UN PREMIER PAS EN TRAITEMENT DU SIGNAL

O. Bachelier

Université de Poitiers

IUT de Poitiers-Châtellerault-Niort

Département de Mesures Physiques, 2ème année

Plan

- Brève introduction au traitement du signal
- Puissance et énergie des signaux
- Représentation fréquentielle des signaux continus
- Filtrage des signaux continus
- Echantillonnage des signaux continus

Avant-propos

- Il est difficile de suivre ce diaporama sans les explications qui vont avec.
- Pour une compréhension du cours en autonomie, mieux vaut se référer aux notes de cours disponibles **ici**.
- Malgré cela, ce cours n'est qu'un premier pas dans le domaine du traitement du signal.

Brève introduction au traitement du signal (TdS)

Notions de signal, de morphologie, de périodicité et d'aléas... plus une ou deux notions mathématiques utiles

Qu'est-ce qu'un signal ?

Pour faire simple, c'est la manifestation physique d'une information transportée d'une source vers une destination.

En pratique, c'est souvent une grandeur physique qui varie au cours du temps. Ceci est en réalité un peu restrictif mais correspond bien à la plupart des cas pratiques.

On restera dans ce cadre.

Ex. pour Mesures Physiques : tension délivrée par tout capteur !

On distingue souvent le *signal utile* du *bruit* (indésirable).

Par abus de langage, ou par extension, on appelle aussi *signal*, la description mathématique de ce dernier.

Par exemple, pour une tension sinusoïdale, on parlera aussi bien d'un signal de tension (faisant référence à la grandeur physique) que d'un signal sinusoïdal (description mathématique).

En pratique, cette confusion ne pose pas de problème pour les cas traités ici, et un signal est grossièrement une *fonction du temps* même si... (écouter les élucubrations du prof sur les signaux *n*D.)

Qu'est-ce que le traitement du signal ?

Grossièrement : discipline qui vise à l'*élaboration* et l'*analyse* des signaux

Élaboration : construction ou modification de signaux pour :

- mettre en forme une information ;
- modifier un signal existant pour en faciliter physiquement la transmission (exemple : *modulation*) ;
- de modifier un signal pour dissimuler l'information pertinente à certains récepteurs *(cryptographie, stéganographie)*.

Analyse : étude de signaux déjà mis en forme, pour :

- les nettoyer en enlevant certaines parties indésirables (*filtrage* du *bruit*)
- extraire l'information utile *(mesure, démodulation, codes, etc.)* ;
- extraire les caractéristiques associées à l'information reçue *(fiabilité, qualité de la mesure, etc...)* ;
- détecter des phénomènes dont l'existence est indiquée par le signal ;
- ... (la liste n'est sans doute pas exhaustive).

Domaines d'application

Tous les domaines liés à la mesure.

La mesure est utile en physique, chimie, biologie, mécanique, robotique, hydraulique, etc. et comme toute mesure est entachée de bruit, d'incertitude voire d'erreur, le traitement du signal peut intervenir pour réduire l'effet de ces nuisances.

C'est pourquoi, le traitement du signal peut se révéler utile dans tous les secteurs industriels.

Quelques exemples d'application

- *musique et audiophilie :* qualité du son, Hi-Fi,
- *télécommunications :* c'est l'idée même de transmette une information,
- *domaine militaire :* radar, sonar , etc.,
- *médecine:* ECG, EECG, etc.,
- *traitement d'image/vidéo :* traitement du signal 2D, 3D, voire 4D, imagerie médicale,
- *Diagnostic, maintenance prédictive :* détection ou anticipation de pannes,
- *sismologie :* détection ou anticipation de tremblements de terre,
- etc. (la liste est très longue).

Première classification des signaux

sur le caractère *morphologique du signal*

Continuité et discontinuité en temps et en amplitude

Un signal se caractérise par une amplitude f (généralement associée à une grandeur physique) qui évolue en fonction du temps t. On distingue :

- les signaux à *temps continu* ou simplement *signaux continus*, tels que f est définie quel que soit t ;
- les signaux à *temps discret* ou simplement *signaux discrets*, tels que f est définie à des instants précis du temps (le temps est alors *discrétisé*.

(voir TD n°1.)

Par ailleurs, on distingue aussi :

- les *signaux non quantifiés* pour lesquels f peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle continu ;
- les *signaux quantifiés* pour lesquels f est un nombre quantique qui ne peut prendre que des valeurs discrètes bien définies (l'amplitude est alors discrète).

(voir TD n$^\circ$1.)

Un signal continu et non quantifié est appelé *analogique* (*analog signal* en anglais).

Un signal discret et quantifié est souvent qualifié de *numérique* (*digital signal* en anglais) même si ce terme est parfois réservé aux signés codés en binaire qui ne forment qu'un sous ensemble de ceux répondant à la présente définition.

Un signal quantifié est tel qu'il existe toujours un intervalle minimal entre deux valeurs admissibles de f. Il est fréquent que tous les intervalles entre deux valeurs admissibles successives soient des multiples de cet intervalle minimal. Cet intervalle est appelé *quantum*, comme pour les signaux numériques au sens usuel du terme. .

Remarque

Attention au cadre restrictif de notre étude. Nous n'étudions que les signaux 1D dépendant du temps (ils ne dépendent que de t). Ainsi "discret" et "à temps discret" sont par exemple synonymes. Toutefois, le terme *discret* seul est en réalité plus général. On peut décrire un signal discret par une suite numérique sans faire référence au temps. D'ailleurs, un signal ne dépend pas forcément du temps donc même le mot "continu" est plus général que l'expression "à temps continu" (voir TD n°1).

Exemples :

- Une sonde sonde PT 100 (résistance variant en fonction de la température) fournit à ses bornes une tension analogique.
- L'énergie d'un électron dans un atome ne peut prendre que certaines valeurs données. Elles est quantifiée (chaque niveau d'énergie possible est indicé par un nombre (1, 2, 3, ...) qu'on appelle *nombre quantique*).

- La concentration d'un produit dans un réacteur chimique évolue de façon continue. Toutefois, il faut plusieurs minutes pour estimer cette concentration, de sorte qu'on ne peut en donner la valeur que de temps en temps. Les données obtenues constituent un signal discret (mais pas quantifié). Les mesures peuvent être faites à une fréquence donnée (exemple : une fois par heure) de sorte que les *échantillons*, c'est-à-dire les valeurs obtenues, le sont à intervalles réguliers définissant une période dite d'*échantillonnage* (ici égale à une heure).
- Enfin, des mesures de pH toutes les 10 minutes ne sont que que des mesures entières de 0 à 14. La mesure de ce pH est donc un signal discret et quantifié, c'est-à-dire numérique.

Deuxième classification des signaux

sur la *prédictivité* du signal

On distingue :

- les signaux *déterministes* pour lesquels une description mathématique précise peut permettre de prévoir à l'avance quelle sera leur valeur à des instants futurs ;
- les signaux *stochastiques* ou *aléatoires*, pour lesquels la connaissance à un instant t ne peut pas permettre de déduire la valeur à un instant ultérieur. Cette notion est liée à la notion de *hasard*.

Exemples :

- La tension aux bornes de la sonde PT100 évoquée ci-avant est un signal déterministe dans le sens où l'on connaît la règle d'évolution de cette tension qui est affine en fonction de la température θ.
- Une succession de lancés de dés conduit à un signal numérique aléatoire.

Introduction au TdS

On n'étudiera que que les signaux déterministes, essentiellement continus et un peu discrets.

Troisième classification des signaux

sur la *périodicité* du signal

On distingue :

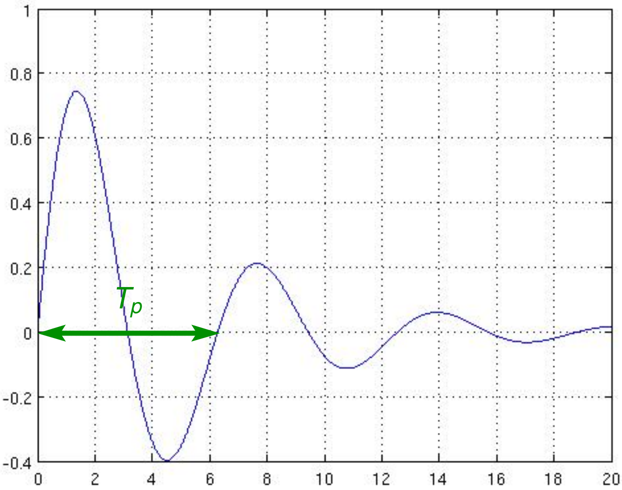
- signaux *périodiques* qui se reproduisent à l'identique à intervalles réguliers, faisant donc apparaître une période T_0 ;
- signaux *apériodiques*, c'est-à-dire tous les autres.

Exemples à méditer :

Un exemple typique de signal périodique est bien sûr le signal sinusoïdal, tel que $s_1(t) = \sin(t)$.

Le signal $s_2(t) = \mathrm{e}^{-0{,}2t}$ est lui apériodique.

Le signal $s(t) = s_1(t)s_2(t) = e^{-0,2t}\sin(t)$ est représenté ici



Le signal $s(t)$ n'est pas reproduit à l'identique à une fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0}$. Il est donc rigoureusement *apériodique*.

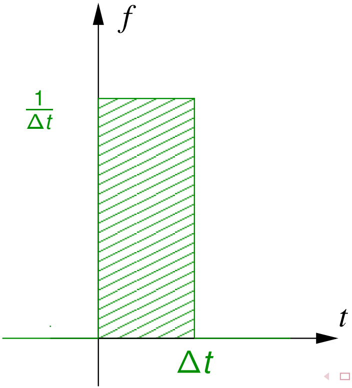
Toutefois il contient clairement en lui la fréquence f_0 qui n'est pourtant pas sa fréquence. On dit que $s(t)$ est *pseudo-périodique*.

Il faudrait pouvoir associer f_0 à $s(t)$ sans pour autant affirmer que c'est sa fréquence. Comment le faire rigoureusement, mathématiquement ? Ce sera la question essentielle à laquelle on répondra dans la troisième partie de ce diaporama.

Un signal étrange mais utile

L'impulsion de Dirac

Soit l'impulsion rectangulaire définissant une surface (hachurée) égale à 1.



Pour définir l'*impulsion de Dirac*, il faut faire tendre Δt vers 0 et donc $\frac{1}{\Delta t}$ vers l'infini. L'impulsion devient donc infiniment fine, infiniment haute et de surface 1. On note une telle impulsion$\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1.$$

On la représente généralement par une flèche qui indique la *force* de l'impulsion.

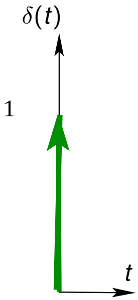


Figure: Impulsion de Dirac

Puissances et énergies des signaux

Petit focus électrique pour commencer

Lorsqu'une résistance R est traversée par un courant $i(t)$, la différence de potentiels (tension) $u(t)$ à ses bornes et la puissance électrique dissipée par la résistance (par effet Joule) sont, en convention récepteur, respectivement données par :

$$u(t) = Ri(t)$$

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{u^2(t)}{R} = Ri^2(t).$$

Pour simplifier, on suppose que $R = 1\Omega$. Il vient

$$p(t) = u^2(t) = i^2(t),$$

d'où l'on voit que la puissance est le carré de la tension ou de l'intensité.

Grossièrement (même si c'est un peu simpliste), cette idée est généralisée pour définir, de façon plus mathématique et moins physique, la **puissance s'un signal**.

Il existe toutefois "plusieurs sortes de puissances" à clairement définir. Pour cela, on doit introduire la notion de *moyenne* .

Moyenne, puissance, énergie

Moyenne d'un signal

Moyenne sur un intervalle

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). Sa valeur *moyenne* sur un intervalle $[t_1\,; t_2] \subset \mathbb{R}$ est définie par

$$m(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t)\mathrm{d}t$$

C'est l'extension de la formule de la moyenne au cas d'une valeur définie quel que soit t. $m(t_1, t_2)$ est une valeur ne dépendant pas de t. Sur l'intervalle $[t_1\,; t_2]$, le signal est autant "au dessus" de $m(t_1, t_2)$ qu' "au dessous".

Moyenne d'un signal périodique

Si l'on suppose que $s(t)$ est périodique de période T_p, sa moyenne sur tout l'horizon de temps est égale à sa moyenne sur une une période, à savoir

$$m = \langle s \rangle = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t)\mathrm{d}t, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Il est classique de considérer $t_0 = 0$ ou $t_0 = -\dfrac{T_p}{2}$.

Moyenne d'un signal apériodique

Si $s(t)$ st apériodique, l'astuce consiste à considérer qu'il est en fait périodique, mais de période infinie. Il vient :

$$m = \langle s \rangle = \lim_{T_p \to \infty} \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) \mathrm{d}t$$

Dans les deux cas, tout ajout d'un *offset* (composante continue) fait varier la moyenne de la valeur de l'offset.

Énergie d'un signal

Énergie d'un signal sur un intervalle

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). Son *énergie sur un intervalle* $[t_1\,; t_2] \subset \mathbb{R}$ est définie par

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)\mathrm{d}t$$

Il s'agit d'une notion mathématique.

C'est une valeur constante pour un intervalle donné. Elle peut correspondre (mais pas nécessairement) à une vraie énergie au sens physique ; elle s'exprime alors en Joules (J), comme toutes les énergies (notamment celle dissipée dans la résistance R).

C'est l'intégrale, sur l'intervalle considéré, de la *puissance instantanée* $p(t) = s^2(t)$.

Énergie totale d'un signal

Il suffit de considérer comme intervalle tout l'horizon de temps.
Il vient :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\mathrm{d}t$$

C'est toujours une valeur constante.

Puissance d'un signal

En physique, la puissance est l'énergie ramenée au temps. Elle s'exprime en Watts (W) avec :

$$1\text{W} = \frac{1\text{J}}{1\text{s}},$$

ce qui signifie qu'un Watt est un Joule produit,ou dissipé pendant une seconde.

Puissance instantanée

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). La *puissance instantanée* de $s(t)$ a déjà été définie par :

$$p(t) = s^2(t).$$

C'est le carré du signal. Elle s'exprime en Watts (W) uniquement si elle correspond à une vraie puissance au sens physique. C'est un signal à part entière.

Puissance moyenne sur un intervalle

Soit un signal $s(t)$ (périodique ou non). La *puissance moyenne* de $s(t)$ sur un *intervalle* $[t_1 ; t_2] \subset \mathbb{R}$ est définie par

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) \mathrm{d}t$$

C'est une moyenne, donc une valeur constante égale à

$$P(t_1, t_2) = \frac{E(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}. \quad (1)$$

Puissance moyenne d'un signal périodique

Soit un signal $s(t)$ périodique de période T_p. La *puissance moyenne* de $s(t)$ est définie par

$$P = \langle p \rangle = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} s^2(t) \mathrm{d}t$$

Il s'agit en fait de la puissance sur un intervalle qui n'est autre que la période T_p du signal $s(t)$.

Puissance moyenne d'un signal apériodique

Soit un signal $s(t)$ apériodique. Sa *puissance moyenne* est définie par

$$P = \langle p \rangle = \lim_{T_p \to \infty} \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s^2(t)\mathrm{d}t$$

Cette formule est aussi valable pour un signal périodique mais celle vue précédemment est plus simple.

Remarque

La valeur efficace S_{eff} désigne la racine carrée de la puissance moyenne d'un signal périodique : $P = S_{eff}^2$.
Si l'on revient à l'analogie électrique, et que la tension aux bornes de $R = 1$ est une constante U_{eff} alors la puissance moyenne dans la résistance est bien $P = U_{eff}^2$.
Si $u(t) = U\sin(\omega_p t)$, le calcul de la valeur moyenne conduit à $P = \frac{U^2}{2}$ ce qui amène une valeur efficace de tension $U_{eff} = \sqrt{P} = \frac{U}{\sqrt{2}}$, formule bien connue.
La valeur efficace de la tension (sinusoïdale ou non) est la valeur de la tension continue qui conduit à la même puissance moyenne dissipée par la résistance.

Quatrième classification des signaux

sur des critères essentiellement énergétiques

On distingue :

- les signaux à *amplitude bornée*, ou, plus simplement, *bornés*, qui vérfient

$$|s(t)| < \infty \quad \forall t \;;$$

- les signaux *non bornés*.

Puissances et énergies des signaux

Mais ce critère est moins utilisé que celui qui distingue :

- les signaux d'*énergie bornée (ou finie)*

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\mathrm{d}t < \infty \ ;$$

- les signaux d'*energie non bornée*.

Enfin, un dernier critère distingue :

- les signaux de *puissance moyenne bornée (ou finie)*

$$P = \lim_{T_p \to \infty} \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s^2(t) < \infty \,;$$

- les signaux de *puissance moyenne non bornée*.

Remarque

Un signal dont la puissance moyenne est finie et non nulle a une énergie totale infinie.

Un signal à énergie totale finie a une puissance moyenne nulle (sur tout l'horizon de temps).

Mesures en décibels

Dans certains appareils de mesure, on peut rencontrer des mesures de puissance exprimées en dB_W ou dB_m. Pour en comprendre le sens, il faut comprendre ce que l'on entend par mesure en dB.

Tout d'abord, on définit le *gain G en décibels* (dB) entre la puissance P_1 et P_2 par la quantité

$$G = 10\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right).$$

Le dB est donc une unité adimensionnelle qui est liée à une amplification entre deux grandeurs s'exprimant dans la même unité. Il faut donc au moins deux signaux pour définir un gain en décibels.

Alors pourquoi un appareil associerait-il une mesure en dB à un seul signal ? Tout simplement parce qu'il compare sa puissance à une *puissance de référence*.

On définit donc la puissance d'un signal en dB_m en calculant le gain en dB de sa puissance par rapport à 1mW :

$$P_{dB_m} = 10\log_{10}\left(\frac{P_W}{1mW}\right).$$

De la même façon, on définit la puissance exprimée en dB_W par

$$P_{dB_W} = 10\log_{10}\left(\frac{P_W}{1W}\right).$$

Il est même possible, même si c'est moins courant, d'exprimer la puissance en dB_μ :

$$P_{dB_\mu} = 10\log_{10}\left(\frac{P_W}{1\mu W}\right).$$

De ces trois définitions, il vient :

$$\begin{cases} P_{dB_m} & = & P_{dB_W} + 30\ ; \\ P_{dB_\mu} & = & P_{dB_m} + 30\ ; \\ P_{dB_\mu} & = & P_{dB_W} + 60. \end{cases}$$

Représentation fréquentielle des signaux continus

Introduction par une approche intuitive

Bien sûr, la notion de période pour un signal périodique est liée de manière triviale à celle de fréquence. On a

$$\omega_p = 2\pi f_p \quad \text{et} \quad f_p = \frac{1}{T_p},$$

où

- T_p est la *période (fondamentale)* du signal périodique ;
- f_p est la *fréquence (fondamentale)* associée à T_p ;
- ω_p est la *pulsation (fondamentale)* associée à T_p.

Ce n'est pas un scoop si ce n'est peut-être l'ajout du qualificatif "fondamentale"!

Représentation fréquentielle des signaux continus

Mais si l'on se rappelle du signal *pseudo-périodique* de la première partie, $s(t) = e^{-t\sin(2\pi f_0 t)}$, la fréquence f_0 n'est pas la fréquence fondamentale f_p de $s(t)$ telle que précédemment définie (puisque $s(t)$ n'est pas périodique).

Or, elles est bien présente. Il faut aller plus loin

Comment la mettre en valeur ? Comment traiter rigoureusement ces "fréquences" qui contribuent à la composition du signal ?

Représentation fréquentielle des signaux continus

On essaie de comprendre ce qui se passe lorsque le son d'une note de guitare parvient à l'oreille[1].

La corde, soumise à une tension correspondant au réglage de la clef, est coincée entre deux extrémités (soit deux sillets, soit un sillet et un doigt).

Un doigt vient pincer la corde ainsi bloquée et provoquer une vibration mécanique, entraînant des variations de pression (onde acoustique) se propageant jusqu'à l'oreille.

Entendre une seule note, c'est percevoir une seule fréquence d'onde, liée à la fréquence de vibration de la corde.

[1] L'auteur tient à remercier Frédéric Launay à qui il emprunte honteusement cette idée.

Cette fréquence dépend de trois choses :

- la masse linéique de la corde (notée μ et exprimée en kg/m) qui est liée à son épaisseur ;
- la force avec laquelle on tend cette corde (tension notée F et exprimée en N) ;
- la longueur de la corde (notée l et exprimée en m).

La vitesse v de vibration mécanique de la corde s'exprime :

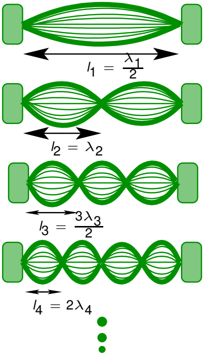
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Ensuite, la longueur λ de l'onde produite (qui sera aussi longueur d'onde du son) est donnée par :

$$\lambda = \frac{v}{f},$$

où f désigne la fréquence de la vibration. La note est donc directement liée à la fréquence $f = \frac{v}{\lambda}$. L'épaisseur et un bon accordage de la corde assurent de la valeur de F et de celle de μ, donc aussi de celle de v. Il reste à s'assurer de la valeur de λ pour obtenir la bonne fréquence, c'est-à-dire la bonne note.

Il faut coincer la corde de sorte que la longueur l soit un multiple de $\frac{\lambda}{2}$. Mais s'installent alors plusieurs vibrations simultanément selon le principe du schéma suivant :



Ces vibrations n'ont pas toute la même importance. Ainsi la première vibration est la plus marquée. La hauteur du ventre, qui est proportionnelle à l'amplitude du signal sinusoïdal correspondant, est plus importante que pour les autres vibrations. C'est la vibration *fondamentale*.

Plus le nombre de ventres est élevé (donc plus la fréquence est élevée), plus l'amplitude de la vibration diminue.

On obtient des vibrations *harmoniques*. On parle d'harmoniques de rang 2, 3, 4, etc.

Chaque vibration correspond à une fréquence donc à une note.

On suppose que la plus faible des fréquences de vibration de la corde pincée est $f_1 = 55$Hz, alors cette vibration fondamentale est un **La**. Plus précisément, les notes obtenues sont :

- $f_1 = 55\text{Hz} \Rightarrow$ **La0** ("La" de la première octave audible) - *Note fondamentale*.
- $f_2 = 110\text{Hz} \Rightarrow$ **La1** - harmonique de rang 2.
- $f_3 = 165\text{Hz} \Rightarrow$ **Mi2** - harmonique de rang 3 dite *"quintoiement"*.
- $f_4 = 220\text{Hz} \Rightarrow$ **La2** - harmonique de rang 4.
- etc.

La note entendue est essentiellement la fondamentale mais elle est plus ou moins habillée de ses harmoniques selon l'instrument, ce qui donne un *timbre* à la note.

Représentation fréquentielle des signaux continus

On suppose par exemple qu'une corde est pincée et émet un signal sonore correspondant à une sinusoïde de fréquence $f_1 = 55$Hz :

$$s_1(t) = \sin(2\pi f_1 t).$$

Puis, on suppose que ce signal *fondamental* est accompagné de ses harmoniques de rang 2, 3 et 4 qui présentent évidemment des amplitudes plus faibles (au-delà, les harmoniques sont supposées d'amplitudes négligeables) :

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} s_2(t) & = & 0,15 \sin(2\pi f_2 t), & & f_2 & = & 2f_1, \\ s_3(t) & = & 0,1 \sin(2\pi f_3 t), & & f_3 & = & 3f_1, \\ s_4(t) & = & 0,05 \sin(2\pi f_4 t), & & f_4 & = & 4f_1. \end{array} \right.$$

Le signal global est alors exprimé par la somme suivante (remarque : les sinusoïdes sont synchronisées) :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t).$$

L'ensemble de ses signaux est représenté ci-après.

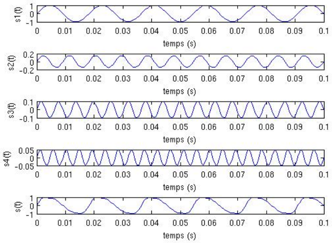
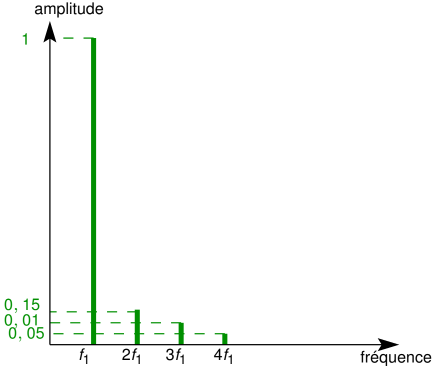


Figure: Signal sonore issue d'une corde avec ses harmoniques (amplitudes non réalistes et sans unité)

Difficile, voire impossible, de voir sur la *représentation temporelle* du seul signal $s(t)$ les contribution des différentes harmoniques. En disposant des quatre premières courbes, on peut synthétiser ces contributions de la façon suivante :



On exprime ainsi, d'une certaine manière, le signal $s(t)$, non pas en fonction du temps t mais en fonction de la fréquence f.

C'est donc une sorte de *représentation fréquentielle*.

L'idée de cette partie est de généraliser cette idée et d'y mettre, si possible, un cadre et une rigueur mathématique.

Représentation spectrale d'un signal périodique

Un résultat mathématique connu : premier développement unilatéral

Mathématiquement, un signal $s(t)$ est périodique de *période* T_p si et seulement si

$$s(t+T_p) = s(t), \quad \forall t.$$

On rappelle que $f_p = \dfrac{1}{T_p}$ est la *fréquence* du signal et que $\omega_p = 2\pi f_p$ est sa *pulsation*.

Représentation fréquentielle des signaux continus

Tout (ou presque tout) signal périodique $s(t)$ de pulsation ω_p (donc de fréquence f_p et de pulsation T_p) est décomposable en une somme infinie de sinusoïdes :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_p t) + b_n \sin(n\omega_p t)),$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) \mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) \cos(n\omega_p t) \mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) \sin(n\omega_p t) \mathrm{d}t \quad \forall n \geq 1.$$

Cette somme est appelée *décomposition en série de Fourier* et les valeurs a_n et b_n, $n = 0, 1, 2, ...$ en sont les *coefficients*.

Représentation fréquentielle des signaux continus

a_0 représente la *moyenne* du signal.

Le premier terme de la somme est le *terme fondamental*, les suivants sont les *termes harmoniques*.

Par convention, $b_0 = 0$.

Toutes les fréquences impliquées sont des multiples de la *fréquence fondamentale* f_p, qui est LA fréquence du signal $s(t)$.

Il est possible de représenter cette décomposition ainsi :

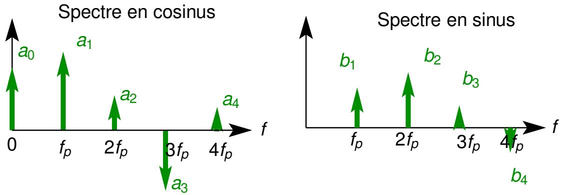


Figure: Spectres en cosinus et sinus d'un signal périodique quelconque

On parle de *spectres en cosinus ou en sinus* du signal. "Conventionnellement", ce sont des impulsions de Dirac (on verra pourquoi !) aux fréquences pertinentes dont la *force* correspond à a_n ou b_n.
Les flèches ainsi tracées sont appelées *raies spectrales* (raie *fondamentale* et raies *harmoniques*).

Second développement unilatéral

Le défaut majeur de cette représentation est qu'elle répartit l'importance de la contribution de chaque fréquence sur deux spectres. C'est pourquoi on introduit la notion d'*amplitude de rang n* ainsi :

$$V_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \forall n \geq 0,$$

On note que $V_0 = |a_0|$. V_1 est l'amplitude de la *fondamentale* et les quantités $V_n, \forall n > 1$ sont les amplitudes des *harmoniques* de rang n.

Représentation fréquentielle des signaux continus

On définit aussi pour chaque valeur de n, un nombre ϕ_n tel que

$$\cos(\phi_n) = \frac{a_n}{V_n}.$$

$$\sin(\phi_n) = -\frac{b_n}{V_n},$$

ϕ_n est la *phase* de l'harmonique de rang n.

Représentation fréquentielle des signaux continus

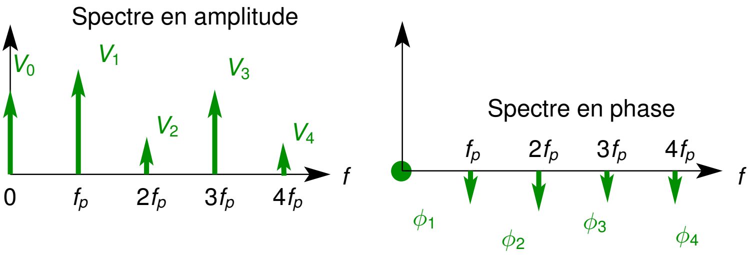
Après calcul (voir notes de cours), il vient :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \cos(n\omega_p t + \phi_n).$$

Il n'y a donc plus que des cosinus dans ce développement et chaque fréquence contribue à hauteur de l'amplitude correspondante.

Représentation fréquentielle des signaux continus

On peut donc définir les spectres suivants dont le premier est particulièrement utile.



Toutes les raies du spectre d'amplitude montent car $V_n \geq 0$.

Remarque

Il existe un appareil, appelé *analyseur de spectre* qui, s'il dispose comme entrée d'un signal périodique, fournit le spectre en amplitude mais pas le spectre de phase. Un dispositif de ce genre sera utilisé en TP. Bien sûr, la hauteur des raies affichées par l'appareil correspond bien à la force des impulsions de Dirac, non à leur hauteur infinie.

Il est possible de s'appuyer sur les formules mathématiques pour obtenir a_n et b_n, puis, par extension, V_n et ϕ_n. Cependant, il existe des tables qui fournissent ces éléments pour les signaux usuels.

Il faut par ailleurs noter deux propriétés classiques :

- Lorsque $s(t)$ est pair c'est-à-dire que $s(-t) = s(t)$, $\forall t$, il vient $b_n = 0$, $\forall n \geq 0$.
- Lorsque $s(t)$ est impair c'est-à-dire que $s(-t) = -s(t)$, $\forall t$, il vient $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$.

Développement bilatéral

En utilisant les formules d'Euler,

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{\mathbf{i}\alpha} + e^{-\mathbf{i}\alpha}}{2}, \quad \sin(\alpha) = \frac{e^{\mathbf{i}\alpha} - e^{-\mathbf{i}\alpha}}{2\mathbf{i}},$$

il est possible de récrire le développement de $s(t)$ ainsi (voir notes de cours) :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathbf{i}n\omega_p t},$$

avec

$$c_n = \frac{a_n - \mathbf{i}b_n}{2} = \frac{1}{T_p}\int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t)e^{-\mathbf{i}n\omega_p t}\mathrm{d}t, \forall n$$

Cette somme est appelée *décomposition en série de Fourier bilatérale* et les valeurs c_n en sont les *coefficients*.

Représentation fréquentielle des signaux continus

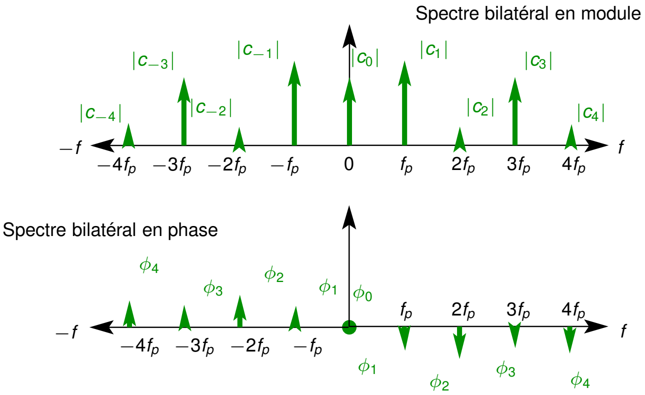
On note que :

- Les coefficients c_n sont complexes.
- $c_0 = a_0$
-

$$|c_0| = V_0, \qquad |c_n| = \frac{|V_n|}{2}, \quad \mathrm{Arg}(c_n) = \phi_n \quad \forall n. \qquad (2)$$

- les indices n sont en partie négatifs, ce qui fait apparaître des *fréquences négatives -$2\pi n f_p$*. Bien sûr, ce n'est qu'un artifice mathématique lié à l'utilisation des formules d'Euler et l'apparition des exponentielles complexes. Deux indices opposés sont associés à une seule et même fréquence qui est bien positive.

Comme les coefficients c_n ont complexes, on peut être tenté de représenter des spectres de leur partie réelle et de leur partie imaginaire (voir notes de cours). Toutefois, il est plus pertinent de représenter les *spectres de module et de phase*.



- Le spectre de module a toutes ses raies montantes et présente une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées.
- Le spectre de phase est symétrique par rapport à l'origine si $a_0 \geq 0$.

Ce développement bilatéral peut paraître indûment compliqué, mais c'est lui qui sert de base à la généralisation au cas des signaux apériodiques qui va suivre.

Représentation spectrale d'un signal apériodique

Un autre résultat mathématique connu

On rappelle qu'un signal apériodique peut être vu comme un signal périodique de période $T_p \to \infty$.

On rappelle aussi que le développement bilatéral en série de Fourier d'un signal périodique est

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathbf{i} n \omega_p t}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) e^{-\mathbf{i} n \omega_p t} \mathrm{d}t, \forall n$$

On a donc :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(\tau) e^{-\mathbf{i} n \omega_p \tau} \mathrm{d}\tau \right) e^{\mathbf{i} n \omega_p t}.$$

Que se passe-t-il si on fait tendre T_p vers l'infini ?

Pour le cas périodique, les seules fréquences pertinentes sont des multiples de f_p. La variable fréquence f ne peut prendre que la forme

$$f = nf_p = n\frac{n}{T_p},$$

où n est une variable discrète (donc f aussi !).

Ce sont les fréquences auxquelles apparaissent les raies spectrales.

Lorsque $T_p \to \infty$, l'écart $1/T_p$ entre deux raies spectrales devient nul (les raies se collent !) mais comme n peut être aussi infini, elles ne sont pas toutes au même endroit mais se "répartissent de façon continue" sur l'axe f.

Autrement dit, f devient une variable continue et il convient de remplacer la somme discrète par une somme continue, c.-à-d. une intégrale en considérant :

$$\begin{cases} f & = & \dfrac{n}{T_p} & \Rightarrow & \mathrm{d}n & = & T_p \mathrm{d}f, \\ T_p & \to & \infty, \\ \omega_p T_p & = & 2\pi. \end{cases}$$

Représentation fréquentielle des signaux continus

Ceci conduit à

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-2\mathbf{i}\pi f \tau} \mathrm{d}\tau \right) e^{2\mathbf{i}\pi n f_p t} \mathrm{d}n$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-2\mathbf{i}\pi f \tau} \mathrm{d}\tau \right)}_{S(f)} e^{2\mathbf{i}\pi f t} \mathrm{d}f$$

$$\Leftrightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{2\mathbf{i}\pi f t} \mathrm{d}f.$$

La fonction $S(f)$ joue, dans le cas apériodique, le même rôle que c_n dans le cas périodique.

On comprend ici, par analogie entre c_n et $S(f)$, que c'est $S(f)$ (par son module et sa phase qui sont des fonctions de f) qui détermine la représentation spectrale d'un signal apériodique.

Représentation fréquentielle des signaux continus

Résumé

périodique	apériodique
$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\mathbf{i}\pi n f_p t}$	$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{2\mathbf{i}\pi f t} \mathrm{d}f$

L'opération mathématique qui consiste à associer à $s(t)$ la quantité $S(f)$, notée $\mathscr{F}$, est appelée *transformation de Fourier* et l'image de $s(t)$, c'est-à-dire $S(f)$ elle-même, est appelée *transformée de Fourier* :

$$\mathscr{F}(s)(f) = S(f).$$

Représentation fréquentielle des signaux continus

Voici un résumé de ce qu'il faut retenir.

Tout (ou presque tout) signal apériodique $s(t)$ borné et d'énergie bornée (finie) admet une *transformée de Fourier*

$$\mathscr{F}(s)(f) = S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2\mathrm{i}\pi ft}\mathrm{d}t.$$

La transformation de Fourier $\mathscr{F}$ admet quelques propriétés :

- Parité :
  Lorsque $s(t)$ est pair c'est-à-dire que $s(-t) = s(t)$, $\forall t$, il vient
  $$S(f) = 2\int_0^{\infty} s(t)\cos(2\pi f t)\mathrm{d}t.$$
- Imparité :
  Lorsque $s(t)$ est impair c'est-à-dire que $s(-t) = -s(t)$, $\forall t$, il vient
  $$S(f) = 2\mathbf{i}\int_0^{\infty} s(t)\sin(2\pi f t)\mathrm{d}t.$$
- Linéarité :
  $$s_1(t) + ks_2(t) \xmapsto{\mathscr{F}} S_1(p) + kS_2(p), \quad k \in \mathbb{R}$$

- Contraction du domaine :

$$s(kt) \overset{\mathscr{F}}{\longmapsto} \frac{1}{|k|} S\left(\frac{f}{k}\right), \quad k \in \mathbb{R}$$

- Translation temporelle :

$$s(t+t_0) \overset{\mathscr{F}}{\longmapsto} S(f)e^{2\mathbf{i}\pi f t_0}, \quad t_0 \in \mathbb{R}$$

- Modulation dans le domaine temporel :

$$s(t)e^{\mathbf{i}2\pi f_0 t} \overset{\mathscr{F}}{\longmapsto} S(f-f_0), \quad f_0 \in \mathbb{R}$$

- Produit de convolution (voir plus loin !) :

$$(s_1 * s_2)(t) \overset{\mathscr{F}}{\longmapsto} S_1(f)S_2(f)$$

  (On verra plus tard ce que cela signifie.)

- Produit simple :

$$s_1(t)s_2(t) \overset{\mathscr{F}}{\longmapsto} S_1(f) * S_2(f)$$

  (On verra plus tard ce que cela signifie.)

- Dérivation :

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \overset{\mathscr{F}}{\longmapsto} 2\mathbf{i}\pi f S(f)$$

- Intégration :

$$\int_0^t s(\tau)\mathrm{d}\tau \overset{\mathscr{F}}{\longmapsto} \frac{S(f)}{2\mathbf{i}\pi f}$$

- Dualité :

$$\text{Si} \quad s(t) \overset{\mathscr{F}}{\mapsto} S(f) \quad \text{alors} \quad S(t) \overset{\mathscr{F}}{\mapsto} s(-f)$$

Pour calculer une transformée de Fourier, on peut se lancer dans le calcul de l'intégrale mais on peut aussi s'aider de tableaux de transformées (voir notes de cours).

Représentation fréquentielle des signaux continus

Il existe une *transformation de Fourier inverse* :

$$\mathscr{F}^{-1}(S)(t) = s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{2\mathbf{i}\pi f t} \mathrm{d}f.$$

Ses propriétés sont liées à celle de $\mathscr{F}$ et on peut se référer aux mêmes tableaux de transformées.

Propriété essentielle :

$$\mathscr{F}(\delta(t))(f) = 1, \quad \mathscr{F}(\delta(t-\alpha))(s) = e^{-2\mathbf{i}\pi\alpha f},$$

On peut définir la fonction $A\delta(t)$ (Dirac de force A) qui a pour transformée de Fourier

$$\mathscr{F}(A\delta(t))(f) = A,$$

et la fonction $A\delta(t-\alpha)$ (Dirac de force A décalé d'un temps α) qui a pour transformée de Fourier

$$\mathscr{F}(A\delta(t-\alpha))(f) = Ae^{-2\mathbf{i}\pi f\alpha}.$$

On a aussi :

$$\mathscr{F}^{-1}(A\delta(f))(t) = A, \quad \mathscr{F}^{-1}(A\delta(f-f_0))(t) = Ae^{2\mathbf{i}\pi f_0 t}.$$

Transformation de Fourier et série de Fourier

$\mathscr{F}$ est une généralisation, au cas apériodique, du développement en série de Fourier. Que se passe-t-il si l'on utilise l'outil général $\mathscr{F}$ pour le cas périodique ?

Un signal de période T_p a pour développement en série de Fourier

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathbf{i} n \omega_p t}.$$

Comme $\mathscr{F}$ est un opérateur linéaire, il vient

$$S(f) = \mathscr{F}(s)(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathscr{F}(e^{2\mathbf{i}\pi n f_p t}).$$

Compte tenu des relations vues précédemment :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_p).$$

La transformée de Fourier d'un signal périodique est bien, mathématiquement, la combinaison de plusieurs impulsions de Dirac fréquentielles et décalées représentant les harmoniques. Chaque impulsion est pondérée par le coefficient c_n qui devient une force complexe associée au Dirac (d'où deux spectres : module et phase).

En conclusion, il était judicieux de représenter les raies spectrales par des impulsions de Dirac.

Énergie et représentation spectrale

Cas général

Rappel : énergie totale d'un signal $s(t)$:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\mathrm{d}t.$$

Elle peut être exprimée dans le domaine fréquentiel :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\mathrm{d}f.$$

C'est l'*égalité de Parseval*, ou *théorème de Parseval*, ou encore *identité de Rayleigh*. Elle montre que l'énergie ne dépend pas de la représentation choisie (temporelle ou fréquentielle). La quantité $\Phi(f) = |S(f)|^2$ est appelée *densité spectrale d'énergie*.

Cas périodique

Si le signal est périodique, il admet un développement en série de Fourier et la puissance moyenne du signal peut s'exprimer en fonction des coefficients de ce développement :

$$P = \frac{1}{T_p}\int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s^2(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Cinquième classification

basée sur la largeur de bande

On définit la *bande de fréquence* par

$$\Delta f = f_{\text{max}} - f_{\text{min}}.$$

Cette bande de fréquence s'exprime bien sûr en Hz. La fréquence moyenne sur cette bande est donnée par

$$f_{\text{moy}} = \frac{f_{\text{max}} + f_{\text{min}}}{2}.$$

On distingue alors :

- les signaux *à bande étroite* pour lesquels

$$\frac{\Delta f}{f_{\text{moy}}} << 1\ ;$$

- les signaux *à large bande* pour lesquels

$$\frac{\Delta f}{f_{\text{moy}}} > 1.$$

Sixième classification

basée sur la bande de fréquence concernée

On trie les signaux en fonction de la gamme des fréquences qui les composent.

Ecouter les explications de l'enseignant (voir aussi les notes de cours).

Filtrage des signaux continus

Filtrage des signaux continus

Motivation

Un signal $e(t)$ traverse un système qui le modifie de sorte qu'en sortie de ce système, on obtient un autre signal $s(t)$.

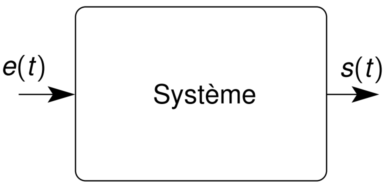


Figure: signal $e(t)$ modifié en un signal (t) par un système (ou filtre)

Ce système peut correspondre, par exemple, à un canal de transmission de l'information contenue dans $e(t)$ qui aurait l'inconvénient de déformer $e(t)$ ou il peut aussi correspondre à un dispositif que l'on construirait pour extraire une information de $e(t)$ et la retrouver plus simplement sur $s(t)$. On dit que $s(t)$ est la *réponse* du système à $e(t)$.

La notion de *système* est semblable à celle vue en Automatique. Un système n'est rien d'autre qu'un *filtre* tel que ceux vus en électronique. On utilisera donc indifféremment le mot *système* ou le mot *filtre* même si, en traitement du signal, c'est plus en tant que *filtre* qu'il sera étudié.

Les modèles mathématiques des filtres peuvent être parfois très compliqués. Ici, on se contentera d'étudier les *filtres linéaires*, décrits par

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + \ldots + a_n \frac{\mathrm{d}^n s(t)}{\mathrm{d}t^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + \ldots + b_m \frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m}.$$

On appelle *ordre du système* la valeur n. Les systèmes physiques sont dits *causaux* c'est-à-dire que la sortie $s(t)$ ne peut dépendre de l'entrée à un moment ultérieur. Ceci se traduit par

$$n \geq m.$$

De tels filtres respectent le *principe de superposition* :

Si

$$\left\{ \begin{array}{ll} e(t) = e_1(t) & \Rightarrow s(t) = s_1(t) \\ & \& \\ e(t) = e_2(t) & \Rightarrow s(t) = s_2(t) \end{array} \right\}$$

alors

$$e(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) \Rightarrow s(t) = \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t) \quad \forall(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La meilleure solution pour comprendre ce qu'il advient de $e(t)$ lorsqu'il traverse le filtre n'est pas toujours de résoudre l'équation différentielle mais souvent de voir ce qui se passe aux différentes fréquences contenues dans $e(t)$.

Pour cela, on étudie, dans la partie suivante, la *réponse impulsionnelle* du filtre, c'est-à-dire sa réaction à la présence d'une impulsion de Dirac sur $e(t)$. À partir de cette réponse, on étudie la réponse du même filtre à un signal quelconque.

Il faut donc exprimer la réponse impulsionnelle !

Réponse impulsionnelle d'un filtre causal

La *réponse impulsionnelle* d'un filtre est sa réponse à une *impulsion de Dirac*. C'est une impulsion idéalisée qui ne doit pas être confondue avec avec $\delta_d(t)$, l'*impulsion unitaire*, définie par

$$\delta_d(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t = 0, \\ 0 & \text{si} \quad t \neq 0. \end{cases}$$

Cette dernière est aussi une impulsion idéalisée mais ce n'est pas son intégrale qui vaut 1 pour $t = 0$, c'est simplement sa valeur proprement dite.

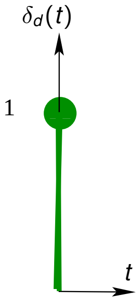


Figure: Impulsion unitaire discrète

Soit maintenant l'impulsion d'amplitude e notée $e\delta_d(t)$. Elle correspond à une impulsion rectangulaire telle celle représentée ci-après

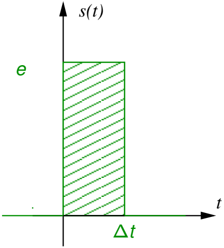


Figure: Impulsion rectangulaire de hauteur e

De même que $\delta(t)$ a été définie en faisant tendre Δt vers zéro, on peut définir l'impulsion $e\delta_d(t)$ comme la limite de l'impulsion précédente lorsque $\Delta t \to 0$ (la largeur devient infiniment petite mais la hauteur reste constante). Par rapport à l'impulsion de Dirac, c'est la hauteur qui est différente et qui passe de $\frac{1}{\Delta t}$ à une constante e. On écrira donc, un peu abusivement,

$$e\delta_d(t) = \lim_{\Delta t \to 0} e\Delta t\delta(t).$$

Si l'on décale cette impulsion d'un temps τ, il faut aussi décaler le Dirac de sorte que

$$e\delta_d(t-\tau) = \lim_{\Delta\tau \to 0} e\Delta\tau\delta(t-\tau).$$

On notera plutôt $\Delta\tau$ l'intervalle de temps, puisqu'il s'agit maintenant d'un intervalle de temps autour de τ. Ceci ne change de toute façon rien à la formule.

Enfin, on note $g(t)$ la réponse du filtre à l'impulsion de Dirac (réponse impulsionnelle) :

$$e(t) = \delta(t) \Rightarrow s(t) = g(t).$$

Par ailleurs, si l'impulsion de Dirac est décalée d'un temps τ en entrée, le système répondra lui aussi avec un retard de τ, ce qui conduit à

$$e(t) = \delta(t - \tau) \Rightarrow s(t) = g(t - \tau).$$

Cette réponse impulsionnelle est importante pour déterminer la réponse à n'importe quel signal *causal* (défini uniquement pour $t \geq 0$).

Réponse d'un filtre causal

À un instant τ, le signal $e(\tau)$ a pour valeur $e(\tau)$... ce qui est une parfaite évidence.

Si l'on suppose maintenant que le signal n'existe qu'à l'instant τ, alors il se résume à une impulsion d'amplitude $e(\tau)$, située à l'instant τ, qui s'écrit donc

$$e(\tau)\delta_d(t-\tau) = \lim_{\Delta\tau \to 0} e(\tau)\Delta\tau\delta(t-\tau)$$

Filtrage des signaux continus

Plus exactement si l'on considère un temps infinitésimal correspondant à l'élément différentiel dτ (il s'agit de $\Delta\tau$ tendant vers zéro), alors à cet élément différentiel de temps, on associe un élément différentiel du signal d'entrée

$$\mathrm{d}e_\tau = e(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Oui mais voilà, le signal $e(t)$ est défini pour tout $\tau \in \mathbb{R}$. Ceci veut dire qu'il est la somme de tous les éléments différentiels de_τ que l'on peut rencontrer au cours du temps jusqu'à t :

$$e(t) = \int_{-\infty}^{t} e(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Filtrage des signaux continus

Or, en se rappelant que l'impulsion de Dirac a pour réponse la réponse impulsionnelle $g(t)$ et que chaque impulsion n'est autre qu'un Dirac décalé de τ et multiplié par un coefficient de $e(\tau)\Delta\tau$, il vient alors, en jouant sur la linéarité du filtre, un "morceau de sortie" associé à d$e(\tau)$:

$$\mathrm{d}s_\tau = e(\tau)d\tau g(t-\tau).$$

Si, toujours par linéarité, on ajoute tous ces éléments différentiels de sortie, on obtient

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} e(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Comme le système est causal, la partie du signal e qui arrive sur le filtre après le temps t ne peut pas avoir d'influence sur le temps signal s avant l'instant t. L'intégrale précédente peut donc se récrire

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

En résumé

Soit un filtre causal de réponse impulsionnelle $g(t)$. La réponse $s(t)$ à un signal $e(t)$ s'exprime

$$s(t) = e(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Du point de vue mathématique, l'intégrale dans cette formule est appelée *produit de convolution* de $e(t)$ et de $s(t)$ et est notée $e(t) * g(t)$ (en fait, plus rigoureusement $(e * g)(t)$).

Propriétés de '$*$'

- Commutativité :

$$s(t) = e(t) * g(t) = g(t) * e(t). \tag{3}$$

- Élément neutre :

$$s(t) * \delta(t) = \delta(t) * s(t) = s(t). \tag{4}$$

(C'est évident pour la réponse impulsionnelle d'un filtre mais c'est en fait vrai pour tout signal.)

- Décalage temporel :

$$\delta(t - T) * s(t) = s(t - T). \tag{5}$$

(Là encore, c'est évident pour la réponse impulsionnelle d'un filtre mais c'est aussi vrai pour tout signal.)

Transformation de Fourier et produit de convolution

La propriété essentielle est ici donnée :

$$s(t) = e(t) * g(t) \overset{\mathscr{F}}{\longmapsto} S(f) = E(f)G(f).$$

Ceci permet d'établir un *spectre continu* du signal $s(t)$

Cette relation dans le domaine fréquentiel est résumée ainsi :

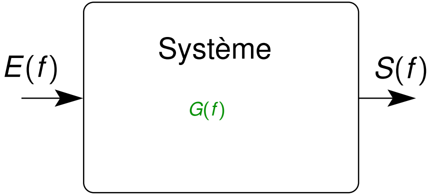


Figure: Filtrage dans le domaine fréquentiel

$G(f)$ est la *fonction de transfert* en f du filtre.

La fonction de transfert $G(f)$ peur s'obtenir à partir de l'équation différentielle :

$$G(f) = \frac{b_m p^m + ... + b_1 p + b_0}{a_n p^n + ... + a_1 p + a_0},$$

où $p = \mathbf{i}\omega = 2\mathbf{i}\pi f$.

La *causalité* se traduit toujours par $n \geq m$.

Exprimée ainsi, c'est la même fonction de transfert que celle vue en Automatique (même expression) mais p ne désigne pas la variable de Laplace. Cette variable est ici restreinte à l'axe imaginaire (l'objectif n'est pas le même).

Principe et intérêt du filtrage

En pratique, il n'est pas si fréquent d'utiliser l'intégrale de convolution. Pour bien des applications, le raisonnement ne se fait pas dans le domaine temporel, mais dans le domaine fréquentiel d'où l'importance de $G(f)$.
On rappelle que $E(f)$, $S(f)$ et $G(f)$ sont des nombres complexes (puisqu'ils s'expriment en fonction de **i**). Ils ont donc des modules qui vérifient

$$|S(f)| = |G(f)|.|E(f)|.$$

où $p = \mathbf{i}\omega = 2\mathbf{i}\pi f$.

Filtrage des signaux continus

Il est logique de considérer qu'une fréquence f (contenue dans $e(t)$) contribue beaucoup à $s(t)$ si $|S(f)|$ est grand. Or $|S(f)|$ est d'autant plus grand que $|G(f)|$ est grand. Autrement dit,

- $|G(f)|$ élevé le filtre amplifie beaucoup à la fréquence f ;
- $|G(f)|$ faible le filtre amplifie peu à la fréquence f.

C'est bien l'idée du *filtre*.

Bien sûr, la notion de *filtre* est déjà familière pour l'étudiant qui en connaît notamment certaines représentations graphiques telles que le *diagramme de Bode*. Sans trop revenir sur ces notions, on peut rappeler qu'il est possible de représenter le module $|G(f)|$ en fonction de f pour voir quelles sont les fréquences privilégiées par le filtre. il faut toutefois satisfaire deux règles pour une représentation efficace :

1. La fréquence est graduée en échelle logarithmique.
2. L'amplification n'est pas donnée directement mais on porte en ordonnée ce que l'on appelle le *gain en décibels* $T(f) = 20\log_{10}(|G(f)|)$, l'échelle restant alors linéaire.

Filtrage des signaux continus

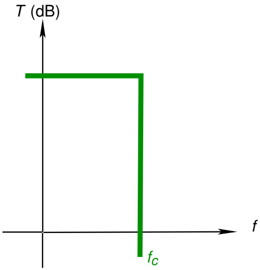
On obtient alors la *courbe de gain du diagramme de Bode*. La première règle a pour but de ne pas privilégier les fréquences les plus élevées dans la représentation graphique et la seconde permet, entre autres, de pouvoir mettre des filtres $G_1(f)$ et $G_2(f)$ en série (deux filtrages consécutifs) et de vérifier que le filtre total $G(f) = G_2(f)G_1(f)$ satisfait

$$T(f) = 20\log_{10}|G(f)| = 20\log_{10}|G_2(f)G_1(f)| = 20(\log_{10}|G_2(f)| + \log_{10}|G_1(f)| = T_1(f) + T_2(f).$$

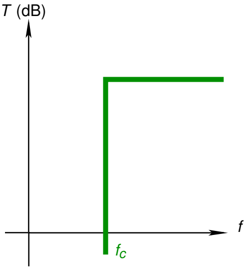
Cette formule indique que l'on construit la courbe de gain globale en additionnant les deux courbes de gain de $G_1(f)$ et $G_2(f)$ ce qui simplifie grandement la construction de certains diagrammes.

Filtrage des signaux continus

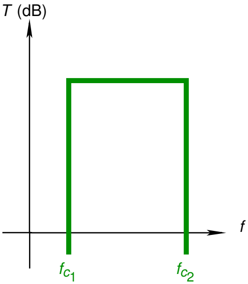
Un *filtre* doit être vu comme un "gabarit fréquentiel" qui laisse passer des fréquences et en bloque d'autres. Trois gabarits de filtres sont plus utilisés que les autres :



filtre passe-bas



filtre passe-haut



filtre passe-bande

Ces filtres sont idéalisés. Ils font apparaître des *fréquences de cassure* très brutales.

Filtrage des signaux continus

- Le filtre passe-bas idéal laisse passer les basses fréquences mais aucune au dessus de f_c.
- Le filtre passe-haut idéal laisse passer les hautes fréquences mais aucune au dessous de f_c.
- Le filtre passe-bande idéal laisse passer les fréquences entre f_{c_1} et f_{c_2} mais rien à l'extérieur de cet intervalle.

Les gammes de fréquences non bloquées sont appelées *bandes passantes*.

En pratique, les filtres ne sont pas idéaux mais ont une forme moins rectangulaire et les bandes passantes correspondent à des pertes de moins de 3dB par rapport au gain maximum :

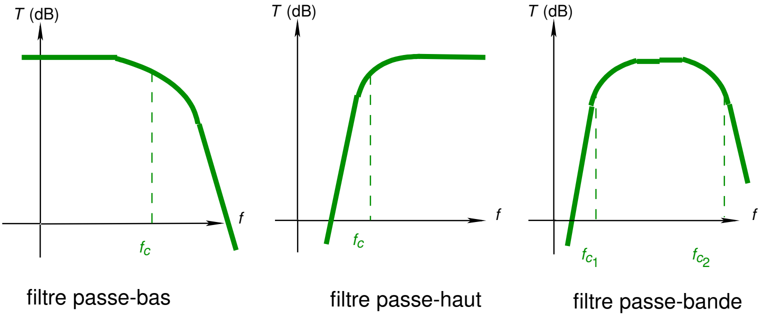


Figure: Gabarits classiques réalistes de filtres

(Se référer aux notes de cours pour quelques compléments d'information.)

Influence des gabarits

Filtrage passe-bas

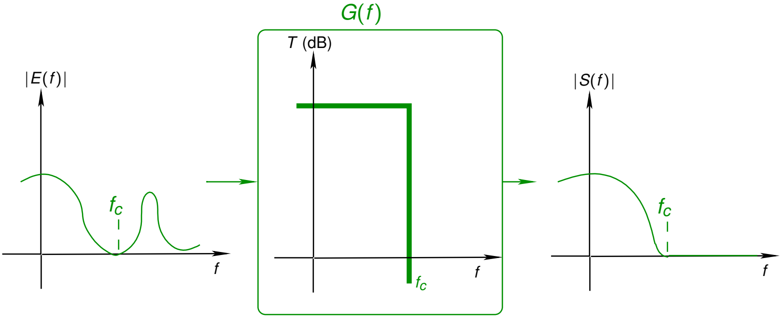


Figure: Exemple de filtrage passe-bas : élimination d'un bruit de hautes fréquences

Filtrage passe-haut

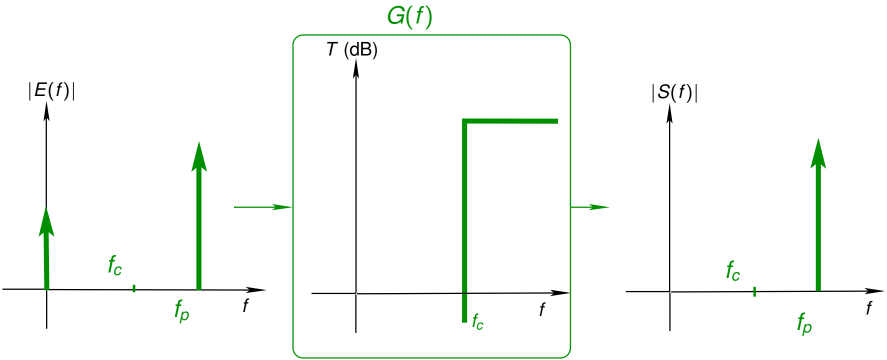


Figure: Exemple de filtrage passe-haut :élimination d'un *offset*

Filtrage passe-bande

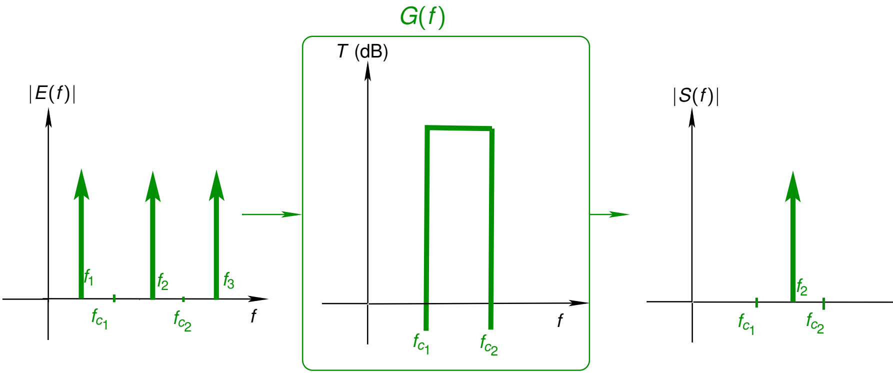


Figure: Exemple de filtrage passe-bande : isolation d'une fréquence (ex : radio)

Ne pas oublier de consulter les notes de cours pour de plus amples explications.

Échantillonnage des signaux continus

... ou comment interpréter l'échantillonnage en termes fréquentiels.

Échantillonnage des signaux continus

Les signaux sont souvent manipulés par des ordinateurs, des composants programmables, numériques, des logiciels de calcul, de simulation, des oscilloscopes numériques. Les signaux manipulés sont donc discrets. Même les analyseurs de spectres manipulent en fait des signaux discrets.

Pourtant, physiquement, les signaux sont au départ souvent continus. Ceci suppose une "discrétisation", en pratique un *échantillonnage*.

Quel est l'effet de cet échantillonnage dans le domaine fréquentiel ?

Échantillonnage : une notion physique et mathématique

On ne considèrera que l'échantillonnage des signaux à temps continu avec une *période d'échantillonnage T_e* constante, ce qui correspond à l'immense majorité des cas en pratique. On étudie ici deux échantillonnage *idéalisés* :

- l'échantillonnage *impulsionnel*, pour une première approche "naturelle" mais néanmoins idéalisée ;
- l'échantillonnage *impulsionnel idéal*, plus idéalisé encore, mais utile pour les développements théoriques.

Échantillonnage des signaux continus

Échantillonnage impulsionnel

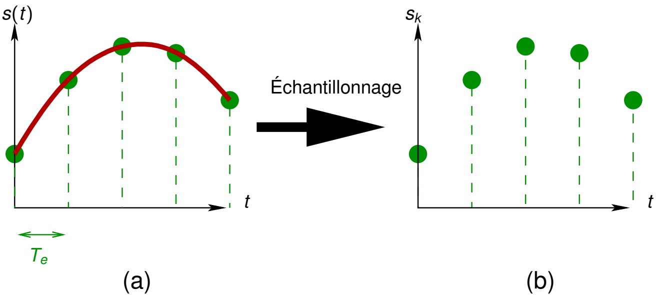


Figure: Processus d'échantillonnage

Idée : remplacer la courbe rouge (signal continu) par les points verts (signal discret).

Échantillonnage des signaux continus

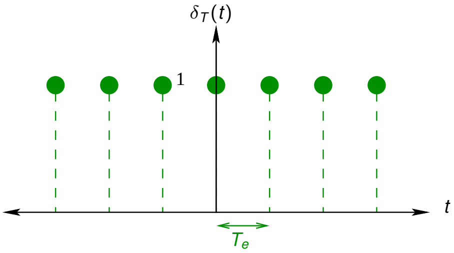


Figure: Train d'impulsions unitaires

On multiplie le signal continu par le train d'impulsions unitaires ci-dessus. Ce train fait apparaître une *période d'échantillonnage T_e*. On obtient le signal discret.

Échantillonnage des signaux continus

Du point de vue mathématique, $\delta_T(t)$, s'exprime

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_d(t - kT_e).$$

Il est donc possible d'exprimer le signal échantillonné (vert) (ici noté $s_s(t)$) :

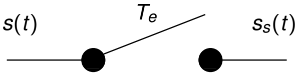
$$s_s(t) = s(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{s(kt)}_{s_k} \delta_d(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \delta_d(t - kT_e).$$

Les valeurs s_k constituent une suite numérique. C'est en réalité cette suite qu'on appelle *signal discret*.

Échantillonnage des signaux continus

Cette transformation est idéalisée dans le sens où les impulsions sont de largeur nulle.

Elle est symbolisée par



Échantillonnage impulsionnel idéal

L'idée est d'idéaliser encore un plus l'échantillonnage en remplaçant le train d'impulsion unitaires par un train d'impulsions de Dirac appelé *peigne de Dirac*.

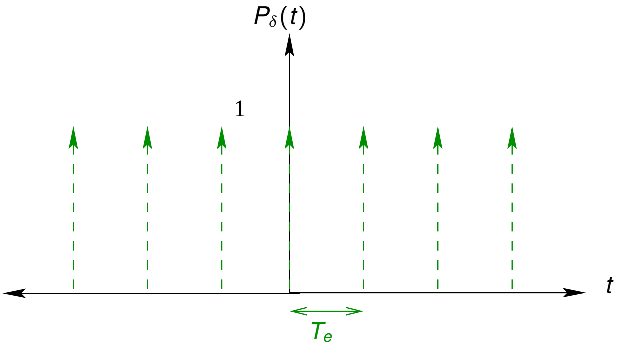


Figure: Peigne de Dirac

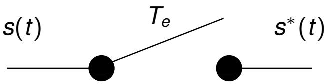
Il vient

$$s^*(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e),$$

qui s'écrit aussi

$$s^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_e)\delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k\delta(t - kT_e).$$

Le symbole dans un schéma est toujours :



Mathématiquement l'opérateur qui transforme $s(t)$ en $^*(t)$ est appelée *transformation étoile temporelle*.

Échantillonnage des signaux continus

Remarque

Le vrai signal discret est la suite $\{s_k\}$ alors que $s^*(t)$ est rigoureusement un signal à temps continu qui est nul en dehors des instants d'échantillonnage.

Il est possible de définir une *transformée de Fourier discrète* de $\{s_k\}$ pour en obtenir une interprétation fréquentielle et juger de la qualité de l'échantillonnage. Toutefois les propriétés fréquentielles de $\{s_k\}$ et $s^*(t)$ étant très proches, on jugera, dans cette partie, de la qualité de l'échantillonnage en étudiant le spectre de $s^*(t)$.

Qualité de l'échantillonnage

Échantillonnage dans le domaine fréquentiel

La transformée de Fourier de $s^*(t)$ est donnée par

$$S^*(f) = S(f) * P_\delta(f).$$

où $P_\delta(f)$ est la transformée de Fourier de $P_\delta(t)$ qu'il convient de calculer.

$P_\delta(t)$ est un signal périodique qui admet un développement en série de Fourier dont il est possible de calculer les coefficients c_n :

$$c_n = \frac{1}{T_e}\int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} P_\delta(t)e^{-\mathrm{i}n\omega_e t}\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{T_e}\int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \delta(t)e^{-\mathrm{i}n\omega_e t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T_e}\int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \delta(t).1\mathrm{d}t = \frac{1}{T_e},$$

où $\omega_e = 2\pi f_e = \frac{2\pi}{T_e}$ est la pulsation d'échantillonnage. Il vient alors :

$$P_\delta(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_e).$$

Échantillonnage des signaux continus

On injecte cette expression dans celle de $S^*(f)$:

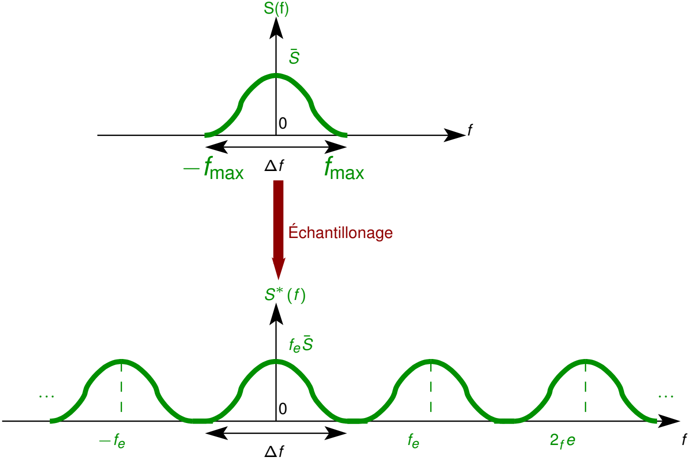
$$S^*(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f) * \delta(f - nf_e).$$

Ceci conduit à :

$$S^*(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nf_e).$$

L'échantillonnage a pour effet de reproduire le spectre de $S(f)$ autour de chaque multiple de la fréquence d'échantillonnage f_e.

Échantillonnage des signaux continus



$S(f)$ et $S^*(f)$ étant complexes, cette duplication concerne tout autant le module que la phase.

Bon échantillonnage et mauvais échantillonnage ?

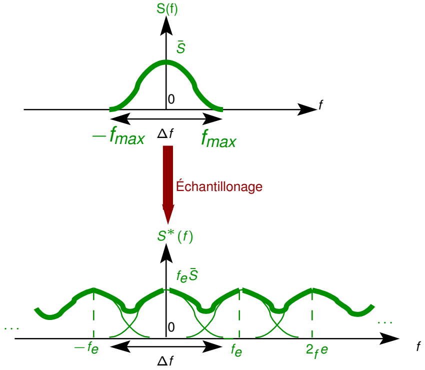
Dans le dessin précédent, il est possible d'isoler facilement le motif élémentaire (spectre de $S(f)$), qui n'est pas déformé.

Un filtre passe bas (idéalisé) suffit pour retrouver $S(f)$ à partir de $S^*(f)$. Un tel filtre est appelé *filtre de restitution*

Autrement dit, l'information sur le signal continu $s(t)$ n'a pas été perdue. La *restitution* est l'opération inverse de *l'échantillonnage*.

On peut aussi rencontrer des cas plus compliqués.

Échantillonnage des signaux continus



Dans un tel cas, il est impossible de récupérer $S(f)$, même par un filtre idéal. L'information sur $s(t)$ est perdue ! On parle alors de *repliement de spectre* ou *recouvrement de spectre*.

Échantillonnage des signaux continus

Dans l'hypothèse où le spectre de $s(t)$ est limité à la fréquence $f_{\max}$, pour éviter le *repliement de spectre*, il faut assurer la condition suivante :

$$f_e > 2f_{\max}$$

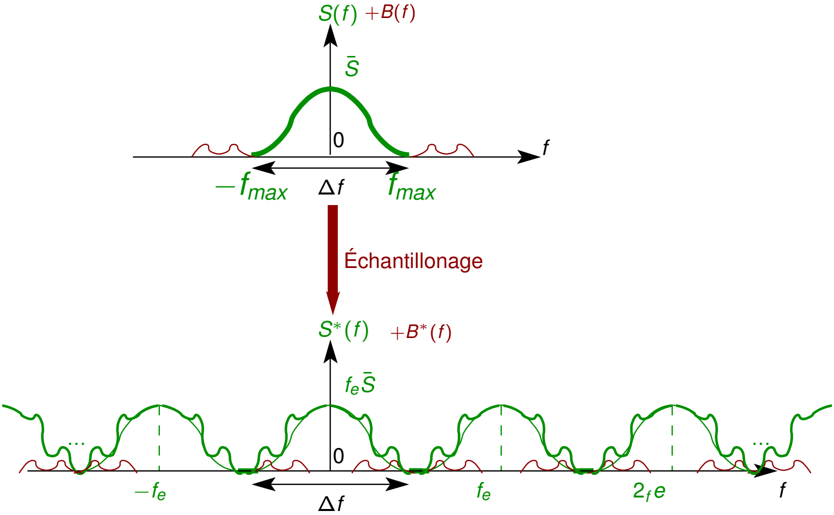
Ce résultat est appelé *théorème de Shannon* ou encore *théorème de Nyquist-Shannon*.

Bruit et filtre anti-repliement

Parfois le signal à échantillonner est la somme d'un signal utile $s(t)$ et d'un bruit $b(t)$ de sorte que le signal échantillonné est $s(t) + b(t)$.

Il se peut que le *repliement de spectre* soit dû à la présence du bruit comme le montre la figure suivante.

Échantillonnage des signaux continus



Échantillonnage des signaux continus

Dans un tel cas, il est conseillé de procéder à un *filtrage passe-bas* avant l'échantillonnage et ainsi éliminer ou réduire le bruit pour éviter le *repliement de spectre*.

On parle de *filtre anti-repliement* et la bande passante de ce filtre doit autant que possible couvrir la spectre de $s(t)$ mais ne pas inclure les fréquences du bruit$b(t)$.

Il est conseillé, de manière générale, de toujours procéder *filtrage anti-repliement* avant échantillonnage même si des cas peuvent contredire cet usage.

Echantillonnage et restitution en pratique.

En pratique :

- L'échantillonnage est assuré par un *convertisseur analogique numérique (CAN)* mais ce dernier assure deux opérations supplémentaires :
  - un blocage pour assurer un temps minimal permettant la conversion électronique ;
  - une quantification, liée au codage en binaire, qui est est d'autant plus importante que le CAN est de faible définition.
- La restitution est assurée par un *convertisseur numérique analogique (CNA)* mais :
  - le signal restitué est numérique donc par essence quantifié ;
  - la restitution n'est pas vraiment assurée par un filtrage mais par un blocage (construction d'un *"signal en escalier"*).

Échantillonnage des signaux continus

Si l'on néglige l'aspect de quantification, celui de blocage par les CAN est un peu plus compliqué à ignorer. Une étude plus approfondie consisterait à :

- étudier les vrais signaux discrets *(suites numériques)*, ainsi que leurs "spectres", donc la *transformation de Fourier discrète* ;
- étudier l'action sur le spectre d'un *échantillonnage-blocage* plutôt que d'un simple échantillonnage.

Mais on arrive à la fin du faible temps imparti !

Mais n'oubliez pas de consulter les notes de cours en version PDF !