

# ÉLECTROCINÉTIQUE, ÉLECTROMAGNÉTISME, APPLICATION AU TRANSFORMATEUR MONOPHASÉ

O. Bachelier

*Université de Poitiers*

IUT de Poitiers-Châtelleraut-Niort

Département de Mesures Physiques, 2ème année



- Quelques bases d'électrocinétique
- Quelques bases sur les grandeurs et les circuits magnétiques
- Bobine à noyau de fer
- Transformateur monophasé
- Systèmes triphasés

- Ce diaporama peut-être complété par des notes de cours manuscrites (disponibles sur UPdago).
- Ce document n'est qu'un aperçu de quelques notions d'électromagnétisme. Il ne constitue en rien un cours complet. Il n'aborde notamment pas les équations de Maxwell. Les figures sont des captures d'écran de dessins faits à la main (la honte! Quel fainéant !).

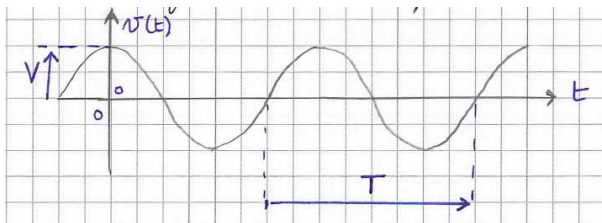
## Quelques bases d'électrocinétique

Pour réviser les notions de base et comprendre un peu mieux les notions de puissances actives, réactives et apparentes.

# Quelques bases d'électrocinétique

## Rappels sur les grandeurs sinusoïdales

Soit une tension sinusoïdale en fonction du temps  $t$ .



- $V$  est l'amplitude;
- $T$  est la période (en s);
- $f = \frac{1}{T}$  est la fréquence (en Hz);
- $\omega = 2\pi f$  est la pulsation (en rad/s).

On rappelle que le radian est une unité adimensionnelle (m/m) qui est donc homogène au Hertz.

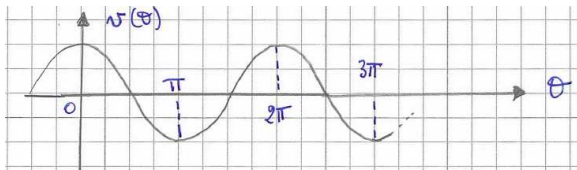
La tension dessinée s'exprime

$$v(t) = V \cos(\omega t) = V_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t).$$

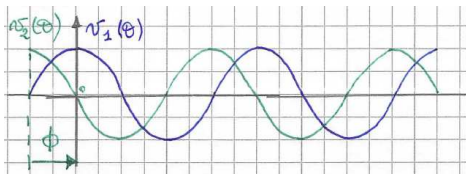
La quantité  $V_{\text{eff}} = \frac{V}{\sqrt{2}}$  est la valeur efficace de la tension  $v$  (**attention ! n'utiliser cette relation entre  $V_{\text{eff}}$  et  $V$  que dans le cas sinusoïdal**).

La quantité  $\omega t$  s'exprime en radians donc en faisant le changement de variable  $\theta = \omega t$ , on peut redessiner le graphe ainsi :

# Quelques bases d'électrocinétique



Ceci permet de définir la *phase à l'origine*  $\phi$  d'un signal (ici d'une tension).



Les deux grandeurs  $v_1$  et  $v_2$  ont la même pulsation  $\omega$ .

$$v_1(t) = V_1 \cos(\omega t) \Rightarrow \phi = 0$$

$$v_2(t) = V_2 \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \phi > 0$$

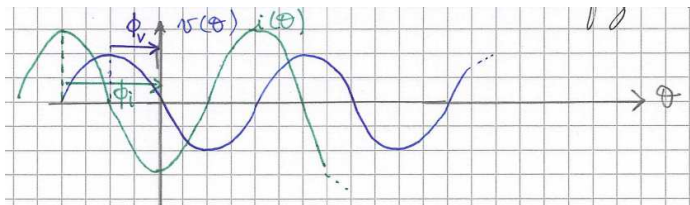
Dans le cas présent,  $v_1$  est un signal de référence et l'on dit que  $v_2$  est déphasé de  $\phi$  par rapport à  $v_1$ .

- $\phi > 0 \Leftrightarrow v_2$  est en avance ;
- $\phi < 0 \Leftrightarrow v_2$  est en retard.

La phase à l'origine en elle-même n'a pas trop d'intérêt. En pratique, on considère un signal de référence (par exemple une tension) et on regarde le *déphasage* d'autres signaux (par exemple une intensité) par rapport à cette référence, comme ci-après.



# Quelques bases d'électrocinétique



$v(t) = V \cos(\omega t + \phi_v) \Rightarrow \phi_v = \text{phase à l'origine de } v ;$

$i(t) = I \cos(\omega t + \phi_i) \Rightarrow \phi_i = \text{phase à l'origine de } i .$

On définit le *déphasage tension-courant* par

$$\phi = \phi_v - \phi_i \quad (\text{toujours dans ce sens})$$

- $\phi > 0$  : *déphasage avant* : la tension est en avance sur le courant ;
- $\phi < 0$  : *déphasage arrière* : la tension est en retard sur le courant (comme sur le dessin).

On peut associer aux signaux  $v$  et  $i$  des *quantités complexes*  $\underline{V}$  et  $\underline{I}$ , définis par :

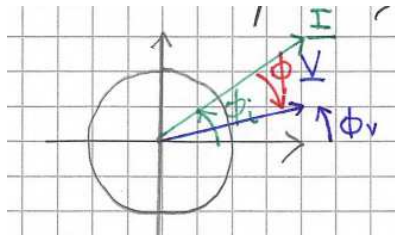
$$\underline{V} = V e^{j(\omega t + \phi_v)},$$

$$\underline{I} = I e^{j(\omega t + \phi_i)},$$

c'est-à-dire qu'on remplace le cosinus par une exponentielle complexe. (Parfois, on remplace les amplitudes par les valeurs efficaces).

# Quelques bases d'électrocinétique

On peut représenter ces nombres complexes pour  $t = 0$ . C'est ce qu'on appelle un *diagramme de Fresnel*.

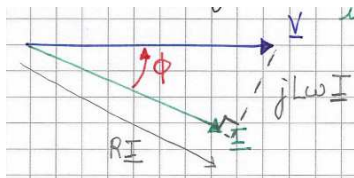
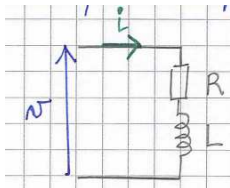


Puisque les deux signaux ont la même pulsation  $\omega$ , si  $t$  évolue, le diagramme tourne dans le sens trigonométrique mais l'angle entre les vecteurs (le déphasage) reste constant. Pour  $t = 0$ , on retrouve les phases à l'origine.

# Quelques bases d'électrocinétique

## Quelques exemples classiques

### Circuit inductif :



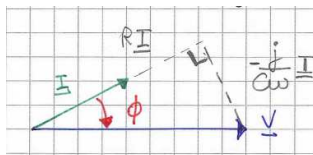
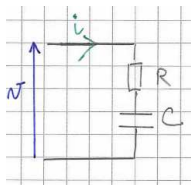
$$v(t) = V \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I \cos(\omega t - \phi)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

# Quelques bases d'électrocinétique

## Circuit capacitif :



$$v(t) = V \cos(\omega t)$$

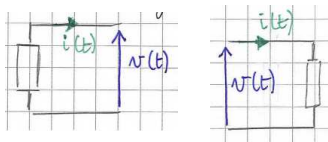
$$i(t) = I \cos(\omega t - \phi)$$

$$\phi = -\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$$

Le circuit capacitif a un effet *retardateur* alors que le circuit inductif a un effet *anticipateur* pour la tension.

## Aspects énergétiques

Lorsqu'un composant est soumis à une tension  $v(t)$  à ses bornes et est traversé par un courant d'intensité  $i(t)$ , il existe deux conventions pour définir la puissance instantanée  $p(t)$ .



- Convention générateur (à gauche) :  $p(t) > 0 \Rightarrow$  la puissance est émise par le dipôle ;
- Convention récepteur (à droite) :  $p(t) > 0 \Rightarrow$  la puissance est reçue par le dipôle.

Dans les deux cas,  $p(t) = v(t)i(t)$ . C'est la *convention récepteur* qui est retenue la plupart du temps (exemple : loi d'Ohm  $v(t) = +Ri(t)$ ).

# Quelques bases d'électrocinétique

On s'intéresse à la *puissance moyenne*  $P = \langle p(t) \rangle$  en régime sinusoïdal :

$$v(t) = V \cos(\omega t), \quad i(t) = I \cos(\omega t - \phi)$$

$$\Rightarrow p(t) = v(t)i(t) = VI \cos(\omega t) \cos(\omega t - \phi)$$

On utilise la propriété

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a + b) + \frac{1}{2} \cos(a - b)$$

qui conduit à

$$p(t) = \frac{VI}{2} \cos(2\omega t - \phi) + \frac{VI}{2} \cos(\phi)$$

La moyenne d'un signal sinusoïdal étant nul, il vient :

$$P = \frac{VI}{2} \cos(\phi) = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\phi)$$

La puissance moyenne  $P$  est également appelée *puissance active*. Elles s'exprime en Watts (W).

À partir des quantités complexes  $\underline{V} = V_{\text{eff}} e^{j(\omega t + \phi_v)}$  et  $\underline{I} = I_{\text{eff}} e^{j(\omega t + \phi_i)}$ , on peut définir différentes puissances :

- Puissance complexe  $\underline{S} = \underline{V} \cdot \tilde{\underline{I}} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} e^{j\phi}$  ;
- Puissance active  $P = \text{Re}(\underline{S}) = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\phi) = \langle p(t) \rangle$  (en W) ;
- Puissance réactive  $Q = \text{Im}(\underline{S}) = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\phi)$  (en Volts Ampères réactifs (VAR)) ;
- Puissance apparente  $S = |\underline{S}| = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$  (en Volts Ampères (VA)).



## En résumé

- Puissance active  $P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\phi)$  (en W) ;
- Puissance réactive  $Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\phi)$  (VAR) ;
- Puissance apparente  $S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$  (en VA).

La seule vraie puissance est  $P$  car elle correspond vraiment à une consommation d'énergie ( $1\text{W}=1\text{J}/1\text{s}$ ).

La puissance apparente  $S$  est celle qu'on pense "naïvement" avoir.

La puissance réactive  $Q$  explique la différence entre  $P$  et  $S$  et correspond à des échanges de charges électriques entre source et récepteur sans dissipation d'énergie.

# Quelques bases d'électrocinétique

On définit aussi le *facteur de puissance* par

$$k = \frac{P}{S}.$$

En régime sinusoïdal, on a donc

$$k = \cos(\phi).$$

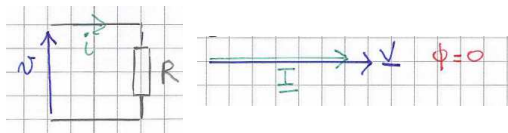
On a par ailleurs

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

(On peut faire un diagramme des puissances complexes et ceci correspond au théorème de Pythagore.)

## Quelques exemples classiques

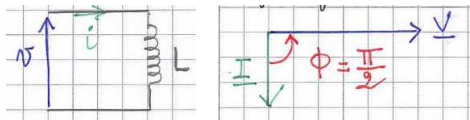
### Résistance :



$$v(t) = Ri(t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{V}{V} = \frac{RI}{RI} \\ V_{\text{eff}} = RI_{\text{eff}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = RI_{\text{eff}}^2 = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} = S, \\ Q = 0. \end{cases}$$

car  $\phi = 0$ .

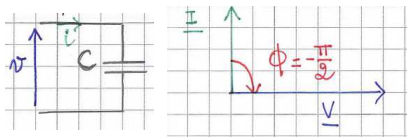
## Inductance :



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \frac{V}{I} = jL\omega \\ V = L\omega I \\ V_{\text{eff}} = L\omega I_{\text{eff}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = \frac{V_{\text{eff}}^2}{L\omega} = L\omega I_{\text{eff}}^2 = S. \end{cases}$$

car  $\phi = \frac{\pi}{2}$ .

## Capacité :



$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \begin{cases} V = \frac{I}{jC\omega} \\ V_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{eff}}}{C\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = -C\omega V_{\text{eff}}^2 = -\frac{I_{\text{eff}}^2}{C\omega} = -S. \end{cases}$$

car  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ .

On note que **Q peut-être négative.**

## En résumé

	$R$	$L$	$C$
Relation complexe	$\underline{V} = R\underline{I}$	$\underline{V} = jL\omega\underline{I}$	$\underline{V} = \frac{\underline{I}}{jC\omega}$
Impédance complexe	$Z_R = R$	$Z_L = jL\omega$	$Z_C = \frac{1}{jC\omega}$
$\phi$	0	$\phi = \frac{\pi}{2}$	$\phi = -\frac{\pi}{2}$
$P$	$R I_{\text{eff}}^2 = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} > 0$	0	0
$Q$	0	$\frac{V_{\text{eff}}^2}{L\omega} = L\omega I_{\text{eff}}^2 > 0$	$-C\omega V_{\text{eff}}^2 = -\frac{I_{\text{eff}}^2}{C\omega} < 0$
$S(> 0)$	$P$	$Q$	$-Q$

Dans certains cas, la tension  $v$  et l'intensité  $i$  sont sinusoïdales mais de pulsations différentes. Il est alors facile de montrer que la puissance active vérifie

$$P = \langle p(t) \rangle = 0.$$

Parfois, la charge est non linéaire et, pour  $v(t) = V \cos(\omega t)$ , l'intensité, si elle reste périodique de pulsation  $\omega$ , n'est pas sinusoïdale. Elle vérifie (voir cours de traitement du signal (TdS) en deuxième année):

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t - \phi_k).$$

Cette somme est appelée *décomposition harmonique*. C'est donc une somme infinie de termes sinusoïdaux et le premier terme, très important, est appelé *terme fondamental*.

# Quelques bases d'électrocinétique

Le terme fondamental  $i_1(t) = I_1 \cos(\omega t - \phi_1)$ , qui est le seul à être de pulsation  $\omega$ , permet d'obtenir  $P$  et  $Q$  :

$$P = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \cos(\phi_1)$$

$$Q = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \sin(\phi_1)$$

Et dans ce cas,

$$S = \sqrt{V_{\text{eff}}^2 \sum_{k=1}^{\infty} I_{1\text{eff}}^2}, \quad \text{et} \quad k = \frac{P}{S},$$

mais aussi

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$$

où  $D = V_{\text{eff}}^2 \sum_{k=2}^{\infty} I_{1\text{eff}}^2$  est la *puissance déformante* qui traduit le fait que la charge déforme l'intensité.

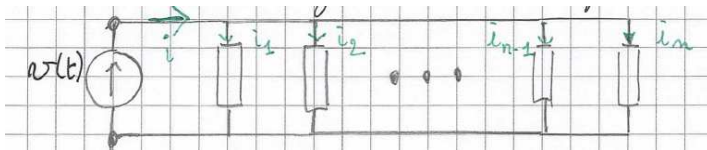
(Plus de détails de calcul dans les notes manuscrites de cours.)



# Quelques bases d'électrocinétique

## Théorème de Boucherot

Soit un circuit avec plusieurs branches :



**Dans l'ensemble du circuit :**

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\phi)$$

$$Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\phi)$$

**Dans la branche  $i$  :**

$$P_i = V_{\text{eff}} I_{i,\text{eff}} \cos(\phi_i)$$

$$Q_i = V_{\text{eff}} I_{i,\text{eff}} \sin(\phi_i)$$

**Théorème de Boucherot**

$$P = \sum_{i=1}^n P_i \quad \text{et} \quad Q = \sum_{i=1}^n Q_i$$

Les puissances actives (resp. réactives) s'additionnent.

## Un peu de vocabulaire pour conclure

### et un peu de rappels aussi

Avec les quantités complexes, on écrit :

$$\underline{V} = Z\underline{I}, \quad \underline{I} = Y\underline{V}.$$

Clairement,  $Y = Z^{-1}$ . Par ailleurs, on a :

- $\underline{V}$ , quantité complexe associée à  $v$ , exprimée en Volts (V) (parties réelle et imaginaire) ;
- $\underline{I}$ , quantité complexe associée à  $i$ , exprimée en Ampères (A) (parties réelle et imaginaire) ;
- $Z$ , impédance complexe exprimée en Ohms ( $\Omega$ ) ;
- $Y$ , admittance complexe exprimée en Siemens (S).

Si l'on décompose  $Z$  et  $Y$  sous forme cartésienne :

$$\begin{cases} Z = R + \mathbf{j}X, & (R, X) \in \mathbb{R}^2, \\ Y = G + \mathbf{j}B, & (G, B) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

Alors, on a :

- $R = \operatorname{Re}(Z)$ , résistance, exprimée en  $\Omega$  ;
- $X = \operatorname{Im}(Z)$ , réactance, exprimée en  $\Omega$  ;
- $G = \operatorname{Re}(Y)$ , conductance, exprimée en S ;
- $B = \operatorname{Im}(Y)$ , susceptance, exprimée en S ;

## Notions de base sur les grandeurs et circuits magnétiques

...mais pas d'électromagnétisme au sens habituel... c'est-à-dire pas d'équations de Maxwell.

## Grandeurs fondamentales de l'électromagnétisme

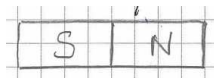
### Induction magnétique

Tout phénomène trouve son origine dans la présence d'un "*champ magnétique*". Les sources d'un tel champ peuvent être d'origine :

- naturelle (aimants extraits du sol, champ magnétique terrestre);
- humaine (électroaimants).

## Induction magnétique et aimants

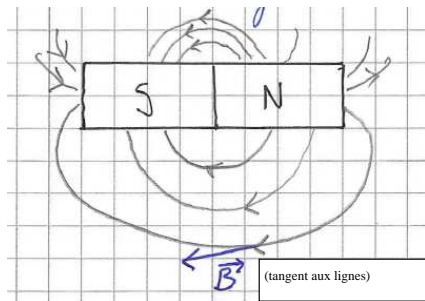
Un *aimant* est un morceau de matériau magnétique extrait du sol, généralement taillé pour avoir une forme donnée telle que :



L' *induction magnétique* s'installe "naturellement" dans un aimant. Il existe une *bipolarité*, c'est-à-dire un *pôle nord* et un *pôle sud*.

# Notions de base sur les grandeurs... magnétiques

Cette bipolarité oriente le *vecteur induction magnétique*, noté  $\vec{B}$ , du N vers le S. A l'extérieur de l'aimant,  $\vec{B}$  suit des *lignes de champ*.





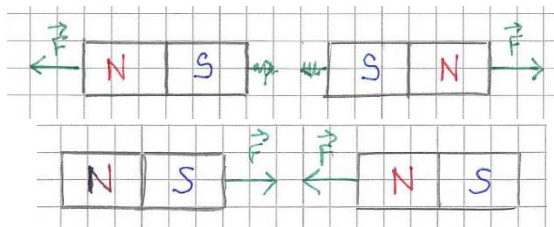
Si l'on casse un aimant, un *pôle nord* et un *pôle sud* se reconstituent dans chacun des morceaux.

De même, un matériau ferromagnétique (par exemple, le fer) se polarise à proximité d'un aimant.

De plus, une *force magnétique* se crée entre deux matériaux polarisés.

# Notions de base sur les grandeurs... magnétiques

Cette force conduit à l'attraction ou à la répulsion des deux matériaux, selon les cas ci-dessous.



Deux pôles différents s'attirent alors que deux pôles identiques se repoussent.

La force magnétique est en fait le premier phénomène magnétique constaté, conduisant ensuite à des notions plus avancées.

## Applications (parmi tant d'autres) :

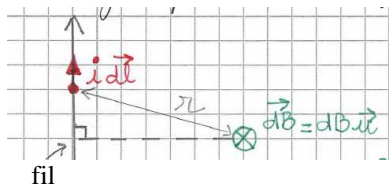
- moteurs électriques (à aimants permanents),
- crochets de manutention,
- attaches et loquets magnétiques,
- l'application la plus célèbre : la boussole,
- etc.

## Induction magnétique et courant électrique

L'induction magnétique n'apparaît pas toujours de façon aussi naturelle. Elle peut être provoquée par un courant électrique. En effet, lorsque des charges électriques se déplacent, elles ont la capacité à générer une *induction magnétique*  $\vec{B}$  à proximité.

Ainsi tout courant électrique étant un déplacement de charges, il "induit" une induction magnétique selon le principe présenté ci-après.

# Notions de base sur les grandeurs... magnétiques



- $i$  : intensité du courant parcourant le fil ;
- $d\vec{l}$  : longueur élémentaire de fil parcouru par  $i$  (orientée comme  $i$ ) ;
- $d\vec{B}$  : variation élémentaire d'induction magnétique en un point considéré ;
- $\vec{u}$  : vecteur unité orienté "vers le fond" ;
- $r$  : distance entre  $d\vec{l}$  et le point considéré.

Le déplacement élémentaire de charges  $i\vec{dl}$  induit une variation élémentaire d'induction magnétique  $\vec{dB}$  selon la loi suivante :

## Loi de Biot et Savart

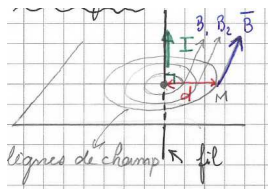
$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^3}$$

avec :

- $\wedge$  : produit vectoriel,
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H.m}^{-1}$  : perméabilité magnétique du vide.

Le produit vectoriel complique les choses mais des cas classiques et utiles conduisent à des formules simplifiées.

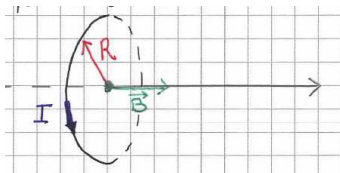
## Fil infini :



- $I$  : intensité du courant parcourant le fil ;
- $d$  : distance du fil au point considéré  $M$  ;
- $B$  : norme de l'induction magnétique.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

## Spire circulaire :



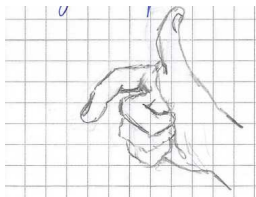
- $I$  : intensité du courant parcourant la spire ;
- $R$  : rayon de la spire ;
- $B$  : norme de l'induction magnétique au centre de la spire.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$



# Notions de base sur les grandeurs... magnétiques

Pour reconnaître le sens de  $\vec{I}$  ou de  $\vec{B}$ , on peut utiliser la règle du pouce de la main droite.



L'index prend une forme circulaire et le pouce est levé droit.

- Fil infini : L'index indique  $\vec{B}$  et le pouce  $\vec{I}$  ;
- Spire : L'index indique  $\vec{I}$  et le pouce  $\vec{B}$ .

## Remarques

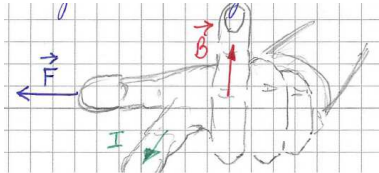
- Bien que la loi de Biot et Savart puisse être vue comme un point de départ permettant d'aborder le phénomène d'induction magnétique, on lui en préférera d'autres par la suite.
- Ce cours s'intéressera plus à  $\vec{B}$  lorsqu'il est induit par un courant.

Qui dit création d'une induction magnétique dit aussi création d'une force magnétique.

Dans le cas d'une induction par un courant électrique, cette force magnétique est dite *force de Laplace*.

Le sens de cette force est une nouvelle fois donnée par la main droite, plus précisément par la *règle des trois doigts de la main droite*.

# Notions de base sur les grandeurs... magnétiques



- $I$  : intensité du courant ;
- $B$  : norme de l'induction magnétique ;
- $F$  : norme de la force de Laplace.

## Applications (parmi tant d'autres) :

Dès lors qu'il y a force magnétique, il y a possibilité de nombreuses applications :

- gâchettes électromagnétiques,
- haut-parleurs,
- levage d'objets métalliques,
- moteurs électriques ;
- trains à sustentation magnétique,
- etc.

## Remarque

L'attraction d'un objet par un (électro-)aimant vient du fait que certains matériaux, comme le fer, se polarisent eux-mêmes (temporairement) en présence de l'aimant, sous l'effet de  $\vec{B}$ . Cette polarisation se fait toujours dans le sens de l'attraction.

## Excitation magnétique

En regardant la loi de Biot et Savart, on voit l'influence de  $\mu_0$ , qui caractérise le vide. Or les phénomènes peuvent se produire ailleurs que dans le vide, par exemple dans certains matériaux magnétiques.

En trahissant un peu la réalité physique, on peut définir une nouvelle grandeur vectorielle, l'*excitation magnétique*  $\vec{H}$ , dont la norme s'exprime en  $A.m^{-1}$ , et qui est liée à l'induction magnétique selon la loi suivante :

$$\vec{B} = \underbrace{\mu_0 \mu_r}_{\mu} \vec{H}$$

- $\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide (ou de l'air) ;
- $\mu_r$  : *perméabilité magnétique relative* du matériau ;
- $\mu$  : *perméabilité magnétique absolue* du matériau ;

$\mu_r$  peut s'exprimer

$$\mu_r = \mu_0(1 + \chi)$$

$\chi$  est la *susceptibilité* du matériau qui permet de classer les différents matériaux :

- $\chi \sim -10^{-6}$ : milieux *diamagnétiques* (Cu, Si, Pb) ;
- $\chi \sim +10^{-6}$ : milieux *paramagnétiques* (Al, Pt, Ti) ;
- $\chi \sim +10^{+3}$ : milieux *ferromagnétiques* (Fe, Co, Ni).



$H$  traduit l'importance d'un phénomène magnétique mais sans prendre en compte le milieu alors que  $B$  traduit la propagation de ce phénomène dans un milieu donné.

$\mu$  ou  $\mu_r$ , traduisent la capacité du milieu à propager un phénomène magnétique.

## *B et H dans la "vraie vie"*

La relation  $B = \mu H$  est en fait une simplification et la vraie relation est plutôt

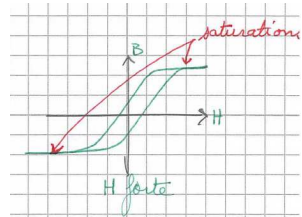
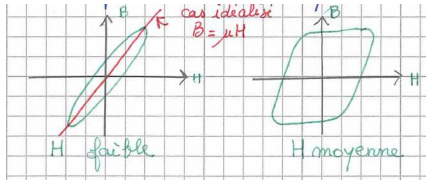
$$B = \mu(H)H$$

(On enlève les flèches en considérant que  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  sont colinéaires).

$\mu$  dépend donc de  $H$  et la relation entre  $B$  et  $H$  devient non linéaire, caractérisée par :

- un cycle d'hystérésis,
- des saturations.

# Notions de base sur les grandeurs... magnétiques



## Excitation magnétique et courant électrique

On a vu le lien entre  $B$  et  $i$  (loi de Biot et Savart).

On vient de voir le lien entre  $B$  et  $H$ .

En toute logique, il doit exister un lien entre  $H$  et  $I$ . Il est maintenant présenté de manière indépendante à ce qui a été exposé précédemment.

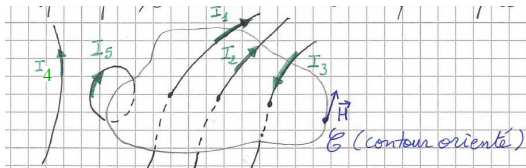
## Théorème d'Ampère

Soit un contour  $\mathcal{C}$  orienté entourant une surface  $S$ , elle même traversé par des courants  $I_j$ . On a

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_j I_j$$

où  $d\vec{l}$  désigne un élément différentiel de longueur orienté positivement le long du contour.

Exemple :



$$\int_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_1 + I_2 - I_3 - I_5$$

Dans cet exemple, les intensités  $I_1$  et  $I_2$  sont comptées positivement tandis que  $I_3$  et  $I_5$  sont comptées négativement.

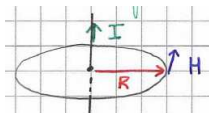
Quant à  $I_4$ , elle est ignorée car elle ne traverse pas la surface.

Comment trouver le signe de chaque intensité traversant  $S$  ?

En utilisant la *règle du pouce le main droite*. les doigts (ou l'index) indiquent le sens de  $\mathcal{C}$ . Le pouce levé indique le sens positif des intensités.

## Exemples classiques

### Fil infini :

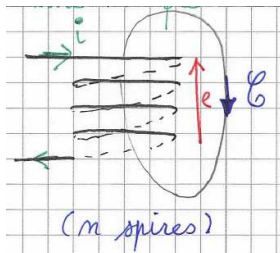


$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi R H = I \Rightarrow$$

$$H = \frac{I}{2\pi R}$$

(Ceci est conforme aux relations  $B = \mu_0 H$  et  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ .)

## Solénoïde (bobine) de $n$ spires :



On définit la *force magnétomotrice* (exprimée en A) par :

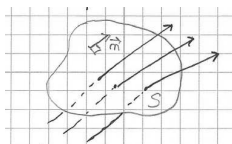
$$e = \int_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = ni$$



# Notions de base sur les grandeurs... magnétiques

## Flux magnétique

Lorsqu'une excitation magnétique se propage dans un matériau, il se crée ce que l'on appelle un *flux magnétique*  $\Phi$  exprimé en Weber (Wb).

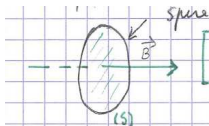


Le flux à travers une surface  $S$  traversée elle-même par des lignes de champ  $\vec{B}$  est donné par :

$$\Phi = \int \int_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

Encore une formule compliquée qui pourra être simplifiée dans de nombreux cas.

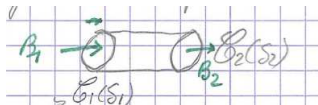
## Exemple d'une spire :



$$\Phi = BS$$

# Notions de base sur les grandeurs... magnétiques

Lorsqu'un flux magnétique parcourt un matériau, il est utile de définir la notion de *tube d'induction magnétique*. C'est un espace fermé tel que :



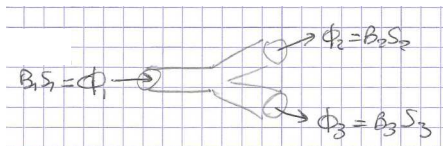
En pratique, ceci correspond à un morceau de matériau magnétique et l'on a :

## Loi de conservation des flux

$$\Phi_1 = B_1 S_1 = \Phi_2 = B_2 S_2$$

# Notions de base sur les grandeurs... magnétiques

C'est peu plus fort que cela, car en cas de séparation du circuit magnétique en plusieurs branches, comme ic-dessous,



on a:

**Loi de conservation des flux**

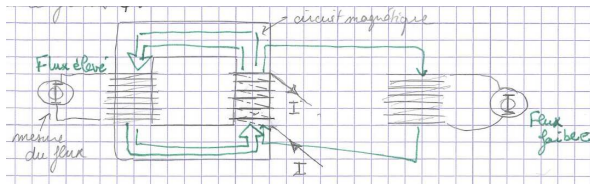
$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

A quelle règle d'électricité cette loi s'apparente-t-elle ?... On y reviendra !

## Circuits magnétiques

On définit un *circuit magnétique* comme un espace fermé à haute perméabilité magnétique  $\mu$ .

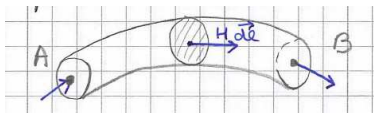
Il s'agit en fait de créer un trajet privilégié (tube d'induction) pour le passage du flux



# Notions de base sur les grandeurs... magnétiques

## d.d.p. magnétique

On suppose que les matériaux sont *isotropes* et *homogènes* (pas de trou,  $\mu$  constant). On parle de *tube d'induction parfait*.



On définit la *différence de potentiel (ddp) magnétique* entre A et B par :

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

(On intègre sur la longueur du tronçon.)

## Réductance

On considère la même figure, que la surface (section  $S$ ) est constante, et que le vecteurs sont colinéaires.

$$V_A - V_B = \int_A^B \frac{B}{\mu} dl = \int_A^B \frac{\Phi}{\mu S} dl = \frac{\Phi}{\mu S} \int_A^B dl = \frac{\Phi}{\mu S} l_{AB}$$

où  $l_{AB}$  est la longueur du tronçon entre  $A$  et  $B$ . On note

$$V_A - V_B = \mathcal{R}_{AB} \Phi.$$

où

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{l_{AB}}{\mu S} \text{ est la } \textit{réductance} \text{ du tronçon.}$$

## Loi de Hopkinson

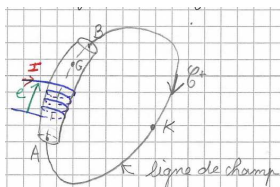
On rappelle qu'une bobine électrique parcourue par un courant d'intensité  $i$  génère une excitation magnétique  $H$  amenant la notion de force magnétomotrice  $e$  associé à un contour  $\mathcal{C}$  :

$$\int_{\mathcal{C}_+} \vec{H} \cdot d\vec{l} = e.$$



# Notions de base sur les grandeurs... magnétiques

Soit un circuit magnétique parfait (CMP) ouvert que l'on "ferme" par une ligne de champ  $B$ .



$$\int_{C_+} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{AGB} \vec{H} \cdot d\vec{l} = + \int_{BKA} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mathcal{R}_{AB}\Phi + (V_B - V_A) = e$$

Il vient donc :

Loi de Hopkinson

$$V_B - V_A = e - \mathcal{R}_{AB}\Phi$$

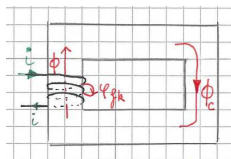
Souvent le circuit magnétique est fermé. On a donc  $A = B$ , c'est-à-dire  $V_A - V_B = 0$  et la loi de Hopkinson se ramène à

$$e = \mathcal{R}_{AB}\Phi = ni.$$

## Notion d'inductance

On considère un CMP enlacé par un solénoïde de  $n$  spires parcouru par un courant d'intensité  $i$ .

Chaque spire  $k$  enlace un *flux commun*  $\Phi_c$  ainsi qu'un *flux de fuite*  $\phi_{f_k}$  (voir figure).



Chaque spire  $k$  enlace donc un flux  $\phi_k = \Phi_c + \phi_{f_k}$ .

On définit le *flux total*  $\Phi_T$  **perçu** par l'ensemble du bobinage de  $n$  spires (en fait, chaque spire perçoit le flux  $\Phi_c$  donc la bobine le perçoit  $n$  fois) :

$$\Phi_T = n\Phi_c + \sum_{k=1}^n \phi_{f_k}.$$

Lorsque le bobinage est bien effectué (régulier), on a :

$$\forall k, \phi_{f_k} = \phi_f.$$

On définit par ailleurs le flux total de fuite :

$$\Phi_f = \sum_{k=1}^n \phi_{f_k} = n\phi_f.$$

Il vient :

$$\Phi_T = n \underbrace{(\Phi_c + \phi_f)}_{\Phi} = n\Phi = \underbrace{n\Phi_c}_{\Phi_{cT}} + \underbrace{n\phi_f}_{\Phi_f}$$

où

- $\Phi_T$  : flux total perçu ;
- $\Phi_c$  : Flux commun ;
- $\phi_f$  : flux de fuite pour une spire ;
- $\Phi_f$  : flux total de fuite ;
- $\phi$  : flux perçu par une seule spire ;
- $\Phi_{cT}$  : flux commun total perçu.

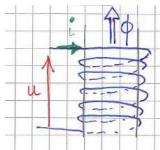
C'est bien le flux commun  $\Phi_c$  qui traverse le circuit mais la bobine le perçoit d'autant plus qu'elle a de spires, donc  $n$  fois.

On définit différentes *inductances* :

- *l'inductance propre* :  $L = \frac{\Phi_T}{i} = \frac{n\Phi}{i} = \frac{n^2}{\mathcal{R}}$  où  $\mathcal{R}$  est la *réductance propre* ;
- *l'inductance de fuite* :  $l_f = \frac{\Phi_f}{i} = \frac{n\phi_f}{i} = \frac{n^2}{\mathcal{R}_f}$  où  $\mathcal{R}_f$  est la *réductance de fuite* ;
- *l'inductance due au tube commun* :  $L_c = \frac{\Phi_{cT}}{i} = \frac{n\Phi_c}{i} = \frac{n^2}{\mathcal{R}_c}$  où  $\mathcal{R}_c$  est la *réductance due au tube commun*.

Certains circuits font apparaître des *inductances mutuelles* qui ne sont pas étudiées ici.

## Loi de Faraday



$u$  est la *ddp électrique (tension)* aux bornes de l'enroulement. Ce n'est pas la force magnétomotrice.

Plus rigoureusement,  $u$  est la *force électromotrice*. Il n'est pas nécessaire d'avoir un courant dans l'enroulement, car une variation de flux engendre  $u$ . C'est *l'induction électromagnétique*.

## Loi de Faraday

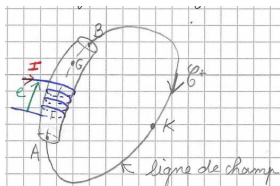
$$u = \frac{d\Phi_T}{dt} = \frac{nd\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

Ah ben tiens ! ça vient de là, alors !



## Énergie magnétique

On reprend la figure suivante , où la bobine comporte  $n$  spires et voit une tension  $u$  à ses bornes:



La résistance de l'enroulement est supposée nulle (pour simplifier).  
L'énergie magnétique émane de l'énergie électrique ou réciproquement. On peut écrire une relation sur les éléments différentiels d'énergie :

$$dW_{el} = dW_{mag}$$

$$u.i.dt = dW_{mag}$$

Or on a vu que  $u = n \frac{d\Phi}{dt}$  (loi de faraday), donc :

$$dW_{mag} = ni.d\Phi.$$

Sans surprise, si le phénomène électrique engendre le phénomène magnétique, l'énergie magnétique dépend de l'intensité du courant apporté.

## Analogie électricité/magnétisme

Un bon moyen de mettre de l'ordre dans toutes ces nouvelles notions est de procéder à l'analogie suivante :

Grandeurs magnétiques	Grandeurs électriques
Excitation magnétique $H$ Induction magnétique $B = \mu H$ Perméabilité magnétique $\mu$ Flux magnétique $\Phi = \int B dS$ Loi de conservation des flux Réductance $\mathcal{R}$ ddp magnétique $v$ $v = \sum_i v_i$ $v = \mathcal{R} \Phi$	Champ électrique $E$ Densité de courant $J = \sigma E$ Conductivité $\sigma$ Intensité $I = \int J dS$ Loi des noeuds Résistance $R$ ddp électrique $u$ Loi des mailles  Loi d'Ohm $u = Ri$

# Notions de base sur les grandeurs... magnétiques

Il existe cependant certaines différences qui limitent l'analogie :

- Les grandeurs varient dans des proportions qui ne sont pas comparables dans les deux cas.
- $\sigma$  est considérée comme constante alors que  $\mu$  ne l'est pas, conduisant à des dynamiques non linéaires (hystérésis, saturations).

## Remarque

Il est possible d'associer les grandeurs électriques et magnétiques en un seul cadre beaucoup unifié aboutissant aux **équations de Maxwell**. C'est une manière plus rigoureuse d'approcher l'électromagnétisme mais qui requiert plus d'aisance mathématique. Par ailleurs, pour les physiciens, l'électricité et le magnétisme sont vus comme deux manifestations macroscopiques du même phénomène microscopique.

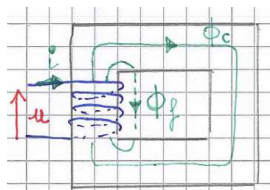
## Bobine à noyau de fer

... où l'on applique les notions du chapitre précédent pour modéliser la bobine à noyau de fer.

## Définition, conventions, objectif

- Une *bobine à noyau fer (BNF)* est un CMP fermé enlacé par un solénoïde.
- On s'en sert :
  - en continu, pour imposer une excitation magnétique  $H$  constante dans le CMP à l'aide d'un courant  $I$  ;
  - en alternatif pour imposer une induction magnétique  $B$  à l'aide d'une tension  $u$  (ce sera le cas ici).

# Bobine à noyau de fer



- On fixe un sens à la tension  $u$  et on considère la convention électrique *récepteur*.
- Le sens du flux est donné par la *règle du pouce de la main droite*.

**Objectif :** se servir des notions d'électromagnétisme pour établir un *modèle électrique équivalent*.

## Établissement des équations

La loi de Faraday conduit à écrire

$$u = \frac{d\Phi_T}{dt} = \frac{nd\Phi}{dt},$$

avec

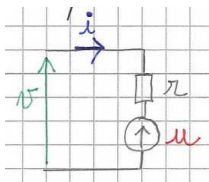
$$\phi_T = n\Phi_c + n\phi_f$$

En introduisant l'inductance de fuite  $l_f$ , il vient :

$$\Phi_T = n\Phi_c + l_f i.$$



# Bobine à noyau de fer



$u$  représente la *force électromotrice*. Ce n'est en fait pas exactement la tension aux bornes du solénoïde car il faut tenir compte de la résistance  $r$  de l'enroulement.

$$v = u + ri = ri + \frac{d(n\Phi_c + l_f i)}{dt}$$

Ceci conduit à

$$v = ri + l_f \frac{di}{dt} + n \frac{d\Phi_c}{dt}$$

Par ailleurs, le circuit étant fermé, la loi de Hopkinson s'instancie en

$$ni = \mathcal{R}_c \Phi_c$$

## Hypothèses de Kapp

Ce sont des hypothèses simplificatrices :

- 1 La *chute ohmique* est négligeable c'est-à-dire  $r = 0$  ;
- 2 L'inductance de fuite est négligeable:  $l_f = 0$ .

Il reste donc :

$$v = n \frac{d\Phi_c}{dt}$$

que l'on écrit parfois plutôt

$$\Phi_c = \frac{1}{n} \int v \cdot dt$$

et l'on dit que *la tension impose le flux*.

On étudie maintenant les conséquences de ces hypothèses.

- On suppose que la tension est sinusoïdale

$$v(t) = V \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \Phi_c = \frac{1}{n} \int_0^t V \cos(\omega \tau) \cdot d\tau = \frac{V}{n\omega} \sin(\omega t) + \Phi_0$$

$\Phi_0$  est appelé *flux rémanent* et est généralement négligé. Il reste

$$\Phi_c = \frac{V}{n\omega} \sin(\omega t)$$

Le flux commun  $\Phi_c$  est sinusoïdal de même pulsation  $\omega$  que  $v$  mais retardé de  $\frac{\pi}{2}$  rad. On parle de *machine à flux forcé*.

On s'intéresse maintenant à la *valeur efficace*  $V_{\text{eff}}$  de  $v$ .  
L'*amplitude* du flux est donnée par

$$\Phi_m = \frac{V_{\text{eff}} \sqrt{2}}{n\omega}$$

$$\Rightarrow V_{\text{eff}} = \frac{n\omega}{\sqrt{2}} \Phi_m$$

Or, on  $\Phi_m = SB_m$  où :

- $S$  est la section du matériau ferromagnétique (supposée constante) ;
- $B_m$  est l'amplitude de l'induction magnétique.

Il vient alors

$$V_{\text{eff}} = \frac{2\pi nf}{\sqrt{2}} SB_m = \sqrt{2}\pi nf SB_m,$$

que l'on retient sous la forme suivante :

Relation de Boucherot

$$V_{\text{eff}} = 4,44nfSB_m$$

On s'intéresse maintenant à la relation entre le flux commun  $\Phi_c$  et l'intensité  $i$ .

$$\Phi_c = \frac{ni}{\mathcal{R}_c} = n\mathcal{G}_c i,$$

où l'on voit que  $\Phi_c$  est proportionnel à  $i$  dans un rapport  $n\mathcal{G}_c$ . Le paramètre  $\mathcal{G}_c$  est appelé *perméance magnétique*.

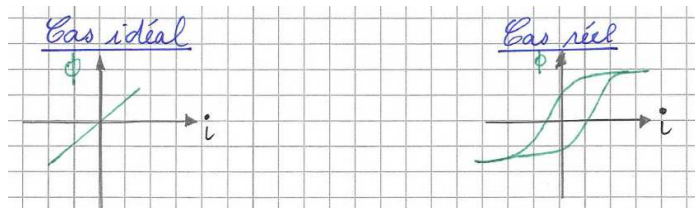
Mais, encore une fois, la réalité est un peu plus compliquée qu'il n'y paraît. La réluctance  $\mathcal{R}_c$  s'écrit :

$$\mathcal{R}_c = \frac{l}{\mu S},$$

où  $l$  est la longueur du matériau ferromagnétique. Cependant, il a été vu que  $\mu$  dépend de  $H$ , donc de  $B$ , donc de  $\Phi$  (ayant négligé les fuites, on notera  $\Phi_c = \Phi$  pour simplifier).

On retrouve en fait les phénomènes d'*hystérésis* de *saturation* évoqués au chapitre précédent.

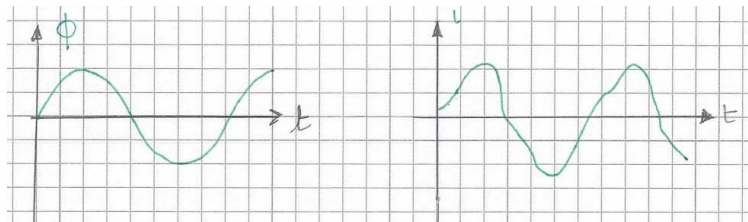
# Bobine à noyau de fer



A gauche, le cas idéal de vraie proportionnalité ; à droite, le cas réel faisant apparaître le phénomène d'hystérésis, voire celui de saturation.



# Bobine à noyau de fer



Il en résulte que l'intensité du courant ne présente pas une forme sinusoïdale.

Certes,  $i$  est déformée, mais elle conserve deux propriétés :

- elle est périodique ;
- sa pulsation est  $\omega$ .

Par ailleurs, c'est une fonction "impaire". Il en résulte, comme il sera vu en mathématiques et en traitement du signal, que  $i(t)$  peut s'écrire :

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k+1} \cos((2k + 1)\omega t - \phi_{2k+1}).$$

Il a été vu au premier chapitre que les *puissances apparente, active, réactive et déformante* deviennent respectivement :

$$S^2 = V_{\text{eff}}^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k+1}^2,$$

$$P = V_{\text{eff}} I_1 \cos(\phi_1),$$

$$Q = V_{\text{eff}} I_1 \sin(\phi_1),$$

$$D = \sqrt{V_{\text{eff}}^2 \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k+1}^2}$$

Et on a toujours

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2.$$

La seule puissance réellement dissipée est  $P$ . Mais où est-elle dissipée ? Comment est-elle consommée ?

La suite de ce chapitre répond à la question.

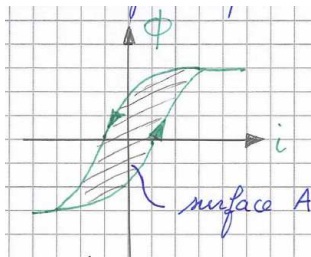
## Pertes fer

La puissance active  $P$  est consommée sous forme de *pertes fer* qui sont de deux types :

- les pertes dues à l'*hystérésis* du matériau ;
- les pertes dues aux *courants de Foucault* dans le matériau.

## Pertes hystériques

On rappelle que la relation entre le flux  $\Phi$  et l'intensité  $i$  se traduit par un cycle d'hystérésis.



# Bobine à noyau de fer

On peut montrer, en utilisant la formule  $dW_{mag} = ni \cdot d\Phi$  ainsi que des arguments géométriques, qu'une partie de  $P$  se transforme en énergie magnétique. Cette proportion est notée  $P_H$  et elle donnée par

$$P_H = Af$$

où  $f$  désigne la fréquence et  $A$  désigne l'aire du cycle d'hystérésis. Mais la forme du cycle étant très variable d'un circuit à l'autre, on préfère une formule empirique :

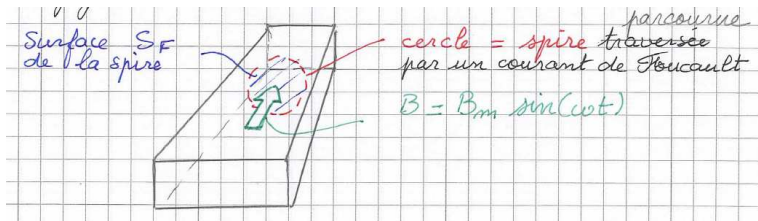
$$P_H = k_H f B_m^2$$

où  $k_H$  est un paramètre caractéristique du matériau magnétique.

# Bobine à noyau de fer

## Pertes par courants de Foucault

Le matériau magnétique est conducteur d'électricité.



Soit un cercle (spire) virtuel au sein du matériau. L'induction magnétique  $B = B_m \sin(\omega t)$  varie donc au milieu de cette spire. Le matériau est constitué d'une infinité de ces spires virtuelles qui sous l'effet de la variation de  $B$  sont parcourues par des courants appelés *courants de Foucault* (c'est lié à la loi de Faraday).



Par ailleurs, ces spires correspondent à des résistances électriques qui, sous l'effet du passage des courants de Foucault, consomment l'énergie électrique sous forme de chaleur, par *effet Joule*.

On peut montrer que cette dissipation d'énergie correspond à une puissance active  $P_F$  (voir les notes manuscrites pour une explication partielle) :

$$P_F = k_F B_m^2 f^2,$$

où  $k_F$  est un autre paramètre caractéristique du matériau magnétique.

## Remarque

Parfois, on feuillette le matériau pour limiter ce phénomène en introduisant des "zones de vide" qui augmentent la résistance électrique du matériau. Parfois, au contraire, on utilise les courants de Foucault pour diverses applications (notamment pour chauffer). Voici quelques exemples d'application :

- Four industriel pour certains métaux ;
- Plaques à induction ;
- systèmes de freinage (camions, vélos d'appartement, trains) ;
- séparateurs de matériaux pour le recyclage ;
- capteurs de distance.

## En résumé

Les pertes fer sont donc données par

$$P_{\text{fer}} = P_H + P_F = (k_H f + k_F f^2) B_m^2$$

## Modèle électrique linéaire approximatif

### Premier modèle approximatif

L'expression de l'intensité du courant est rappelée :

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k+1} \cos((2k+1)\omega t - \phi_{2k+1}).$$

Elle conduit à la valeur efficace suivante :

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_{\text{eff}2k+1}^2}.$$

On fait l'approximation que ce courant est en fait de forme sinusoïdale :

$$i'(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi) \simeq i(t).$$

(Remarque : ceci revient à négliger la non-linéarité de la BNF.)

Dans cette expression, on fait apparaître un *déphasage fictif*  $\varphi$ .  
L'approximation revient alors à remplacer la puissance active dissipée par la bobine réelle

$$P = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \cos(\phi_1)$$

par la puissance active dissipée par la bobine fictive

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi).$$

De la même manière, la puissance réactive réelle

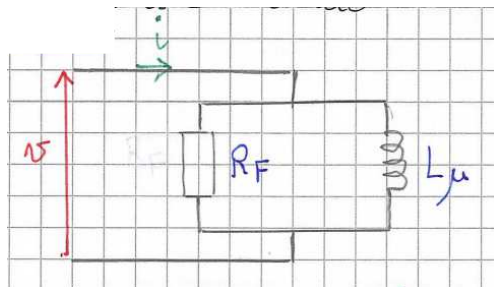
$$Q = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \sin(\phi_1)$$

est remplacée par la puissance réactive approximative

$$Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\varphi).$$

# Bobine à noyau de fer

La BNF est donc vue comme une bobine d'inductance  $L_\mu$  correspondant à la puissance réactive  $Q$ , mais la BNF dissipe aussi une puissance active  $P$  associée à une résistance fictive  $R_F$ . Cette puissance active, comme on l'a vu, est dissipée sous forme de pertes fer ( $P = P_{\text{fer}}$ ).



Les deux composants sont fictifs !

# Bobine à noyau de fer

L'expression de la puissance dissipée par une résistance, celle des pertes fer ainsi que la relation de Boucherot conduisent à écrire :

$$\begin{cases} P &= \frac{V_{\text{eff}}^2}{R_F} &= (k_H f + k_F f^2) B_m^2, \\ V_{\text{eff}} &= 4,44 n f S B_m^2 \end{cases} .$$
$$\Rightarrow R_F = \frac{4,44^2 n^2 f^2 S^2}{f^2 (k_F + \frac{k_H}{f})} = \frac{1}{f^2 (k'_F + \frac{k'_H}{f})}$$

D'où l'on voit que la résistance  $R_F$  dépend de  $f$ . C'est donc tout le modèle qui dépend de  $f$ . Le modèle est en fait même valable pour un couple  $(V_{\text{eff}}, f)$ . Si ces valeurs changent, il convient de réactualiser la valeur de  $R_F$ . On retiendra cependant :

$$R_F = \frac{V_{\text{eff}}^2}{P}$$



On aussi :

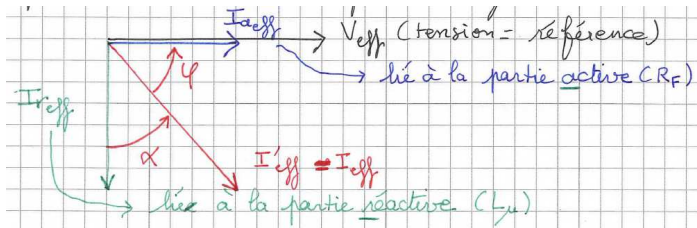
$$Q = \frac{V_{\text{eff}}^2}{L_{\mu}\omega}$$
$$\Rightarrow X_{\mu} = L_{\mu}\omega = \frac{V_{\text{eff}}^2}{Q} = \frac{V_{\text{eff}}^2}{\sqrt{S^2 - P^2}}$$

$$X_{\mu} = L_{\mu}\omega = \frac{V_{\text{eff}}^2}{\sqrt{V_{\text{eff}}^2 I_{\text{eff}}^2 - P^2}}$$

$L_{\mu}$  est une *inductance* qui s'exprime en  $H$  alors que  $X_{\mu}$  est la *réactance* associée qui s'exprime en  $\Omega$ .

# Bobine à noyau de fer

On peut résumer le modèle par un *diagramme de Fresnel*. L'axe horizontal correspond aux puissances actives et l'axe vertical aux puissances réactives.



$\alpha$  est l'angle d'écart hystérétique qui serait nul pour une BNF idéale sans perte fer.

## Remarque

Dans ce modèle approximatif linéaire, on néglige la déformation du courant donc la puissance déformante, c'est-à-dire qu'on approche  $I_{1\text{eff}}$  par  $I_{\text{eff}}$  et  $\phi_1$  par  $\varphi$ .

## Cycle d'hystérésis du modèle linéaire

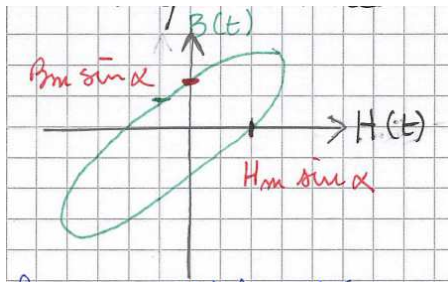
Le modèle est certaines "linéaire" mais on peut tout de même y introduire l'idée du cycle d'hystérésis.

Après calcul, on peut ré-exprimer l'induction et l'excitation magnétiques :

- $B(t) = B_m \sin(\omega t)$  ;
- $H(t) = H_m \sin(\omega t + \alpha)$  ;

# Bobine à noyau de fer

Avec ces expressions la caractéristique  $B - H$  devient :



La forme du cycle d'hystérésis s'en trouve grandement simplifiée.

## Remarque

En introduisant les grandeurs, on a d'abord considéré  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  comme colinéaires avec  $B = \mu H$  avec  $\mu$  constante.

Ensuite, on a considéré  $B = \mu(H)H$  avec des formes d'hystérésis potentiellement compliquées (saturations, etc.).

Maintenant, l'hystérésis est simplifiée et si l'on considère des grandeurs complexes, on a :

$$\underline{B} = B_m e^{j\omega t}, \quad \underline{H} = H_m e^{j(\omega t + \alpha)}$$

$$\Rightarrow \underline{\mu} = \frac{\underline{B}}{\underline{H}} = \frac{B_m}{H_m} e^{-j\alpha}.$$

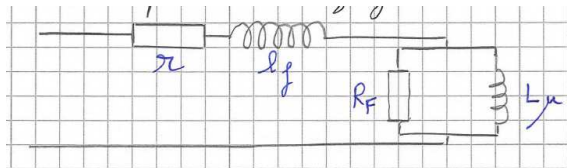
$\mu$  devient donc un nombre complexe dans le cadre de cette approximation.

## Gros inconvénient de ce modèle fictif (rappel)

Le modèle approché est valable pour un couple ( $V_{\text{eff}}, f$ ) et si l'une de ces deux grandeurs ( $V_{\text{eff}}$  notamment) varie de façon sensible, il convient de revoir le modèle c'est-à-dire de recalculer les valeurs de  $R_F$  et  $L_\mu$ .

## Modèle plus complet

On peut revenir sur les hypothèses de Kapp et ré-introduire la résistance électrique  $r$  de l'enroulement ainsi que l'inductance de fuite  $l_f$  dans le modèle simplifié. Ceci conduit au schéma suivant :



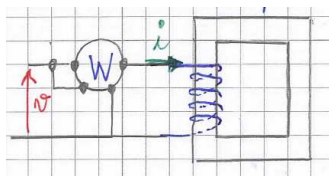
Ce modèle reste lié au couple ( $V_{\text{eff}}, f$ ).



## Mesure des pertes

L'idée est de disposer d'une procédure pratique pour évaluer, estimer les pertes fer.

## Méthode simple



On utilise un *wattmètre* qui mesure la puissance active absorbée par la BNF :  $P_{\text{mes}}$ .

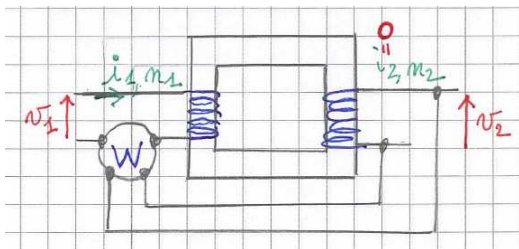
Le souci est que cette puissance active  $P_{\text{mes}}$  correspond à :

$$P_{\text{mes}} = r l_{\text{eff}}^2 + P_{\text{fer}}.$$

Autrement dit, cette mesure inclut les pertes par effet Joule  $P_J = r l_{\text{eff}}^2$  dans l'enroulement électrique.

## Méthode d'Epstein

Il existe une technique plus élaborée pour évaluer directement  $P_{\text{fer}}$ . C'est la *méthode d'Epstein*, qui nécessite un second enroulement ainsi que la connaissance du nombre de spires.



Compte tenu du câblage, le wattmètre mesure  $P_{\text{mes}} = \langle v_2 \cdot i_1 \rangle$ .

# Bobine à noyau de fer

La force électromotrice au niveau du premier enroulement est donnée par (loi de Faraday) :

$$e_1 = v_1 - r_1 i_1 = n_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$$

Sous l'hypothèse de Kapp (pas de fuite de flux), on a :

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi \Rightarrow v_1 - r_1 i_1 = n_1 \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \frac{v_1 - r_1 i_1}{n_1}.$$

Or,  $v_2 = n_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = n_2 \frac{d\Phi}{dt}$  (toujours par la loi de Faraday et en tenant compte de  $i_2 = 0$ )

$$\Rightarrow P_{\text{mes}} = \left\langle n_2 \frac{d\Phi}{dt} i_1 \right\rangle = \left\langle \frac{n_2}{n_1} v_1 i_1 - \frac{n_2}{n_1} r_1 i_1^2 \right\rangle = \frac{n_2}{n_1} P_{\text{totale}} - \frac{n_2}{n_1} P_J$$

$$P_{\text{mes}} = \frac{n_2}{n_1} P_{\text{fer}}.$$

## Remarque

La méthode d'Epstein ne tient pas compte de la première hypothèse de Kapp ( $r_1 = 0$ ), bien au contraire. En revanche, elle repose sur la seconde hypothèse de Kapp ( $I_{f_1} = I_{f_2} = 0$ ).

## Transformateur monophasé

... où comment le modèle de la BNF permet de caractériser un transformateur monophasé

## Principe, conventions et équations

### Principe

Il s'agit d'utiliser les lois vues précédemment lors de l'étude de la BNF pour concevoir des dispositifs capables de transmettre (en atténuant ou amplifiant) des tensions ou des courants d'un enroulement à un autre.

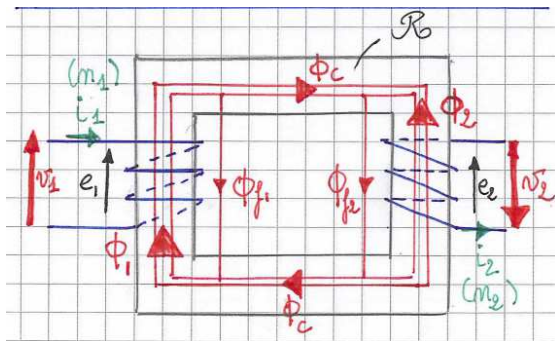
Ici, le transformateur étudié comporte seulement deux enroulements et est appelé *transformateur monophasé*.

Il existe d'autres transformateurs comportant plus d'enroulements (exemple : le *transformateur triphasé*).

# Transformateur monophasé

## Conventions et notations

Un CMP est enlacé par deux enroulements dont l'un est excité par une tension ou un courant.





## Quelques notations :

- indice  $j$  : enroulement  $j$  (1 ou 2, primaire ou secondaire) ;
- $v_j$  : tension aux bornes de l'enroulement  $j$  ;
- $i_j$  : intensité du courant sans l'enroulement  $j$  ;
- $e_j$  : force électromotrice au niveau de l'enroulement  $j$  ;
- $\Phi_j$  : flux magnétique au niveau de l'enroulement  $j$  ;
- $\Phi_c$  : flux commun dans le CMP ;
- $n_j$  : nombre de spires de l'enroulement  $j$  ;
- $\Phi_f$  : flux de fuite au niveau de l'enroulement  $j$  ;
- $\mathcal{R}$  : réluctance du matériau magnétique.

# Transformateur monophasé

On impose une tension  $v_1$  ou un courant d'intensité  $i_1$  sur l'enroulement *primaire*. Ceci crée notamment un flux commun  $\Phi_c$  dans le CMP, flux qui est transmis à l'enroulement *secondaire*, sur lequel on peut mesurer une tension  $v_2$  et, s'il y a une charge connectée, une intensité  $i_2$ .

On adopte la convention récepteur pour l'enroulement primaire et la convention générateur pour l'enroulement secondaire.

Ces conventions impliquent des sens pour les flux qui obéissent à la *règle d'Ampère* (règle du pouce de la main droite).

## Équations

Loi de Faraday  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} e_1 = \frac{d\Phi_{T_1}}{dt} = n_1 \frac{d\Phi_1}{dt}, \\ e_2 = \frac{d\Phi_{T_2}}{dt} = n_2 \frac{d\Phi_2}{dt} \end{cases}$$

Loi de conservation des flux  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_c + \phi_f, \\ \Phi_2 = -\Phi_c + \phi_f. \end{cases}$$

où  $\phi_f$  est le flux de fuite par spire.

Loi des mailles  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} v_1 &= r_1 i_1 + e_1, \\ v_2 &= -r_2 i_2 - e_2, \end{cases}$$

où  $r_j$  est la résistance électrique de l'enroulement  $j$ .

Rappel :

$$n_j \frac{d\phi_f}{dt} = \frac{d\Phi_{f_j}}{dt} = l_j \frac{di_j}{dt}$$

où  $l_j$  est l'inductance de fuite au niveau de l'enroulement  $j$ .

# Transformateur monophasé

Soit un contour orienté correspondant à la géométrie du CMP. On a (théorème d'Ampère + loi de Hopkinson)

$$\mathcal{R}\Phi_c = n_1 i_1 - n_2 i_2$$

## En résumé

$$v_1 = r_1 i_1 + l_1 \frac{di_1}{dt} + n_1 \frac{d\Phi_c}{dt}$$

$$v_2 = -r_2 i_2 - l_2 \frac{di_2}{dt} + n_2 \frac{d\Phi_c}{dt}$$

$$\mathcal{R}\Phi_c = n_1 i_1 - n_2 i_2$$

## Étude du transformateur idéal

Un transformateur idéal vérifie les deux *hypothèses de Kapp*, ce sur les deux enroulements :

$$\begin{cases} r_1 = r_2 = 0, \\ l_1 = l_2 = 0. \end{cases}$$

En outre, un transformateur idéal est construit dans un matériau magnétique parfait qui ne s'oppose pas du tout au passage du flux :

$$\mathcal{R} = 0.$$

Il reste donc

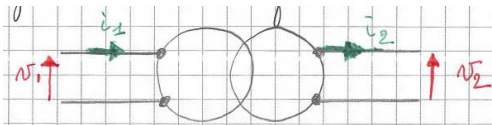
$$v_1 = n_1 \frac{d\Phi_c}{dt}$$

$$v_2 = n_2 \frac{d\Phi_c}{dt}$$

$$n_1 i_1 = n_2 i_2$$

# Transformateur monophasé

Un tel transformateur idéal est ainsi symbolisé ainsi :



C'est un quadripôle.

On définit le *rapport de transformation*  $m$  du transformateur idéal par:

$$m = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{i_1}{i_2}.$$

# Transformateur monophasé

- Puissance instantanée au primaire :  $p_1(t) = v_1(t)i_1(t)$ .

- Puissance instantanée au secondaire :

$$p_2(t) = v_2(t)i_2(t) = mv_1(t)\frac{i_1(t)}{m} = v_1(t)i_1(t) = p_1(t).$$

La transformateur idéal conserve la puissance instantanée !

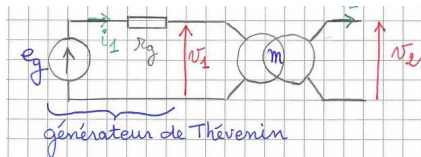
Si c'est vrai pour la puissance instantanée, ça l'est aussi pour la puissance moyenne, c'est-à-dire la puissance active.



# Transformateur monophasé

## Schéma équivalent au secondaire :

Si l'on veut voir le transfo idéal comme un dipôle vu du secondaire, on peut s'appuyer sur le schéma suivant.

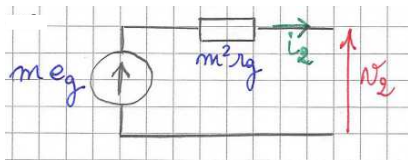


$$v_2 = m v_1 = m(e_g - r_g i_1)$$

$$\Rightarrow v_2 = m e_g - m^2 r_g i_2.$$

# Transformateur monophasé

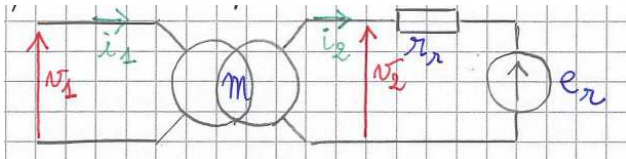
Le schéma se ramène donc à un générateur de Thévenin :



# Transformateur monophasé

## Schéma équivalent au primaire :

Si l'on veut voir le transfo idéal comme un dipôle vu du primaire, on peut s'appuyer sur le schéma suivant.

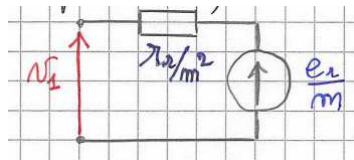


$$v_1 = \frac{v_1}{m} = \frac{1}{m}(e_r + r_r i_2)$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{e_r}{m} + \frac{r_r i_1}{m^2}$$

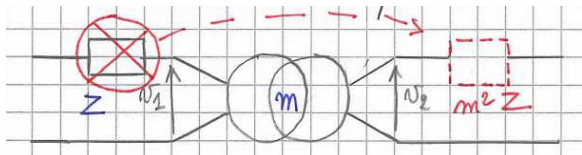
# Transformateur monophasé

Vu du primaire, on a donc le schéma équivalent :



## Transfert d'impédance :

Ce que l'on vient de faire pour une résistance peut être fait pour n'importe quelle impédance complexe  $Z$  de sorte que l'on peut résumer le raisonnement par ce schéma :



## Étude du transformateur réel à vide

On étudie le transformateur réel (c'est-à-dire a priori sans les hypothèses de Kapp) mais à vide, ce qui signifie qu'on ne connecte rien au secondaire et donc que  $i_2 = 0$ .

Dans les équations suivantes, l'indice 0 est ajouté pour montrer qu'il s'agit de relations à vide.

## Équations à vide

$$v_1 = r_1 i_{1_0} + l_1 \frac{di_{1_0}}{dt} + n_1 \frac{d\Phi_{c_0}}{dt}$$

$$v_{2_0} = n_2 \frac{d\Phi_{c_0}}{dt}$$

$$\mathcal{R}\Phi_{c_0} = n_1 i_{1_0}$$

# Transformateur monophasé

On reprend à nouveau les hypothèses de Kapp qui n'interviennent ici qu'au primaire ( $r_1 = 0$ ,  $l_1 = 0$ ).

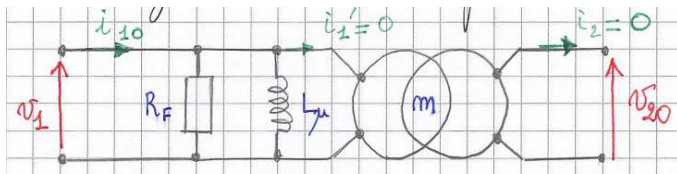
Mais on ne considère pas le matériau magnétique comme parfait ( $\mathcal{R} \neq 0$ ).

Les équations au primaire se ramènent à :

$$\begin{cases} v_1 & = n_1 \frac{d\Phi_{c_0}}{dt}, \\ \mathcal{R}\Phi_{c_0} & = n_1 i_{1_0}. \end{cases}$$

# Transformateur monophasé

Les équations obtenues sont celles qui décrivent une BNF (voir chapitre précédent). Or, on a déjà vu un *modèle électrique équivalent de la BNF* que l'on peut intégrer dans la présente modélisation avec le modèle du transformateur idéal :





# Transformateur monophasé

## Explications :

- Puisque  $i_2 = 0$ , le courant associé peut être vu comme étant généré par un transfo idéal excité par un courant d'intensité  $i'_1 = 0$ .
- Il existe toutefois au primaire un courant d'intensité  $i_{1_0}$  qui est "absorbé" par la BNF.
- Une partie de ce courant passe dans  $R_F$  et contribue à la consommation de **puissance active  $P$**  (pertes fer) alors qu'une autre partie passe dans  $L_\mu$  et est associé à une **puissance réactive  $Q$** .
- Le transfo idéal a tout lieu de figurer dans le schéma car l'équation au secondaire conduit à

$$\frac{v_{2_0}}{v_1} = \frac{n_2 \frac{d\Phi_{c_0}}{dt}}{n_1 \frac{d\Phi_{c_0}}{dt}} = \frac{n_2}{n_1} = m.$$

## Étude du transformateur réel en charge

### Modèle complet

Cette fois-ci, on connecte une charge au secondaire d'où  $i_2 \neq 0$  et il convient de considérer l'ensemble des équations :

$$v_1 = r_1 i_1 + l_1 \frac{di_1}{dt} + \underbrace{n_1 \frac{d\Phi_c}{dt}}_{v'_1}$$

$$v_2 = -r_2 i_2 - l_2 \frac{di_2}{dt} + \underbrace{n_2 \frac{d\Phi_c}{dt}}_{v_{20}}$$

$$\mathcal{R}\Phi_c = n_1 i_1 - n_2 i_2 \quad (*)$$

On remarque que  $\frac{v_{20}}{v'_1} = m$  (comportement de transfo idéal).

# Transformateur monophasé

Le courant  $i_1$  peut se décomposer en

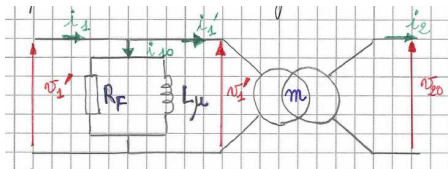
$$i_1 = i_{10} + i'_1,$$

avec  $i'_1$  vérifiant  $n_1 i'_1 = n_2 i_2$  (transfo idéal).

$i_{10}$  traverse le modèle de la BNF et  $i'_1$  entre dans le transfo idéal.

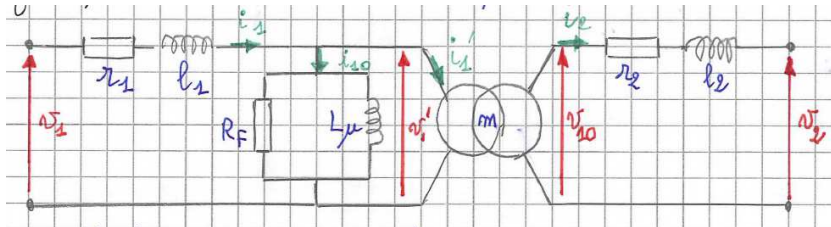
Ainsi l'équation (\*) se récrit :

$$\mathcal{R}\Phi_c = n_1 i_{10}.$$



# Transformateur monophasé

En revenant sur les deux premières hypothèses de Kapp, c'est à dire en ajoutant les résistances électriques et les inductances de fuite **au primaire et au secondaire**, on obtient :



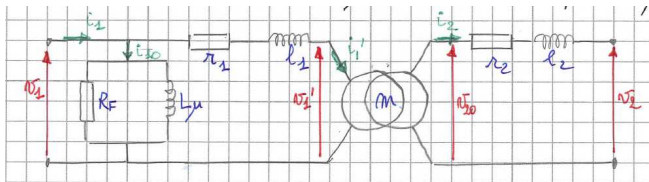
# Transformateur monophasé

## Modèle complet remanié

On applique l'*approximation de Kapp* qui consiste à considérer :

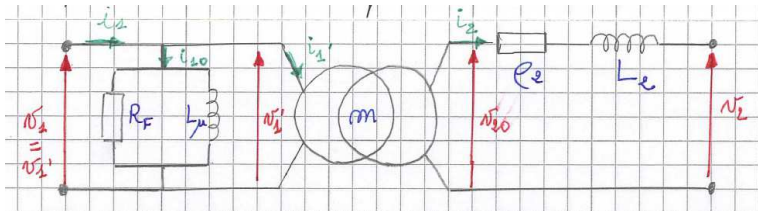
- $i_{10} \ll i_1'$  ( $i_{10}$  resterait sensiblement le même qu'à vide alors que  $i_1'$  augmente).
- La chute de tension aux bornes de  $r_1$  et  $l_1$  est faible et on ne trahit pas trop la réalité en déplaçant le modèle de la BNF en entrée du quadripôle (même si c'est une approximation).

Il vient :



# Transformateur monophasé

On applique le principe du *transfert d'impédance* :

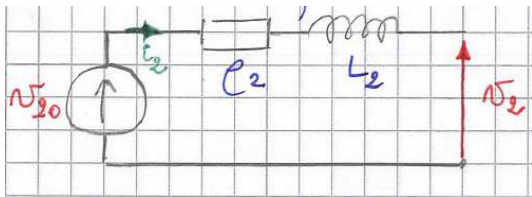


avec:

$$\begin{cases} \rho_2 = r_2 + m^2 r_1 \\ X_2 = L_2 \omega = (l_2 + m^2 l_1) \omega \end{cases}$$

# Transformateur monophasé

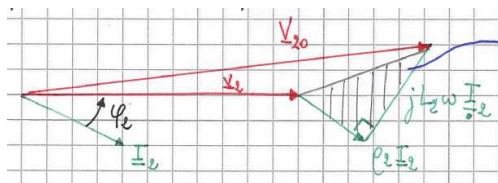
Le transformateur remanié, vu du secondaire, correspond au "générateur de Thévenin" :



# Transformateur monophasé

## Diagramme de Fresnel

Si l'on trace le diagramme de Fresnel du modèle complet remanié, il vient :



Le triangle hachuré est appelé *triangle des pertes* ou *triangle de Kapp*.

L'angle  $\phi_2$  dépend de la charge qui est connectée au secondaire.

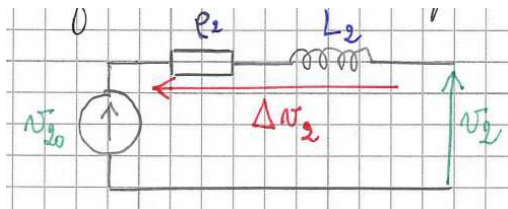


# Transformateur monophasé

## Étude de la chute de tension

### Définition

Elle est donnée par le schéma suivant :

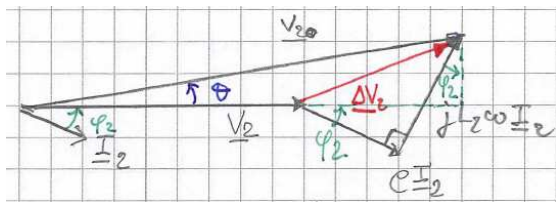


$\Delta v_2$  est la *chute de tension* qui fait passer de  $v_{20}$  à  $v_2$ .

# Transformateur monophasé

## Diagramme de Fresnel, calcul approximatif

Le diagramme de Fresnel avec le triangle de Kapp est reproduit.



Le schéma n'est pas à l'échelle et en réalité, l'angle  $\theta$  est très petit. On le néglige de sorte que  $\underline{\Delta V}_2$ , qui est l'hypoténuse du triangle de Kapp, devient égale à sa projection sur l'axe horizontal. Il en résulte :

$$\Delta V_{2\text{eff}} = r_2 I_{2\text{eff}} \cos(\phi_2) + L_2 \omega I_{2\text{eff}} \sin(\phi_2)$$

## Courant de court-circuit

Si l'on court-circuite l'enroulement secondaire, en tenant compte de  $v'_1 = v_1$  et  $v_{2_0} = mv'_1 = mv_1$ , on peut calculer l'intensité du courant de court-circuit

$$I_{2_{cc_{\text{eff}}}} = \frac{mV_{1_{\text{eff}}}}{\sqrt{\rho_2^2 + L^2\omega^2}}$$

## Remarque

Si le transformateur était idéal, le court-circuit serait inenvisageable car rien ne limiterait l'intensité  $i_2$ .

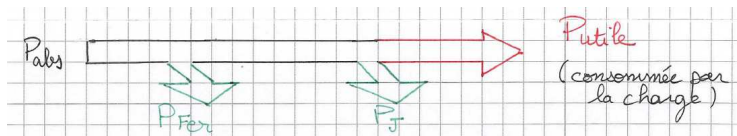
Ce sont en fait les "défauts" du transformateur ( $\rho_2$  et  $L_2$ ) qui limitent  $i_2$  et permettent un tel court-circuit.

# Transformateur monophasé

## Pertes et rendement

Lorsqu'on place une tension  $v_1$  aux bornes d'un transfo en charge, ce dernier absorbe une certaine puissance active  $P_{\text{abs}}$ .

Quelle est la proportion  $P_{\text{utile}}$  de cette puissance active  $P_{\text{abs}}$  qui est réellement utilisée par la charge ?



- $P_{\text{abs}}$  est la puissance active totale fournie.
- $P_{\text{fer}}$  correspond aux pertes fer dans la BNF.
- $P_J$  correspond aux pertes Joule dans les enroulements.
- $P_{\text{utile}}$  est consommée par la charge

# Transformateur monophasé

On définit le *rendement en puissance*  $\eta$  :

$$\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{abs}}} = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{utile}} + P_{\text{fer}} + P_{\text{J}}}$$

$$\eta = \frac{V_{2\text{eff}} I_{2\text{eff}} \cos(\phi_2)}{V_{2\text{eff}} I_{2\text{eff}} \cos(\phi_2) + P_{\text{fer}} + \rho_2 I_{2\text{eff}}^2}$$

On peut montrer que ce rendement  $\eta$  est maximal pour

$$I_{2\text{effopt}} = \sqrt{\frac{P_{\text{fer}}}{\rho_2^2}}$$

## Grandeurs caractéristiques, essais standard

### Grandeurs caractéristiques

Les *grandeurs caractéristiques* sont les grandeurs susceptibles de figurer sur la plaque signalétique fournie par le fabricant. Souvent, on fait figurer un indice  $N$  pour indiquer que les données fournies correspondent aux valeurs *nominales* de fonctionnement.

- Puissance nominale apparente :  $S_N = V_{20_{\text{eff}}} I_{2_{\text{eff}}}$
- Tension efficace primaire nominale :  $V_{1_{N_{\text{eff}}}}$
- Tension secondaire nominale efficace en pleine charge :  $V_{2_{N_{\text{eff}}}}$
- Chute nominale relative de la tension  $V_{20_{\text{eff}}}$  en %
- Puissance apparente absorbée à vide : en % de  $S_N$ .

Si cela donne une idée du transfo, il est souvent utile de procéder à des essais pour mieux le caractériser.

# Transformateur monophasé

**Année de fabrication**

**Transformateur triphasé (???)**

**Fréquence nominale de travail**

**N° de série**

**Puissance apparente nominale**

**Couplages et indice horaire - triphasé (???)**

**Valeurs tensions nominales possibles au secondaire**

**Masse du transformateur**

**Tensions possibles côté haute tension en fonction des connexions sur le bornier**

**Permet de retrouver expérimentalement l'impédance totale ramenée au secondaire (fuites magnétiques + pertes joules)**

**Valeurs courants nominales possibles au secondaire**

**france transfo**  
Schneider Electric

Transformateur encadré 3 phases 50 Hz ratio AN Classe therm. 100 F  
N° 752301-01 année 2002 conforme à NBN HD 638-1 SI 400/230V 1000/230V

1000 kVA Site 4.00 Couplage 0 y11 - 0K 0P 00

haute tension		basse tension	
1-2	10500 V	400 V	masses
2-3	10200 V	1443 A	A 21 90 kg
3-4	9500 V	niveau d'isolement de l'ensemble	
4-5	9500 V	95-38 100 kV	terme aux bornes

AN 577 A

Unité d'Emery (Masse) France

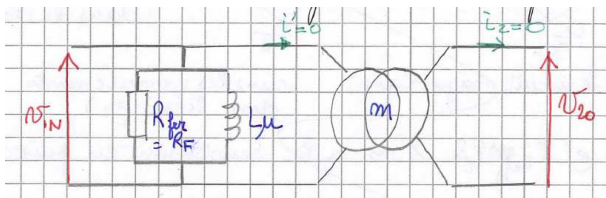


# Transformateur monophasé

## Essais standard

### Essai à vide

On procède à un *essai à vide* pour caractériser le transfo au primaire.



On mesure :

- $V_{1_{N_{\text{eff}}}}$  (on prend la tension nominale si on la connaît) ;
- $V_{2_{0_{\text{eff}}}}$  ;
- $P_{1_0}$  (puissance active consommée) ;
- $I_{1_{0_{\text{eff}}}}$  .

# Transformateur monophasé

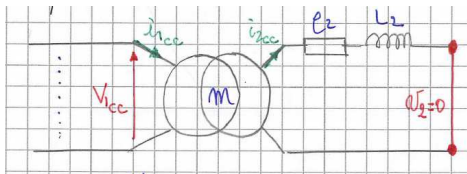
On déduit par calcul :

$$R_f = \frac{V_{1N_{\text{eff}}}^2}{P_{10}}$$
$$X_{\mu} = L_{\mu}\omega = \frac{V_{1N_{\text{eff}}}^2}{Q_{10}} = \frac{V_{1N_{\text{eff}}}^2}{\sqrt{V_{1N_{\text{eff}}}^2 I_{1N_{\text{eff}}}^2 - P_{10}^2}}$$
$$m = \frac{V_{20_{\text{eff}}}}{V_{1N_{\text{eff}}}}$$

# Transformateur monophasé

## Essai en court-circuit

On procède à un *essai en court circuit* pour caractériser le transfo au secondaire.



On mesure :

- $V_{1_{cc\text{eff}}}$  (on applique une tension très faible au primaire) ;
- $P_{1_{cc}}$  (puissance active consommée) ;
- $I_{2_{cc\text{eff}}}$  (intensité du courant de court-circuit).

On déduit par calcul (en négligeant  $P_{\text{fer}}$ ) :

$$\rho_2 = \frac{P_{1cc}}{I_{2cc\text{eff}}^2}$$

$$X_2 = L_2\omega = \sqrt{\frac{m^2 V_{1cc\text{eff}}^2}{I_{2cc\text{eff}}^2} - \rho_2^2}$$

## Remarques

- Dans cet essai,  $V_{1cc_{eff}}$  est faible donc on peut négliger  $P_{fer}$  et la puissance mesurée (par un wattmètre) se réduit à  $P_J$  qui correspond à la dissipation d'énergie dans  $\rho_2$ .
- L'expression de  $X_2$  est obtenue à partir de l'expression de l'intensité du courant de court-circuit.

# Transformateur monophasé



Figure: Photographie d'un transformateur monophasé du commerce

# Systemes triphasés, étude en régime équilibré

## Préparation au module d'électrotechnique en 2ème année

Dans ce chapitre, on revient sur des notions d'électricité et de puissances électriques afin de préparer certains enseignements à suivre du cursus, notamment concernant des aspects d'électrotechnique. On abandonne donc un peu le magnétisme dans ce dernier chapitre.



## Définition d'un système $q$ -phasé

Un système  $q$ -phasé est un ensemble ordonné de  $q$  grandeurs sinusoïdales de même nature (ex: tensions, courants) qui vérifient les propriétés suivantes :

- même valeur efficace ;
- même pulsation  $\omega$  ;
- chaque grandeur est déphasée de  $\frac{2m\pi}{q}$  par rapport à la précédente.

$q \in \mathbf{N}$  est l'ordre du système.  $m \in \mathbf{Z}$  est un paramètre de réglage.

On peut imaginer formellement plein de systèmes  $q$ -phasés mais l'un d'entre eux est bien plus étudié : le *système triphasé direct*.

## Système triphasé direct

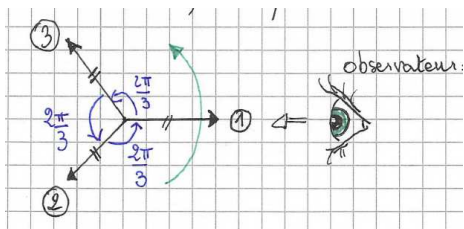
### Définition et caractéristiques

Un système triphasé direct est un système  $q$ -phasé tel que

$$q = 3 \quad ; \quad m = 1.$$

# Systèmes triphasés

On peut dessiner les trois grandeurs à la manière d'un diagramme de Fresnel :



Le principe est qu'au cours du temps, les vecteurs tournent à vitesse constante  $\omega$ , dans le sens trigonométrique, de sorte que l'observateur voit 1, puis 2, puis 3, puis encore 1, puis 2, etc.

$m = 1$  et  $q = 3$  impliquent donc des déphasages multiples de  $\frac{2\pi}{3}$  :

- 2 est en retard de  $\frac{2\pi}{3}$  sur 1 ;
- 3 est en retard de  $\frac{2\pi}{3}$  sur 2 ;
- 3 est en retard de  $\frac{4\pi}{3}$  sur 1 ;
- 1 est en retard de  $\frac{2\pi}{3}$  (ou en avance de  $\frac{4\pi}{3}$ ) sur 3.

Pour l'instant, on considère un système triphasé direct de trois tensions  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ . On a :

$$e_1(t) = E \cos(\omega t)$$

$$e_2(t) = E \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e_3(t) = E \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

En passant par les quantités complexes associées aux tensions, on obtient :

$$\underline{E}_1 = E e^{j\omega t}$$

$$\underline{E}_2 = E e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{3})}$$

$$\underline{E}_3 = E e^{j(\omega t - \frac{4\pi}{3})}$$

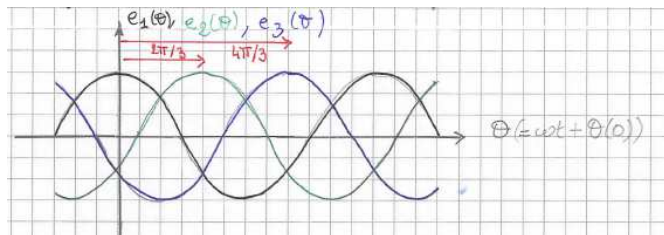
ce qui conduit à

$$\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = 0$$

(on peut le voir sur le diagramme de Fresnel pour  $t = 0$ ) et donc à

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

## Chronogramme indirect :



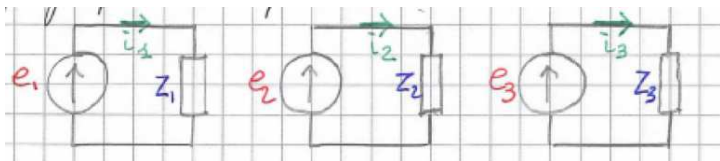
## Exemples de réseau triphasé :

- le réseau "EDF" ou tout réseau de distribution d'électricité à grande échelle (en France, ou ailleurs). Voir TD 5 ;
- fonctionnement de certains moteurs électriques.

# Systèmes triphasés

## Notion de système équilibré

Les trois tensions du système triphasé sont bien sûr utiles pour générer des courants dans des charges (sinon à quoi bon...?). On suppose que ces trois tensions "voient" trois impédances :



$Z_1 = Z_2 = Z_3 \Rightarrow$  Système équilibré (le seul étudié ici).

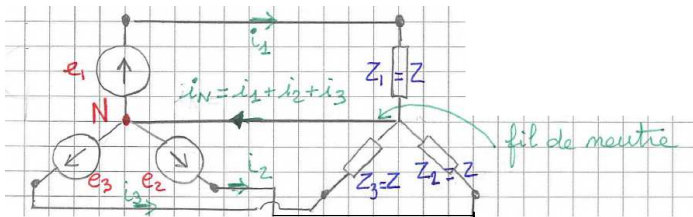
$Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3 \Rightarrow$  Système déséquilibré.

Il existe plusieurs façons de connecter les charges au système triphasé de tensions. Nous étudions deux types de montage dans ce qui suit.



## Montage étoile

Le montage *en étoile* est symbolisé par Y (ou la même lettre renversée) et correspond à



Les courants d'intensités  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  sont appelés *courants de ligne*.  
Les trois charges sont traversés par ces courants.

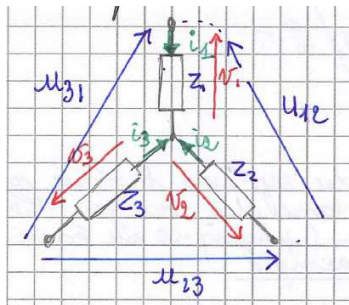
$N$  est le potentiel de *neutre* ( $N = 0$ ).

On définit deux types de tensions :

- les tensions simples  $v_k$  entre phase  $k$  et neutre (aux bornes des impédances dans ce cas) ;
- les tensions composées  $u_{kl}$  entre phases.

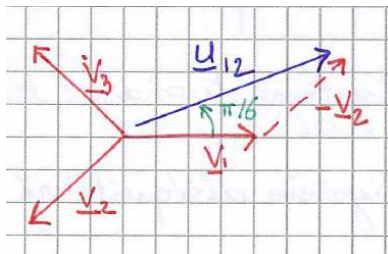
# Systèmes triphasés

Du point de vue de la charge globale, on a :



$$\begin{cases} e_1 = v_1, \\ e_2 = v_2, \\ e_3 = v_3. \end{cases}$$

## Diagramme de Fresnel



On peut montrer après calcul (voir notes de cours où le calcul est réalisé pour  $t = 0$ ) que :

$$\underline{u}_{12} = \underline{v}_1 \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}}.$$

On peut donc déduire, en faisant le même raisonnement sur chaque phase, que :

- $U_{\text{eff}} = V_{\text{eff}} \sqrt{3}$  ;
- $u_{kl}$  en avance de  $\frac{\pi}{6}$  sur  $v_k$ .

Le montage étoile nécessite a priori 4 fils (3 phases et un neutre).

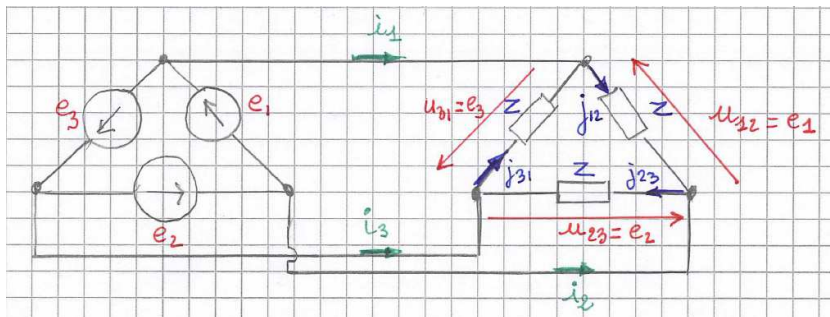
Cependant, pour un système triphasé équilibré, on a

$$I_N = I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

On supprime donc le fil de neutre et on parle de *ligne à 3 fils*.

## Montage triangle

Le montage *en triangle* est symbolisé par  $\Delta$  ou D et correspond à :

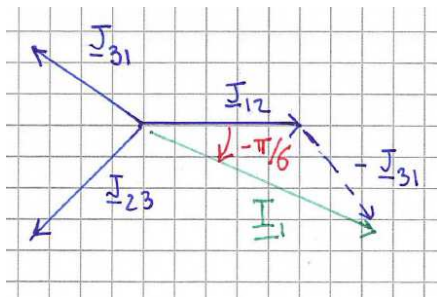


- Il s'agit toujours d'un *montage à 3 fils* mais par construction.
- Les impédances voient les *tensions composées* à leurs bornes et les *tensions simples* ne sont plus disponibles.
- Les *courants de ligne* ne passent pas directement dans les charges mais se répartissent en *courants de triangle*  $j_{kl}$  en convention récepteur avec les tensions composées.



# Systèmes triphasés

## Diagramme de Fresnel



On peut montrer après calcul (voir notes de cours où le calcul est réalisé pour  $t = 0$ ) que :

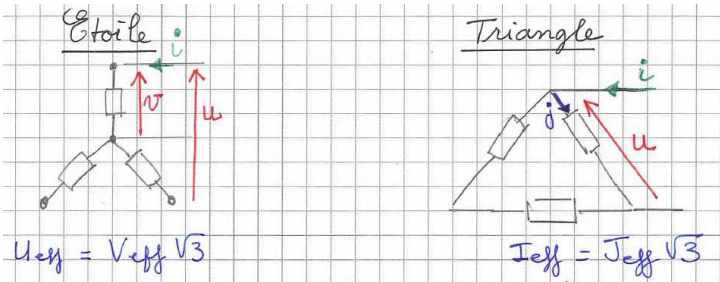
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} \sqrt{3} e^{-j\frac{\pi}{6}}.$$

On peut donc déduire, en faisant le même raisonnement sur chaque phase, que :

- $I_{\text{eff}} = J_{\text{eff}} \sqrt{3}$  ;
- $i_k$  en retard de  $\frac{\pi}{6}$  sur  $j_{kl}$ .

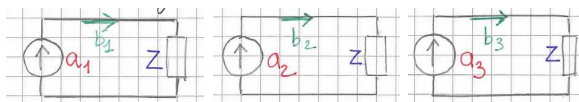
# Systèmes triphasés

## En résumé



$u$  est en avance de  $\frac{\pi}{6}$  sur  $v$  dans le montage étoile et  $i$  est en retard de  $\frac{\pi}{6}$  sur  $j$  dans le montage triangle.

## Aspects de puissances



$$\begin{cases} a_1(t) = A \cos(\omega t), \\ b_1(t) = B \cos(\omega t - \varphi), \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2(t) = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}), \\ b_2(t) = B \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi), \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3(t) = A \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}), \\ b_3(t) = B \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi), \end{cases}$$

- Puissances instantanée pour chaque phase :

$$p_1(t) = a_1(t)b_1(t) = \frac{AB}{2}(\cos(\varphi) + \cos(2\omega t - \varphi))$$

$$p_2(t) = a_2(t)b_2(t) = \frac{AB}{2}(\cos(\varphi) + \cos(2\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}))$$

$$p_3(t) = a_3(t)b_3(t) = \frac{AB}{2}(\cos(\varphi) + \cos(2\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}))$$

- Puissance moyenne (active) par phase :

$$P_k = \langle p_k(t) \rangle = A_{\text{eff}} B_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

(car la sinusoïde s'annule en moyenne !).

- Puissance instantanée globale :

On peut montrer que (voir calcul dans les notes de cours) :

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 3A_{\text{eff}}B_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

La puissance instantanée est donc constante et par conséquent égale à sa propre moyenne (*puissance active globale P*)

$$P = p(t) = 3A_{\text{eff}}B_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

# Systèmes triphasés

## Montage étoile

$$a = v$$

$$b = i$$



$$p = 3V_{\text{eff}}I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$



## Montage triangle

$$a = u$$

$$b = j$$



$$p = 3U_{\text{eff}}J_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$



$$P = \sqrt{3}U_{\text{eff}}I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

**Une seule formule !**  $\varphi$  n'a toutefois pas le même sens dans les deux cas (déphasage de  $v$  par rapport à  $i$  pour le montage étoile et déphasage de  $u$  par rapport à  $j$  pour le montage triangle). Heureusement, il ne dépend que de l'impédance  $Z$  donc a la même valeur dans les deux cas.

## Résumé monophasé/triphasé

	<u>Monophasé</u>	<u>Triphasé</u>
Puissance active $P$	$V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$	$\sqrt{3} U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$
Puissance réactive $Q$	$V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\varphi)$	$\sqrt{3} U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\varphi)$
Puissance apparente $S$	$V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$	$\sqrt{3} U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$
Facteur de puissance $k = \frac{P}{S}$	$\cos(\varphi)$	$\cos(\varphi)$

Le *théorème de Boucherot*, vu au premier chapitre, est toujours valable en triphasé, à savoir que la puissance active **fournie** par le réseau triphasé est égale à la puissance active **reçue** par la charge globale.



## Mesures de puissances

Il s'agit de voir quelles sont les méthodes pour obtenir expérimentalement une estimation des puissances mises en jeu dans un système triphasé (a priori équilibré), ce dans un souci d'optimiser le nombre d'appareils utilisés.

On rappelle qu'un *wattmètre*, qui mesure une *puissance active*, a 4 bornes :

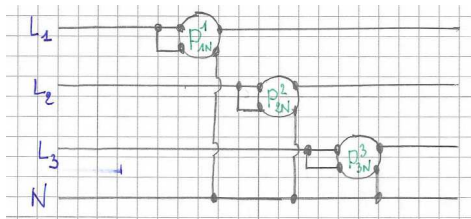
- deux pour mesurer une intensité  $i$  par un montage en série ;
- deux pour mesurer une tension  $v$  par un montage en parallèle.

Par la suite on utilise la notation

$$P_{qy}^x$$

Pour désigner la mesure d'un wattmètre mesurant la puissance  $\langle V_{qy} i_x \rangle$ .

## Méthode simple ("naturelle")



Chaque wattmètre perçoit le courant de ligne d'une phase ainsi que la tension entre cette ligne et le neutre. On obtient 3 mesures de puissance active (une par phase).

La puissance active globale est donnée par :

$$P = P_{1N}^1 + P_{2N}^2 + P_{3N}^3$$

Pour chaque phase  $k$ , la puissance réactive est donnée par :

$$Q_k = \sqrt{V_{k\text{eff}}^2 I_{k\text{eff}}^2 - (P_{kN}^k)^2} \quad k \in \{1; 2; 3\}$$

Ainsi, la puissance réactive globale est donnée par :

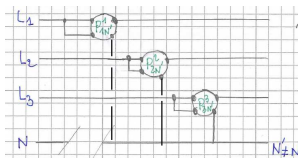
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

## Remarques

- Il faut disposer de 3 wattmètres pour mesurer les  $P_{kN}^k$  ainsi que de 3 voltmètres pour mesurer (ou juste vérifier) les  $V_{k_{\text{eff}}}$  et de 3 ampèremètres pour mesurer les  $I_{k_{\text{eff}}}$  (soit entre 6 et 9 mesures).
- Cette méthode basée sur 3 wattmètres est potentiellement gourmande en matériel mais valable en régime déséquilibré.

## Méthode des deux wattmètres

Cette méthode cherche à réduire le nombre de wattmètres utilisée même si au départ on raisonne sur le schéma suivant comportant encore 3 wattmètres :



La différence avec le schéma de mesure précédent est que les wattmètres sont référencés par rapport à un potentiel  $N'$  qui peut être différent de  $N$ .

$$P_{1N'}^1 = \langle i_1 \cdot v_{1N'} \rangle = \underbrace{\langle i_1 \cdot v_{1N} \rangle}_{P_{1N}^1} + \langle i_1 \cdot v_{NN'} \rangle$$

$$P_{2N'}^2 = \langle i_2 \cdot v_{2N'} \rangle = \underbrace{\langle i_2 \cdot v_{2N} \rangle}_{P_{2N}^2} + \langle i_2 \cdot v_{NN'} \rangle$$

$$P_{3N'}^3 = \langle i_3 \cdot v_{3N'} \rangle = \underbrace{\langle i_3 \cdot v_{3N} \rangle}_{P_{3N}^3} + \langle i_3 \cdot v_{NN'} \rangle$$

La somme de ces 3 équations conduit à :

$$P' = P_{1N'}^1 + P_{2N'}^2 + P_{3N'}^3 = P_{1N}^1 + P_{2N}^2 + P_{3N}^3 + \langle (i_1 + i_2 + i_3) \cdot v_{NN'} \rangle$$

Si l'on considère une *ligne à 3 fils* (pas de fil de neutre), on a  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$  donc le second terme est nul. Ainsi :

$$P' = P \quad \forall N'$$

Pour éliminer un wattmètre, on choisit  $N' = 3$  c'est-à-dire que le potentiel de référence correspond à celui de la phase de trois. Ainsi

$$P_{3N'}^3 = \langle i_3 \cdot v_{33} \rangle = 0,$$

et la troisième mesure est inutile. Il reste :

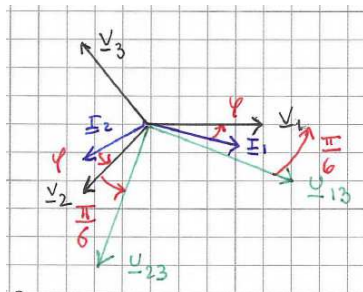
$$P = P_{13}^1 + P_{23}^2$$

Cette mesure est valable même en cas de *déséquilibre*.

Le troisième wattmètre devenant inutile, il est possible de simplifier le schéma de mesure (voir TP).

# Systèmes triphasés

*Dans le cas équilibré uniquement*, on peut raisonner sur un diagramme de Fresnel pour déduire une expression de la puissance réactive globale  $Q$ .





On a :

$$P_{13}^1 = U_{13\text{eff}} I_{1\text{eff}} \cos(\underline{U}_{13}, \underline{I}_1)$$

$$P_{23}^2 = U_{23\text{eff}} I_{2\text{eff}} \cos(\underline{U}_{23}, \underline{I}_2)$$

ce qui conduit à

$$P_{13}^1 = U_{13\text{eff}} I_{1\text{eff}} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$P_{23}^2 = U_{23\text{eff}} I_{2\text{eff}} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$$

En situation d'équilibre, on peut déduire que :

$$P_{13}^1 - P_{23}^2 = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \left( \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right)$$

# Systèmes triphasés

Par application de la formule trigonométrique

$$2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a - b) - \cos(a + b),$$

on obtient :

$$P_{13}^1 - P_{23}^2 = 2 U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\varphi) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$P_{13}^1 - P_{23}^2 = 2 \underbrace{U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\varphi)}_Q \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

qui conduit à :

$$Q = \sqrt{3}(P_{13}^1 - P_{23}^2)$$

Ce calcul requiert les deux mêmes mesures que celles utilisées pour calculer  $P$ . Donc il ne faut que **deux wattmètres** ! (ou deux mesures avec le même wattmètre).

Il existe aussi une autre méthode (non démontrée ici) qui permet de déduire  $Q$  d'une seule mesure. Elle conduit en effet à

$$Q = \sqrt{3}P_{23}^1$$

Cependant, cette mesure étant différente de celles utilisées pour déduire  $P$ , la méthode n'est généralement pas retenue.

## Remarque

Il existe des appareils sophistiqués et coûteux, appelés *analyseurs de réseaux*, qui, une fois convenablement câblés et configurés, permettent d'obtenir toutes les infos sur les puissances en jeu dans un réseau triphasé, tels des outils magiques... mais il est bien de savoir ce que l'on fait parfois et de pouvoir se débrouiller avec des moyens réduits.

Le prof :

Fin !

L'étudiant :

Ouf !