UN PREMIER PAS EN AUTOMATIQUE

O. Bachelier

Université de Poitiers

IUT de Poitiers-Châtellerault-Niort

Département de Mesures Physiques, 2ème année

Plan

- Introduction à l'automatique des systèmes linéaires continus
- Modélisation des systèmes linéaires continus
- Réponses des systèmes linéaires continus
- Stabilité des systèmes linéaires continus
- Quelques éléments de commande des systèmes linéaires continus

Avant-propos

- Il est difficile de suivre ce diaporama sans les explications qui vont avec.
- Pour une compréhension du cours en autonomie, mieux vaut se référer aux notes de cours disponibles **ici**.
- Malgré cela, ce cours n'est qu'un premier pas dans le domaine de l'automatique.

Introduction à l'automatique

Notions de système, de boucle... presque sans équation

Définition de l'Automatique par le Petit Robert

Ensemble de *disciplines scientifiques*[1] et des techniques utilisées pour la *conception et l'emploi des dispositifs*[2] qui fonctionnent *sans l'intervention d'un opérateur humain*[3].

Introduction à l'Automatique

1. *disciplines scientifiques :* ceci suggère que l'Automatique requiert une activité théorique afin de réaliser :
   - une modélisation mathématique d'un dispositif ;
   - une analyse de ses propriétés sur la base du modèle ;
   - la conception d'une loi de commande, toujours sur la base du modèle.
2. *conception et emploi de dispositifs :* ceci relève en fait de la mise en œuvre pouvant faire intervenir des disciplines telles que l'électronique, l'informatique...
3. *sans l'intervention d'un opérateur humain :* cette dernière expression fait apparaître la notion de systèmes automatisés qui permettent :
   - d'améliorer les performances d'un dispositif, son confort (exemples : climatisation, suspension active) ;
   - d'améliorer la sécurité (exemples : pilote automatique, bras robotisé remplaçant un opérateur humain).

Notion de système

Processus dynamique transformant des grandeurs ou signaux (les *entrées* ou *commandes* u_i) en d'autres grandeurs ou signaux (les *sorties* y_i) sous l'influence éventuelle de grandeurs ou signaux extérieurs non maîtrisés (les *perturbations* d_i).

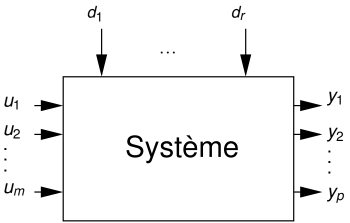


Figure: Système comprenant m entrées, p sorties et r perturbations

La plupart du temps, les commandes, perturbations et sorties sont des grandeurs physiques $\Rightarrow$ application dans tous les domaines de la physique, voire des sciences naturelles.

Mais on peut imaginer des systèmes ou les signaux sont moins concrets donnant lieu à des systèmes économiques, financiers, ou encore démographiques.

Cadre de travail

Quelques restrictions pour notre étude !!!

- Entrées (commandes et perturbations) ainsi que sorties sont des signaux continus (définis à tout instant *t*) On parle d'automatique des *systèmes à temps continu* ou simplement des *systèmes continus*.
- Systèmes uniquement décrits par des équations différentielles linéaires à coefficients constants (comme les filtres étudiés en traitement du signal). On parle alors de *systèmes linéaires (invariants dans le temps)*. Ces systèmes respectent le *principe de superposition*

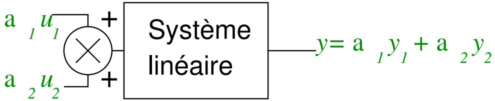


Figure: Principe de superposition

Remarque : Le modèle mathématique utilisé pour décrire le système est obtenu soit par identification (on fait correspondre un modèle donné au comportement entrées/sorties constaté du système), soit grâce à une modélisation par des équations. Ces équations différentielles sont souvent non linéaires. Cependant, on peut travailler dans une gamme de valeurs autour d'un point de fonctionnement et les équations sont alors raisonnablement remplaçables par des équations différentielles linéaires.

- Restriction aux systèmes *monovariables* (une seule commande, une seule sortie) par opposition aux systèmes *multivariables* (plusieurs commandes, plusieurs sorties).

En résumé

Ce cours concerne les systèmes **linéaires monovariables continus.**

La Boucle

Une notion absolument fondamentale en Automatique !!!

Idée : on cherche à maîtriser la sortie y du système. À chaque instant on mesure y et on tient compte de cette information pour faire évoluer la commande u de façon à ce que le système fasse lui-même évoluer favorablement y. Il y a donc un *retour*, une *boucle*, une *rétroaction*, une *contre-réaction*, en anglais, un *feedback*.

L'automatique n'existerait pas en tant que discipline scientifique sans cette notion de boucle. C'est elle qui rend plein de choses possibles. C'est aussi elle qui complique tout et rend certains phénomènes peu intuitifs.

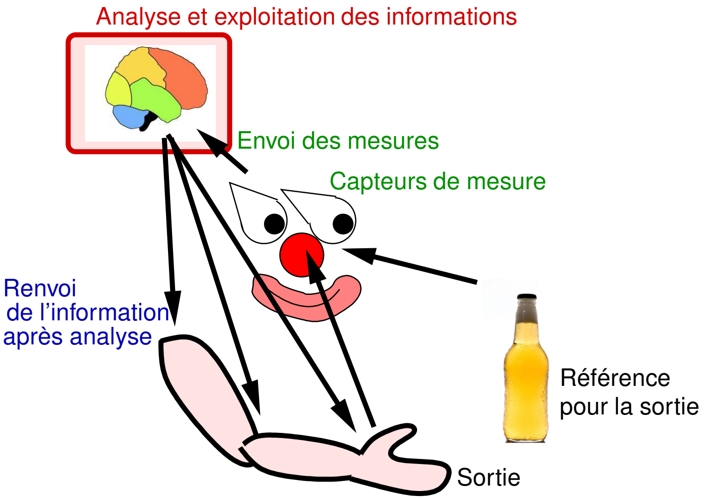


Figure: Un automaticien expérimentant la notion de boucle. Écoutez attentivement les explications du clown !

Question fondamentale : Comment tenir compte intelligemment de y pour faire évoluer u ?

Souvent la boucle suit un modèle mathématique plus ou moins compliqué qui est appelé *loi de commande.* Elle permet d'assurer deux activités essentielles en Automatique :

- *l'asservissement* qui consiste à faire en sorte que les sorties se comportent comme des références données, comme illustré par l'exemple ;
- *la régulation* qui consiste à tenter de réduire l'effet sur les sorties d'éventuelles perturbations, notamment en présence de références constantes.

L'objectif plus précis d'une boucle est de faire en sorte que le système ainsi bouclé possède des propriétés *(performances)* telles que :

- *la stabilité* qui assure que la sortie ne diverge pas (à l'infini) ;
- *le temps de réponse* qui assure une certaines vitesse de convergence de la sortie ;
- *l'absence éventuelle d'oscillations des sorties* ;
- *la précision*, qui assure que la convergence de la sortie se fait vers la bonne valeur.

Exercice : Interpréter ces différentes performances dans le cas du clown alcoolique.

Nécessité d'une régulation étudiée

La boucle ne peut pas toujours être simple !

On souhaite asservir la vitesse d'un ventilateur destiné à refroidir un système électronique. Le procédé est constitué d'un petit moteur excité par une tension *u* et entraînant la rotation du ventilateur comme le montre la figure 4.

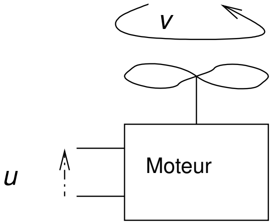


Figure: Ventilateur

On souhaite que v, la vitesse angulaire du ventilateur, soit égale à une consigne donnée v_c. Pour ce faire, on adopte une commande correspondant au schéma suivant.

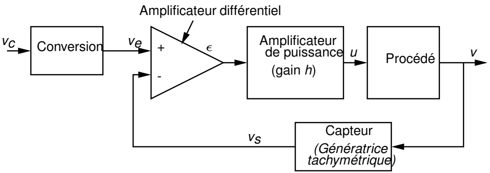


Figure: Tentative de régulation de la vitesse du ventilateur

Paradoxe

Peut-on obtenir $v = v_c$?

$v = v_c \Rightarrow v_e = v_s \Rightarrow \epsilon = v_e - v_s = v_c - v = 0$

$\Rightarrow u = h\epsilon = 0$

$\Rightarrow$ Le moteur ne tourne pas !

Nous nous évertuerons entre autres à résoudre ce petit paradoxe. En attendant, convenons que cette régulation simple ne fonctionne pas.

Les grandes lignes du cours

Qu'allons-nous étudier ?

- la *modélisation* ou comment décrire mathématiquement les systèmes que nous étudierons (notion de *fonction de transfert*) ;
- la *réponse des sytèmes*, ou comment les systèmes les plus courants réagissent à des sollicitations au niveau de leur commande (*réponses temporelles* et *réponses harmoniques ou fréquentielles*) ;
- la *stabilité*, qui est la propriété impérative que doit posséder un système ;
- la *commande*, c'est-à-dire comment concevoir la boucle afin d'obtenir des performances souhaitées ou s'en rapprocher autant que possible *(régulateur PID)*.

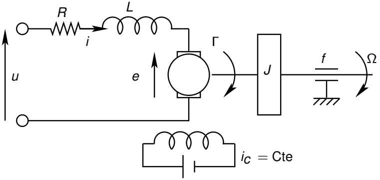
Modélisation des systèmes linéaires continus

...ou comment décrire mathématiquement les systèmes.

Système fil rouge

On étudie un exemple qui servira pour expliquer le principe de la modélisation

Moteur électrique à courant continu, à commande d’induit



Équations du système :

- L'équation électrique au niveau de l'induit est

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + e = u, \tag{1}$$

où u est la commande d'induit, i est le courant d'induit, et R et L sont respectivement la résistance et l'inductance d'induit. La grandeur e est une force électromotrice.

- Le couple moteur Γ s'écrit

$$\Gamma = Ki, \tag{2}$$

où K est une constante liée au flux inducteur lui-même constant.

• La force électromotrice e est donnée par

$$e = K\Omega, \tag{3}$$

où Ω est la vitesse de l'arbre du moteur (c'est le même K).

• Enfin, la relation fondamentale de la dynamique conduit à écrire

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma - f\Omega, \tag{4}$$

où J est le moment d'inertie et f un coefficient relatif aux forces de frottement générant un couple résistant $\Gamma_r = f\Omega$.

L'entrée est ici u et la sortie est $y = \Omega$.

Modélisation des systèmes

Ce jeu d'équations constitue un modèle du système mais il fait intervenir des signaux qui ne sont ni l'entrée ni la sortie. Nous allons établir un modèle mathématique qui relie directement l'entrée u à la sortie y sans faire intervenir d'autres signaux.

Equation différentielle unique...

...reliant u et y

Notation : $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$.

Les relations (4) et (2) conduisent à écrire

$$J\dot{y} + fy \ = \ Ki,$$

ce qui, après dérivation par rapport au temps, compte tenu des équations (1) et (3), s'écrit

$$J\ddot{y} + f\dot{y} = K\dot{i} = \frac{K}{L}(u - Ri - Ky)$$
$$\Leftrightarrow \ JL\ddot{y} + fL\dot{y} + K^2 y \ = \ Ku - RKi.$$

Or $Ki = \Gamma$ et on peut à nouveau utiliser (4) pour aboutir à

$$JL\ddot{y} + (RJ + fL)\dot{y} + (fR + K^2)y \ = \ Ku.$$

On obtient donc une équation différentielle unique reliant l'entrée u à la sortie y :

$$JL\ddot{y} + (RJ + fL)\dot{y} + (fR + K^2)y \; = \; Ku. \tag{5}$$

C'est un *modèle entrée/sortie*. On peut aussi envisager un modèle simplifié en négligeant l'inductance qui peut être faible ($L \simeq 0$) :

$$RJ\dot{y} + (Rf + K^2)y \; = \; K_1 u. \tag{6}$$

Plusieurs modèles de qualités différentes peuvent donc être obtenus.

Remarque

Pour cet exemple, le modèle était déjà linéaire. En effet, l'équation différentielle dépend linéairement de l'entrée, de la sortie et de leurs dérivées successives. Ce n'est pas toujours le cas. Lorsque ce n'est pas le cas, il convient de recourir à quelque approximation pour que les éléments non linéaires soient remplacés par des éléments linéaires. Ces approximations ne sont généralement justifiées que dans une gamme de valeurs correspondant à de petites variations autour d'un point de fonctionnement au voisinage duquel le comportement du système correspond à peu près à un modèle linéaire.

L'équation différentielle unique, quoiqu'intéressante, ne sera pas le modèle retenu pour décrire les systèmes mais juste une étape de notre raisonnement.

Elle est en effet potentiellement compliquée à résoudre en y si elle est d'ordre élevée ou si la commande u est un signal un peu sophistiqué.

On lui préférera une autre modèle introduit ci-après.

Transformation de Laplace

Un outil abstrait mais utile

Toute fonction causale $f(t)$ (telle que $f(t) = 0 \, \forall t < 0$) peut subir une *transformation dite de Laplace* , notée $\mathscr{L}$, et ainsi définie :

$$f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} \mathrm{d}t.$$

$F(p)$, si elle existe, c'est-à-dire si l'intégrale est calculable, est appelée *transformée de Laplace* de $f(t)$ et la variable complexe $p = \alpha + j\beta$ (notée s dans les ouvrages de langue anglo-saxonne) est la *variable de Laplace*.

Propriétés de la transformation de Laplace

Première partie

- linéarité :

  $$f_1(t) + kf_2(t) \stackrel{\mathscr{L}}{\longmapsto} F_1(p) + kF_2(p), \quad k \in \mathbb{R}$$

- théorème de la dérivation :

  - $\dot{f}(t) \stackrel{\mathscr{L}}{\longmapsto} pF(p) - f(0)$
  - $\ddot{f}(t) \stackrel{\mathscr{L}}{\longmapsto} p^2F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$
  - $\dfrac{d^l f(t)}{dt^l} \stackrel{\mathscr{L}}{\longmapsto} p^l F(p) - p^{l-1} f(0) - p^{l-2}\dot{f}(0) - \ldots - \dfrac{df^{l-1}(0)}{dt^l}$

  La multiplication par p correspond donc, en présence de conditions initiales nulles, à une *dérivation*.

Propriétés de la transformation de Laplace

Deuxième partie

- théorème de l'intégration :
  - $\int_0^{t \geq 0} f(\tau) d\tau \overset{\mathscr{L}}{\longmapsto} \frac{F(p)}{p}$

  La division par p est donc l'opérateur d'*intégration* dans le domaine de Laplace.
- théorème du retard :
  - $f(t-\theta) \overset{\mathscr{L}}{\longmapsto} e^{-\theta p} F(p)$
- théorème du décalage fréquentiel :
  - $f(t) e^{\omega t} \overset{\mathscr{L}}{\longmapsto} F(p+\omega)$

Propriétés de la transformation de Laplace

Troisième partie

- <u>théorème de la valeur initiale :</u>
  - $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to \infty} pF(p)$

  (sous réserve d'existence des deux limites)
- <u>théorème de la valeur finale :</u>
  - $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p)$

  (sous réserve d'existence des deux limites)

Propriétés de la transformation de Laplace

Quatrième partie

Nous ne serons pas amenés à calculer des transformées de Laplace car il existe des tableaux de transformées (cf. polycopié de notes de cours).

En revanche, nous utiliserons quelques propriétés en diverses occasions.

Il existe une transformation de Laplace inverse (non définie ici). Pour l'appliquer, il nous suffira d'utiliser les tableaux de transformées en sens inverse.

Obtention d'un nouveau modèle

On applique $\mathscr{L}$ à l'équation différentielle

On reprend l'exemple du moteur à courant continu. Pour simplifier le développement, les paramètres prendront les valeurs simples (mais fort peu réalistes) suivantes :

- $J = 1kg.m^2$
- $f = 1N.m.s$
- $R = 1\Omega$
- $L = 10mH$
- $K = 1N.m/A = 1V.s$

Compte tenu de ces valeurs numériques, l'équation (5) s'écrit

$$\begin{aligned} 10^{-2}\ddot{y} + 1{,}01\dot{y} + 2y &= u \\ \Leftrightarrow\ \ddot{y} + 101\dot{y} + 200y &= 100u. \end{aligned}$$

En appliquant $\mathscr{L}$, il vient

$$p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 101pY(p) - 101y(0) + 200Y(p) = 100U(p) \ \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{(p^2 + 101p + 200)}_{D(p)}\ Y(p) \ = \ \underbrace{100}_{N(p)}\ U(p) \ + \ \underbrace{(p + 101)y(0) + y'(0)}_{I(p)} \ \Leftrightarrow$$

$$\boxed{Y(p) = \underbrace{\frac{N(p)}{D(p)}}_{G(p)}\ U(p) + \frac{I(p)}{D(p)}.}$$

Fonction de transfert

$I(p)$ dépend des conditions initiales qui changent à chaque fois.

$G(p)$ traduit le lien entre u et y dans le domaine de Laplace, indépendamment des conditions initiales. C'est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes en p. Elle est appelée *fonction de transfert* ou *transmittance*.

Dans l'exemple, $G(p)$ peut s'écrire :

$$G(p) = \frac{100}{p^2 + 101p + 200} = \frac{100}{(p - p_1)(p - p_2)}, \quad \text{avec } p_1 \simeq -2 \text{ et } p_2 \simeq -98.$$

p_1 et p_2, les racines de $D(p)$, sont appelés *pôles de $G(p)$*. Ils ont une grande influence sur le comportement du système. Lorsqu'il existe des racines au numérateur, elles sont appelées *zéros de $G(p)$* et peuvent également influencer le comportement du système... mais moins que les pôles.

$G(p)$ peut encore s'écrire :

$$G(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}, \quad \text{avec } \tau_1 = -\frac{1}{p_1} \simeq 0,5, \;\; \tau_2 = -\frac{1}{p_2} \simeq 0,01 \text{ et } K \simeq 0,5.$$

τ_1 et τ_2, que l'on ne peut faire apparaître que lorsque les pôles sont réels, sont appelées *constantes de temps* du système. On note ici que τ_1 est beaucoup plus élevée et correspond approximativement à la dynamique mécanique alors que τ_2 est plutôt liée aux phénomènes électriques.

K est le *gain statique* et correspond à l'amplification quand les signaux sont constants.

Si L est négligée, on peut appliquer $\mathscr{L}$ à l'équation différentielle simplifiée (6) et l'on obtient

$$G(p) = \frac{1}{p+2} = \frac{0,5}{1+0,5p}.$$

Dans ce modèle simplifié, il ne reste qu'un pôle égal à -2 ou une seule constante de temps égale à $0,5$. Ceci revient à peu près à ne considérer que la dynamique mécanique.

Fonction de transfert

Cas général

Dans le cas linéaire général, on obtient (après d'éventuelles simplifications) une équation différentielle :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y =$$

$$b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u.$$

L'application de $\mathscr{L}$ en considérant des conditions initiales nulles conduit à

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}. \qquad (7)$$

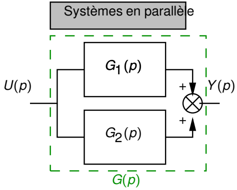
Le degré du numérateur $N(p)$ est m et celui du dénominateur $D(p)$ est n. n est également appelé *ordre du système*.

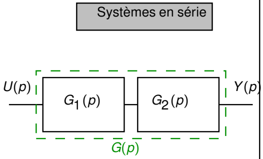
$D(p)$ est aussi appelé *polynôme caractéristique* et $D(p) = 0$ est l'*équation caractéristique*. Les *pôles* sont donc les racines de $D(p)$ alors que les *zéros* sont les racines de $N(p) = 0$.

Causalité : on doit vérifier $m \leq n$ ($m < n$). On dit que le système est *causal* (*strictement causal*), ou que $G(p)$ est *propre* (*strictement propre*). Cela signifie que le modèle correspond à un système physiquement réalisable pour lequel la sortie y à instant t ne peut dépendre que des valeurs passées et présentes (ou uniquement passées) de l'entrée u.

Association de fonctions de transferts

Mise en série / mise en parallèle





$G(p) = G_1(p) + G_2(p)$	$G(p) = G_1(p)G_2(p)$

Association de fonctions de transferts

La boucle fermée

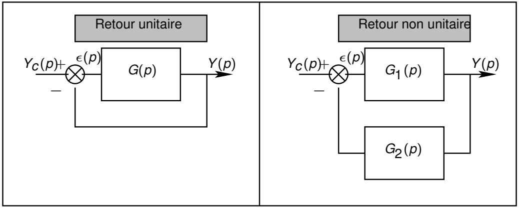


Figure: Deux cas envisagés pour le bouclage

Les deux cas peuvent en réalité se ramener à un bouclage unitaire mais avec des chaînes directes différentes. La *chaîne directe* correspond au système mais sans le bouclage résultant du soustracteur. Ainsi, dans les deux cas précédents, on a :

- **Retour unitaire :**

$$L(p) = G(p)$$

- **Retour non unitaire :**

$$L(p) = G_1(p)G_2(p)$$

La fonction de transfert *du système bouclé* est alors

- **Retour unitaire :**

$$\boxed{\mathrm{H(p)}=\frac{Y(p)}{Y_c(p)} = \frac{G(p)}{1+G(p)}}$$

- **Retour non unitaire :**

$$H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)} = \frac{G_1(p)}{1+G_1(p)G_2(p)}$$

Dans les deux cas, cette formule est appelée *formule de Black*.

La formule encadrée sera cruciale pour nous !

Réponses des systèmes linéaires continus

...Que se passe-t-il en sortie si on impose une commande classique ?

Définition de la réponse

Expression ou forme de la sortie $y(t)$ connaissant la commande $u(t)$.

La réponse dépend donc du système considéré mais aussi de la commande.

Il y a donc une infinité de réponses possibles puisqu'il y une infinité de commandes possibles mais seules certaines nous intéressent ici:

- la réponse impulsionnelle (traitée brièvement) ;
- la réponse indicielle ;
- la réponse harmonique (ou fréquentielle).

Seuls les systèmes les plus simples (mais répandus) seront considérés.

Réponse impulsionnelle

C'est la réponse à une impulsion de Dirac.

Rappel : l'impulsion de Dirac est une impulsion se produisant à l'instant 0, infiniment brève et infiniment haute, dont l'intégrale sur l'horizon de temps est égale à 1. On la note $\delta(t)$.

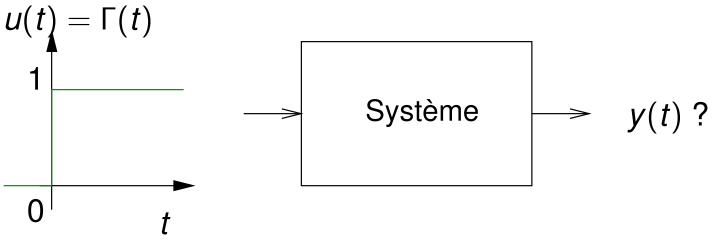
on a $\delta(t) \xmapsto{\mathscr{L}} 1$. Ainsi, il vient $Y(p) = G(p)U(p) = G(p)$
La transformée de Laplace de la sortie est égale à la fonction de transfert. Par conséquent, la réponse impulsionnelle du système est la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert.

Intérêt théorique mais n'intervient pas vraiment en pratique.

Réponses des systèmes

Réponse indicielle

C'est la réponse à un échelon unitaire (fonction de Heaviside).



On traite ici la réponse indicielle des systèmes canoniques de premier ordre et de deuxième ordre.

Réponse indicielle d'un système canonique de premier ordre

Fonction de transfert d'un système canonique de 1er ordre (système de premier ordre stable à numérateur constant) :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}.$$

K est appelé *gain statique* et τ est appelé *constante de temps*.
Cette fonction de transfert correspond, en appliquant la transformation inverse de Laplace, à l'équation différentielle

$$y(t) + \tau \dot{y}(t) = K u(t), \ \ t \geq 0.$$

Réponses des systèmes

La *réponse indicielle* est donc la solution de cette équation différentielle lorsque $u(t)$ est une échelon unitaire. Elle dépend de la condition initiale $y(0)$. Si l'on choisit $y(0) = 0$ on obtient (voir cours de maths ou les détails dans les notes de cours) :

$$\boxed{y(t) \ = \ K(1 - e^{-t/\tau}) \quad \forall t \geq 0.}$$

On peut retrouver ce résultat directement à partir de la fonction de transfert puisque l'on ne considère pas de conditions initiales. On note d'abord que $U(p) = \mathscr{L}(u)(t) = 1/p$ *(Transformée de Laplace de l'échelon)*, ce qui conduit à écrire

$$Y(p) = G(p)U(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)}.$$

La *décomposition en éléments simples* (voir cours de maths) aboutit à

$$Y(p) = \frac{\frac{K}{\tau}}{p(p+\frac{1}{\tau})} = \frac{K}{p} - \frac{K}{p+\frac{1}{\tau}}.$$

En appliquant $\mathscr{L}^{-1}$, il vient (cf. tableau de transformées)

$$y(t) = K\Gamma(t) - Ke^{-t/\tau}\Gamma(t)$$

ce qui implique bien

$$\boxed{y(t) = K(1-e^{-t/\tau}) \quad \forall t \geq 0.}$$

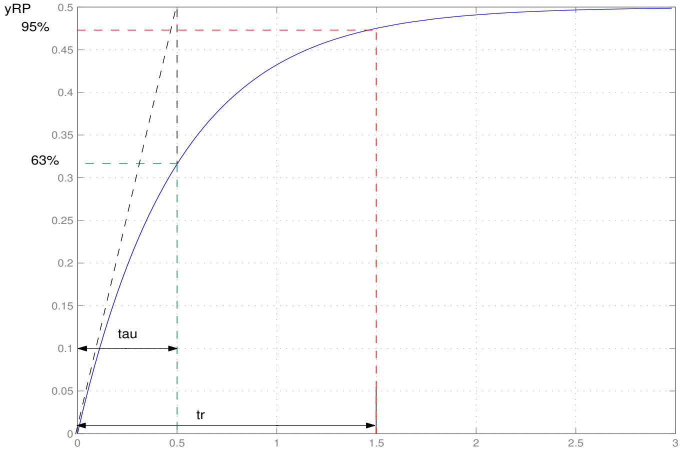


Figure: Réponse indicielle d'un premier ordre canonique : cas du modèle simplifié du moteur

Le signal de sortie tend *asymptotiquement* vers une valeur (ici $0,5$) sans jamais l'atteindre mathématiquement. Cette convergence asymptotique est toujours vérifiée pour les modèles linéaires qui sont dits *stables* (cette propriété sera étudiée ultérieurement).

Dans la réponse, on distingue deux phases :

- le *régime transitoire* qui dure un temps t_r appelé *temps de réponse* ;
- le *régime permanent* c'est à dire quand le signal de sortie $y(t)$ reste entre 95% et 105% de sa valeur finale y_{RP} (correspondant à l'asymptote).

Sur la courbe, on constate que le temps de réponse correspond à l'instant où le signal atteint $0,475$, soit $t_r = 1,5s$.

Détermination du gain statique :

Par ailleurs, on définit :

- $\Delta Y = y_{RP} - y(0)$ (ici $\Delta Y = 0,5 - 0 = 0,5$) ;
- ΔU (ici $\Delta U = 1 - 0 = 1$).

On a :

$$K = \frac{\Delta Y}{\Delta U} = G(0).$$

(formule valable pour toute fonction de transfert)

Détermination de la constante de temps :

- à partir du temps de réponse car $t_r = 3\tau$ (uniquement pour un premier ordre) ;
- τ correspond au temps que met le signal de sortie pour varier de 63% de ΔY (uniquement pour un premier ordre) ;
- la tangente à la courbe au niveau du point initial $(0; y(0))$ coupe l'asymptote du régime permanent à $t = \tau$ (uniquement pour un premier ordre).

Réponse indicielle d'un système canonique de deuxième ordre

Fonction de transfert d'un système canonique de 2ème ordre (une classe de systèmes de second à numérateur constant) :

$$G(p) = \frac{K}{1 + 2\frac{m}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2} = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2m\omega_n p + \omega_n^2}.$$

- K : *gain statique* ;
- m : *coefficient (ou facteur) d'amortissement* ;
- ω_n : *pulsation propre non amortie* ;

La réponse indicielle ne sera pas explicitement exprimée mais son allure sera donnée en fonction de m.

Réponses des systèmes

On note λ_1 et λ_2 les pôles de $G(p)$.
Pour simplifier , $K = 1$.
On distingue les 5 cas suivants.

- $m > 1 \Rightarrow \lambda_1$ et λ_2 sont réels négatifs. La réponse est dite *apériodique*, c.-à-d. sans oscillation.

- $m = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ (pôle réel négatif double). La réponse reste *apériodique.*

- $0 < m < 1$ $\Rightarrow \lambda_2$ et λ_2 sont complexes conjugués mais à partie réelle **négative**. La réponse est oscillatoire amortie avec une pulsation ω_p. Elle est dite *pseudo-périodique*. Les oscillations augmentent si m est moindre.

  - $m \geq 0,707$: oscillations non apparentes (peut-être un léger dépassement) ;
  - $m < 0,707$: oscillations vraiment apparentes ;

  m=0 $\Rightarrow \lambda_1$ et λ_2 sont imaginaires purs conjugués. La réponse est tout simplement sinusoïdale de pulsation ω_n (d'où le nom *pulsation propre non amortie*).

- $m < 0$ $\Rightarrow\lambda_2$ et λ_2 sont complexes conjugués mais à partie réelle **positive**. La réponse est oscillatoire, non amortie et diverge vers une amplitude infinie. Ceci correspond à un système *instable* (voir partie suivante).

Remarque

Il peut exister le cas où les pôles λ_1 et λ_2 sont réels mais au moins l'un des deux est positif. Dans ce cas, la réponse diverge sans osciller.
Un tel système de deuxième ordre n'est pas canonique*.*

Réponses des systèmes

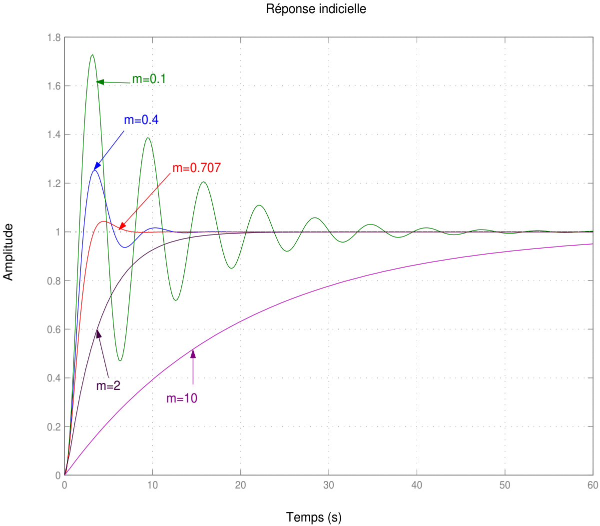


Figure: Réponse indicielle d'un deuxième ordre ordre canonique ($K = 1$, $\omega_n = 1$ et $m > 0$)

Cas du moteur "fil rouge"

Rappel du modèle :

Modèle "complet" :

$$G(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \quad \text{avec } \tau_1 = -\frac{1}{p_1} \simeq 0,5, \ \tau_2 = -\frac{1}{p_2} \simeq 0,01 \text{ et } K \simeq 0,5,$$

$\Rightarrow$ modèle canonique de 2ème ordre apériodique ($m > 1$)

Modèle "simplifié":

$$G_s(p) = \frac{K}{(1+\tau p)} \quad \text{avec } \tau - = 0,5, \text{ et } K \simeq 0,5.$$

$\Rightarrow$ modèle canonique de 1er ordre

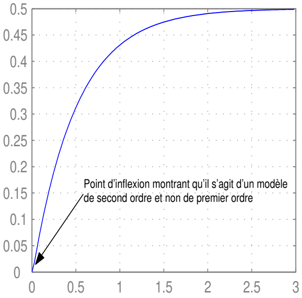


Figure: Réponse indicielle du modèle complet du moteur électrique

La réponse ressemble à celle d'un 1er ordre mais il y a une *tangente horizontale à l'origine* et un *point d'inflexion*.

A propos des pôles

Si l'on considère un système dont les pôles ont tous une partie réelle strictement négative, on peut affirmer :

Remarque sur les pôles

Plus la partie imaginaire est grande devant la partie réelle (en valeur absolue), plus les oscillations sont marquées.
En revanche, des pôles réels n'engendrent pas d'oscillation.

Réponses des systèmes

Que se passe-t-il lorsqu'il y a des pôles réels et complexes dans le même modèle ? Il faut distinguer :

- les *pôles dominants* (partie réelle faiblement négative) correspondant aux dynamiques lentes (la dynamique mécanique dans le cas du moteur),
- des *pôles rapides* (partie réelle fortement négative) correspondant aux dynamiques rapides (la dynamique électrique dans le cas du moteur).

Influence des pôles

Ce sont les pôles dominants qui ont la plus grosse influence sur le régime transitoire.

Par ailleurs, le cas des pôles à partie réelle positive sera traité ultérieurement dans le cadre de la *stabilité* des systèmes.

Influence des zéros

Elle est beaucoup plus difficile à analyser que celle des *pôles*.
Elle est aussi moindre car les zéros ne jouent pas sur la stabilité du système, c'est-à-dire sur la convergence de la réponse vers une valeur finale.
Ils peuvent engendrer des dépassement vers le haut ou vers le bas de la réponse.

Remarque sur les modèles d'ordre élevé

Pour étudier la forme de la réponse d'un système d'ordre supérieur, il peut être astucieux de trouver un modèle d'ordre 1 ou 2 qui soit une bonne approximation de son comportement, par exemple en négligeant certaines dynamiques rapides (en ne considérant que les *pôles dominants*).

Réponse fréquentielle

Une vision harmonique de la réponse d'un système.

Si l'on considère que tout signal d'entrée peut être décomposé en une somme (finie ou infinie, discrète ou continue) de signaux sinusoïdaux de diverses fréquences (cf. cours de traitement du signal), il est important de savoir comment un système réagit à des excitations selon la *fréquence* f (ou la *pulsation* ω : on rappelle que $\omega = 2\pi f$).

La réponse dépend donc de la pulsation ω aussi parle-t-on de *réponse fréquentielle ou harmonique*.

Lien avec la fonction de transfert

Pour un un système linéaire, on a :

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) \Rightarrow y(t) \;=\; A(\omega) U_m \sin(\omega t + \phi(\omega)).$$

La réponse est donc sinusoïdale de même fréquence que la commande mais déphasée.

Le *gain harmonique* $A(\omega)$ vérifie

$$A(\omega) \;=\; |G(j\omega)|.$$

En outre, le *déphasage* est tel que

$$\phi(\omega) \;=\; \arg(G(j\omega)).$$

Réponses des systèmes

Ainsi, si l' on connait $G(p)$, on peut déduire $G(j\omega)$ et disposer des informations nécessaires pour établir la réponse harmonique.

Mais on ne peut pas tracer une sinusoïde pour chaque valeur de f ou ω... c'est un peu long !!!

On préfère représenter, par exemple, $A(\omega)$ et $\phi(\omega)$ en fonction de ω.

Problème : Comment ne pas privilégier les hautes fréquences dans cette représentation ?

Solution possible : le *diagramme de Bode*.

Diagramme de Bode

- La pulsation, en abscisse, est graduée en échelle logarithmique ;
- L'amplification n'est pas donnée directement mais on porte en ordonnée ce que l'on appelle le *gain en décibels* soit $T(\omega) = 20\log(|G(j\omega)|)$, l'échelle restant alors linéaire ;
- Le déphasage est gradué en degrés ou en radians en utilisant une échelle linéaire.

Avantages :

- On peut tracer un diagramme asymptotique de Bode qui aide à la construction du diagramme réel.
- L'échelle logarithmique permet de ne pas privilégier les hautes fréquences.

Diagramme de Bode d'un 1er ordre canonique

Rappel du modèle (exemple du modèle simplifié du moteur) :

$$G(p) = \frac{K}{1+\tau p} \quad \text{avec} \quad K = 0,5 \quad \text{et} \quad \tau = 0,5$$

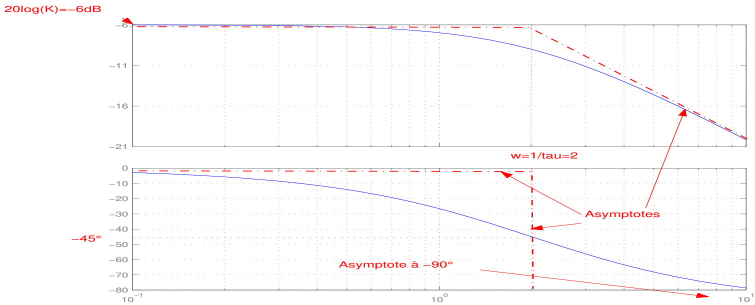


Figure: Diagramme de Bode du modèle de premier ordre du moteur à courant continu - Ecoutez les explications du clown !

On définit la *bande passante* d'un tel système par la gamme de pulsations (ou de fréquences) pour lesquelles le gain T se situe entre $T_0 - 3$ et T_0, c'est-à-dire l'intervalle de pulsations $[0; 1/\tau]$.

$\omega_c = 1/\tau$ est appelée *pulsation de cassure* ou de *coupure*.

À $\omega = \omega_c$, on $A(\omega_c) = \dfrac{A(0)}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow T(\omega_c) = T(0) - 3\text{dB}$.

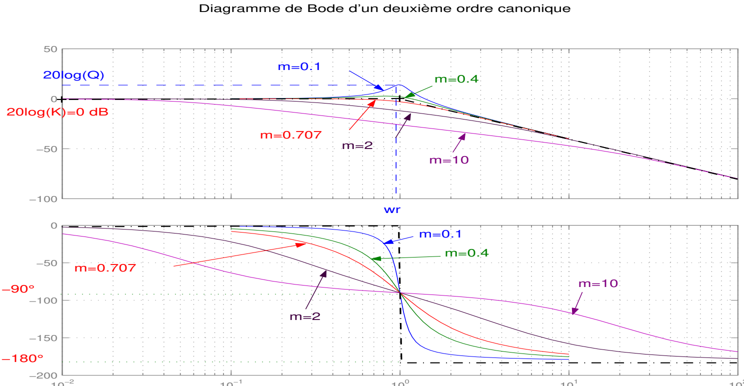
On a très précisément $\phi(\omega_c) = -45°$.

Diagramme de Bode d'un 2ème ordre canonique

Rappel du modèle :

$$G(p) = \frac{K}{1 + 2\frac{m}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2}.$$

Ecoutez le clown !



Réponses des systèmes

- $m \geq 1$ $\Rightarrow$ filtre passe-bas assez classique. En revanche pour des valeurs faibles de m.
- $0 < m < 1$ $\Rightarrow$ filtre présentant une résonance à la pulsation $\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2m^2}$

La résonance est quantifiée par le *coefficient de surtension* ou *facteur de surtension* Q, défini par

$$Q = \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(0)|} = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}.$$

Il vient

$$T(\omega_R) = T_0 + 20\log(Q) \quad \text{avec}$$

$T_0 = 20\log(K)$.
La résonance n'apparaît pas exactement à ω_n sauf si $m = 0$.
Dans ce cas, Q tend vers l'infini.

On a très précisément $\phi(\omega_n) = -90°$.

Diagramme de Bode de deux systèmes en série

... utile pour une chaîne direct $L(p) = R(p)G(p)$.

Soient deux systèmes correspondant globalement à une fonction de transfert

$$F(p) = G_1(p)G_2(p).$$

On a les deux propriétés suivantes :

$$T(\omega) = 20\log|F(j\omega)| = 20\log|G_1(j\omega)G_2(j\omega)| = 20(\log|G_1(j\omega)| + \log|G_2(j\omega)|)$$

$$\Leftrightarrow T(\omega) = T_1(\omega) + T_2(\omega).$$

$$\phi(\omega) = \mathrm{Arg}(F(j\omega)) = \mathrm{Arg}(G_1(j\omega)G_2(j\omega)) = \mathrm{Arg}(G_1(j\omega)) + \mathrm{Arg}(G_2(j\omega)) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega).$$

Ceci montre que les courbes de gain et de phase (asymptotiques ou réelles) doivent être géométriquement ajoutées dans le plan de Bode.

Remarque

Pour mieux comprendre les détails d'un tracé d'un diagramme de Bode (asymptotique notamment), il est possible de se référer aux annexes du polycopié de notes de cours.

Réponses des systèmes

Remarque

Il existe d'autres représentations fréquentielles utilisées en automatique mais non étudiées ici, notamment le diagramme de Black *et le* lieu de Nyquist.

Stabilité des systèmes linéaires continus

...La propriété sans laquelle rien n'est possible !

Stabilité

Il faut d'abord définir la notion d'état d'équilibre

Etat d'équilibre

Soit un système *autonome* ($u = 0$), et *non perturbé* ($d = 0$). On dit que le système est dans un *état d'équilibre* s'il est dans un état non modifié (les signaux n'évoluent pas).

Exemple : le moteur n'est excité par aucune tension ($u = 0$) et il ne tourne pas. Il est dans un état d'équilibre.

De façon générale, un système peut avoir plusieurs états d'équilibre qui n'ont pas forcément tous les mêmes propriétés.

Pour distinguer les différents états d'équilibre selon trois catégories, on peut procéder à l'analogie mécanique suivante.

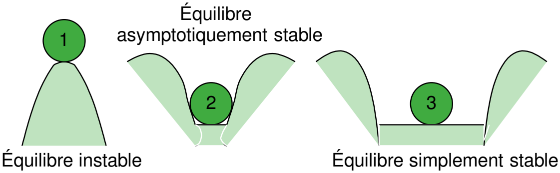


Figure: Stabilité des équilibres d'une bille

Question : Que se passe-t-il si l'on perturbe la position de la bille par une petite pichenette (perturbation instantanée) ?

Stabilité

Trois possibilités pour les états d'équilibre, dependant de l'effet de cette *perturbation instantanée*:

- *État d'équilibre instable* : le système s'écarte irrémédiablement de sa position d'équilibre (bille 1) ;
- *État d'équilibre asymptotiquement stable* : le système revient à sa position d'équilibre, éventuellement en un temps infini (bille 2) ;
- *État d'équilibre simplement stable* : le système retrouve un autre état d'équilibre à proximité de l'état initial (bille 3).

C'est la *stabilité asymptotique* qui est recherchée en automatique des systèmes linéaires.

En résumé

Un système autonome *(sans commande)* est dans un état d'équilibre *asymptotiquement stable* quand, écarté de cet état sous l'effet d'une perturbation temporaire, il revient à cet état (au bout d'un temps éventuellement infini, c'est d'ailleurs le cas mathématiquement avec les systèmes linéaires).

Remarque

Un système linéaire ne peut avoir qu'un seul point d'équilibre asymptotiquement stable, donc, par abus de langage, on dit que c'est le système qui est asymptotiquement stable.

Stabilité

Soit un système linéaire non autonome, c'est-à-dire pouvant être excité par une commande u ou une perturbation d.

Stabilité entrée-sortie

Ce système est *stable au sens entrée-sortie* si pour une entrée *u bornée* ou d'une perturbation *d bornée*, il répond par une sortie *y bornée*.

Autrement dit, la sortie d'un tel système ne peut diverger que parce que la commande (ou une éventuelle perturbation) l'incite à le faire, mais pas en raison de ses propriétés intrinsèques.

Influence sur le comportement entrée/sortie

Un système linéaire commandé est *stable au sens entrée-sortie* si et seulement si le système autonome associé est *asymptotiquement stable*.

On s'intéressera donc à la *stabilité asymptotique* qui est la propriété sans laquelle la convergence de la sortie y ne peut être garantie. Sans cette convergence, aucune autre propriété (rapidité, précision, absence d'oscillations, etc.) ne peut être obtenue.

Il faut pouvoir utiliser des critères de stabilité

Stabilité

Comment déduire la stabilité ou l'instabilité de la fonction de transfert ?

Soit la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{(p - z_1)(p - z_2)\dots(p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n)}.$$

Critère des racines

Un modèle linéaire (une fonction de transfert $G(p)$) est *asymptotiquement stable* si et seulement ses pôles p_i sont **tous** à partie réelle strictement négative.

Stabilité

On vient de voir que les pôles doivent être dans le demi-plan gauche ouvert pour garantir la stabilité.

Mais on a aussi vu, dans la partie précédente, que ces pôles ont une influence sur le comportement plus ou moins oscillatoire du système et sur la rapidité de la réponse.

Pour ces raisons on souhaite souvent que les pôles soient localisés dans certaines zones de ce demi-plan gauche, telles que...

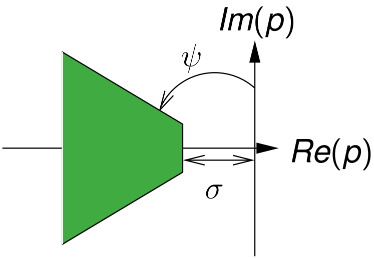


Figure: Stabilité dans le plan de Laplace

- σ =*marge de stabilité absolue* qui traduit la rapidité du système.
- $m = \sin(\psi)$ =*marge de stabilité relative* qui traduit l'amortissement du système (pour un 2ème ordre canonique, c'est le bien le facteur d'amortissement).

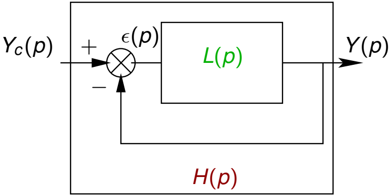
Stabilité

Auparavant, il pouvait être compliqué, sans les outils numériques, de calculer les pôles p_i. Les chercheurs ont développé des méthodes pour connaître le signe de la partie réelle des pôles, sans les calculer, en faisant des séries d'opérations simples à partir de $D(p)$ et en appliquant des critères précis, à savoir :

- *le critère de Hurwitz* ;
- *le critère de Routh*.

En réalité équivalents, et regroupés sous l'appellation *critère de Routh-Hurwitz*, ils seront les grand oubliés de ce cours par manque d'heures.

Il existe un critère qui permet, en cas de *retour unitaire*, d'analyser la stabilité de la *fonction de transfert en boucle fermée* $H(p)$ en regardant celle de la *chaîne directe* $L(p)$



Ce critère s'appelle le *critère de Nyquist*. Mais :

- Il repose sur la construction du *lieu de Nyquist*, non étudié ici ;
- il est assez compliqué à énoncer.

Pour de nombreux systèmes "simples", il peut être simplifié et interprété dans le plan de Bode, ce qui conduit au *critère du revers*.

Critère du revers

Un système bouclé unitairement est stable quand, sur le diagramme de Bode correspondant à la boucle ouverte (chaîne directe), à la pulsation pour laquelle on a un gain $T = 0dB$, la courbe correspondant au déphasage est encore au-dessus de $-180°$ ou quand, réciproquement, à pulsation pour laquelle le déphasage atteint $-180°$, le gain en décibels est déjà inférieur à $0dB$.

Ce critère est valable pour "presque tous" les systèmes.

Attention ! Ce critère a été établi pour attester ou non de la stabilité d'*un système bouclé par un retour unitaire simple* et de fonction de transfert $H(p)$. Cependant il s'applique en regardant la réponse, dans le plan de Bode, du *système en boucle ouverte*, c'est-à-dire, puisque le retour est unitaire, de la *chaîne directe* $L(p)$.

Ce critère du revers est *qualitatif*, c'est-à-dire qu'il donne une réponse "stable" ou "pas stable". On peut cependant le rendre *quantitatif* en introduisant les *marges de stabilité* qui peuvent dire dans quelle mesure $H(p)$ est stable ou instable.

Stabilité

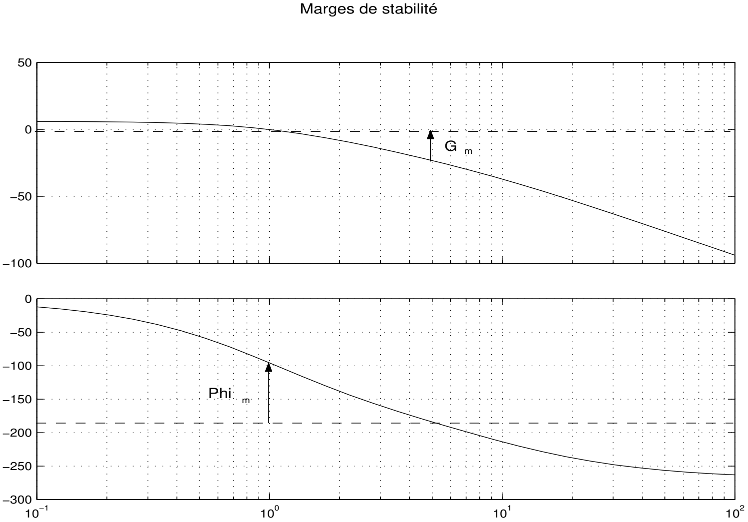


Figure: Marges de stabilité d'un modèle stable quelconque

Stabilité

S'il est plus facile de comprendre ce que sont ces marges d'un point de vue graphique, on peut néanmoins en donner une définition plus formelle :

- *Marge de phase* : $\Phi_m = 180° + \phi(\omega_\phi)$, où $\phi(\omega_\phi)$ désigne la phase à la pulsation ω_ϕ pour laquelle $T(\omega_\phi) = 0$dB.
- *Marge de gain* : $G_m = -T(\omega_g)$, où ω_g désigne la pulsation à laquelle le déphasage est de $-180°$.

La pulsation ω_ϕ est appelée *pulsation critique* et le gain $T(\omega_g)$ est appelé *gain critique*.

Stabilité

- Système $H(p)$ stable $\Leftrightarrow \Phi_m > 0 \Leftrightarrow G_m > 0$ (presque toujours vrai).
- Plus les marges sont positives (négatives), plus le système bouclé $H(p)$ est stable (instable).
- Si les horizontales $T = 0$dB et $\phi = -180^\circ$ ne sont pas coupées par le diagramme, les marges sont considérées comme infinies (positives ou négatives selon les cas).

Attention ! La plus grosse erreur de raisonnement serait de tracer le diagramme de Bode du système en boucle fermée pour en déduire ses marges de stabilité. Il faut tracer la réponse de la boucle ouverte pour conclure quant à la stabilité de la boucle fermée par un retour unitaire.

Un peu de commande des systèmes linéaires ou continus

...ou comment améliorer les propriétés d'un système

Commande

Idée : agir "intelligemment" sur la commande u pour que la sortie y se comporte de façon souhaitée.

L'arme incontournable pour agir "intelligemment", c'est la *boucle*.

On parle d'*asservissement* (suivi d'une référence variable) ou de *régulation* (rejet de perturbations en présence de consignes constantes), les deux étant regroupées sous l'appellation *commande*. On confondra allègrement ces vocables.

Commande

Dans ce cours, nous ne considérons que des systèmes bouclés de la façon suivante :

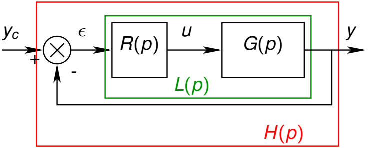


Figure: Schéma classique d'une régulation avec retour unitaire

Le but est donc de déterminer R(p).

R(p) est la fonction de transfert du *régulateur*, également appelé *correcteur*, *compensateur*, ou encore, par un vilain anglicisme, *contrôleur*.

La fonction de transfert elle-même est appelée *loi de commande* ou *algorithme de commande*.

Mais dans quel but calculer R(p) ?

Pour assurer certaines propriétés de la fonction de transfert $H(p)$, à savoir :

- la stabilité (impérative) ;
- la précision ($y = y_c$ en régime permanent) ;
- la rapidité (gestion du temps de réponse) ;
- la gestion des éventuelles oscillations dans la réponse ;
- la réduction de l'effet des éventuelles perturbations

Régulation proportionnelle

C'est en gros la régulation la plus simple

On suppose ici que $u(t) = A\epsilon(t)$ ce qui, par application de $\mathscr{L}$, revient à considérer

$$R(p) = A$$

Influence de A sur la stabilité

On commence par supposer que $A = 1$ (absence du régulateur mais pas de la boucle). On a donc

$$L(p) = AG(p) = G(p).$$

Si on trace le diagramme de Bode de $L(p) = G(p)$, on peut mesurer les marges de stabilité pour conclure sur la stabilité de $H(p)$.

Commande

Premier cas : $A > 0$. Que se passe-t-il sur le diagramme de Bode si on augmente (ou diminue) A ?

On a :

$$T = 20\log(|AG(j\omega)|) = 20\log(|G(j\omega)|) + 20\log(A)$$

Ceci ajoute donc un terme constant au gain en dB. Ce terme $20\log(A)$ est nul si $A = 1$, positif si $A > 1$ (la courbe de gain monte) et négatif si $A < 1$ (la courbe de gain descend). La courbe de phase n'est pas modifiée.

La plupart des systèmes ayant plutôt des comportements de passe-bas, la *pulsation critique* ω_ϕ pour laquelle $T(\omega_\phi) = 0$dB s'en trouve décalée vers la droite (gauche), là où la phase est généralement plus basse (haute). Ainsi, en toute probabilité, la marge de phase Φ_m baisse (monte).

En résumé

Si $A > 0$ augmente, ceci est généralement néfaste à la stabilité du système bouclé

Second cas : $A < 0$.

Le signe $-$ revient introduire une opposition de phase, c'est-à-dire à baisser la courbe de phase de $180°$. Il devient alors hautement improbable d'obtenir une marge de phase Φ_m positive. Le système $H(p)$ est alors **instable**.

En fait, $A < 0$ revient à inverser le sens de soustracteur ce qui revient à agir à l'inverse de ce qu'il faut faire.

On considèrera $A > 0$ en notant qu'une augmentation diminue la marge de phase Φ_m voire la rend négative. Une marge de phase positive mais faible correspond à un système stable mais peu amorti, donc oscillant.

En résumé

Une augmentation de $A > 0$ est néfaste à la stabilité de $H(p)$ et propice à l'apparition ou l'aggravation d'oscillations.
$A < 0$ est *a priori* à proscrire.

Influence de A sur la rapidité

Pour comprendre, on raisonne ici sur l'exemple simplifié du moteur "fil rouge", à savoir

$$L(p) = AG(p) = \frac{0,5A}{1+0,5p}.$$

En boucle fermée, par la *formule de Black*, on obtient

$$H(p) = \frac{L(p)}{1+L(p)} = \frac{\dfrac{0,5A}{0,5A+1}}{1+\dfrac{0,5}{0,5A+1}p} = \frac{K_f}{1+\tau_f p}.$$

La *rapidité* de la réponse de $H(p)$ dépend de la constante de temps τ_f.

On voit que $\tau_f = \dfrac{0,5}{0,5A+1}$ diminue quand A augmente donc la réponse de $H(p)$ est plus rapide.

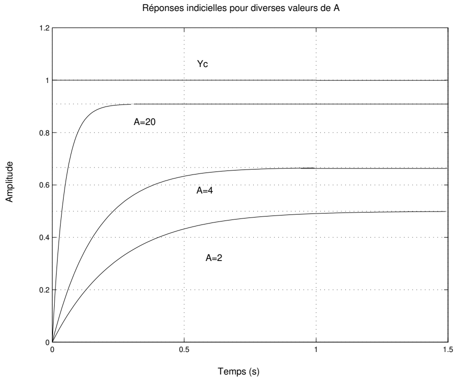


Figure: Réponses du moteur bouclé différentes valeurs de A

Commande

Cette tendance se vérifie pour des modèles d'ordre plus élevé.

En résumé

Une augmentation de $A > 0$ est propice à l'accélération de la réponse de $H(p)$.

... mais, comme on l'a vu, attention à la stabilité !

Influence de A sur la précision

En reprenant l'exemple précédent (du moteur), on voit que le gain statique de $H(p)$ est

$$K_f = \frac{0,5A}{0,5A+1}.$$

Si $A > 0$, on a toujours $0 < K_f < 1$ mais K_f se rapproche de 1 quand A augmente. Or $K_f = 1$ correspond au suivi d'une consigne en échelon en régime permanent.

L'augmentation de A semble donc propice à la précision mais $K_f = 1$ n'est atteint que dans le cas irréaliste où $A \to \infty$. Il faut aller plus loin...

Commande

$y_c = y \Rightarrow \epsilon = 0$. Il faut analyser ce que devient l'écart ϵ pour voir s'il s'annule en régime permanent.
La limite de l'*écart* en régime permanent est appelée *erreur* et s'exprime

$$\lim_{t \to \infty} \epsilon(t) = \lim_{p \to 0} p\epsilon(p) = \lim_{p \to 0} \frac{pY_c(p)}{1 + AG(p)}.$$

On constate avec cette formule que la précision dépend de trois choses :

- la consigne ;
- la fonction de transfert du système $G(p)$;
- le gain proportionnel A dont on veut apprécier l'influence.

On distinguera ici deux entrées, l'échelon d'amplitude E $(Y_c(p) = E/p)$ et la rampe de pente b $(Y_c(p) = b/p^2)$.

L'erreur en présence d'un échelon est appelée *erreur de position*. L'erreur en présence d'une rampe est appelée *erreur de vitesse*.

Commande

On distinguera aussi les systèmes en boucle ouverte (en réalité plutôt la *chaîne directe* (ici, $L(p) = R(p)G(p) = AG(p)$)) selon leur *classe*.
La classe d'un système est le nombre α d'*intégrateurs* (un intégrateur est modélisé par $1/p$) que comprend sa fonction de transfert $G(p)$:

$$\alpha = 0 : \quad G(p) = K \times \frac{1 + a_1 p + ...}{1 + b_1 p + ...} ;$$

$$\alpha = 1 : \quad G(p) = \frac{K}{p} \times \frac{1 + a_1 p + ...}{1 + b_1 p + ...} ;$$

$$\alpha = 2 : \quad G(p) = \frac{K}{p^2} \times \frac{1 + a_1 p + ...}{1 + b_1 p + ...} ;$$

Il vient le tableau suivant.

Type de $G(p)$ $\rightarrow$ $Y_c(p)$ $\downarrow$	0	1	2	Nom de l'erreur
$\dfrac{E}{p}$	$\dfrac{E}{1+AK}$	0	0	ϵ_p : erreur statique ou de position
$\dfrac{b}{p^2}$	∞	$\dfrac{b}{AK}$	0	ϵ_v : erreur de vitesse

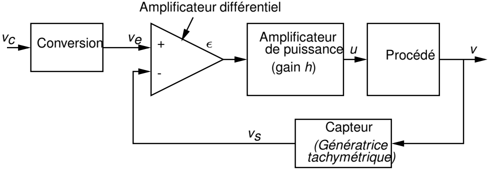
Pour prétendre à une bonne précision, on peut augmenter A mais il y a un risque d'instabilité. De même, on peut introduire un intégrateur dans le régulateur pour augmenter la classe de la chaîne directe mais tout intégrateur ajoute un déphasage de -90° ce qui peut conduire à une trop forte diminution de la marge de phase Φ_m.

En résumé

Il existe un *compromis entre la précision, la stabilité et la rapidité* mais la stabilité doit toujours être privilégiée.

Retour sur le paradoxe vu en première partie

Rappel : on a vu qu'un régulateur proportionnel ne permettait pas un asservissement correct de la vitesse d'un moteur.



$$v = v_c \Rightarrow v_e = v_s \Rightarrow \epsilon = v_e - v_s = v_c - v = 0$$

$$\Rightarrow u = h\epsilon = 0$$

$\Rightarrow$ Le moteur ne tourne pas !

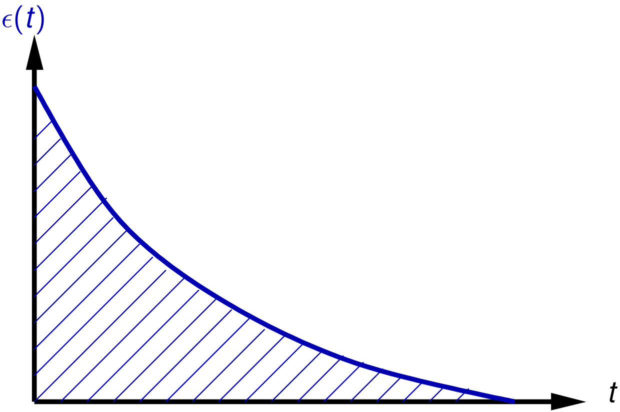
Commande

On suppose que le moteur électrique a pour fonction de transfert ("fil rouge")

$$G(p) = \frac{0,5}{1+0,5p} \Rightarrow L(p) = \frac{0,5A}{1+0,5p}.$$

L'*erreur de position*, d'après le tableau vu précédemment, est $\epsilon_p = \frac{v_c}{1+0,5A} \neq 0$. Impossible de l'annuler sauf si $A \to \infty$, ce qui implique une commande u infinie **(irréaliste !!!)**.

Soit le chronogramme d'un écart tendant vers 0.



Il faudrait une commande linéaire prenant en compte cet écart et telle que, quand ϵ s'annule, la commande u reste constante non nulle.

Commande

On constate que l'aire hachurée (l'intégrale de ϵ) restera constante une fois l'écart annulé.

C'est effectivement la solution. Il faut introduire *l'intégrale de* ϵ dans la commande u.

En faisant de la sorte, la chaîne directe $L(p)$ devient de classe 1 et comme l'indique le tableau précédent, l'erreur de position ϵ_p s'annule.

En résumé

En résumé, lorsqu'un intégrateur n'est pas déjà présent dans la chaîne directe, il peut être intéressant de l'insérer dans le régulateur à des fins de précision.

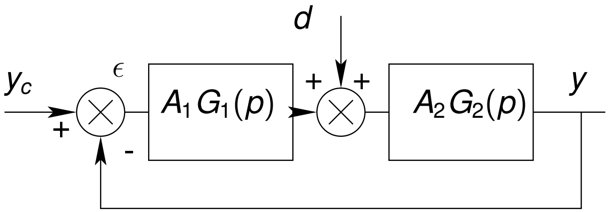
Mais attention à la stabilité car un intégrateur descend la phase de $L(p)$ de 90°... on retrouve le compromis stabilité-précision.

Remarque

Si la sortie y est la position angulaire de l'arbre du moteur alors, lorsque y atteint y_c, on a $\epsilon = 0$, ce qui, même avec un gain proportionnel, conduit à conserver $u = 0$. Le moteur ne tourne plus et reste à $y = y_c$. Ceci s'explique : la position angulaire est l'intégrale de la vitesse. Le système est donc de classe 1, ce qui permet d'annuler ϵ_p par un simple bouclage proportionnel (cf. tableau).

Influence des intégrateurs sur une erreur due à une perturbation

Il est possible que l'erreur soit due à un signal de perturbation d agissant sur le système. Cette perturbation peut apparaître n'importe où dans la *chaîne directe*.



On suppose que la consigne y_c et la perturbation d sont de type échelon :

$$Y_c(p) = \frac{Y_{c_0}}{p} \quad ; \quad D(p) = \frac{D_0}{p}.$$

On suppose que $G_1(p)$ et $G_2(p)$ sont les fonctions de transfert de systèmes de gains statiques respectifs K_1 et K_2. La transformée de Laplace de l'écart ϵ est (après calcul)

$$\varepsilon(p) = \frac{Y_c(p)}{1 + A_1 A_2 G_1(p) G_2(p)} - \frac{A_2 G_2(p) D(p)}{1 + A_1 A_2 G_1(p) G_2(p)}.$$

Commande

On souhaite annuler l'influence de d sur ϵ en régime permanent (pour $t \to \infty$) par l'adjonction d'un intégrateur. On envisage deux cas :

1. $G_1(p)$ est de classe 0 et $G_2(p)$ est de classe 1 (l'intégrateur se situe dans $G_2(p)$) ;
2. $G_1(p)$ est de classe 1 et $G_2(p)$ est de classe 0 (l'intégrateur se situe dans $G_1(p)$).

On calcule l'écart en régime permanent

- **Cas 1 :** après calcul

$$\lim_{t\to\infty}(\epsilon(t)) = \lim_{p\to 0}(p\varepsilon(p)) = -\frac{D_0}{A_1 K_1}.$$

L'écart en régime permanent (c'est-à-dire l'erreur) n'est donc pas nulle.

- **Cas 2 :** après calcul :

$$\lim_{t\to\infty}(\epsilon(t)) = \lim_{p\to 0}(p\varepsilon(p)) = 0.$$

Cette fois-ci, l'erreur statique s'annule.

(Pour les détails de calcul, consulter les annexes des notes de cours.)

En résumé

De façon générale, pour réduire ou annuler l'effet, en régime permanent, d'une perturbation d en $1/p^q$ sur ϵ, il convient d'agir, dans $L(p)$, en **amont de la perturbation**, en jouant sur le gain A_1 ou sur la classe de $G_1(p)$.

Typiquement, on joue sur le régulateur.

Régulateur PID

Le régulateur le plus célèbre !

On vient de voir les avantages et inconvénients des *effets proportionnel ou intégral* dans la commande u. Il peut être utile d'y ajouter un *effet dérivé* pour tempérer les effets négatifs des deux premiers.

On aboutit alors à la notion de *régulateur proportionnel intégral dérivé (PID)* :

$$u(t) = k \left(\epsilon(t) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t \epsilon(\theta) \mathrm{d}\theta + \tau_d \frac{d\epsilon(t)}{\mathrm{d}t}. \right)$$

Après application de $\mathscr{L}$, on obtient la fonction de transfert du régulateur :

$$R(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = k + \frac{k}{\tau_i p} + k\tau_d p = A_0 + \frac{A_1}{p} + A_2 p.$$

Cette expression est appelée *forme parallèle* du PID.

Il existe aussi une forme dite *série* :

$$R(p) = A\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)(1 + T_d p).$$

$\tau_i = T_i$, τ_d et T_d sont des constantes de temps.

On passe d'une forme à l'autre en développant ou factorisant.

Il s'agit de déterminer les paramètres du PID (c.-à-d. k, τ_i, τ_d ou A, T_i, T_d ou encore A_0, A_1, A_2), de manière à apporter les performances désirées à $H(p)$ en gardant à l'esprit que :

- Effet proportionnel :
  - \+ assure la *raideur* du système (une certaine rapidité).
  - – risque d'entraîner des *oscillations*, voire *l'instabilité*.

- *Effet intégral :*
  - \+ assure la *précision* (par exemple $\epsilon_p = 0$).
  - – entraîne un ralentissement du *transitoire* et peut générer des oscillations allant jusqu'à l' *instabilité*.

- *Effet dérivé :*
  - $+$ anticipe la réaction du système, ajoute de l'*amortissement* en augmentant la *marge de phase* ce qui permet d'accroître le gain proportionnel.
  - $-$ ne peut être utilisé seul car génère des *à-coups dans la commande*. Il accentue la *sollicitation des actionneurs* et peut répercuter l'effet des *perturbations de hautes fréquences*, en particulier celles apparaissant sur la mesure des sorties. À ce propos, il faut noter qu'en pratique, on préfère implanter un effet dérivé filtré plutôt qu'une dérivée pure (voir TP)) et que parfois, l'effet dérivé n'est appliquée qu'à la sortie y mais pas à l'écart ϵ.

Dans la mesure du possible, ne placer un effet dérivé que si nécessaire.

Remarque

La régulateur PID a pour fonction de transfert

$$R(p) = A_0 + \frac{A_1}{p} + A_2 p = \frac{A_1 + A_0 p + A_2 p^2}{p}.$$

$R(p)$ n'est pas propre donc le PID n'est pas causal (physiquement réalisable). C'est pourquoi en pratique, soit le terme dérivé, soit l'ensemble de la commande, doit être filtré.

Comment régler les paramètres d'un PID ?

Il existe quantité de méthodes non traitées dans ce cours par manque de temps :

- Méthodes expérimentales (basées sur la réponse):
  - Méthode de Broïda,
  - Méthode de Ziegler-Nichols,
  - Méthode "au tournevis" (quand on n'y connaît rien !).
- *Méthodes basées sur le modèle $G(p)$:*
  - Modelage du diagramme de Bode de $L(p)$,
  - Compensation de pôle (voir TP),
  - etc.

Rendez-vous en TP pour plus sur les PID ! *(in English !)*

Le prof :

Fin du cours - Merci de votre attention !

L’étudiant :

Ouf ! pas trop tôt !