, toujours, qui propose une brève biographie de Kálmán, sa vie, son œuvre.*
25. **Y. Yamamoto** : The influence of R. E. Kalman - State Space Theory, Realization, and Sampled-data Systems *Proc. 20th World IFAC Congress*, Toulouse, juillet 2017.  
*Un petit point sur quelques apports fondamentaux de Kálmán.*
26. **P. K. Khargonekar** : Professor R. E. Kalman - Reflections on His Way of Thinking *Proc. 20th World IFAC Congress*, Toulouse, juillet 2017.  
*Un ancien doctorant de Kálmán se souvient de la façon dont la pensée de ce dernier l'a influencé.*
27. **T. T. Georgiou** : Rudolf E. Kalman's quest for algebraic characterizations of positivity. *Proc. 20th World IFAC Congress*, Toulouse, juillet 2017.  
*Un autre ancien doctorant de Kálmán propose un bref rappel de quelques contributions significatives de ce dernier, et évoque ses questionnements.*



# Références bibliographiques

Dans cette courte bibliographie, l'auteur se contente de sélectionner parmi les ouvrages déjà mentionnés dans le corps du document ceux dont il a vraiment tiré grand profit pour écrire ce cours. Il est rappelé que chaque chapitre comporte sa propre bibliographie.

1. **T. Kailath** : *Linear Systems*. Prentice Hall, 1979.  
*Un vrai ouvrage de référence, pas très facile à aborder par son style et sa forme mais redoutablement complet. Pratiquement une « bible ».*
2. **R. C. Dorf et R. H. Bishop** : *Modern Control Systems*. Neuvième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.  
*La réédition permanente de cet ouvrage en dit long sur sa popularité. Les nombreux exemples constituent une vraie mine d'exercices pour un enseignant.*
3. **G. F. Franklin, J. D. Powell et A. Emami-Naemi** : *Feedback Control of Dynamic Systems*. Quatrième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.  
*Assez riche en exemples et agréable dans la forme. Plutôt didactique.*
4. **K. Ogata** : *Modern Control Engineering*. Troisième édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.  
*Ouvrage de référence qui semble en avoir inspiré plus d'un. L'auteur a un petit faible pour cette référence dont la première édition date de 1970.*
5. **K. Ogata** : *Discrete-time control systems- Second edition* Prentice Hall, 1995.  
*Ouvrage très complet spécifiquement dédié à l'analyse et la commande des systèmes discrets.*

- 
6. **K. Ogata** : *System dynamics* Prentice Hall, 1994.  
Un bon ouvrage un peu redondant avec [4] mais qui le complémente tout de même bien en termes d'exemples. Il existe des rééditions plus récentes.
  7. **P. J. Antsaklis et A. N. Michel** : *Linear Systems*. McGraw-Hill, 1997.  
Fanchement pas le plus accessible mais très rigoureux mathématiquement. Très bien mais déconseillé pour une première approche.
  8. **B. Friedland** : *Control System Design - An Introduction to State-Space Methods*. Dover, Mineola, New York, 1985.  
Cet ouvrage se concentre uniquement sur la représentation d'état et de ce fait, vu sa taille importante, traite bien plus d'aspects que beaucoup d'autres. Les exemples y sont nombreux et bien choisis. Il est parfois un peu dense. Son prix est très raisonnable.
  9. **B. Pradin et G. Garcia** : *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Presses Universitaires du Mirail, 2010.  
Que dire de cet ouvrage si ce n'est que c'est celui qu'il faut acheter ! Incontestablement le meilleur rapport qualité/prix.
  10. **B. Pradin** : *Polycopié de cours d'Automatique* : « *Automatique : Notes de cours - Exercices* ». INSA de Toulouse, 3ème année spécialité AEI. 1992.  
Là où l'essentiel est mieux expliqué que partout ailleurs ! si ce n'est dans [9].
  11. **B. Pradin** : *Notes de cours d'Automatique*. INSA de Toulouse, 3ème année spécialité II, 1998.  
Une version allégée de [10].
  12. **Ph. de Larminat** : *Automatique*. Éditions Hermes, 2000.  
Le point de vue de Ph. de Larminat est toujours intéressant car de nombreux commentaires accompagnent la rigueur du formalisme mathématique et l'auteur, qui ne cède pas aux phénomènes de mode, garde toujours un sens critique.
  13. **B. Pradin** : *Polycopié de cours d'Automatique* : « *Automatique linéaire - Systèmes à temps discret* » INSA de Toulouse, 4ème année spécialité AEI. Édition 1995.  
Notes de cours particulièrement didactiques pour s'initier aux joies des systèmes linéaires discrets.

# Index

L'index qui suit est complet... bien trop complet. De surcroît, il n'est n'est pas très sérieux, le lecteur s'en rendra compte. Y figurent des items correspondant à des concepts expliqués dans le corps du document comme des items correspondant à des notions vaguement évoquées. Certaines entrées renvoient à des personnages, bien réels ou fictifs, célèbres... ou pas. La célébrité est très subjective et là encore, le lecteur jugera de ce qui relève du sérieux et de la fantaisie. De toute façon, même si cet index peut aider, la table des matières est bien suffisante pour prendre la mesure du contenu de l'ouvrage.



# Index

## A

- AACC  
*American Automatic Control  
Council* ..... 483
- Abraracourcix ..... 214
- Académie américaine  
de l'ingénierie ..... 781  
des arts et des sciences ..... 781
- Académie des sciences  
de Russie ..... 773  
du Maryland ..... 781  
française ..... 781  
hongroise ..... 781  
russe ..... 781
- Académie nationale des sciences  
des États-Unis ..... 781
- Ackermann  
Formule d' ..... 548, 687  
Jürgen E. .... 307, 548, 690, 762
- Actionneur ..... 7, 328, 389
- Adams  
John Couch ..... 230  
Prix ..... 230
- ADAPTECH®
- Maquette d'hélicoptère d' ... 125,  
333, 427, 606
- Addition  
de matrices ..... 639, 741
- Adjointe  
Matrice ..... 650
- Aérostat ..... 109, 332
- Affine  
Système ..... 6
- Airy  
Georges Biddell ..... 56, 229  
Hilda ..... 230
- Al-Jazarī  
Badī` az-Zaman Abū al-`Iz Ibn  
Ismā`īl ibn al-Razāz ..... 20
- Alambix ..... 214
- Alégia  
Bataille d' ..... 214, 589
- Alembert  
Jean le Rond d' ..... 40
- Alésia  
Bataille d' ..... 214, 589
- Algèbre  
linéaire ..... 635
- Algorithme  
de Bass-Gura . 305, 332, 386, 425,  
530, 548, 762  
de la commande LQ ..... 600  
de Luenberger ..... 378

de placement de pôles.....304  
 Amortissement  
   Coefficient d' 39, 47, 52, 211, 575,  
   677  
 Amortisseur  
   rhéologique actif..... 112  
 Amplificateur opérationnel (AOP)..22,  
   42, 117, 244  
 Amplitude.....184  
 Analogique  
   Signal..... 466, 488  
 Analyse  
   mathématique ..... 635  
   robuste ..... 627  
 Anderson  
   Brian David Outram .... 275, 781  
 Apollo  
   Programme.....75, 457, 780  
 Application linéaire.....636  
 Approche  
   externe ..... 209  
   fréquentielle.....209  
   interne.....209  
   temporelle ..... 209  
 Approximation  
   d'Euler arrière (implicite) .... 528  
   d'Euler avant (explicite) .... 528  
   de Tustin..... 528  
   linéaire ..... 33, 71, 124, 140, 151  
 Arzelier  
   Denis ..... 59, 620  
 ASP  
   *Automatic Synthesis Program* 330  
 Asservissement .....8, 11  
   de position.....567  
 Athans  
   Michael Athanassiades ..... 483  
 Atteignabilité.....239, 697  
 Atteignable

État ..... 239  
 Auto-conjugé  
   Ensemble ..... 424  
   Spectre ..... 424  
 Autonome  
   Système ..... 206  
 Avance  
   Théorème de l' .....705

**B**

Banou Moussa  
   Frères..... 20  
 Base  
   Changement de ..... 89  
 Base canonique  
   d'observation.....378, 386  
   de commande ..302, 311, 335, 584  
 Bass  
   Robert W. 305, 329, 363, 530, 762  
 Bass-Gura  
   Algorithme de 305, 318, 332, 386,  
   425, 530, 548, 584, 762  
   Formule de....305, 330, 332, 338,  
   349, 388, 435, 548, 762  
 Belevitch  
   Vitold ..... 251, 276, 524, 715  
 Bell  
   Laboratoires .. 22, 42–44, 58, 276,  
   493, 558  
 Bellman  
   Richard Ernest ... xi, 75, 77, 161,  
   775, 779  
 Bergen  
   Arthur R.....290  
 Berkeley  
   Université de.....275



Bernouilli	
Jacques et Jean.....	ix
Nicolas .....	106
Bertram	
Jack E.....	xi, 75, 161, 775
Biais de convergence.....	415
Bien posé	
de l'interconnexion.....	97
Big Buck Bunny.....	103
Bille	
sur un rail.....	114, 337, 429
Binaire	
Code .....	489
Binôme de Newton.....	507
Bissel	
Christopher C.....	558
Black	
Diagramme de.....	38, 184, 759
Formule de.....	42
Harold Stephen . . .	x, 22, 42, 58, 74
Lieu de.....	38, 184, 759
Blocage.....	476, 489
Bloqueur	
d'ordre zéro . . .	475, 476, 498, 536,
607, 765	
Bode	
Diagramme de.....	38, 184, 759
Hendrik Wade . . .	x, 44, 58, 74, 759,
779	
Lieu de.....	184
Bombe A.....	483
Boole	
Algèbre de.....	492
Bosch	
Jérôme <i>alias</i> Jheronimus van Aken	
xv	
Bosche	
Jérôme.....	xv
Bouclage .....	6
Boucle	
automatique.....	8, 14, 16
fermée.....	8, 16
manuelle.....	8, 13, 15
Notion de.....	6
ouverte.....	8, 14
Boulton	
Matthew.....	21
Bowie	
David.....	590
Boyd	
Stephen.....	484
Bramah	
Joseph.....	20
Brigham	
Université de.....	330
Brockett	
Roger Ware .....	700, 776
Bromwich	
Thomas John l'Anson.....	57
Brooklyn College.....	77
Bruit	
gaussien .....	628
Bucarest	
Institut polytechnique de.....	275
Bucy	
Richard Snowden . . .	330, 457, 628,
779	
Burgat	
Christian.....	59
<b>C</b>	
Calcul	
de $A^k$ .....	506
de $e^{At}$ .....	172
matriciel.....	635

opérationnel.....	39, 41	Système .....	33, 37
Calculateur .....	8	Système strictement ...	33, 37, 80
Californie Sud		Causale	
Université de.....	77	Fonction .....	34, 704
Cambridge .....	214	Cayley	
Université de.....	230	Arthur	91, 173, 520, 651, 688, 730
CAN		Cayley-Hamilton	
Convertisseur analogique		Méthode de .....	176, 185, 241
numérique.....	489, 492	Théorème de... ..	91, 173, 176, 520,
Canonique		651, 688, 730	
Forme (...) d'une fonction de trans-		Cellule RC .....	182
fert de deuxième ordre ..	575	Centre de Théorie Mathématique des	
Canonique d'observation		Systèmes .....	780
Base .....	378, 386	César	
Réalisation.....	378	Jules ( <i>Caïus Julius Caesar</i> )..	558
Canonique de commande		Chaîne directe .....	260, 310, 582
Base .....	302	Chaleur	
Réalisation.....	302	Quantité de.....	120
Capacité calorifique.....	119	spécifique .....	150
Capteur .....	7, 371, 419	Transfert de .....	119
à effet Hall.....	566	Champ magnétique.....	565
Commande sans.....	421, 429	<i>Changsha Maglev Express</i> .....	589
Caractéristique		Chasse d'eau .....	20
Équation .....	256, 651	Chasseur .....	101
Polynôme .. 88, 91, 173, 176, 212,		alcoolisé .....	101
302, 651, 688, 730		Chetayev	
Polynôme (...) en $z$ .....	485, 487	Nikolaï Gurevitch .....	75, 775
statique .....	29, 30	Chipart	
statique de transfert.....	29, 30	M. H.....	211, 231
Carson		Cholesky	
John Renshaw.....	22, 57	André Louis (dit René)..	598, 668
Carson-Laplace		Décomposition de .....	598, 668
Transformation de .....	34	Factorisation de .....	598, 668
Cascade		Chouaib	
Modèles en .....	257	Ibrahim .....	681, 684
Causal		Cinétique	
Modèle.....	87	Énergie .....	138
Modèle non .....	87	Circuit	
Signal.....	34, 704	RC .....	182

RLC.....	28, 38, 78	Commande	
Clark		Énergie de .....	328
Université.....	76	Entrées de .....	2
Classe		$\mathcal{H}_2$ .....	627, 776
d'un système bouclé.....	310	$\mathcal{H}_\infty$ .....	627
Clepsydre .....	20	linéaire quadratique (LQ) ...	595,
CNA		606, 627, 718, 763	
Convertisseur numérique		linéaire quadratique	
analogique.....	489, 492	gaussienne(LQG).....	628
Code binaire .....	489	Loi de.....	8
Coefficient d'amortissement....	47, 52,	LQ (en discret) .....	600
211, 575, 677		non linéaire .....	595
Cofacteur		numérique .....	527
d'une matrice .....	650	optimale .....	593, 627
Cohn		robuste.....	417, 627, 776
Arthur .....	74, 515, 559	sans capteur .....	421, 429
Colorado		stochastique .....	628
Université du .....	330	Compagne	
Columbia		Forme .....	84, 575, 751
Université.....	483, 777	Matrice .....	84, 751
Combinaison		Réalisation .84, 486, 487, 575, 751	
(en logique combinatoire) ...	507	Compagne horizontale	
Commandabilité...237, 238, 240, 301,		Forme..84, 90, 302, 575, 694, 751	
322, 532, 584, 697, 724, 760		Matrice .....	84, 751
en discret .....	519	Réalisation .....	84, 90, 575, 751
Grammien de..248, 718, 725, 760		Compagne verticale	
en discret .....	522	Forme .....	84, 91, 379
Grammien transitoire de .....	724	Matrice .....	84
Indice de .....	264	Réalisation .....	84, 91, 379
Matrice de (...) de Kálmán ..	241,	Compensateur.....	422
305, 520, 546, 584, 689, 697,		dynamique.....	422
724, 760		Compensation de pôle.....	260
Rang de .....	264	Complément de Schur .....	534
Commandable		Complément orthogonal .....	658, 745
État .....	239	Compression	
Mode .....	246	d'information .....	493
Modèle .....	239	Conditions initiales .....	168
Paire de matrices ..	240, 600, 688,	Conjugaison .....	637, 737
694		Consigne	

Signal de.....17

Constante de temps.....52, 55

Continu

Signal.....3, 465, 493

Signal à temps.....3

Système.....4

Système à temps.....4

Continu(s)

Signal à événements.....3

Système à événements.....3

Contre-réaction.....6

Modèles en.....259

négative.....22, 42

CONTROL TOOLBOX.....735

Contrôleur.....422, 488

discret.....489

dynamique.....422

numérique.....489

Convergence

Biais de.....415

Erreur de.....413

Conversion

Quantum de.....476, 490

Convertisseur

analogique numérique (CAN)...4

numérique analogique (CNA)...4

Convexe

Problème.....599

Convolution

Produit de.....36

Produit de (...) en discret....705

Correcteur.....8, 422

dynamique.....422

Couplage

entrées/sorties.....627

modes/commandes.....679

modes/consignes.....680

modes/sorties.....678

Créationnisme.....331

Critère

d'observabilité de Kálmán...243, 521, 698

de commandabilité de Kálmán240, 520, 697

de Hurwitz...211, 213, 221, 230, 515, 558

de Jury (non détaillé)...483, 515

de Kálmán...240, 290, 520, 524, 576, 584, 717, 726, 729, 760

de Liénard-Chipart...211, 231

de Nyquist.....43

de Popov.....275

de Routh.....211, 230, 515, 558

de Routh-Hurwitz .211, 230, 515, 558

de Schur-Cohn.....515, 559

de stabilité de Schur...211, 231

de Stein.....541

de Sylvester.....554, 669

des racines.....206

en discret.....512

quadratique.....595, 601

Critique

Point.....599, 604

Ctesibios d'Alexandrie.....20

Cuve

Niveau dans une....123, 220, 537

D

Daafouz

Jamal.....63

Darwin

Charles.....331, 773

Sir George Howard.....773

Darwinisme.....331

Davaux	
Édouard .....	773
Décalage fréquentiel	
Théorème du .....	35
Décomposition	
de Cholesky .....	598, 668
de Kálmán ....	263, 324, 525, 534
en valeurs singulières ....	665, 746
Définie négative	
Fonction .....	667
Matrice .....	217, 668
Définie positive	
Fonction .....	667
Matrice .....	217, 668, 746
Définition en signe .....	668, 746
Demi-plan	
gauche ouvert .....	209, 710
Dépassement	
Premier (...) absolu .....	580
Premier (...) relatif .....	580
Déphasage .....	184
harmonique .....	183
Dérivateur .....	528
Dérivation .....	35
Théorème de la .....	35
Descartes	
René .....	230
Descripteur	
Modèle .....	87
Système .....	628
Desoer	
Charles A. ....	484
Déteçtabilité	
en discret .....	531
Déteçtabilité	
en continu .....	321
Déteçtable	
Paire de matrices (...) au sens de Hurwitz .....	327, 600
Paire de matrices (...) au sens de Schur .....	531
Déterminant	
d'une matrice carrée .....	646, 666, 740
Développement de Taylor ....	151, 571
Diagnostic .....	420
Diagonale	
Matrice .....	224, 638
Réalisation .....	81, 91, 486, 487
Réalisation quasi [...] de Jordan .....	81, 91
Diagonalisation	
d'une matrice .....	660
Diagramme	
de Black .....	184
de Bode .....	184
de Nyquist .....	184
Différentielle	
Équation .....	256
Dimension	
d'une matrice carrée .....	638
Dirac	
Impulsion de ....	38, 310, 472, 490
Paul Adrien Maurice .....	38, 472
Peigne de .....	473
Dirichlet	
Johann Peter Gustav Lejeune .....	774
Discretisé	
Signal .....	3
Discret	
Modèle .....	463, 764
Signal .....	3, 465
Signal à temps .....	3
Système .....	4, 463, 764
Système à temps .....	4
Système linéaire .....	479
Discret(s)	
Signal à événements .....	3
Système à événements .....	3

<i>Discrete linear quadratic regulator</i>	769
Discrétisation	468, 493
Discrétisé	
Signal	468, 493
Disque	
unitaire ouvert	514, 711
Disque dur	121
Division polynomiale	177
Dorato	
Peter	484
Douche	10, 14
Drebbel	
Cornelis Jacobszoon	21
Duales	
Notions	321, 521
Dualité	321, 419
commandabilité-observabilité	245, 521
Dynamique	
Équation	70
Matrice	72
Principe (ou Relation) fondamental(e) de la	114, 432
Retour (...) de sortie	372
<b>E</b>	
Écart	
de poursuite	317
de reconstruction	374
Échantillon	468
Échantillonnage	468, 493, 607, 764
fictif	475
Formule d'	503
impulsionnel	468
idéal	472, 482
Période d'	468
Échantillonné	
Modèle	498
Signal	3, 468, 493
Système	487, 764
Échantillonneur	
idéal	472
Échelon	310, 418
Perturbation en	530
unitaire	38, 41, 476
discret	610
École	
Centrale de Paris	76
des Mines de Paris	780
Écoulement turbulent	124
Edison	
Thomas Alva	493
Égalité	
de Liapounov	251, 776
en discret	524, 559, 776
de Stein	524, 541, 559, 776
Eindhoven	276
Université technique d'(...) (TUE)	276
Électrique	
Moteur	429
Électroaimant	563
Électromagnétisme	568
Électronique analogique	
Exemple d'	117
Énergie	
cinétique	138
de commande	328
potentielle	138
ENIT	
École Nationale d'Ingénieurs de Tarbes	458
Ensemble	
auto-conjugué	424

ENSIP	
École Nationale Supérieure d'In-	
génieurs de Poitiers...v, xiii,	
xv	
ENSMA	
École Nationale Supérieure de Mé-	
canique et d'Aérotechnique v	
Entrées inconnues	
Observateur à.....418	
Entropie de l'information.....493	
Équation.....176	
algébrique.....28	
algébrique de Riccati... 599, 763	
discrète..... 604, 769	
caractéristique.....173, 176, 256	
d'une matrice.....651	
d'état.....65	
d'évolution.....70	
de Liapounov .251, 709, 713, 755,	
776	
en discret...517, 524, 559, 768,	
776	
généralisée.....720, 776	
de mesure.....70	
de Riccati.....599, 604	
de sortie.....70	
de Stein .. 517, 524, 559, 768, 776	
différentielle.....28, 33, 78, 256	
dynamique.....70	
homogène.....169	
récurrente.....525	
linéaire.....480	
Équations	
de Lagrange.....139	
normales.....671	
Équilibre	
asymptotiquement stable 205, 512	
État d'.....204, 511, 570	
exponentiellement stable.....219	
	instable.....205, 512, 567
	Point d'.....70, 204, 511, 570
	hyperbolique.....218
	simplement stable.....205, 512
	Équivalence topologique.....218
	Erreur
	de convergence.....413
	de position....229, 308, 310, 318
	Estimation
	état.....375
	Estimation paramétrique.....627
	État.....68
	atteignable.....239
	commandable.....239
	d'équilibre.....204, 511, 570
	Équation d'.....65
	Espace d'.....69
	Estimation d'.....375
	Matrice d'.....72
	Modèle d'.....65, 748
	Notion d'.....68
	observable.....239
	Observateur d'.....375
	Représentation d'.....65
	Variable d'.....68
	Vecteur d'.....69
	Étoile
	Fonction de transfert.....498
	Transformation.....474
	Transformation de Laplace....474
	Transformée.....474
	Transformée de Laplace.....474
	Euclide.....331, 645
	Euler
	Approximation d'(...) arrière (im-
	plicité).....528
	Approximation d'(...) avant (expli-
	cite).....528
	Leonhard.....40, 56, 528

Evans	
Lieu d'.....	684
Walter Richard .....	684
Évolution	
Équation d' .....	70
Matrice d' .....	72, 219
Exponentielle	
de matrice.....	169, 172, 185, 642
Stabilité .....	219
Externe	
Approche.....	209
Extrémum	
global.....	599, 604

## F

<i>Falcon Heavy</i> .....	590
Faraday	
Michael .....	568
Farcot	
Léon ou Jean Joseph Léon ....	23
Fatorisation de Cholesky.....	598, 668
Feedback .....	7
Fibonacci	
Leonardo.....	556
Suites de.....	556
Filtrage	
de la commande .....	586
des bruits de mesure.....	580
Filtre.....	38
passe-bas de premier ordre ....	51
de Kálmán.....	457
de Kálmán-Bucy.....	457
Floride	
Université de.....	780
Fluide	
Niveau de.....	123, 220, 537

Fonction	
de Liapounov .....	216
causale.....	34, 704
de Heaviside.....	41, 477
de Kronecker.....	470
de transfert 9, 27, 34, 36, 80, 257,	
303, 694, 749	
en $z$ .....	484, 525
étoile .....	498
définie	
négative .....	667
positive.....	667
Lipschitzienne.....	70
quadratique de Liapounov....	216
semi-définie	
négative .....	667
positive.....	667
Fonctionnement	
Point de.....	29, 70, 570
Force	
de l'impulsion de Dirac.....	472
Forcé	
Régime .....	172
Force magnétique.....	565
Forme	
canonique	
d'observabilité.....	85
d'observation.....	84, 91
d'une fonction de transfert .	38,
51, 52	
de commandabilité.....	84, 751
de commande .	84, 90, 303, 575,
694, 751	
de deuxième ordre.....	575
de Kálmán .	269, 325, 378, 386,
394, 396, 399, 409, 412	
compagne .....	84, 575, 751
horizontale.....	84, 90, 302, 575,
694, 751	



verticale . . . . .	84, 91	Gain	
de Jordan . . . . .	660	d'observateur . . . . .	384
quadratique . . . . .	224, 667	harmonique . . . . .	183
série d'un régulateur . . . . .	577	Marge de . . . . .	759
Formule		statique . 47, 51, 52, 308, 318, 575	
d'Ackermann . . . . .	548, 687	Garcia	
d'échantillonnage . . . . .	503	Germain . . . . .	xii, xiv, 162, 770
de Bass-Gura . 305, 332, 338, 349,		GASP	
388, 435, 548, 762		<i>Generalized Automatic Synthesis</i>	
de Black . . . . .	42	<i>Program</i> . . . . .	330
de Laplace . . . . .	650	Gauss	
de Sherman-Morrison-		Johann Friedrich Carl . . . . .	628, 670
Woodbury . . . . .	654	Gaussien	
de Woodbury . . . . .	654	Bruit . . . . .	628
du binôme de Newton . . . . .	507	Gilbert	
Foucault		Elmer Grant . . . . .	276, 290
Jean Bernard Léon . . . . .	566	Gilliam	
Fourier		Terry . . . . .	103
Joseph ou Jean Baptiste Joseph,		Gosciny	
Baron de . . . . .	x, 56, 74, 498	René . . . . .	229
Franklin		Gouvernabilité . . . . .	238
Gene F. . . . .	484	Gouvernable	
Fréquentielle		Modèle . . . . .	239
Approche . . . . .	209	Goya	
Réponse . . . . .	183, 186	Chantal (Chantal de Guerre dite)	
Friedland		102	
Bernard . . . . .	291	Coefficient de . . . . .	102
Frottement		GPS	
sec . . . . .	32	<i>Global Positioning Satellite</i> . . . . .	330
visqueux . . . . .	49	Grèce antique . . . . .	20
Fuller		Gram	
A. T. . . . .	773	Jørgen Pedersen . . . . .	248, 522, 723,
		760	
		Matrice de . . . . .	248, 723
		en discret . . . . .	522
		Grammien . . . . .	290
		croisé . . . . .	291
		d'observabilité . . . . .	248, 718, 760
		en discret . . . . .	522
Gabor			
Dennis . . . . .	558		

**G**

de commandabilité. 248, 718, 725, 760	Hartman-Grobman
en discret ..... 522	Théorème de ..... 218
transitoire de commandabilité 724	Hautus
Grammiens	Malo L. J. .... 251, 276, 524, 715
Calcul des ..... 250	Heaviside
en discret ..... 523	Fonction de ..... 41, 477
Gura	Oliver . . x, 22, 39, 41, 74, 181, 477
Ira. .... 305, 330, 363, 530, 762	Hélicoptère
Gutman	Maquette d' .. 125, 220, 333, 427, 606
Shaul ..... 776	Hermite
Gyropode ..... 117	Charles .... 74, 215, 231, 638, 719
Gyroroue électrique ..... 117	Critère de ..... 215, 231, 719
Gyroscope ..... 22	Hermitienne
	Matrice ..... 638
	Héron d'Alexandrie ..... 20
	Hilbert
	David ..... 215
	$\mathcal{H}_\infty$
	Commande ..... 627, 776
	Historique
	de la représentation d'état ..... 74
	Homogénéité
	Principe d' ..... 6
	Horloge
	à eau ..... 20
	mécanique ..... 21
	Hoverboard électrique ..... 117
	HSST
	<i>High Speed Surface Transport</i> 589
	Hurewicz
	Witold ..... 482, 556
	Hurwitz
	Adolf . 74, 212, 215, 230, 710, 776
	Critère de 211, 213, 221, 230, 515, 558
	Matrice .. 213, 377, 385, 405, 514, 596, 710, 714, 718
	Polynôme de ..... 226

## H

$\mathcal{H}_2$	Commande ..... 627, 776
Hahn	Wolfgang ..... 364, 516
Halieutique	Système ..... 107
Hall	Albert C. .... 58
	Capteur à effet ..... 566
	Edwin Herbert ..... 566
Hamilton	Sir William Rowan ... 74, 91, 138, 161, 173, 520, 651, 688, 730, 774, 779
Hamiltonienne	Formulation ..... 114
Harmonique	Déphasage ..... 183
	Gain ..... 183
	Réponse ..... 38, 183, 186, 757

Hurwitz-déetectable  
 Paire de matrices ..... 327, 600  
 Hurwitz-stabilisable  
 Paire de matrices ..... 327, 600  
 Hurwitz-stable  
 Matrice ..... 317, 321  
 Hurwitzienne  
 Matrice .. 213, 377, 385, 405, 514,  
 596, 710, 714, 718  
 Huygens  
 Christiaan ..... 21  
 Hydraulique  
 Procédé ..... 122, 123, 220, 537  
 Hyperbolique  
 Point d'équilibre ..... 218  
*Hyperloop* ..... 590  
 Hyperstabilité ..... 275

**I**

IBM  
*International Business  
 Machines* ..... 778  
 Idéal  
 Échantillonneur ..... 472  
 Identification ..... 4, 627  
 de modèle ..... 574  
 Identité  
 Observateur (...) de  
 Luenberger ..... 384, 389  
 Observateur ..... 422  
 Identité  
 Matrice ..... 638, 739  
 Identité matricelle de Woodbury .. 654  
 IEEE  
*The Institute of Electrical and Elec-  
 tronics Engineers, Inc.* .. 781

IFAC  
*International Federation of Auto-  
 matic Control* ..... xi, 775,  
 778  
 Imaginaire  
 Unité ..... 737  
 Implicite  
 Modèle ..... 87  
 Système ..... 628  
 Impulsion  
 de Dirac ..... 38, 310, 472, 490  
 unitaire (continue) ..... 470  
 unitaire discrète ..... 469  
 unitaire retardée ..... 470  
 Impulsionnel  
 Échantillonnage ..... 468  
 Impulsionnelle  
 Réponse ..... 181, 755  
 en discret ..... 505, 766  
 Incertain  
 Modèle ..... 627  
 Incertitude  
 de modèle ..... 413, 416, 627  
*Incheon Airport Maglev* ..... 589  
 Indice  
 d'observabilité ..... 267  
 de commandabilité ..... 264  
 Indicielle  
 Réponse .. 181, 396, 578, 617, 755  
 en discret ..... 506, 768  
 normalisée ..... 579  
 Inductance ..... 568  
 Induction magnétique ..... 568  
 Inégalité  
 de Liapounov ..... 710, 711, 776  
 en discret ..... 533, 559, 776  
 de Stein .. 534, 541, 559, 711, 776  
 triangulaire ..... 645

Inégalités matricielles linéaires ...	328, 361, 364, 629, 776
Information	
Entropie de l' .....	493
Théorie de l' .....	493, 557
Injection de sortie ..	321, 325, 327, 533
INSA	
Institut National des Sciences Appliquées .....	xiv, 686
Instabilité	
d'un état d'équilibre.....	205, 512
Instable	
Équilibre .....	205, 512, 567
Zéro .....	681
Institut pour l'énergie de l'Académie roumaine.....	275
Intégrateur	19, 142, 210, 260, 310, 315, 354, 372, 398, 528, 582
Adjonction d' .....	310
Ajout d' .....	310
comportement d' .....	51
discret .....	530, 607
double .....	210, 226, 344
triple .....	347
Intégration .....	35
Théorème de l' .....	35
Interconnexion	
Bien posé de l' .....	97
de modèles .....	97, 130, 259
Interne	
Approche .....	209
Interpolation	
de Lagrange-Sylvester ...	177, 729
Inverse	
d'une matrice .....	652, 743
Inversion	
Lemme d'(...) des matrices ...	654
Lemme simplifié d'(...) des matrices	654
Irréductible	
Réalisation .....	261, 525, 762
Isochrone	
Régulateur .....	229
ITT	
<i>International Telephone &amp; Telegraph Corporation</i> ...	276
<b>J</b>	
Jacob	
Dominique .....	592
Jacobi	
Carl Gustav Jakob .....	779
Jacobienne .....	70
Johns Hopkins	
Université .....	77, 329
Jones	
Terry .....	103
Jordan	
Camille ou Marie Ennemond Camille .....	83
Bloc de .....	208
Forme de .....	175, 246, 522, 660
Matrice de .....	130, 175, 660
Jordanisation	
d'une matrice .....	130
Joukovski	
Nikolaï Iegorovitch .....	773
Jules Verne	
Université de Picardie (...) ...	xv
Jury	
Critère de (non détaillé) .	483, 515
Eliahu Ibrahim .....	482, 515, 557, 558, 776

## K

Kailath  
 Thomas ..... 5, 484

Kálmán  
 Critère d'observabilité de .... 243,  
 521, 698  
 Critère de 240, 290, 335, 520, 524,  
 576, 584, 717, 726, 729, 760  
 Critère de commandabilité de 240,  
 520, 697  
 Décomposition de .. 252, 263, 278,  
 324, 525, 534  
 Filtre de ..... 330, 457, 779  
 Forme canonique de 269, 325, 378,  
 386, 394, 396, 399, 409, 412  
 Observateur de ..... 384  
 Rudolf Emil xi, 75, 161, 237, 240,  
 275, 290, 306, 330, 390, 457,  
 483, 520, 576, 628, 698, 717,  
 733, 760, 772, 781

Kálmán-Bucy  
 Filtre de ..... 330, 457, 779

Kálmán-Yakoubovitch-Popov  
 (-Anderson)  
 Lemme de ..... 275, 780

Kemper  
 Hermann ..... 588

Kennelly  
 Arthur Edwin ..... 41

Kennelly-Heaviside  
 Couches de ..... 41

Khalil  
 Hassan K. .... 484

Kharkov  
 Société Mathématique de .... 773

Université de ..... 773

Kolmogorov  
 Andreï Nikolaïvitch ..... 779

Königsberg  
 Université de ..... 215

Kotelnikov  
 Vladimir A. .... 558

Kronecker  
 Fonction de ..... 470  
 Leopold ..... 469, 642, 742  
 Produit matriciel de ..... 642, 742  
 Symbole de ..... 469

Kučera  
 Vladimír ..... 785

Küpfmüller  
 Karl ..... 558

## L

LAAS-CNRS  
 Laboratoire d'analyse d'architec-  
 ture des systèmes du Centre  
 national de la recherche scien-  
 tifique ..... 686

Lagrange  
 Équations de ..... 139  
 Joseph-Louis, Comte de (*Giuseppe  
 Lodovico Lagrangia*). 56, 177,  
 729, 774

Lagrange-Sylvester  
 Interpolation de ..... 177, 729

Lagrangien ..... 139  
 Formalisme ..... 116

Laithwaite  
 Eric Roberts ..... 587

Lampe à huile ..... 20

Lapin ..... 100

Laplace	
Domaine de . . . . .	35
étoile	
Transformée de . . . . .	474
Formule de . . . . .	650
Pierre-Simon, Marquis de . . x,	22,
40, 56, 74, 138, 482, 556, 650,	
774	
Transformée de . . . . .	34, 704
Transformée inverse de . . . . .	36
Transformation de .34, 39, 40, 56,	
58, 88, 174	
Transformation inverse de .36, 81,	
84, 703	
Variable de . . . . .	34, 704
Laplace-Carson	
Transformation de . . . . .	39, 40, 58
LaSalle	
Joseph Pierre (Joe) . . . . .	75, 775
Lefschetz	
<i>Center for Dynamic Systems</i> . .	76
Solomon . xi, 75–77, 329, 775, 778	
Legendre	
Adrien-Marie . . . . .	670
Leibnitz	
Gottfried Wilhelm von . . . . .	ix
Leipzig	
Université de . . . . .	215
Lemme	
d'inversion des matrices . . . . .	654
de Kálmán-Yakoubovitch-Popov	
(-Anderson) . . . . .	275, 780
simplifié d'inversion des matrices	
654	
Letov	
Alexandre Michailovitch . . . . .	775
Lévitation magnétique . . . . .	563
Liapounov	
Alexandre Mikhaïlovitch . . xi, 74,	
161, 216, 515, 559, 596, 709,	
719, 755, 771	
Égalité de . . . . .	251, 326, 364, 776
en discret . . . . .	524, 559, 776
Équation de . . . . .	218, 251, 326, 364,
709, 713, 755, 776	
en discret . . . . .	517, 524, 559, 768,
776	
généralisée . . . . .	720, 776
Exposants de . . . . .	774
Fonction (quadratique) de . . . . .	216
Fonction de . . . . .	216
Inégalité de . . . . .	326, 364, 709–711,
776	
en discret . . . . .	533, 559, 711, 776
en échantillonné . . . . .	712
Inéquation de . . . . .	326, 364
Matrice de . . . . .	217, 710, 711, 755
Méthode de . . . . .	216
en discret . . . . .	515
Méthode directe . . . . .	216, 774
Première méthode de . . . . .	774
Seconde méthode de . . . . .	216, 774
en discret . . . . .	515
LIAS	
Laboratoire d'Informatique et d'Auto-	
matique pour les Systèmes	
v	
Libre	
Régime . . . . .	172, 676
Liénard	
Alfred-Marie . . . . .	211, 231
Liénard-Chipart	
Critère de . . . . .	211, 231
Lieu	
d'Evans . . . . .	684
de Black . . . . .	184
de Bode . . . . .	184

de Nyquist ..... 184  
*Life on Mars* ..... 590  
 Linéaire  
   Approximation ..... 33, 140, 151  
   Modèle ..... 4  
   Zone ..... 32  
*Linear quadratic Regulator* ..... 763  
 Linéarisation ..... 29, 124, 140, 151  
 Linéarisé  
   tangent ..... 29, 71, 218, 571  
 Linéarité ..... 29, 70  
   de  $\mathcal{L}$  ..... 34  
   de  $\mathcal{L}'$  ..... 705  
*Linimo* ..... 589  
 Liouville  
   Joseph ..... 774  
 LMI  
   *Linear Matrix Inequalities* ... 328,  
   361, 364, 629, 776  
 Logique floue ..... 165, 483  
 Loi  
   de commande ..... 8  
   de Newton ..... 114  
   des mailles ..... 569  
 Londres  
   Imperial College de ..... 587  
   University College de ..... 214  
 Los Alamos  
   Université de ..... 77  
 Lotka  
   James ou Alfred James ..... 106  
 Lotka-Volterra  
   Modèle de ..... 106  
 Louvain  
   Université catholique de ..... 276  
 Löwner  
   Karel ..... 669  
 LQ

Commande (Linéaire quadratique)  
   595, 606, 627, 718, 763  
 Commande (Linéaire quadratique)  
   en discret ..... 600, 768  
 LQG  
   Commande (Linéaire quadratique  
   gaussienne) ..... 628  
 LTI  
   *Linear Time invariant* ..... 72  
 Luenberger  
   Algorithme de ..... 378  
   David Gilbert ..... 390, 457  
   Observateur de ..... 375, 384, 535  
   Procédure de ..... 378, 427  
 Luenberger-Kálmán  
   Observateur de ..... 384  
 Lur'e  
   Anatoliy Isakovich ..... 75, 775

## M

Mécanique  
   Exemple ..... 113  
 Machine  
   à relais ..... 492  
   à vapeur ..... 21  
   synchrone ..... 429  
*Maglev* ..... 587  
 Magnétique  
   Champ ..... 565  
   Force ..... 565  
   Induction ..... 568  
   Lévitiation ..... 563  
   Suspension ..... 563  
   Sustentation ..... 563  
 Mailles  
   Loi des ..... 569

Malkin  
     Ioel R. .... 775  
 Manhattan  
     Projet ..... 77, 483  
 Marche bipède ..... 117  
 Marge  
     de gain ..... 38, 759  
     de phase ..... 38, 759  
     de stabilité ..... 210  
         absolue ..... 210  
         en discret ..... 514  
         relative ..... 210  
 Maryland  
     Académie des sciences du .... 781  
 Maryland College Park ..... 275  
 Masse volumique ..... 150  
 MATLAB<sup>©</sup> ..... 537, 735  
 MATLAB<sup>©</sup> ..... 607, 656, 666  
 Matrice ..... 636  
     adjointe ..... 650  
     carrée ..... 638  
     Cofacteur d'une ..... 650  
     compagne ..... 84, 751  
         horizontale ..... 84, 751  
         verticale ..... 84  
     d'état ..... 72  
     d'évolution ..... 72, 219  
     d'observabilité de Kálmán ... 243,  
         382, 521, 546, 698, 760  
     de commandabilité de Kálmán 241,  
         305, 520, 546, 584, 689, 697,  
         724, 760  
     de Gram ..... 248, 723  
         en discret ..... 522  
     de Jordan ..... 130, 175, 660  
     de Liapounov .. 217, 710, 711, 755  
     de pondération ..... 595, 601  
     de rotation ..... 191, 654  
     de Töplitz ..... 305, 387  
     de transtion d'état ..... 168  
     déficiente en rang ..... 651  
     définie  
         négative ..... 217, 668  
         positive ..... 217, 249, 668, 746  
     diagonale ..... 224, 638  
     Dimension d'une (...) carrée .. 638  
     dynamique ..... 72  
     Exponentielle de ..... 169, 642  
     grammienne ..... 248, 723  
         en discret ..... 522  
     hermitienne ..... 638  
     Hurwitz .. 213, 377, 385, 405, 514,  
         596, 710, 714, 718  
     hurwitzienne .. 213, 377, 385, 405,  
         514, 596, 710, 714, 718  
     Identité ..... 638, 739  
     inverse ..... 652, 743  
     jacobienne ..... 70  
 Mineur  
     d'ordre  $k$  d'une ..... 648  
     d'une ..... 648  
     principal d'une ..... 649  
     principal dominant d'une .. 649  
     modale ..... 660, 710, 745  
     nilpotente ..... 172, 641  
     non singulière ..... 652  
     Norme d'une ..... 645, 747  
     Norme-2 d'une ..... 646, 747  
     Noyau à droite d'une ..... 659  
     nulle ..... 638, 739  
     Ordre d'une (...) carrée ..... 638  
     orthogonale ..... 654  
     Pseudo-inverse d'une ..... 654  
     Puissance d'une ..... 641, 741  
     Racine carrée de ..... 741  
     Rang d'une ..... 651, 740  
     régulière ..... 652  
     Schur 514, 531, 602, 711, 715, 718



semi-définie	
négative . . . . .	668
positive . . . . .	668
singulière . . . . .	652
spectre d'une . . . . .	660
stable	
au sens de Hurwitz . . . . .	213, 377, 385, 405, 514, 596, 710, 714, 718
au sens de Schur . . . . .	514, 531, 602, 711, 715, 718
symétrique . . . . .	217, 638
Trace d'une . . . . .	664
transposée . . . . .	637, 738
conjuguée . . . . .	637, 737
triangulaire	
inférieure . . . . .	638
supérieure . . . . .	638
unitaire . . . . .	249, 654
Vectorisation d'une . . . . .	637
Matrices	
Produit de . . . . .	640, 741
Somme de . . . . .	639, 741
Maximum	
Principe du . . . . .	161
Maxwell	
James Clerkx, 22, 41, 56, 214, 229	
Mazko	
Alexey Grigorjevitch . . . . .	776
Mead	
Thomas . . . . .	21
Mécanique	
Exemple . . . . .	45, 50
Mercère	
Guillaume . . . . .	xv, 620
Mesure	
Capteur de . . . . .	7
Équation de . . . . .	70
Vecteur de . . . . .	72
Méthode	
de Cayley-Hamilton 176, 185, 241	
de Liapounov . . . . .	216
en discret . . . . .	515
des modes . . . . .	175
des séries . . . . .	172
directe	
de Liapounov . . . . .	216, 774
Première (...) de Liapounov ..	774
Seconde (...) de Liapounov	
en discret . . . . .	515
Michigan	
Université du . . . . .	276, 492
Mineur	
d'ordre $k$ d'une matrice . . . . .	648
d'une matrice . . . . .	648
principal d'une matrice . . . . .	649
principal dominant d'une matrice	
213, 649	
Minimale	
Réalisation 257, 260, 525, 681, 762	
Minimalité . . . . .	697
Minimum	
global . . . . .	599, 604
Minorsky	
Nikolai Fyodorovitch . . . . .	22
MIT	
<i>Massachusetts Insitute of Tech-</i>	
<i>nology</i> . . . . .	58, 492, 777
Mitigeur thermostatique . . . . .	16
Modale	
Matrice . . . . .	660, 710, 745
Mode	
complexe . . . . .	677
d'un système . . . . .	178, 246
discret . . . . .	508
dominant . . . . .	677
dominé . . . . .	677

lent .....	677	Montgolfière .....	220, 332
rapide .....	677	Montgolfiere .....	109
réel .....	677	Monty Python .....	103
Modèle		Moore	
commandable .....	239	Bruce C. ....	291, 363
d'état .....	65, 748	Eliakim Hastings .....	655, 743
de Lotka-Volterra .....	106	Moore-Penrose	
discret .....	463, 607, 764	Pseudo-inverse de .....	655, 743
externe .....	480	Moteur .....	11
échantillonné .....	498	à courant continu .....	47, 52, 118, 203,
gouvernable .....	239	299, 336	
incertain .....	627	électrique .....	429
linéaire invariant dans le temps .....	29	linéaire synchrone .....	587
linéarisé tangent .....	29, 571	synchrone .....	429
multivariable .....	123, 220, 537	Moulin	
non linéaire ...	103, 106, 124, 570,	Pierre de .....	21
628		Multidimensionnel	
Notion de .....	3	Système (nD) .....	628
observable .....	239	Multiplication	
proies-prédateurs .....	106	de matrices .....	640, 741
Réduction de .....	572	Multiplicité	
stationnaire .....	71	algébrique d'une valeur propre .....	94,
Modèles		208	
en cascade .....	257	géométrique d'une valeur propre .....	94, 208
en contre-réaction .....	259	Multivariable	
en interconnexion ...	97, 130, 259	Modèle .....	123, 220, 537
en parallèle .....	95, 130, 258	Système .....	6, 626
rétroaction .....	259	Musk	
série .....	96, 130, 257	Ellon .....	590
Modes			
Méthode des .....	175		
Moindres carrés			
Cas linéaire simple .....	670		
Moivre			
Abraham de .....	557		
Mono-entrée/mono-sortie			
Système .....	2		
Monovariante			
Système .....	2		

## N

Napoléon Bonaparte .....	40
New York	
City College of .....	483
Université de .....	483

Newton  
     Binôme de ..... 507  
     Loi de ..... 114  
     Sir Isaac, 74, 138, 331, 507, 773  
 Nichols  
     Nathaniel B. .... 58, 759  
 Nilpotente  
     Matrice ..... 172, 641  
 Niveau  
     Asservissement de .. 123, 220, 537  
     Régulation de ..... 123, 220, 537  
 Non linéaire  
     Commande ..... 595  
     Modèle . 4, 29, 103, 106, 124, 570,  
         628  
 Non minimum de phase  
     Système à ..... 290  
 Non quantifié  
     Signal ..... 465  
 Non singulière  
     Matrice ..... 652  
 Non-linéarité ..... 70, 103  
 Normales  
     Équations ..... 671  
 Norme  
     2 d'un vecteur ..... 645  
     2 d'une matrice ..... 646, 747  
     d'une matrice ..... 645, 747  
     Définition d'une ..... 645  
     euclidienne d'un vecteur ..... 645  
     Propriétés d'une ..... 645  
 Noyau  
     à droite d'une matrice ..... 659  
     d'une application ..... 659  
 Numérique  
     Signal ..... 466, 489  
 Numérisation ..... 476  
 Nyquist  
     Critère de ..... 43

Diagramme de ..... 38, 184, 759  
 Harry ..... x, 43, 58, 74, 557, 759  
 Lieu de ..... 38, 184, 759  
 Nyquist-Shannon  
     Théorème de .. 491, 493, 498, 557

## O

Obama  
     Barack Hussein ..... 781  
 Observabilité . 237, 239, 242, 322, 374,  
     532, 697, 760  
     en discret ..... 519  
     Grammien d' ..... 248, 718, 760  
     en discret ..... 522  
     Indice d' ..... 267  
     Matrice d'(...) de Kálmán ... 243,  
         382, 521, 546, 698, 760  
     Rang d' ..... 267  
 Observable  
     État ..... 239  
     Mode ..... 246  
     Modèle ..... 239  
     Paire de matrices .. 243, 374, 600,  
         715  
 Observateur ..... 369, 373  
     à entrées inconnues ..... 418  
     d'état ..... 375  
     d'ordre  
         minimal ..... 375, 427, 535  
         plein ..... 383, 421, 428, 534  
         réduit ..... 400  
     de Kálmán ..... 384, 428  
     de Luenberger ..... 375, 384, 535  
     de Luenberger-Kálmán ..... 384  
     de retour d'état ..... 394, 410  
     discret ..... 534

Gain d'	384
identité	422, 428
de Luenberger	384, 389
Proportionnel Intégral (PI)	419
réduit	535
identité	405
Robustesse d'un	413
Observation	
Base canonique d'	378, 386
Principe de l'	373
Réalisation canonique d'	378
Vecteur d'	72
<i>Offset</i>	310, 315, 419, 582, 608
Ogata	
Katsuhiko	162, 199, 484, 559, 684
Optimalité	595
Optimisation mixte	776
Ordre	
d'une matrice carrée	638
de la fonction de transfert	37
du modèle d'état	69
minimal	
Observateur d'	375
plein	
Observateur d'	383
réduit	
Observateur d'	400
Orthogonale	
Matrice	654
Orthogonalité	
Condition d'	661
Oscillations	9, 677
Othogonalité	
Condition d'	676
Oxford	
Université de	329

## P

P	
Régulateur (proportionnel)	576
Paire de matrices	240
Papin	
Denis	21
Parallèle	
Modèles en	95, 130, 258
Paris	
École des Mines de	780
Park	
Robert H	430
Transformation de	430
Parks	
Patrick C.	231, 772, 776
Passe-bas	
Filtre (...) de premier ordre	51
<i>PayPal</i>	590
PBH	
Test	251, 291, 403, 715
en discret	524, 532
PD	
Régulateur	87, 576
Peigne de Dirac	473
Pendule	72
Inverse	115, 221, 607
Penrose	
Roger	655, 743
Performances	
statiques	308, 372, 530
transitoires	300, 372, 530
Période	
(discrétisation)	466
d'échantillonnage	468
Permanent	

Régime ..... 172, 179, 310, 374

Perturbation ..... 310, 418, 608  
en échelon 310, 315, 398, 530, 582, 608  
exogène ..... 310  
impulsionnelle ..... 676  
Rejet de ..... 310, 608, 627  
en discret ..... 530  
Signal de ..... 2

Petites variations  
Hypothèse des ..... 29, 124

Phase  
Marge de ..... 759

Philips  
ou Koninklijke Philips N.V. c-à-d.  
« royale néerlandaise Philips  
S.A. » ..... 276

Philon de Byzance ..... 20

Photocapteur ..... 579

Phototransistor ..... 566

PI  
Observateur ..... 419  
Régulateur ..... 431

Picardie  
Université de (...) Jules Verne . xv

PID  
Régulateur . 22, 87, 421, 422, 528, 567, 582

Pisano  
Leonardo ..... 556

Placement  
de pôles . 300, 317, 424, 529, 619, 687, 762  
Algorithme de ..... 304  
de structure propre ..... 363  
de valeurs propres ..... 301

Poincaré  
Henri ..... 74, 161

Point  
critique ..... 599, 604  
d'équilibre ..... 70  
de fonctionnement .... 29, 70, 570  
de polarisation ..... 30

Poissons  
Les petits ..... 107

Poitiers  
Université de ..... v, 230

Polaris ..... 75

Polarisation  
Point de ..... 30

Pôle  
Compensation de ..... 260  
d'une fonction de transfert 37, 51, 55, 81, 752  
d'une fonction de transfert en  $z$   
485, 487  
non commandable ..... 323  
nul non observable ..... 318

Pôle-zéro  
Compensation ..... 257, 696  
Simplification ..... 257, 696

Pôles  
Placement de . 300, 317, 424, 529, 619, 687, 762

Polynôme  
caractéristique ..... 173, 176  
d'une matrice . 88, 91, 212, 302, 651, 688, 730  
en  $z$  ..... 485, 487  
de Hurwitz ..... 226

Pondération  
Matrice de ..... 595, 601

Pontryaguine  
Lev Semionovitch xi, 75, 161, 620, 779

Popov  
Critère de ..... 275

Vasile Mihai ...	76, 251, 275, 524, 715, 776, 781	Observateur.....	419
Popov-Belevitch-Hautus	Test de...251, 291, 318, 323, 339, 403, 524, 715	Régulateur.....	260
Position		Propre	
angulaire.....	299	Fonction de transfert <b>non</b> .....	87
Asservissement de.....	567	Fonction de transfert.....	37
Potentielle		strictement.....	37, 80, 81
Énergie.....	138	Structure (...) d'une matrice.	659, 676
Poursuite		Valeur (...) d'une matrice.	83, 89, 92, 179, 301, 487, 503, 509, 659, 666, 676, 710, 745
Écart de.....	317	Vecteur.....	92, 157
Pradin		Vecteur (...) à droite d'une ma- trice.....	660, 676, 746
Bernard.....	xii, xiv, 23, 162, 770	Vecteur (...) à gauche d'une ma- trice.....	660, 676
Précision.....	9	Proximètre à courants de Foucault	566
d'un système bouclé.....	310	Pseudo-inverse.....	402
Précommande.....	298, 308	d'une matrice.....	654
Précompensation.....	298	de Moore-Penrose ..	402, 655, 743
Prédation.....	100	Pseudo-solution	
Princeton		d'un système linéaire.....	670
Université de.....	76, 77, 329	Puissance	
Principe		d'une matrice.....	641, 741
d'observation.....	373	Pulsation	
séparation.....	394, 396, 416, 424	propre non amortie ..	47, 52, 575, 677
de superposition.....	479		
du maximum.....	161		
fondamental de la dynamique.	52, 113, 114, 432		
Problème			
convexe.....	599		
Procédure			
de Luenberger.....	378, 427		
Produit			
de matrices.....	640, 741		
matriciel de Kronecker ..	642, 742		
scalaire.....	640		
Proies-prédateurs			
Modèle.....	106		
Proportionnel Intégral (PI)			

## Q

Quadratique	
Critère.....	595, 601
Forme.....	224, 667
Quantification.....	475, 489
Quantifié	

Signal.....465, 489  
 Quantité de mouvement .....115  
 Quantum.....466  
   de conversion ..... 476, 490  
 Quart de véhicule  
   Suspension dite .....187  
 Quaternion.....138

**R**

Racine carrée  
   de matrice ..... 741  
 Racines  
   Critère des.....206  
   en discret .....512  
 RADAR  
   *RADio Detection And*  
   *Ranging* ..... 457, 780  
 Ragazzini  
   *Award* ..... 483  
   John Ralph75, 290, 483, 556, 775,  
   777  
 Rail  
   Bille sur un ..... 114, 337, 429  
 RAND Corporation  
   *Research ANd Development*... 77  
 Rang  
   d'observabilité ..... 267  
   d'une matrice ..... 651, 666, 740  
   de commandabilité.....264  
 RC  
   Cellule.....182  
   Circuit.....182  
 Réalisation ..... 80, 88, 486, 748  
   canonique  
   d'observabilité ..... 85  
   d'observation .....84, 91, 378

  de commandabilité.....84, 751  
   de commande .84, 90, 302, 303,  
   575, 751  
   compagne..84, 486, 487, 575, 751  
   horizontale .... 84, 90, 575, 751  
   verticale ..... 84, 91  
   diagonale ..... 486, 487  
   irréductible.....261, 525, 762  
   minimale . 257, 260, 525, 681, 762  
 Reconstructeur  
   d'état .....373  
 Reconstructibilité.....240  
 Reconstruction  
   Écart de ..... 374  
 Récurrence  
   Équation.....525  
   linéaire ..... 480  
 Réduction  
   de modèle.....572  
 Référence  
   Signal de.....17  
 Régime  
   forcé .....172  
   libre ..... 172, 676  
   permanent ..... 172, 179, 310  
   statique .....172  
   transitoire.....172, 178, 675  
 Régime permanent ..... 374  
 Règle  
   pratique de Shannon.....545  
 Régulateur ..... 300  
   à boules ..... 18, 21, 229  
   centrifuge.....229  
   isochrone ..... 229  
   P ..... 19, 576  
   PD.....87, 576  
   PI ..... 260, 431  
   PID... 22, 87, 300, 421, 422, 528,  
   567, 582

Régulation . . . . .	8, 11	d'état . . . . .	297, 527, 533, 687, 693
Régulière		en discret . . . . .	528
Matrice . . . . .	652	observé . . . . .	391
Rejet de perturbation . . . . .	627	Observateur de . . . . .	394
en discret . . . . .	530	Vecteur de . . . . .	298
Relais		de sortie . . . . .	369, 534
Machine à . . . . .	492	dynamique de sortie . . . . .	372, 421
Relation		statique . . . . .	299
fondamentale de la dynamique	52,	de sortie . . . . .	371
113, 114, 432		Rétroaction . . . . .	6
Remaud		de modèles . . . . .	259
Patrice . . . . .	ix, 23	Rétroviseur . . . . .	10, 16, 19
Renard . . . . .	100	Revenu national . . . . .	536
enragé . . . . .	102	Rhéologique	
Réponse		Amortisseur (...) actif . . . . .	112
à une condition initiale . . . . .	757	<i>Rhodes Scholarship</i> . . . . .	329
en discret . . . . .	768	RIAS	
d'un système . . . . .	167	<i>Glenn L. Martin Company's Re-</i>	
discret . . . . .	504	<i>search Institute for Advanced</i>	
fréquentielle . . . . .	183, 186	<i>Studies</i> . . . . .	76, 329, 778
harmonique . . . . .	38, 183, 186, 757	Riccati	
impulsionnelle . . . . .	38, 181, 755	Équation algébrique de . . . . .	599
en discret . . . . .	505, 766	Équation algébrique discrète de	604
indicielle . . . . .	38, 181, 396, 578, 617,	Équation de . . . . .	599, 763
755		Équation discrète de . . . . .	604, 769
en discret . . . . .	506, 768	Jacopo Francesco . . . . .	599, 763, 776
normalisée . . . . .	579	Riemann	
oscillante . . . . .	677	Georg Friedrich Bernhard . . . . .	472
Temps de . . . . .	8, 172	RLC	
Représentation d'état . . . . .	65	Circuit . . . . .	28, 38, 78
Historique de la . . . . .	74	Robuste	
linéaire . . . . .	9, 72	Analyse . . . . .	627
invariante dans le temps . . . . .	72	Commande . . . . .	417, 627, 776
non linéaire . . . . .	124	Robustesse . . . . .	627
Retard		d'un observateur . . . . .	413
pur . . . . .	15	Rosenbrock	
Théorème du . . . . .	35	Howard Harry . . . . .	76
en discret . . . . .	705	Rotation	
Retour		Matrice de . . . . .	191, 654



Rotella  
 Frédéric.....458  
 Routh  
 Critère de ..... 211, 230, 515, 558  
 Edward John .. 74, 212, 214, 230,  
 776  
 Table de ..... 212  
 Routh-Hurwitz  
 Critère de ..... 211, 230, 515, 558  
*Royal Military College of Science*. 772

**S**

Saint Pétersbourg  
 Université de.....772  
 Saturation ..... 32, 329, 389  
 Scherer  
 Carsten W. .... 629  
 Schur  
 Complément de ..... 534  
 Critère de ..... 211, 231  
 Issaï Sadi . 74, 211, 231, 514, 558,  
 711  
 Matrice .. 514, 531, 602, 711, 715,  
 718  
 Schur-Cohn  
 Critère de ..... 515, 559  
 Schur-déTECTABLE  
 Paire de matrices ..... 533  
 Schur-stabilisable  
 Paire de matrices ..... 533  
 Sechenona  
 Natalia Rafailovna ..... 772  
 Seconde méthode  
 de Liapounov ..... 216  
 Segway<sup>©</sup>  
 Gyropode..... 117

Semblable  
 Matrice ..... 89  
 Semi-définie  
 négative  
 Fonction ..... 667  
 Matrice..... 668  
 positive  
 Fonction ..... 667  
 Matrice..... 668  
 Séparation  
 Principe de.... 394, 396, 416, 424  
 Série  
 Modèles en ..... 96, 130, 257  
 Régulateur sous forme ..... 577  
 Servomoteur ..... 23  
 Shannon  
 Claude Elwood..... 492, 557, 779  
 Premier théorème de..... 493  
 Règle de  
 pratique ..... 491, 545  
 Second théorème de..... 493  
 Théorème de ... 43, 490, 498, 557  
 pratique ..... 491  
 strict ..... 491  
 Shannon-Nyquist  
 Théorème de..... 43  
 Sherman-Morrison-Woodbury  
 Formule de..... 654  
 Signal  
 à temps continu..... 465  
 à temps discret ..... 465  
 analogique ..... 466, 488, 489  
 continu ..... 465, 493  
 discret ..... 465  
 discrétisé..... 468, 493  
 échantillonné..... 468, 493  
 non quantifié..... 465  
 numérique ..... 466  
 quantifié ..... 465, 489

stochastique .....	628	en discret .....	531
Traitement du .....	57	Stabilisable	
Signe		Paire de matrices (...)	
Définition en .....	668, 746	au sens de Hurwitz....	327, 600
Similarité		au sens de Schur .....	531
Transformation de .....	486	Stabilisation .....	326
SIMULINK .....	769	en discret .....	532
Singulier		Stabilité.....	8, 194, 202
Modèle.....	87	<i>bouded input bouded output</i>	
Système .....	628	(BIBO). 202, 209, 262, 510, 677	
Singulière		absolue	
Matrice .....	652	Marge de .....	210
Valeur.....	665, 666, 746	asymptotique .....	262, 677
Sismique		d'un état d'équilibre ..	205, 512
Système .....	111	d'un état d'équilibre	204, 205, 512
Solution		d'un système	
de l'équation d'état .....	170	discret .....	510
Somme		échantillonné .....	517
de matrices .....	639, 741	linéaire .....	204
Sortie		entrée bornée-sortie bornée ..	202,
Équation de.....	70	510	
Injection de .....	321, 325, 327	entrée-sortie .....	202, 510
Retour de.....	369	exponentielle.....	219
Retour dynamique de .....	372	externe .....	203
Retour statique de .....	371	interne .....	203, 209
Signaux de.....	2	en discret.....	511
Vecteur de .....	72	Marge de .....	210
<i>Space Oddity</i> .....	590	en discret.....	514
<i>SpaceX</i> .....	590	relative	
Spectre		Marge de .....	210
auto-conjugué.....	424	simple d'un état d'équilibre ..	205,
d'une matrice.....	660	512	
de la matrice d'état .....	676	Stable	
Sperry		au sens de Hurwitz	
Elmer .....	22	Matrice 213, 317, 321, 377, 385,	
Lawrence .....	22	405, 514, 596, 710, 714, 718	
Spoutnik 1 .....	xi, 75, 76, 775	Polynôme.....	226
St John's College .....	230	au sens de Schur	
Stabilisabilité.....	321		

Matrice 514, 531, 602, 711, 715, 718	Suite (Signal discret) . . . . . 468
Équilibre	Superposition
asymptotiquement . . . . 205, 512	Principe de . . . . . 4, 479
exponentiellement . . . . . 219	Suspension
simplement . . . . . 205, 512	« quart de véhicule » . . . . . 187
Zéro . . . . . 681	magnétique . . . . . 563
Stanford	Train à . . . . . 587
Université de . . . . . 275, 780	Sustentation magnétique . . . . . 563
<i>Starman</i> . . . . . 590	Swerling
Stationnaire	Peter . . . . . 457
Modèle . . . . . 71	Sylvester
Statique	Critère de . . . . . 554, 669
Caractéristique . . . . . 29, 30	James Joseph . 177, 291, 554, 669, 729
Gain . . . . 47, 51, 52, 308, 318, 575	Symétrique
Régime . . . . . 172, 398	Matrice . . . . . 217
Retour . . . . . 299	Symbole
Retour (...) de sortie . . . . . 371	de Kronecker . . . . . 469
Statiques	Symétrique
Performances . . . . . 308, 530	Matrice . . . . . 638
Stein	Synchrone
Critère de . . . . . 541	Machine . . . . . 429
Égalité de . . . . 524, 541, 559, 776	Moteur . . . . . 429
Équation de .. 517, 524, 559, 768, 776	Système
Inégalité de . . . 534, 541, 559, 711, 776	causal . . . . . 33, 37
P. . . . . 559, 768, 776	descripteur . . . . . 628
Stochastique	discret . . . . . 463, 764
Commande . . . . . 628	autonome . . . . . 512
Signal . . . . . 628	libre . . . . . 512
Stodola	linéaire . . . . . 479
Aurel Boroslav . . . . . 230	LTI . . . . . 480
Strictement propre	échantillonné . . . . . 487, 607
Fonction de transfert . . . . . 81	halieutique . . . . . 107
Fonction de transfert <b>non</b> . . . . . 86	implicite . . . . . 628
Structure propre	linéaire . . . . . 5
d'une matrice . . . . . 659, 676	stable . . . . . 204
Placement de . . . . . 363	multidimensionnel (nD) . . . . . 628
	multivariable . . . . . 626
	Notion de . . . . . 2

singulier .....	628	<i>The Math Works In</i> .....	735
sismique .....	111	Théorème	
strictement causal .....	33, 37, 80	de Cayley-Hamilton .91, 173, 176,	
surdéterminé.....	670	520, 651, 688, 730	
Systèmes		de Hartman-Grobman.....	218
composites.....	319	de l'avance.....	705
		de l'intégration.....	35
		de la dérivation.....	35
		de la valeur finale.....	35
		en discret.....	705
		de la valeur initiale.....	35
		en discret.....	705
		de Nyquist-Shannon ....	491, 493,
		498, 557	
		de Shannon.....	43, 490, 498, 557
		pratique.....	491
		strict.....	491
		de Shannon-Nyquist.....	43
		du décalage fréquentiel.....	35
		du retard.....	35
		en discret.....	705
		Premier (...) de Shannon.....	493
		Second (...) de Shannon.....	493
		Théorie	
		de l'information.....	493, 557
		Thermique	
		Exemple.....	119
		Résistance.....	119
		Thiele	
		Thorvad Nicolai.....	457
		Tireuse à bière.....	20
		Töplitz	
		Matrice de.....	305, 387
		Otto.....	305, 387
		Toulouse	
		Université de.....	773
		Trace	
		d'une matrice.....	664
		Train	
		à grande vitesse.....	589

## T

Tables de Vérité.....	492
Tangage.....	333
Taylor	
Développement de.....	151, 571
Tchebychev	
Pafnouti Lvovitch.....	772
Télémetre à courants de Foucault .	566
Télescope.....	56, 229
Température	
Asservissement de ..	123, 220, 537
Régulation de.....	123, 220, 537
Temporelle	
Approche.....	209
Temps	
Constante de.....	52, 55
de réponse.....	172
Temps continu	
à.....	465
Temps discret	
à.....	465
<i>Tesla</i> .....	590
Test	
de Popov-Belevitch-Hautus (PBH)	
251, 291, 318, 323, 339, 403,	
715	
en discret.....	524, 532
TGV	
Train à grande vitesse.....	589

à suspension magnétique . . . . .	587	Matrice . . . . .	638
d'impulsions		supérieure	
de Dirac . . . . .	473	Matrice . . . . .	638
unitaires discrètes . . . . .	470	Trinity College . . . . .	138
Transconductance . . . . .	31	Trotinette électrique . . . . .	117
Transfert		Tustin	
de chaleur . . . . .	119	Approximation de . . . . .	528
Fonction de 9, 27, 34, 36, 80, 257,		Arnold . . . . .	528
303, 694, 749		Twyford	
en $z$ . . . . .	484, 525	Thomas . . . . .	20
Transformation			
de Laplace . . . . .	174		
étoile . . . . .	474		
inverse . . . . .	36, 703		
de Park . . . . .	430		
de similarité . . . . .	486		
en $z$ . . . . .	481, 703		
étoile			
temporelle . . . . .	474		
inverse de Laplace . . . . .	36, 703		
Transformée			
de Laplace . . . . .	34		
étoile . . . . .	482		
en $z$ . . . . .	481, 703		
Transistor			
à effet de champ ou J-FET . . . . .	30		
Transition			
Matrice de . . . . .	168		
Transitoire			
Régime . . . . .	172, 178, 675		
Transitoires			
Performances . . . . .	300, 530		
Transmission directe . . . . .	72, 374		
Transporteur personnel . . . . .	117		
Transposition . . . . .	637, 738		
-conjugaison . . . . .	637, 737		
<i>Transrapid</i> . . . . .	588		
Triangulaire			
inférieure			

## U

Uderzo	
Albert Aleandro . . . . .	229
Unitaire	
Matrice . . . . .	249, 654
Unité imaginaire . . . . .	737
University College de Londres . . . . .	214

## V

Valeur	
propre d'une matrice . . . . .	83, 89, 92, 179, 246, 301, 487, 503, 509, 659, 666, 676, 710, 745
singulière . . . . .	665, 666, 746
Valeur finale	
Théorème de la . . . . .	35
en discret . . . . .	705
Valeur initiale	
Théorème de la . . . . .	35
en discret . . . . .	705
Valeurs Singulières	
Décomposition en . . . . .	665, 746
Vapeur	

Machine à.....	21
Vecteur.....	636
d'état.....	69
d'observation.....	72
de mesure.....	72
de sortie.....	72
Définition d'un.....	636
Norme euclidienne d'un.....	645
Norme-2 d'un.....	645
propre	
à droite d'une matrice	660, 676, 746
à gauche d'une matrice	660, 676
d'une matrice.....	92
Vectorisation	
d'une matrice.....	637
Verité	
Tables de.....	492
Vichenegradski	
Ivan Alekseïevitch.....	230, 684
Vitesse	
angulaire.....	299
Voiture.....	10, 13
Volterra	
Vito.....	106

## W

Waterloo	
Bataille de.....	214
Watt	
James.....	18, 21, 229
Weiland	
Siep.....	629
Whittaker	
Edmund Taylor.....	558
John Macnaghten.....	558

Wiener	
Norbert.....	492, 779
Wikipedia.....	565
Willems	
Jan Camel.....	776
Wisconsin	
Université du.....	77
Woodbury	
Formule de.....	654
Identité matricelle de.....	654

## Y

Yakoubovitch	
Vladimir Andreevitch ...	275, 781

## Z

Zadeh	
Lotfi Aliasker.....	165, 482, 556
Zehden	
Alfred.....	587
Zéro	
d'une fonction de transfert	37, 51, 55, 303, 681, 693, 752
d'une fonction de transfert en $z$	485
d'une réalisation.....	681
instable.....	681
stable.....	681
Zone	
linéaire.....	32
morte.....	32
Zurich.....	230
École Polytechnique Fédérale de	215





*Editions L & A*