

Cours

Un premier pas en Automatique



Olivier BACHELIER
Courriel : Olivier.Bachelier@univ-poitiers.fr
Tel : 05-49-45-36-79 ; Fax : 05-49-45-40-34

Les commentaires constructifs et les rapports d'erreurs sont les bienvenus !

Résumé

Ce petit document d'initiation à l'automatique des systèmes linéaires s'inscrit dans le cadre de la deuxième année de l'**IUT de Poitiers-Châtelleraut-Niort** et s'adresse principalement aux étudiants du département de **Mesures Physiques**, situé sur le site de Châtelleraut. L'IUT de Poitiers-Châtelleraut-Niort est une composante de l'**Université de Poitiers**.

Il ne s'agit pas d'un cours complet ou exhaustif, loin s'en faut. Bien au contraire, c'est une première approche qui vise à donner aux étudiants quelques notions de base sur les systèmes linéaires mono-entrée/mono-sortie, leur modélisation (en l'occurrence la fonction de transfert en p), leur analyse (étude de leurs réponses, critères de stabilité), la notion de boucle et quelques rudiments de commande (régulation PID).

Connaissances préalables souhaitées : Fonctions de transfert en ω , diagrammes de Bode. Des connaissances éventuelles sur la transformation de Laplace sont bienvenues.

Table des matières

1	Introduction à l'Automatique	1
1.1	Définition	1
1.2	Notion de système	1
1.3	Notion de modèle et cadre de travail	2
1.4	Notion de boucle	3
1.5	Nécessité d'une régulation étudiée	4
1.6	L'Automatique et les Mesures Physiques	5
1.7	Grandes lignes du cours	5
2	Modélisation linéaire	7
2.1	Présentation du système	7
2.2	Obtention de l'équation différentielle	8
2.3	Transformation de Laplace	9
2.4	Fonction de transfert	10
2.4.1	Cas du moteur à commande d'induit	10
2.4.2	Cas général	12
2.5	Notion de causalité	13
2.6	Association de fonctions de transfert	13
2.7	Fonctions de transfert en boucle fermée	13
3	Réponses des systèmes linéaires continus	15
3.1	Définition de la réponse d'un système	15
3.2	Réponse impulsionnelle	15
3.3	Réponse indicielle	16
3.3.1	Réponse indicielle d'un système canonique de premier ordre	16
3.3.2	Réponse indicielle d'un système canonique de deuxième ordre	18
3.3.3	Remarque sur les pôles des systèmes	19
3.3.4	Remarque sur les zéros	20
3.3.5	Remarque sur les modèles d'ordre élevé	20
3.4	Les réponses fréquentielles ou harmoniques	20
3.4.1	Définition	20
3.4.2	Lien avec la fonction de transfert	21
3.4.3	Diagramme de Bode	21
3.4.3.1	Diagramme de Bode d'un modèle canonique de premier ordre	21
3.4.3.2	Diagramme de Bode d'un modèle canonique de deuxième ordre	22
3.4.3.3	Diagramme de Bode associé à une chaîne directe	24
4	Stabilité des systèmes linéaires continus	25
4.1	Définition générale et intuitive de la stabilité d'un état d'équilibre ou d'un système	25
4.2	Influence sur le comportement entrée/sortie	26
4.3	Critère des racines	26
4.4	Critère du revers pour la stabilité d'un système bouclé	27
4.4.1	Expression du critère qualitatif	27

4.4.2	Marges de stabilité, de gain, de phase	27
5	Commande des systèmes linéaires continus	29
5.1	Principe de la commande par retour unitaire	29
5.2	Régulation proportionnelle	30
5.2.1	Influence de A sur la stabilité	30
5.2.2	Influence de A sur la rapidité	30
5.2.3	Influence de A sur la précision	31
5.3	Retour sur le paradoxe évoqué en introduction	31
5.4	Influence de A et des intégrateurs sur une erreur due à une perturbation	33
5.5	Régulateur PID	33
6	Conclusions et annexes	37
6.1	Conclusion	37
6.2	Annexes	38
6.2.1	Point de fonctionnement et caractéristique statique	38
6.2.2	Principe de superposition	40
6.2.3	À propos de la transformée de Laplace	40
6.2.3.1	Quelques transformées	40
6.2.3.2	Remarques sur la transformation de Laplace inverse	42
6.2.4	Formule de Black	43
6.2.5	Expression du gain statique	43
6.2.6	Influence des pôles sur la réponse d'un système	44
6.2.6.1	Pôles distincts	44
6.2.6.2	Pôles multiples	46
6.2.7	Fonction de transfert et réponse harmonique	46
6.2.8	À propos du diagramme de Bode	48
6.2.8.1	Quelques règles simples de construction	48
6.2.8.2	Construction du diagramme de Bode associé au modèle complet du moteur	51
6.2.9	Perturbation en $1/p^q$ et position des intégrateurs	53
6.2.10	Calcul d'un régulateur par compensation de pôle	54
6.2.10.1	Régulateur PI	55
6.2.10.2	Régulateur PD	56
6.2.10.3	Régulateur PID	56
6.2.11	Méthodes de Ziegler-Nichols	57
6.2.11.1	Méthode de la réponse indicielle	57
6.2.11.2	Méthode de la juste oscillation	58
6.2.11.3	Commentaires sur les deux méthodes	59
6.2.12	Filtrage de l'effet dérivé	59
	Références bibliographiques	61
	Index	62

Chapitre 1

Introduction à l'Automatique

Ce chapitre resitue un peu le cadre du cours, propose les définitions préliminaires à l'étude.

Sommaire

1.1	Définition	1
1.2	Notion de système	1
1.3	Notion de modèle et cadre de travail	2
1.4	Notion de boucle	3
1.5	Nécessité d'une régulation étudiée	4
1.6	L'Automatique et les Mesures Physiques	5
1.7	Grandes lignes du cours	5

1.1 Définition

La définition de l'Automatique que propose le « Petit Robert » est la suivante :

Automatique : ensemble des *disciplines scientifiques*¹ et des techniques utilisées pour la *conception et l'emploi des dispositifs*² qui fonctionnent *sans l'intervention d'un opérateur humain*³.

On peut revenir sur les trois expressions en italique de cette définition.

- disciplines scientifiques* : ceci suggère que l'Automatique requiert une activité théorique afin de réaliser :
 - une modélisation mathématique d'un dispositif ;
 - une analyse de ses propriétés sur la base du modèle ;
 - la conception d'une loi de commande, toujours sur la base du modèle.
- conception et emploi de dispositifs* : ceci relève en fait de la mise en œuvre pouvant faire intervenir des disciplines telles que l'électronique, l'informatique...
- sans l'intervention d'un opérateur humain* : cette dernière expression fait apparaître la notion de systèmes automatisés qui permettent :
 - d'améliorer les performances d'un dispositif, son confort (exemples : climatisation, suspension active) ;
 - d'améliorer la sécurité (exemples : pilote automatique, bras robotisé remplaçant un opérateur humain).

Ne sont généralement abordés dans un cours d'Automatique que les aspects 1 et 3. Le point 2 est généralement spécifique au dispositif étudié et ne nécessite souvent pas l'expertise réelle d'un automaticien.

1.2 Notion de système

En Automatique, la notion de système est incontournable et se rapproche de celle de la physique. Généralement, le *système* est un dispositif qui fonctionne en interaction avec son environnement. Certaines grandeurs physiques de

l'environnement agissent sur le système. Elles sont appelées *entrées*. D'autres émanent du système et agissent sur l'extérieur. Elles sont appelées *sorties*. Les entrées d'un système peuvent *en général* être modifiées et sont alors appelées *commandes*. Les signaux associés aux commandes sont généralement notés par la lettre u et les signaux associés aux sorties par la lettre y . Il peut également exister des entrées qui échappent au contrôle et qui ne peuvent être modifiées. Elles sont appelées *perturbations* et sont notées d . La figure 1.1 symbolise ce formalisme.

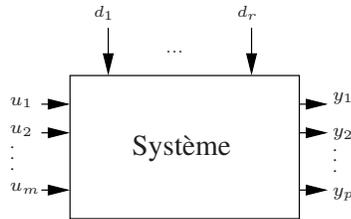


FIGURE 1.1 – Système comprenant m entrées, p sorties et r perturbations

Dans la pratique, un système peut correspondre à un dispositif mécanique, électronique, chimique... et il est facile de le différencier de l'extérieur de même que de choisir quelles sont les entrées (exemples : une force ou un couple en mécanique, une tension ou un courant en électronique, la concentration d'un produit initial en chimie) ou les sorties (une vitesse ou un couple en mécanique, une tension ou un courant en électronique, une concentration d'un produit final en chimie). Comme exemples de perturbations, on peut citer une force liée aux frottements avec l'air, des tensions parasites, des concentrations de produits négligés ou d'impuretés...

Il existe des systèmes qui ne sont pas physiques tels que des systèmes économiques et financiers et pour lesquels ce formalisme peut paraître moins évident. Néanmoins, il peut être appliqué.

1.3 Notion de modèle et cadre de travail

L'étude d'un système et *a fortiori* sa commande font appel à un modèle de son comportement. De cette description mathématique du comportement peuvent naître des outils d'analyse et de commande qui sont utilisés par la suite. On distingue plusieurs automatiques selon la nature des signaux et des modèles considérés.

◊ Les systèmes rencontrés dans ce cours seront tels que les signaux (entrées et sorties) sont *analogiques* c'est-à-dire qu'ils peuvent prendre toute valeur dans un intervalle donné (signaux *non quantifiés*) et sont définis à tout instant du temps à partir de l'origine (signaux *continus*). (Voir cours de traitement du signal.)

Un signal analogique étant *continu*, l'on parle d'automatique des *systèmes à temps continu* ou simplement des *systèmes continus*.

◊ Le modèle mathématique utilisé pour décrire le comportement du système est obtenu soit par identification (on fait correspondre un modèle de structure donnée au comportement entrées/sorties du système), soit, et ce sera le cas ici, par une utilisation des équations de la physique régissant le comportement du système. Ces équations sont différentielles et souvent non linéaires. Cependant, on peut travailler dans une gamme de valeurs autour d'un point de fonctionnement et les équations sont alors raisonnablement remplaçables par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Cette approximation permet donc de passer d'un modèle non linéaire à un modèle *linéaire* (voir annexe 6.2.1). Bien que moins fidèle à la réalité, ce dernier facilite l'analyse et la commande du système, notamment grâce à un principe fondamental, celui de *superposition*, résumé sur la figure 1.2.



FIGURE 1.2 – Principe de superposition

Si l'entrée $u_1(t)$ entraîne la sortie $y_1(t)$ et si l'entrée $u_2(t)$ entraîne la sortie $y_2(t)$ alors une entrée $a_1u_1(t) + a_2u_2(t)$, où a_1 et a_2 sont des réels quelconques mais constants, entraîne une sortie $y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$. Ceci se généralise à plusieurs entrées différentes u_i et peut servir de définition des systèmes linéaires même si ce n'est pas très rigoureux.

Ce cours est restreint à l'étude des *systèmes linéaires*.

◊ Enfin, une dernière distinction est essentielle pour ce cours. Les systèmes sont soit *monovariabiles* (une seule commande, une seule sortie) soit multivariabiles (plusieurs commandes, plusieurs sorties). Les systèmes *monovariabiles* seront étudiés.

En résumé, ce cours concerne les systèmes **linéaires monovariabiles continus**.

1.4 Notion de boucle

Il s'agit d'une (de la ?) notion fondamentale en Automatique, que les électroniciens (qui sont les premiers à l'avoir formalisée) appellent *contre-réaction*. Le principe est d'acquérir une information présente sur la sortie et de l'utiliser pour modifier la commande. Le but de cette *rétro-action* est d'obtenir un comportement souhaité au niveau de la sortie. L'utilisation de la boucle résulte du constat des automaticiens que la modification convenable de la sortie par une action sur la commande, ce sans tenir compte de la sortie, était insuffisante.

Sans entrer dans le formalisme, pas toujours intuitif, un petit exemple tiendra lieu de définition (les équations viendront plus tard). Soit la figure 1.3 montrant un automaticien désireux d'attraper son breuvage préféré.

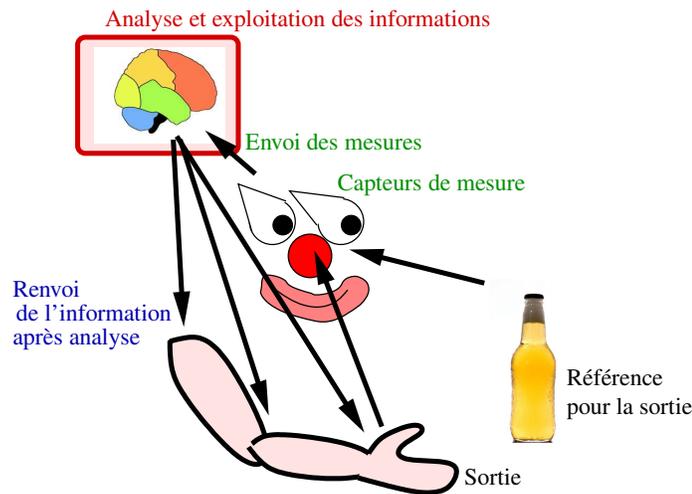


FIGURE 1.3 – Un automaticien expérimentant la notion de boucle

Le personnage cherche à faire coïncider la position de sa main (sortie) avec celle de la bouteille (référence, objectif à atteindre). Il utilise ses yeux (capteurs de mesure) pour acquérir les deux informations, en particulier l'information sur la sortie. Cette information est renvoyée au cerveau (c'est la *boucle*, *feedback* en anglais). Le cerveau analyse et exploite les données pour renvoyer (c'est toujours la boucle) des informations sur les muscles (actionneurs) qui assurent certains angles d'articulations (épaule, coude, poignet, doigts) faisant ainsi en sorte qu'enfin la sortie atteigne son objectif. Les signaux nerveux générés par le cerveau correspondent aux commandes u .

Dans un tel cas de figure, la « magie de la contre-réaction » opère de façon naturelle et intuitive et l'on parle de *boucle manuelle* en ce sens que c'est l'homme lui-même qui assure le bouclage. Le cerveau joue le rôle de *correcteur* ou *régulateur* c'est-à-dire qu'il assure toute l'intelligence de cette boucle. Dans le cas d'un robot, le

cerveau doit être remplacé par un dispositif et l'on parle alors de *boucle automatique*. L'art de l'automaticien est de déterminer judicieusement les règles qui doivent régir la contre-réaction appliquée au dispositif. Enfin, que la boucle soit manuelle ou automatique, le système fonctionne, dit-on, *en boucle fermée*. Par opposition, on parle étrangement de *boucle ouverte* lorsqu'il y a absence de boucle. Dans le cas présent, ceci consisterait à bander les yeux du personnage pour tester sa capacité à retrouver la bouteille. Le lecteur jugera sur cet exemple du bien fondé de la boucle.

La boucle automatique suit donc la plupart du temps un modèle mathématique plus ou moins compliqué qui est appelé *loi de commande*. Elle peut permettre d'assurer deux activités essentielles en Automatique :

- *l'asservissement* qui consiste à faire en sorte que les sorties se comportent comme des références données (tout du moins autant que faire se peut), comme illustré par l'exemple ;
- *la régulation* qui consiste à tenter de réduire l'effet sur les sorties d'éventuelles perturbations (exemples : état d'ébriété du personnage cherchant sa bouteille, vents contraires, etc.).

Dans les deux cas, certaines performances sont souvent requises telles que :

- *la stabilité* qui est, grossièrement, la convergence de la sortie : le bras de l'automaticien ne doit pas partir brusquement vers l'arrière sans prévenir (maladie neurologique) ou l'automaticien ne doit pas se mettre à tourner sur lui-même de façon continue et sans interruption, éventuellement de plus en plus rapidement (exception faite des automaticiens derviches tourneurs) ;
- *le temps de réponse* : il ne faut pas mourir de soif avant d'attraper la bouteille mais nulle raison pour autant de se précipiter au risque de casser la bouteille ;
- *l'absence d'oscillations des sorties* : en cas d'oscillation, la main ferait par exemple plusieurs passages à proximité de la bouteille avant d'atteindre une position permettant la préhension. Cela fait mauvais genre ;
- *la précision* : ce serait dommage de refermer les doigts à dix centimètres de la bouteille (note : cela peut être dû à un défaut du capteur oculaire qui recevrait deux informations au lieu d'une).

Ces propriétés seront mieux explicitées au cours des divers chapitres.

1.5 Nécessité d'une régulation étudiée

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'une régulation simple n'est pas toujours suffisante. On souhaite asservir la vitesse d'un ventilateur destiné à refroidir un système électronique. Le procédé est constitué d'un petit moteur excité par une tension u et entraînant la rotation du ventilateur comme le montre la figure.

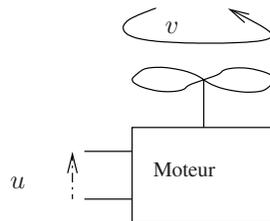


FIGURE 1.4 – Ventilateur

On souhaite que v , la vitesse angulaire du ventilateur, soit égale à une consigne donnée v_c . Pour ce faire, on adopte une commande correspondant au schéma de la figure 1.5.

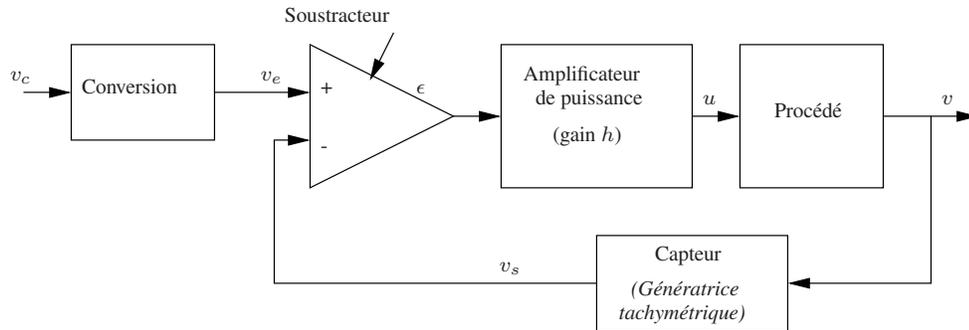


FIGURE 1.5 – Tentative de régulation de la vitesse du ventilateur

Peut-on obtenir $v = v_c$, c'est-à-dire, au niveau des tensions, $v_e = v_s$? Si l'on suppose que c'est effectivement le cas, alors, à la sortie de l'amplificateur différentiel, la tension est $\epsilon = v_e - v_s = v_c - v = 0$. De ce fait, à la sortie de l'amplificateur de puissance, aucun signal n'est délivré ($u = h\epsilon = 0$) et le ventilateur ne tourne pas. Cette égalité n'est donc obtenue qu'à l'arrêt et l'on comprend qu'il est nécessaire d'envisager une boucle plus sophistiquée. C'est tout le but de l'Automatique. La résolution de ce petit paradoxe occupera le lecteur une bonne partie du reste de ce cours.

Pour rester quelques instants sur ce propos, on peut noter que si c'est la position angulaire qui est asservie, alors la loi de commande de la figure 1.5 peut tout à fait fonctionner. En effet, il est préférable que le moteur ne tourne plus lorsque son arbre se trouve dans la position souhaitée. Il faut bien comprendre que ce n'est plus le même système qui est considéré puisqu'un système est défini par ses entrées et ses sorties, non par le dispositif technologique lui-même.

1.6 L'Automatique et les Mesures Physiques

Le lien entre l'apprentissage de l'Automatique et la formation d'un technicien supérieur en Mesures Physiques est évident dès lors que l'on a compris la notion de boucle. En effet, de nombreux dispositifs étant bouclés à des fins d'asservissement ou de régulation, la présence d'au moins un *capteur* est requise pour la mesure de la sortie. La qualité de la mesure est essentielle pour une meilleure efficacité de la boucle. Le technicien en Mesures Physiques peut donc être amené à travailler sur un procédé où une solution d'Automatique est mise en œuvre.

En outre, certains capteurs sont eux-même instrumentés en boucle fermée.

1.7 Grandes lignes du cours

Dans ce document, seront abordés les points suivants :

- la *modélisation* qui consiste à déterminer un modèle mathématique du système à asservir ou à réguler. Ce point sera abordé à travers un exemple « fil rouge », à savoir un moteur à courant continu. Le modèle obtenu est la *fonction de transfert*.
- la *réponse des systèmes*, à savoir la détermination, sur la base du modèle entre autres, de l'expression de la sortie du système lorsque ce dernier est soumis à une excitation connue. Seront privilégiées les réponses à des échelons, à des impulsions (réponses temporelles), ainsi qu'à des excitations sinusoïdales (réponses harmoniques ou fréquentielles). Ne seront considérés que des modèles classiques, courants et relativement simples.

- la *stabilité*, qui est la propriété impérative que doit posséder un système. Elle sera définie et des critères permettant de savoir si elle est vérifiée seront présentés.
- la *commande*, c'est-à-dire la partie de l'Automatique qui consiste à déterminer une façon judicieuse de concevoir la boucle afin d'obtenir des performances souhaitées ou s'en rapprocher autant que possible. La seule structure de commande considérée dans ce cours sera le *régulateur PID*.

Quelques annexes compléteront le document, notamment sur les aspects mathématiques et doivent être envisagées comme des informations complémentaires dont la révision pour l'examen est facultative.

Chapitre 2

Modélisation linéaire

Ce chapitre s'articule autour d'un exemple qui permettra de comprendre la démarche à suivre pour parvenir à obtenir un modèle du système usuel en Automatique, à savoir la *fonction de transfert*.

Sommaire

2.1 Présentation du système	7
2.2 Obtention de l'équation différentielle	8
2.3 Transformation de Laplace	9
2.4 Fonction de transfert	10
2.4.1 Cas du moteur à commande d'induit	10
2.4.2 Cas général	12
2.5 Notion de causalité	13
2.6 Association de fonctions de transfert	13
2.7 Fonctions de transfert en boucle fermée	13

2.1 Présentation du système

Il s'agit d'un moteur électrique à courant continu qui est dit « à commande d'induit ». Le schéma d'un tel procédé est donné par la figure 2.1.

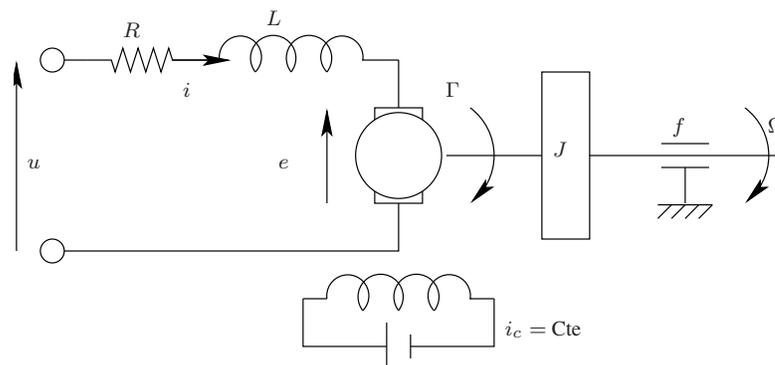


FIGURE 2.1 – Moteur à courant continu à commande d'induit

Les lois de la physique régissant le comportement de ce procédé électromécanique conduisent aux équations suivantes :

- L'équation électrique au niveau de l'induit est

$$L \frac{di}{dt} + Ri + e = u, \quad (2.1)$$

où u est la commande d'induit, i est le courant d'induit, et R et L sont respectivement la résistance et l'inductance d'induit. La grandeur e est une force électromotrice.

- Le couple moteur Γ s'écrit

$$\Gamma = Ki, \quad (2.2)$$

où K est une constante liée au flux inducteur lui-même constant.

- La force électromotrice e est donnée par

$$e = K\Omega, \quad (2.3)$$

où Ω est la vitesse de l'arbre du moteur.

- Enfin, la relation fondamentale de la dynamique conduit à écrire

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma - f\Omega, \quad (2.4)$$

où J est le moment d'inertie et f un coefficient relatif aux forces de frottement générant un couple résistant $\Gamma_r = f\Omega$.

Il convient maintenant de se fixer une entrée et une sortie. La commande d'induit u est choisie comme entrée et la sortie sera la vitesse angulaire du moteur $y = \Omega$. On peut en effet souhaiter réaliser un asservissement de vitesse.

2.2 Obtention de l'équation différentielle

On utilise maintenant les équations précédentes pour résumer le modèle du système par une seule équation différentielle reliant y à u . On note que les grandeurs physiques sont fonctions du temps mais que cette dépendance n'apparaît pas explicitement dans les notations. À partir de maintenant, on note par un point au dessus de la lettre la dérivée du signal associé par rapport au temps et par deux points au-dessus de la lettre la dérivée seconde par rapport au temps.

Les relations (2.4) et (2.2) conduisent à écrire

$$J\dot{y} + fy = Ki,$$

ce qui, après dérivation par rapport au temps, compte tenu des équations (2.1) et (2.3), s'écrit

$$\begin{aligned} J\ddot{y} + f\dot{y} &= K\dot{i} = \frac{K}{L}(u - Ri - Ky) \\ \Leftrightarrow JL\ddot{y} + fL\dot{y} + K^2y &= Ku - RKi. \end{aligned}$$

Or $Ki = \Gamma$ et on peut à nouveau utiliser (2.4) pour aboutir à

$$JL\ddot{y} + (RJ + fL)\dot{y} + (fR + K^2)y = Ku. \quad (2.5)$$

On obtient donc une équation différentielle en y dans laquelle les seules grandeurs physiques variables sont u et y . Cette équation différentielle constitue un modèle de comportement entrée/sortie pour le procédé. Elle pourrait être résolue pour déterminer la *réponse* du procédé (c'est-à-dire l'évolution de $y(t)$ au cours du temps) en fonction d'une excitation donnée sur u et de conditions initiales. Toutefois cette démarche est peu courante en Automatique car un peu lourde et l'on préfère adopter d'autres modèles plus facilement manipulables tels que la *fonction de transfert* présentée ultérieurement.

En supposant que l'inductance L est très petite, on peut envisager un modèle plus simple où elle est négligée ($L \simeq 0$). L'équation (2.5) peut alors se récrire

$$RJ\dot{y} + (Rf + K^2)y = K_1u. \quad (2.6)$$

On comprend sur cet exemple que plusieurs modèles plus ou moins fidèles peuvent décrire le même système.

Remarque 2.1 Pour cet exemple, le modèle était déjà linéaire. En effet, l'équation différentielle dépend linéairement de l'entrée, de la sortie et de leurs dérivées successives. Ce n'est pas toujours le cas. Lorsque ce n'est pas le cas, il convient de recourir à quelque approximation pour que les éléments non linéaires soient remplacés par des éléments linéaires. Ces approximations ne sont généralement justifiées que dans une gamme de valeurs correspondant à de petites variations autour d'un point de fonctionnement au voisinage duquel le comportement du système correspond à peu près à un modèle linéaire. L'annexe 6.2.1 est consacrée aux notions de caractéristique statique et de point de fonctionnement.

2.3 Transformation de Laplace

Ce paragraphe a pour but de rappeler ce qu'est la transformation de Laplace¹, outil mathématique nécessaire pour obtenir la fonction de transfert d'un système.

Chaque grandeur physique est décrite par un signal temporel, c'est-à-dire une fonction du temps. Seules les fonctions du temps dites *causales*, c'est-à-dire pour lesquelles $f(t) = 0, \forall t < 0$, sont considérées. Toute fonction causale $f(t)$ peut subir une *transformation dite de « Laplace »*, notée \mathcal{L} et ainsi définie :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

$F(p)$, si elle existe, c'est-à-dire si l'intégrale est calculable, est appelée *transformée de Laplace* de $f(t)$ et la variable complexe $p = \alpha + j\beta$ (notée s dans les ouvrages de langue anglo-saxonne) est connue sous le nom de variable de Laplace. Cet opérateur possède les propriétés suivantes :

1. linéarité :

$$f_1(t) + kf_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(p) + kF_2(p), \quad k \in \mathbf{R}$$

2. théorème de la dérivation :

$$\bullet \dot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0)$$

$$\bullet \ddot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p^2F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$$

$$\bullet \frac{d^l f(t)}{dt^l} \xrightarrow{\mathcal{L}} p^l F(p) - p^{l-1}f(0) - p^{l-2}\dot{f}(0) - \dots - \frac{df^{l-1}(0)}{dt^l}$$

La multiplication par p correspond donc, en présence de conditions initiales nulles, à une dérivation dans le domaine de Laplace.

3. théorème de l'intégration :

$$\bullet \int_0^{t \geq 0} f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(p)}{p}$$

La division par p est donc l'opérateur d'intégration dans le domaine de Laplace.

1. Marquis Pierre Simon de Laplace (1749-1827) : mathématicien et physicien français, auteur de travaux se rapportant à la mécanique céleste et au calcul des probabilités.

4. théorème du retard :

$$\bullet f(t - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-\theta p} F(p)$$

5. théorème du décalage fréquentiel :

$$\bullet f(t)e^{-\omega t} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p + \omega)$$

6. théorème de la valeur initiale :

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

(sous réserve d'existence des deux limites)

7. théorème de la valeur finale :

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

(sous réserve d'existence des deux limites)

Comme il est parfois fastidieux de calculer la transformée de Laplace d'une fonction temporelle compliquée (de même que la transformée inverse notée \mathcal{L}^{-1}), en pratique, les automaticiens disposent de tableaux de transformées (Voir tableau 2.1). Quelques lignes de ce tableau sont justifiées en annexe 6.2.3.1. Il en existe des versions bien plus complètes dans certains ouvrages.

Ce tableau peut être utilisé pour passer du domaine de Laplace au domaine temporel. Ceci évite d'utiliser la transformation \mathcal{L}^{-1} qui est néanmoins définie en annexe 6.2.3.2

2.4 Fonction de transfert

2.4.1 Cas du moteur à commande d'induit

La *fonction de transfert* (parfois appelée *transmittance*) est le modèle le plus usuel en Automatique. Elle s'obtient en appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle. On reprend l'exemple du moteur à courant continu. Pour simplifier le développement, les paramètres prendront les valeurs simples (mais fort peu réalistes) suivantes :

- $J = 1 \text{ kg.m}^2$
- $f = 1 \text{ N.m.s}$
- $R = 1 \Omega$
- $L = 10 \text{ mH}$
- $K = 1 \text{ N.m/A} = 1 \text{ V.s}$

Compte tenu de ces valeurs numériques, l'équation (2.5) s'écrit

$$10^{-2}\ddot{y} + 1,01\dot{y} + 2y = u$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} + 101\dot{y} + 200y = 100u.$$

En appliquant \mathcal{L} , il vient

$$p^2 Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 101pY(p) - 101y(0) + 200Y(p) = 100U(p) \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{(p^2 + 101p + 200)}_{D(p)} Y(p) = \underbrace{100}_{N(p)} U(p) + \underbrace{(p + 101)y(0) + \dot{y}(0)}_{I(p)} \Leftrightarrow$$

Original $f(t), t \geq 0$	Transformée de Laplace $F(p)$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Echelon d'amplitude E i.e. $E\Gamma(t)$	$\frac{E}{p}$
Rampe de pente b i.e. bt	$\frac{b}{p^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^q e^{-at}$	$\frac{q!}{(p+a)^{q+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
Retard pur i.e. $f(t - \theta)$	$e^{-\theta p} F(p)$

TABLE 2.1 – Table de transformées de Laplace

$$Y(p) = \underbrace{\frac{N(p)}{D(p)}}_{G(p)} U(p) + \frac{I(p)}{D(p)}.$$

Le second terme de $Y(p)$ dépend des conditions initiales (à l'instant 0). Il peut être nul si le système est initialement au repos. Il ne traduit pas des propriétés constantes du comportement entrée/sortie. En revanche, $G(p)$ est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes en p . Elle est indépendante des conditions initiales. $G(p)$ est appelée *fonction de transfert* et peut ici s'écrire

$$G(p) = \frac{100}{p^2 + 101p + 200} = \frac{100}{(p - p_1)(p - p_2)}, \quad \text{avec } p_1 \simeq -2 \text{ et } p_2 \simeq -98.$$

p_1 et p_2 , les racines de $D(p)$, sont appelés *pôles du système*. Ils ont une grande influence sur le comportement de ce dernier. Lorsqu'il existe des racines au numérateur, elles sont appelées *zéros du système* et peuvent également influencer son comportement mais moins que les pôles.

$G(p)$ peut aussi s'écrire

$$G(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}, \quad \text{avec } \tau_1 = -\frac{1}{p_1} \simeq 0,5, \quad \tau_2 = -\frac{1}{p_2} \simeq 0,01 \text{ et } K \simeq 0,5.$$

τ_1 et τ_2 , que l'on ne peut faire apparaître que lorsque les pôles sont réels, sont appelées *constantes de temps* du système. On note ici que τ_1 est beaucoup plus élevée et correspond approximativement à la dynamique des phénomènes mécaniques alors que τ_2 est davantage liée aux phénomènes électriques.

Si L est négligée, on peut appliquer la *transformation de Laplace* à l'équation différentielle (2.6) et l'on obtient, en éliminant les termes liés aux conditions initiales,

$$G(p) = \frac{1}{p + 2} = \frac{0,5}{1 + 0,5p}.$$

Dans ce modèle simplifié, il ne reste qu'un pôle égal à -2 ou une seule constante de temps égale à $0,5$. Ceci revient un peu à essentiellement prendre en compte la dynamique des phénomènes mécaniques.

2.4.2 Cas général

De manière générale, il s'agit d'obtenir, pour tout système, éventuellement par approximation, une équation différentielle à coefficients constants et dont chaque membre est linéaire par rapport à l'entrée, à la sortie ainsi qu'à leurs dérivées successives (si elles sont non nulles) :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u.$$

Pour des conditions initiales nulles et puisque p est l'*opérateur de dérivation* dans le domaine de Laplace, on obtient la forme générale suivante de la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (2.7)$$

Le degré du numérateur $N(p)$ est m et celui du dénominateur $D(p)$ est n . n est également appelé *ordre du système*. Les *pôles* du système sont donc les racines de l'*équation caractéristique* $D(p) = 0$ alors que les *zéros* du système sont les racines de $N(p) = 0$. $D(p)$ est parfois appelé *polynôme caractéristique*.

2.5 Notion de causalité

Soit la *fonction de transfert* d'un système telle que celle donnée en (2.7) (forme générale). Physiquement, il est difficilement concevable que m soit strictement supérieur à n . On peut toujours imaginer un modèle mathématique

correspondant à ce cas ou même tenter une conception pratique mais ceci signifie que la sortie du système à un instant donné dépend de la valeur de l'entrée à un instant ultérieur. C'est pourquoi l'on suppose plutôt, pour un procédé, que $m \leq n$. Un tel système est dit *causal* et la fonction de transfert est dite *propre* (même *strictement propre* si $m < n$). Lorsque l'on cherche à construire un système, il est important de prendre en compte cette causalité. La plupart des modèles physiques sont propres.

2.6 Association de fonctions de transfert

On utilise les schéma-blocs pour représenter les systèmes et matérialiser graphiquement la boucle. (rétro-action). Dans ces schémas, les systèmes sont représentés dans des boîtes (par exemple comme sur la figure 1.1) où l'on porte généralement leur fonction de transfert. Les signaux apparaissent à l'extérieur des boîtes (ils entrent ou sortent des boîtes) et sont parfois indiqués par leur transformée de Laplace. On peut se servir de ces schémas pour illustrer deux règles essentielles pour comprendre l'intérêt de la *fonction de transfert* lorsque plusieurs systèmes sont associés pour en constituer un seul. Ainsi, on envisage deux cas d'association de deux systèmes : en parallèle et en série. La figure 2.2 montre, dans ces deux cas, la fonction de transfert globale correspondante. Ces règles peuvent servir pour des systèmes plus complexes.

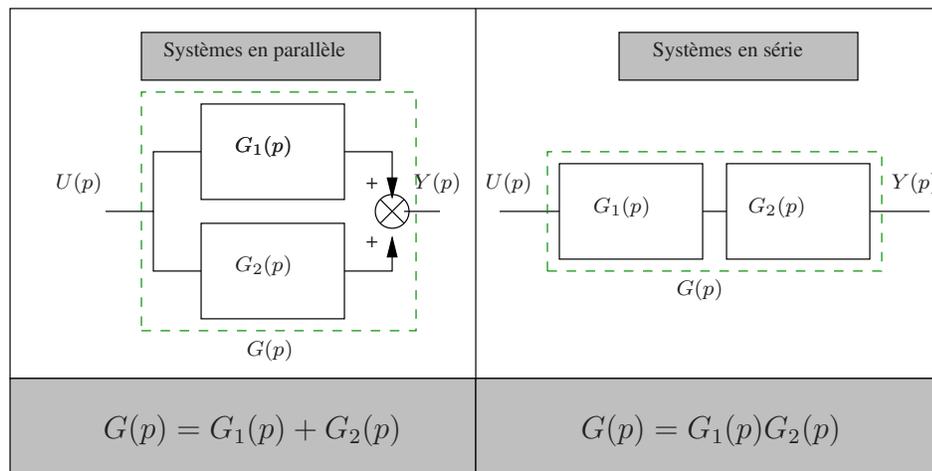


FIGURE 2.2 – Fonctions de transfert en parallèle et en série

2.7 Fonctions de transfert en boucle fermée

On se sert à nouveau des schéma-blocs pour résumer le passage de la boucle ouverte à la boucle fermée. Deux cas seront envisagés : celui du retour unitaire et celui d'un retour dynamique quelconque (voir figure 2.3).

$G_2(p)$ peut être par exemple associé à un capteur.

On peut définir la fonction de transfert de la boucle, $L(p)$, couramment appelée « gain de boucle » et correspondant à la fonction de transfert de l'ensemble de la boucle ouverte, ensemble lui-même appelé *chaîne directe*.

- **Retour unitaire :**

$$L(p) = G(p)$$

- **Retour non unitaire :**

$$L(p) = G_1(p)G_2(p)$$

Dans ce second cas, on distingue $G_1(p)$, la fonction de transfert du procédé, de $L(p)$, celle de la chaîne directe.

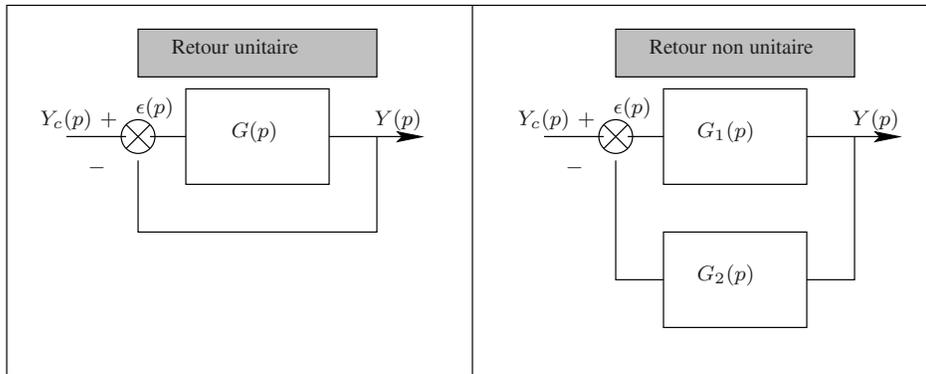


FIGURE 2.3 – Retours unitaire et non unitaire

On peut aussi, selon une formule attribuée parfois à Black², calculer la fonction de transfert en boucle fermée.

- **Retour unitaire :**

$$H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

- **Retour non unitaire :**

$$H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)} = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)}$$

Cette formule est démontrée dans l'annexe 6.2.4.

2. Harold Stephen Black (1898-1983) : ingénieur électronique américain dont les travaux sur la contre-réaction vers 1934 ont ouvert des voies à l'Automatique.

Chapitre 3

Réponses des systèmes linéaires continus

Ce chapitre est consacré à l'étude des *réponses* des systèmes linéaires monovariabiles usuels. Par *réponse*, on entend la façon dont ils réagissent, à travers leur sortie, à une sollicitation sur la commande.

Sommaire

3.1	Définition de la réponse d'un système	15
3.2	Réponse impulsionnelle	15
3.3	Réponse indicielle	16
3.3.1	Réponse indicielle d'un système canonique de premier ordre	16
3.3.2	Réponse indicielle d'un système canonique de deuxième ordre	18
3.3.3	Remarque sur les pôles des systèmes	19
3.3.4	Remarque sur les zéros	20
3.3.5	Remarque sur les modèles d'ordre élevé	20
3.4	Les réponses fréquentielles ou harmoniques	20
3.4.1	Définition	20
3.4.2	Lien avec la fonction de transfert	21
3.4.3	Diagramme de Bode	21

3.1 Définition de la réponse d'un système

La *réponse* d'un système de fonction de transfert $G(p)$ correspond à la forme du signal de sortie $y(t)$ lorsque le système est excité par un signal d'entrée connu $u(t)$. On distingue plusieurs types de réponse selon le signal d'entrée. Certaines réponses sont très couramment étudiées pour comprendre le fonctionnement d'un système. En toute logique, la réponse d'un système dépend de la valeur de la sortie à l'instant initial considéré. Cependant, à des fins de simplification de ce cours, nous ne nous intéresserons qu'à des réponses pour lesquelles les conditions initiales sont nulles.

3.2 Réponse impulsionnelle

La *réponse impulsionnelle* est la réponse à une impulsion unitaire de Dirac¹. On l'étudiera peu dans ce cours. Cependant, on rappelle que si $u(t) = \delta(t)$, alors sa transformée de Laplace est $U(p) = 1$ (voir tableau 2.1 et annexe 6.2.3.1). Celle de $y(t)$ est donc :

$$Y(p) = G(p).$$

Le signal temporel $y(t)$ recherché est donc tout simplement la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert.

1. Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) : mathématicien et physicien britannique d'origine suisse ayant participé à la création de la Mécanique Quantique. Prix Nobel de Physique en 1933.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(G)(t).$$

3.3 Réponse indicielle

La *réponse indicielle* d'un système est sa réponse à un échelon unitaire $u(t) = \Gamma(t)$, échelon également appelé fonction de Heaviside². Cette fonction est représentée sur la figure 3.1.

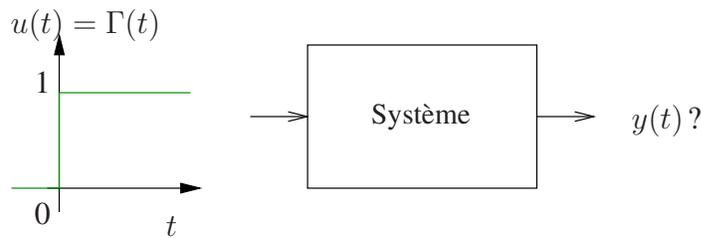


FIGURE 3.1 – Réponse à un échelon unitaire

3.3.1 Réponse indicielle d'un système canonique de premier ordre

On rappelle que la fonction de transfert d'un système *canonique* de premier ordre est de la forme

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}.$$

K est appelé *gain statique* et τ est appelé *constante de temps*. Cette fonction de transfert correspond, en appliquant la transformation inverse de Laplace, à l'équation différentielle

$$y(t) + \tau \dot{y}(t) = K u(t), \quad t \geq 0.$$

◇ On peut déterminer la réponse à partir de cette équation. En effet, la solution d'une telle équation, compte tenu du fait que $u(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$, est donnée par (cf. cours de mathématiques) :

$$y(t) = \underbrace{C e^{-t/\tau}}_{\text{Solution de l'équation homogène associée}} + \underbrace{K}_{\text{solution particulière}},$$

où C est une constante à déterminer. En considérant que $y(0) = 0$, on déduit que $C = -K$. Il vient donc

$$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau}).$$

◇ On peut retrouver ce résultat directement à partir de la fonction de transfert puisque l'on ne considère pas de conditions initiales. On note d'abord que $U(p) = \mathcal{L}(u)(t) = 1/p$, ce qui conduit à écrire

$$Y(p) = G(p)U(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)}.$$

La décomposition en éléments simples aboutit à

$$Y(p) = \frac{\frac{K}{\tau}}{p(p + \frac{1}{\tau})} = \frac{K}{p} - \frac{K}{p + \frac{1}{\tau}}.$$

2. Oliver Heaviside (1850-1925) : physicien britannique à l'origine, entre autres, de la notion d'impédance et du calcul opérationnel. Il découvrit l'ionosphère

En appliquant \mathcal{L}^{-1} , il vient (cf. tableau 2.1)

$$y(t) = K\Gamma(t) - Ke^{-t/\tau}$$

et l'on retrouve, par factorisation, le résultat précédent.

Dans le cas du moteur électrique étudié dans la partie précédente, on a $K = 0,5$ et $\tau = 0,5s$ (modèle simplifié). La réponse d'un tel système est donné par la figure 3.2.

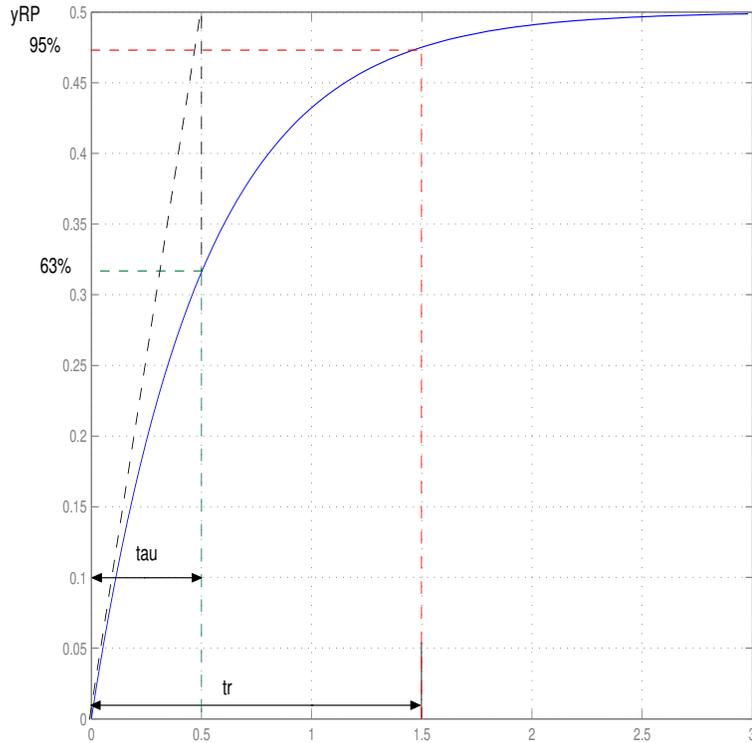


FIGURE 3.2 – Réponse indicielle d'un premier ordre canonique

À partir de cette réponse, on peut définir plusieurs notions sur les réponses des systèmes en général et des systèmes de premier ordre en particulier. On note d'abord que le signal de sortie tend *asymptotiquement* vers une valeur (ici 0,5) sans jamais l'atteindre mathématiquement. Cette convergence asymptotique est toujours vérifiée pour les modèles linéaires qui sont dits stables (cette propriété sera étudiée ultérieurement). C'est pourquoi, dans la réponse, on distingue deux phases :

- le *régime transitoire* qui correspond à l'évolution du signal de sortie dans les premiers instants de la réponse et qui dure un temps t_r appelé *temps de réponse*.
- Au delà de ce temps, le signal passe en *régime permanent*, c'est à dire que le signal de sortie reste entre 95% et 105% de sa valeur finale y_{RP} (correspondant à l'asymptote).

Sur cette courbe, on constate que le temps de réponse correspond à l'instant où le signal atteint 0,475, soit $t_r = 1,5s$.

Par ailleurs, on peut définir $\Delta Y = y_{RP} - y(0)$, la variation totale du signal de sortie (ici $\Delta Y = 0,5 - 0 = 0,5$ puisque la condition initiale est nulle). De même, on peut définir ΔU , la variation du signal d'entrée (ici $\Delta U = 1 - 0 = 1$ puisqu'il s'agit d'un échelon unitaire). Il est facile (voir annexe 6.2.5) de démontrer que

$$K = \frac{\Delta Y}{\Delta U} = G(0).$$

On peut donc retrouver le gain statique du système. Cette définition reste valable pour tout système, même d'ordre plus élevé. On note que, dans le cas présent, $K = 0,5$, ce qui signifie que $y(t) \simeq 0,5u(t)$ en régime permanent.

Néanmoins, certaines propriétés sont spécifiques aux systèmes canoniques de premier ordre. Ainsi, un tel système ne comportant qu'une seule constante de temps, on peut la retrouver, à l'instar du gain statique, sur la réponse du système. En effet, pour un tel système, il existe au moins trois façons simples de la déterminer :

- à partir du temps de réponse car $t_r = 3\tau$;
- τ correspond au temps que met le signal de sortie pour varier de 63% de ΔY ;
- la tangente à la courbe au niveau du point initial $(0; y(0))$ coupe l'asymptote du régime permanent à $t = \tau$.

La constante de temps traduit la rapidité de la réponse du système. Moindre elle est, plus rapide est cette réponse.

3.3.2 Réponse indicielle d'un système canonique de deuxième ordre

Un système *canonique* de deuxième ordre a pour fonction de transfert

$$G(p) = \frac{K}{1 + 2\frac{m}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2} = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2m\omega_n p + \omega_n^2}.$$

K est toujours le gain statique du système. Il conserve la même définition. m est appelé *coefficient d'amortissement* et ω_n est appelé *pulsation propre non amortie*. De ces deux paramètres dépend la forme de la réponse, en particulier de la valeur de m .

On note λ_1 et λ_2 les racines du dénominateur de $G(p)$. Pour simplifier, on considère $K = 1$ ce qui ne change rien à la forme des courbes. On distingue les 5 cas suivants.

- $m > 1 \Rightarrow \lambda_1$ et λ_2 sont réels.

La réponse est dite *apériodique* c'est à dire sans oscillation.

- $m = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ (pôle réel double)

La réponse reste *apériodique*.

- $0 < m < 1 \Rightarrow \lambda_1$ et λ_2 sont complexes conjugués mais à partie réelle **négative**.

La réponse est oscillatoire amortie avec une pulsation ω_p . Elle est dite *pseudo-périodique*. Les oscillations sont d'autant plus marquées que m est moindre. C'est seulement lorsque $m < 0.707$ que les oscillations sont vraiment apparentes; au delà, seul un dépassement peut être perceptible.

- $m = 0 \Rightarrow \lambda_1$ et λ_2 sont imaginaires purs conjugués. La réponse est tout simplement sinusoïdale de pulsation ω_n . C'est d'ailleurs ce qui donne à ω_n le nom de *pulsation propre non amortie*. C'est la pulsation de l'oscillateur obtenu en fixant l'amortissement à zéro.

- $m < 0 \Rightarrow \lambda_1$ et λ_2 sont complexes conjugués mais à partie réelle **positive**. La réponse est oscillatoire, non amortie, et diverge même. Ceci correspond à un système instable (voir chapitre 4).

Il peut exister le cas où les pôles λ_1 et λ_2 sont réels mais au moins l'un des deux est positif. Dans ce cas, la réponse diverge sans osciller. Toutefois, un tel système de deuxième ordre n'est pas *canonique*.

Remarque 3.1 *En automatique, les réponses divergentes sont à proscrire. Elles caractérisent des comportements instables, c'est-à-dire en général contraires à ce que l'on attend du procédé, et dans certains cas potentiellement dangereux pour les personnes ou simplement pour le système lui-même.*

Voici plusieurs réponses indicelles convergentes de systèmes canoniques de deuxième ordre, correspondant à $K = 1$, pour $\omega_n = 1$ et pour diverses valeurs de $m > 0$ (figure 3.3).

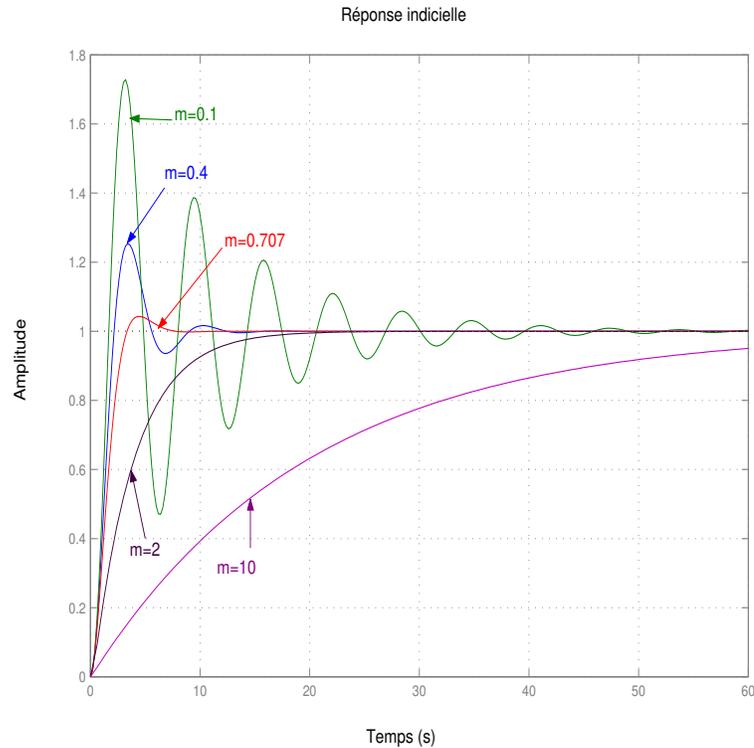


FIGURE 3.3 – Réponse indicielle d'un deuxième ordre ordre canonique

Dans le cas du modèle du moteur à courant continu, on a

$$G(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \quad \text{avec } \tau_1 = -\frac{1}{p_1} \simeq 0,5, \tau_2 = -\frac{1}{p_2} \simeq 0,01 \text{ et } K \simeq 0,5,$$

ce qui signifie, puisque deux constantes de temps apparaissent, que les pôles sont réels, c'est-à-dire que $m > 1$. La réponse de ce modèle est donnée par la figure 3.4 où l'on voit que, τ_2 étant nettement moindre que τ_1 , la dynamique électrique n'apparaît presque pas sur la réponse qui ressemble à une réponse de premier ordre.

3.3.3 Remarque sur les pôles des systèmes

De manière générale, quel que soit l'ordre du système, des pôles complexes engendrent une réponse oscillatoire. Si l'on considère un système dont les pôles ont tous une partie réelle strictement négative, il vient la discussion suivante.

Plus la partie imaginaire est grande devant la partie réelle, plus les oscillations sont marquées. En revanche, des pôles réels n'engendrent pas de transitoire oscillant.

Alors, que se passe-t-il lorsqu'il y a des pôles réels et complexes dans le même modèle ? Il faut distinguer :

- les *pôles dominants* (partie réelle faiblement négative) correspondant aux dynamiques lentes (la dynamique mécanique dans le cas du moteur),
- des *pôles rapides* (partie réelle fortement négative) correspondant aux dynamiques rapides (la dynamique électrique dans le cas du moteur).

Ce sont les pôles dominants qui ont la plus grosse influence sur le régime transitoire.

Par ailleurs, le cas des pôles à partie réelle positive sera traité ultérieurement dans le cadre de la *stabilité* des systèmes.

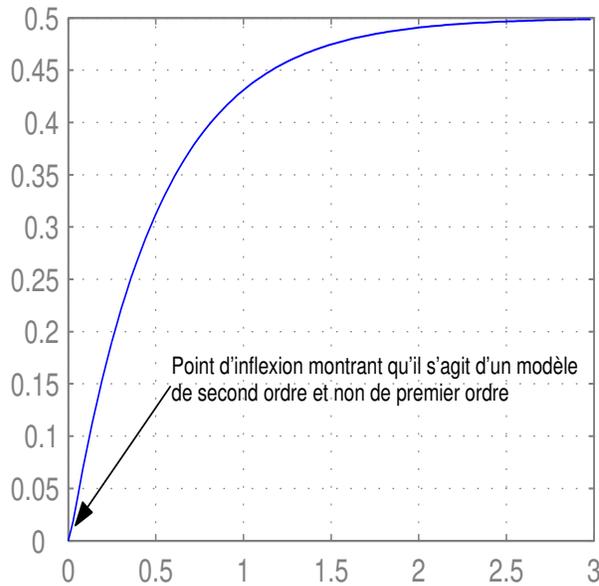


FIGURE 3.4 – Réponse indicielle du modèle complet du moteur électrique

3.3.4 Remarque sur les zéros

Jusqu'à présent, il a surtout été question des systèmes canoniques qui ne comportent pas de *zéro*. La présence de zéros peut entraîner des dépassements inattendus dans la réponse mais leur influence est beaucoup plus difficile à analyser que celle des *pôles*. Elle est aussi moindre car les zéros ne jouent pas sur la stabilité du système, c'est-à-dire sur la convergence de la réponse vers une valeur finale.

3.3.5 Remarque sur les modèles d'ordre élevé

Pour étudier la forme de la réponse d'un système d'ordre supérieur, il peut être astucieux de trouver un modèle d'ordre 1 ou 2 qui soit une bonne approximation de son comportement, par exemple en négligeant certaines dynamiques rapides (en ne considérant que les *pôles dominants*).

Toutefois, la méthode générale pour obtenir la forme de la sortie $y(t)$ d'un système décrit par (2.7) est d'exprimer $Y(p) = G(p)/p$, de décomposer cette transformée de Laplace en *éléments simples* et d'essayer d'appliquer \mathcal{L}^{-1} sur chaque élément simple en utilisant le tableau 2.1 (cf. cours de mathématiques). Cette démarche est détaillée en annexe 6.2.6 afin de montrer, entre autres, l'influence des pôles sur la réponse.

Remarque 3.2 Il est souvent plus facile de décomposer $pY(p)$ en éléments simples et de rediviser le résultat par p avant d'utiliser \mathcal{L}^{-1} .

3.4 Les réponses fréquentielles ou harmoniques

3.4.1 Définition

La réponse fréquentielle (encore appelée harmonique) est la réponse en régime permanent (c'est-à-dire pour $t \rightarrow \infty$) à une entrée sinusoïdale. En effet, si l'on considère que tout signal d'entrée peut être décomposé en une somme (finie ou infinie) de signaux sinusoïdaux de diverses fréquences (cf. cours de traitement du signal), il est important de savoir comment un système réagit à des excitations selon la fréquence f (ou la pulsation ω : on rappelle que $\omega = 2\pi f$).

La réponse dépend donc de la pulsation ω aussi parle-t-on de réponse fréquentielle. Elle est particulièrement priseée des automaticiens comme on le verra par la suite.

3.4.2 Lien avec la fonction de transfert

Il faut avant tout savoir que lorsqu'un système de modèle linéaire est excité par une entrée sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(\omega t)$, il répond de telle sorte qu'en régime permanent (c'est-à-dire après un certain temps de transition), la sortie est décrite par

$$y(t) = A(\omega)U_m \sin(\omega t + \phi(\omega)).$$

La réponse est donc sinusoïdale de même fréquence que la commande mais déphasée par rapport à l'entrée. Cette assertion est démontrée dans l'annexe 6.2.7. L'amplitude de la sortie et son déphasage (couramment appelé phase) dépendent tous deux de ω .

On peut démontrer que le *gain harmonique* $A(\omega)$, qu'il serait d'ailleurs plus convenable d'appeler « amplification harmonique », vérifie

$$A(\omega) = |G(j\omega)|.$$

En outre, on peut aussi montrer que le *déphasage* est tel que

$$\phi(\omega) = \text{Arg}(G(j\omega)).$$

Ainsi, si l'on connaît la fonction de transfert $G(p)$ du système, on peut déduire le nombre complexe $G(j\omega)$ et disposer des informations nécessaires pour établir la réponse harmonique (voir annexe 6.2.7). Toutefois, l'information est plus exploitable lorsqu'elle est présentée sous forme graphique comme ci-après.

3.4.3 Diagramme de Bode

Dans le diagramme de Bode³, l'information est présentée en deux parties. Une première courbe représente le *gain* du système en fonction de la pulsation. La seconde montre le *déphasage* en fonction de cette même pulsation. Pour que ces graphes puissent être construits efficacement, il faut toutefois satisfaire quelques règles :

- la pulsation est graduée en échelle logarithmique ;
- l'amplification n'est pas donnée directement mais on porte en ordonnée ce que l'on appelle le *gain en décibels* soit $T(\omega) = 20\log(|G(j\omega)|)$, l'échelle restant alors linéaire ;
- le déphasage est gradué en degrés ou en radians en utilisant une échelle linéaire.

L'avantage d'un tel diagramme est que les courbes suivent des asymptotes. De ce fait, on peut tracer un diagramme asymptotique de Bode qui aide à la construction du diagramme réel.

En outre, l'échelle logarithmique permet de ne pas privilégier les hautes fréquences par rapport aux basses fréquences dans cette représentation graphique.

3.4.3.1 Diagramme de Bode d'un modèle canonique de premier ordre

Prenons par exemple le modèle de premier ordre du moteur électrique :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \text{avec} \quad K = 0,5 \quad \text{et} \quad \tau = 0,5$$

Le diagramme de Bode de ce modèle est donné par la figure 3.5.

Il peut être fastidieux de construire point par point un tel diagramme. Cependant, on peut avoir une idée de sa forme en réalisant un tracé asymptotique. En effet, il s'agit de tracer d'abord $T(\omega) = 20\log(|G(j\omega)|)$. Ainsi, pour des basses fréquences, on a une asymptote horizontale à $T_0 = 20\log(K)$ ce qui est normal puisque les basses

3. Hendrik W. Bode : ingénieur américain dont les travaux essentiels remontent aux années 1940-1945.

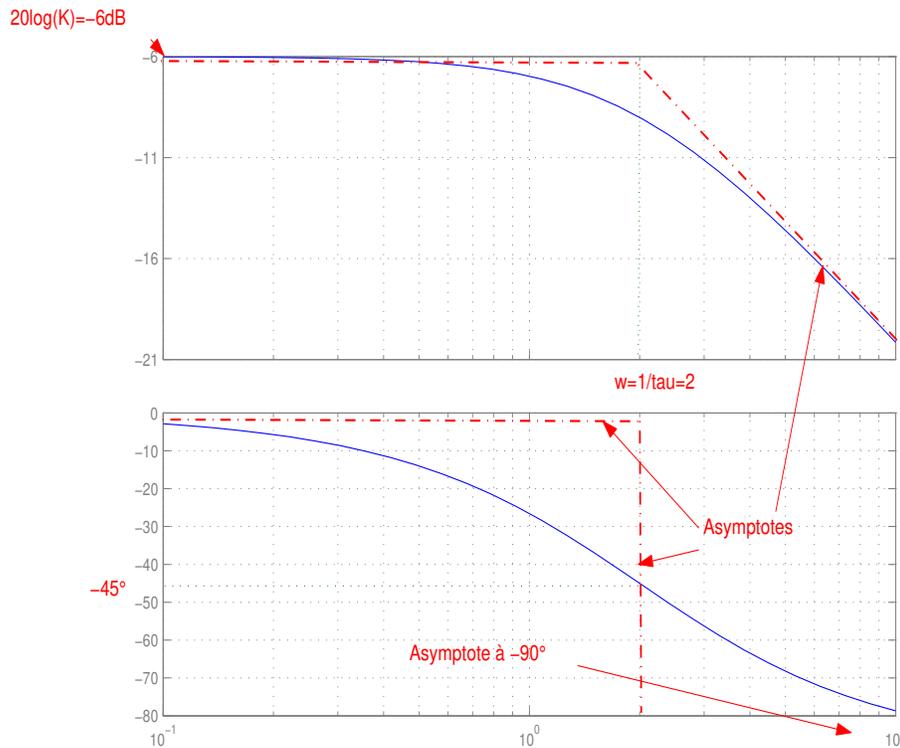


FIGURE 3.5 – Diagramme de Bode du modèle de premier ordre du moteur à courant continu

fréquences correspondent au comportement statique. Pour les hautes fréquences, le système tend vers une amplification nulle ($-\infty$ en dB). Sans entrer dans la technique de construction des asymptotes, on montre que l'asymptote en hautes fréquences doit avoir une pente de -20dB par décade et couper l'horizontale à $\omega = 1/\tau$. Par ailleurs, au niveau de cette même pulsation, la courbe réelle se situe à -3dB au dessous des asymptotes ce qui signifie que le carré de l'amplification a diminué de moitié par rapport au comportement statique (signal de sortie deux fois moins énergétique).

On définit la *bande passante* d'un tel système par la gamme de pulsations (ou de fréquences) pour lesquelles le gain T se situe entre $T_0 - 3$ et T_0 , c'est-à-dire l'intervalle de pulsations $[0; 1/\tau]$. $\omega_c = 1/\tau$ est appelée *pulsation de cassure* ou de *coupure*.

Pour ce qui est du *déphasage*, il est facile de voir qu'en statique, il est nul (l'argument d'un nombre réel positif étant nul) et pour de très hautes fréquences, $G(j\omega)$ tend vers un nombre imaginaire pur à partie imaginaire négative donc son argument est de -90° . Ceci permet de tracer deux asymptotes. On peut aussi montrer, pour aider au tracé de cette courbe de phase, qu'à $\omega = \omega_c = 1/\tau$, on a rigoureusement $\phi = -45^\circ$.

Ce tracé est mieux justifié en annexe 6.2.8.1.

3.4.3.2 Diagramme de Bode d'un modèle canonique de deuxième ordre

Pour un système de second ordre, le tracé est plus délicat et l'on ne pourra dans ce cours, compte-tenu du faible volume horaire imparti, entrer dans les détails de construction. L'étudiant est invité à se référer au cours de filtrage. On peut toutefois donner quelques exemples correspondant au modèle canonique avec $K = 1$ et $\omega_n = 1\text{rad/s}$, pour différentes valeurs de $m > 0$: voir figure 3.6.

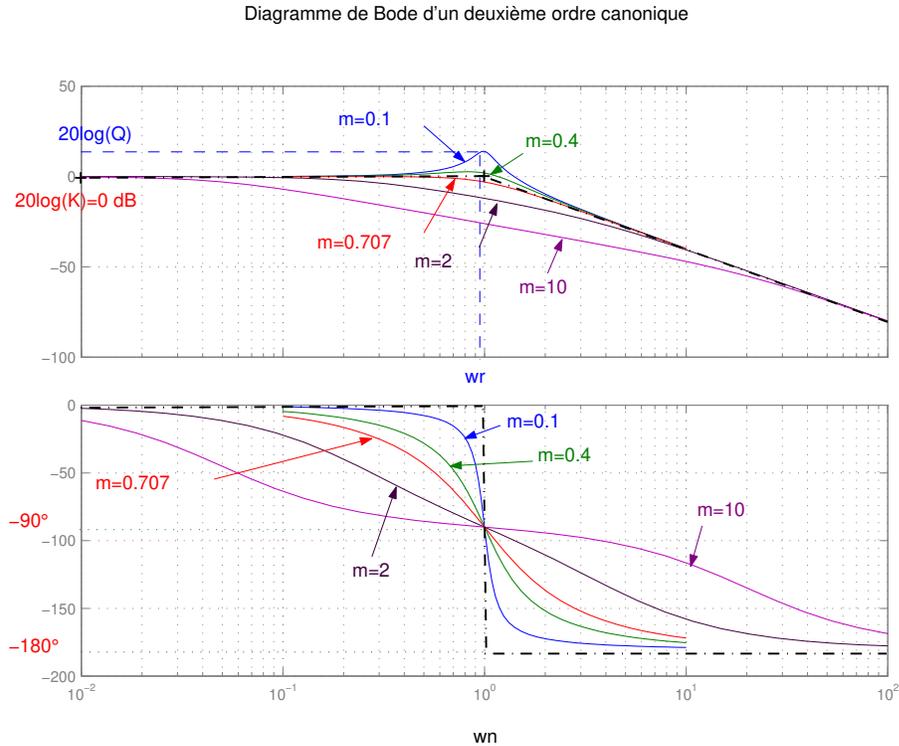


FIGURE 3.6 – Diagramme de Bode du modèle du modèle canonique de deuxième ordre en fonction de m

On constate que pour des valeurs suffisamment élevées de m , le système se comporte comme un filtre passe-bas assez classique. En revanche pour des valeurs faibles de m , il présente une résonance à la pulsation $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2m^2}$. Moindre est m , plus forte est cette résonance. On peut la quantifier en calculant le *coefficient de surtension* ou *facteur de surtension* Q , défini par

$$Q = \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(0)|} = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}.$$

Le maximum du gain en décibels, correspondant à la pulsation de résonance ω_R , est de $T_0 + 20\log(Q)$ avec $T_0 = 20\log(K)$. Dans le cas de la figure 3.6, on a $T_0 = 20\log(K) = 0\text{dB}$ donc le maximum est à $20\log(Q)$.

On peut remarquer que cette résonance n'apparaît pas exactement à ω_n sauf si $m = 0$. En effet, la pulsation propre non amortie ω_n correspond, comme son nom l'indique, à la pulsation propre d'un système qui n'est pas amorti donc pour lequel le coefficient d'amortissement est nul. Dans ce cas, Q tend vers l'infini.

Au niveau des asymptotes, on retrouve une asymptote horizontale à $T_0 = 20\log(K)$ et une asymptote en hautes fréquences coupant l'asymptote horizontale en ω_n et de pente -40dB par décade.

La bande passante du système se définit cette fois-ci, de façon plus générale, par la gamme de fréquences ou de pulsations pour laquelle $T(\omega) \geq T_0 - 3$.

Pour ce qui est de la phase, elle évolue d'une asymptote horizontale à 0° en statique jusqu'à une autre à -180° en hautes fréquences. Si m est assez élevé, elle peut suivre une autre asymptote horizontale à -90° autour de ω_n et l'on peut par ailleurs montrer que $\phi(\omega_n) = -90^\circ$.

Remarque 3.3 On peut préférer parler de fréquence f (mesurée en Herz (Hz)) plutôt que d'utiliser la pulsation ω (mesurée en radians par seconde (rad/s)). Le diagramme de Bode se construit de la même manière mais l'abscisse est graduée en Hz.

3.4.3.3 Diagramme de Bode associé à une chaîne directe

Il arrive très souvent que l'automaticien soit amené à tracer le diagramme de Bode d'une *chaîne directe* avec comme connaissance préalable, la fonction de transfert des différents blocs composant cette chaîne directe. Un cas particulièrement courant est celui où la chaîne directe est composée de deux blocs en série, comme au paragraphe 2.6. La fonction de transfert de la chaîne directe est alors donnée par le produit

$$F(p) = G_1(p)G_2(p).$$

$G_1(p)$ peut par exemple correspondre à la fonction de transfert d'un *régulateur* (alors notée $R(p)$) et $G_2(p)$ à celle du procédé (alors simplement notée $G(p)$).

Si l'on suppose que les diagrammes de Bode associés à ces deux blocs sont facilement traçables, alors il est aussi facile de voir que la réponse harmonique de toute la chaîne directe de modèle $F(p)$ est la somme géométrique des deux diagrammes respectivement associés aux blocs $G_1(p)$ et $G_2(p)$.

En effet, concernant le *gain en décibels*, on a

$$T = 20\log|F(j\omega)| = 20\log|G_1(j\omega)G_2(j\omega)| = 20(\log|G_1(j\omega)| + \log|G_2(j\omega)|) = T_1 + T_2.$$

Ainsi, les deux courbes de gain (asymptotiques ou réelles) doivent être géométriquement ajoutées dans le plan de Bode. C'est là l'intérêt d'avoir introduit le logarithme.

De même, pour le *déphasage*, il faut remarquer que l'argument du produit de deux nombres complexes est égal à la somme des arguments des facteurs et il vient

$$\text{Arg}(F(j\omega)) = \text{Arg}(G_1(j\omega)G_2(j\omega)) = \text{Arg}(G_1(j\omega)) + \text{Arg}(G_2(j\omega)).$$

Ceci montre que les deux courbes de phase (asymptotiques ou réelles) doivent également être géométriquement ajoutées dans le plan de Bode.

Remarque 3.4 *Cette propriété est valable pour un nombre de blocs supérieur à 2. Par conséquent, elle peut être efficacement utilisée pour connaître la réponse harmonique de $G(p)$ si l'expression de $G(p)$ est compliquée. On peut écrire $G(p)$ comme le produit de plusieurs facteurs ayant une réponse fréquentielle simple puis tracer la somme de toutes les courbes pour obtenir le diagramme de Bode final. Certaines règles de construction de facteurs du premier ordre sont données en annexe 6.2.8.1.*

Il existe d'autres représentations fréquentielles assez connues (le lieu de Nyquist et le lieu de Black-Nichols). Toutefois, pour des raisons de temps, elles ne seront pas présentées ici.

Chapitre 4

Stabilité des systèmes linéaires continus

Dans ce chapitre, une idée assez superficielle de la stabilité des systèmes linéaires à temps continu est présentée.

Sommaire

4.1	Définition générale et intuitive de la stabilité d'un état d'équilibre ou d'un système	25
4.2	Influence sur le comportement entrée/sortie	26
4.3	Critère des racines	26
4.4	Critère du revers pour la stabilité d'un système bouclé	27
4.4.1	Expression du critère qualitatif	27
4.4.2	Marges de stabilité, de gain, de phase	27

4.1 Définition générale et intuitive de la stabilité d'un état d'équilibre ou d'un système

Un *état d'équilibre* d'un système est un état *non modifié* lorsque le système est livré à lui-même (aucune excitation en entrée, c'est-à-dire ni commande, ni perturbation). On dit que le système est *autonome*.

Par exemple, si l'on considère le moteur à courant continu et que l'on suppose que l'induit de ce dernier ne reçoit aucune tension, alors il ne tourne pas. On peut dire qu'il s'agit d'un état d'équilibre. En l'absence d'entrée, la sortie n'évolue pas.

On s'intéresse maintenant à la *stabilité d'un état d'équilibre*. Pour mieux comprendre ce concept, on procède par une analogie mécanique matérialisée sur la figure 4.1 où 3 billes sont en équilibre.

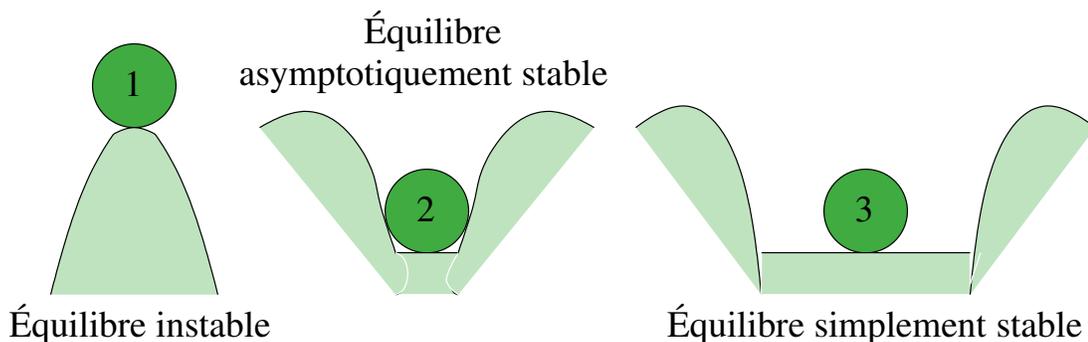


FIGURE 4.1 – Stabilité des équilibres d'une bille

La bille 1 est en état d'équilibre mais cet équilibre est précaire puisqu'à peine la pousse-t-on un peu qu'elle s'éloigne irrémédiablement de sa position d'équilibre. C'est pourquoi l'on dit qu'un tel équilibre est *instable*. Au contraire, la bille 2 est encaissée dans un creux et une petite poussée ne peut la déloger. Elle reviendra à sa position. On parle alors d'équilibre *asymptotiquement stable*. Enfin, la bille 3 est dans une situation intermédiaire. En effet, une petite poussée la déplacera mais même si sa position change, cette dernière sera voisine de la position initiale et la bille ne s'éloignera pas à l'infini. En fait, la bille adopte une autre position d'équilibre. On dit alors que l'équilibre initial est *simplement stable*.

Dans la commande des systèmes linéaires, la stabilité asymptotique est une propriété impérative à satisfaire. On peut en donner la définition formelle suivante :

Un système autonome (sans commande) est dans un état d'équilibre asymptotiquement stable quand, écarté de cet état sous l'effet d'une perturbation temporaire, il revient à cet état

(au bout d'un temps éventuellement infini, c'est d'ailleurs le cas mathématiquement avec les systèmes linéaires).

Dans le cadre de la modélisation linéaire, on peut montrer que lorsqu'un système autonome est *asymptotiquement stable*, il n'a qu'un seul état d'équilibre. On dit alors que c'est **le système lui-même qui est asymptotiquement stable** (ou stable par concision) .

4.2 Influence sur le comportement entrée/sortie

Pour bien comprendre l'importance de la *stabilité asymptotique* sur le comportement d'un système, il faut se préoccuper de ce qu'il advient lorsque le système est excité par un signal d'entrée. En réalité, si le système est asymptotiquement stable, cela signifie que pour toute *entrée bornée* (c'est-à-dire ne tendant pas vers l'infini), la sortie est elle-même *bornée* (elle ne diverge pas). Au contraire, si le système est *instable*, le moindre petit signal d'entrée peut entraîner une sortie divergeant vers l'infini ce qui en pratique peut causer des dommages matériels mais aussi humains. (On peut se convaincre de ceci en consultant l'annexe 6.2.6 après avoir lu l'intégralité de ce chapitre sur la stabilité.)

Un système soumis à une entrée est asymptotiquement stable et donc stable au sens de ses entrées/sorties si le système autonome associé est asymptotiquement stable.

On considère ici, pour simplifier, que la *stabilité simple* est un stade intermédiaire entre la stabilité asymptotique et l'instabilité.

Au vu de cette remarque, il paraît évident que la sécurité des biens et des personnes implique l'implantation de *lois de commande* rendant les divers systèmes stables, et même souvent asymptotiquement stables.

Il existe plusieurs critères pour attester ou non de la stabilité d'un système linéaire. Compte tenu du temps imparti à ce cours, il est inutile de les voir tous mais certains, paraissant plus importants à l'auteur, sont présentés dans ce qui suit.

4.3 Critère des racines

Un modèle linéaire (une fonction de transfert) est asymptotiquement stable si et seulement ses pôles sont tous à partie réelle strictement négative.

On rappelle que les pôles sont les racines du dénominateur de la fonction de transfert. Un seul pôle ayant une partie réelle strictement positive conduit irrémédiablement à des phénomènes d'instabilité.

Il a déjà été vu que les pôles peuvent avoir une influence sur le temps de réponse et sur les oscillations. On voit ici qu'ils revêtent une importance encore plus grande.

On peut résumer tout ceci en faisant apparaître des marges de stabilité dans le plan de Laplace où l'on peut localiser les racines de $D(p)$ (figure 4.2). Si l'on suppose que tous les pôles sont situés dans la zone colorée, alors on peut définir σ , une *marge de stabilité absolue*, qui traduit la rapidité du système. De même, on peut montrer que le *coefficient d'amortissement* d'un système est $m = \sin(\psi)$ où ψ est l'angle indiqué sur la figure 4.2. Si ψ diminue, alors m diminue jusqu'à l'instabilité c'est-à-dire $m < 0$ (réponse indicielle avec oscillations d'amplitude croissante).

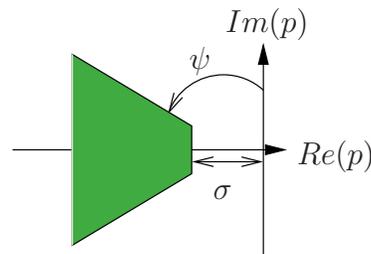


FIGURE 4.2 – Stabilité dans le plan de Laplace

L'influence des pôles est détaillée dans le paragraphe 6.2.6 des annexes. Mais on peut ici déjà remarquer que la stabilité ne dépend que du dénominateur de la fonction de transfert.

4.4 Critère du revers pour la stabilité d'un système bouclé

4.4.1 Expression du critère qualitatif

Il existe un critère établi sur la base de la réponse fréquentielle des systèmes. Il est appelé critère du revers. Historiquement, il fut énoncé dans le *plan de Nyquist* évoqué au paragraphe 3.4.3.3. Il découle d'une forme plus complète dite *critère de Nyquist*. Ce dernier n'étant pas toujours facilement compréhensible et exploitable pour un non-initié, une interprétation simplifiée en est présentée dans le « *plan de Bode* ». Elle est en toute rigueur inexacte mais peut néanmoins s'appliquer à la grande majorité des systèmes.

Attention! Ce critère a été établi pour attester ou non de la stabilité d'un système bouclé par un retour unitaire simple. Cependant il s'applique en regardant la réponse, dans le plan de Bode, du système en boucle ouverte, c'est-à-dire, puisque le retour est unitaire, de la chaîne directe.

Critère du revers

Un système bouclé unitairement est stable quand, sur le diagramme de Bode correspondant à la boucle ouverte, à la pulsation pour laquelle on a un gain $T = 0\text{dB}$, la courbe correspondant au déphasage est encore au-dessus de -180° ou quand, réciproquement, à pulsation pour laquelle le déphasage atteint -180° , le gain en décibels est déjà inférieur à 0dB .

4.4.2 Marges de stabilité, de gain, de phase

Ce critère exprimé ainsi atteste de manière booléenne de la stabilité. On peut toutefois quantifier de façon plus précise la stabilité en définissant les marges de stabilité d'un système. En effet, on appelle *marge de phase* la quantité $\Phi_m = 180^\circ + \phi(\omega_\phi)$ où $\phi(\omega_\phi)$ désigne la phase à la pulsation ω_ϕ pour laquelle $T(\omega_g) = 0\text{dB}$. Cette même pulsation ω_ϕ est appelée *pulsation critique*.

De la même manière, on définit G_m , la *marge de gain*, comme l'opposé du gain $T(\omega_g)$, appelé *gain critique* où ω_g désigne la pulsation à laquelle le déphasage est de -180° . Ces marges sont représentées sur la figure 4.3 dans le cas d'un système stable.

Il est évident que ces marges doivent être positives pour que le système soit stable. Elles donnent un degré de la stabilité du système bouclé. Plus elles sont élevées, plus le système bouclé est stable. Un système bouclé en limite de stabilité est un système pour lequel, sur le diagramme de Bode de la chaîne directe, $\Phi_m = G_m = 0$ et $\omega_\phi = \omega_g$. Par ailleurs, il peut arriver que les marges ne puissent être définies si les horizontales $T = 0\text{dB}$ et $\phi = -180^\circ$ ne sont pas coupées par le diagramme. Les marges sont alors considérées comme infinies (positives ou négatives selon les cas).

Attention! La plus grosse erreur de raisonnement serait de tracer le diagramme de Bode du système en boucle fermée pour en déduire ses marges de stabilité. Il faut tracer la réponse de la boucle ouverte pour conclure quant à la stabilité de la boucle fermée par un retour unitaire.

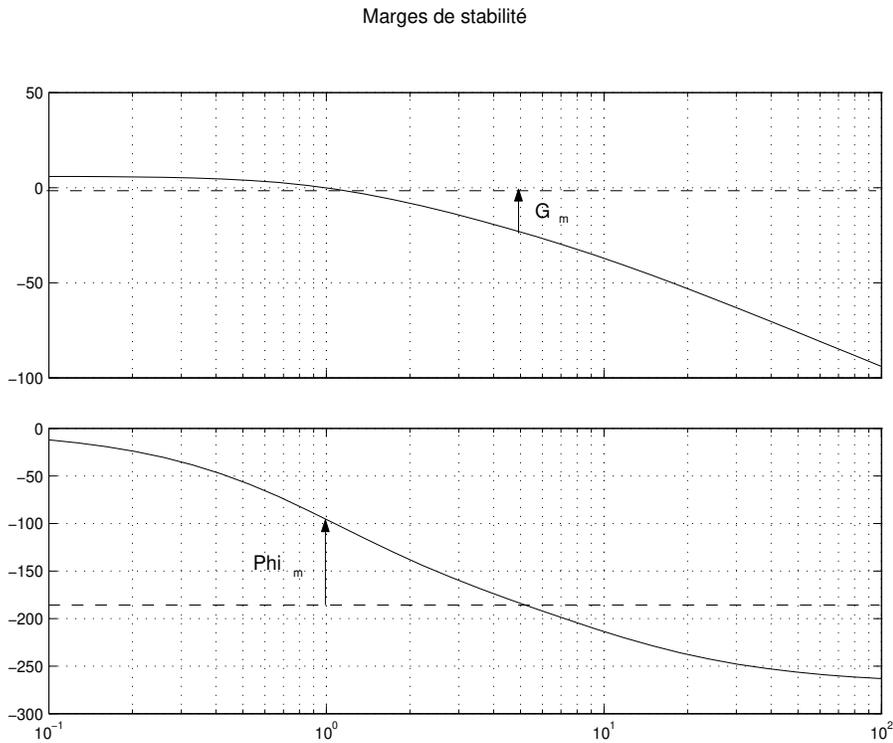


FIGURE 4.3 – Marges de stabilité d'un modèle stable quelconque

Chapitre 5

Commande des systèmes linéaires continus

Dans ce chapitre, les problèmes de commande (ou de « réglage ») sont abordés même si ce cours se contentera d'évoquer une structure de commande sans l'approfondir.

Sommaire

5.1 Principe de la commande par retour unitaire	29
5.2 Régulation proportionnelle	30
5.2.1 Influence de A sur la stabilité	30
5.2.2 Influence de A sur la rapidité	30
5.2.3 Influence de A sur la précision	31
5.3 Retour sur le paradoxe évoqué en introduction	31
5.4 Influence de A et des intégrateurs sur une erreur due à une perturbation	33
5.5 Régulateur PID	33

5.1 Principe de la commande par retour unitaire

On se contente d'envisager des commandes du type de celle schématisée sur la figure 5.1 où un *régulateur* (encore appelé *correcteur* ou *compensateur*), de fonction de transfert $R(p)$, est placé devant le système de fonction de transfert $G(p)$. La sortie est rebouclée unitairement sur l'entrée du régulateur et l'on distingue l'entrée du système en boucle fermée y_c , appelée *consigne* ou *référence* de l'entrée du système en boucle ouverte u , dite *commande*, générée par le régulateur à partir de *écart* ϵ entre la consigne y_c et la sortie du système y . Tout l'art de la commande consiste à concevoir un régulateur, à partir du modèle du système en boucle ouverte, qui puisse conférer au système en boucle fermée des propriétés satisfaisantes parmi lesquelles la stabilité (impérativement !), la rapidité, la présence plus ou moins marquée d'oscillations, la précision, le rejet de perturbation...

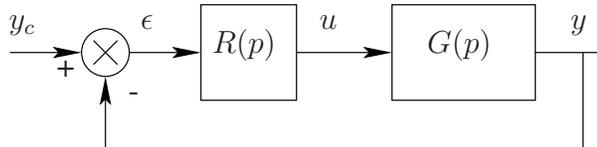


FIGURE 5.1 – Schéma classique d'une régulation avec retour unitaire

En l'absence de stabilité, toute autre performance ne peut être atteinte!

5.2 Régulation proportionnelle

On commence par considérer le régulateur le plus simple à savoir le régulateur dit *proportionnel* : $R(p) = A$. On dit que ce régulateur est statique car il ne dépend pas de p .

5.2.1 Influence de A sur la stabilité

On remarque d'abord que si $A = 1$, ceci revient à une absence de régulateur (mais pas une absence de boucle). Pour comprendre l'influence de A sur la stabilité du système bouclé, on peut se référer au critère du revers et plus précisément, voir ce que deviennent les marges de stabilité définies dans Bode. Pour attester de la stabilité du système bouclé, il convient, comme on l'a vu, de tracer le diagramme de Bode de la chaîne directe, à savoir $AG(p)$. Ainsi, si l'on regarde la figure 4.3, on comprend que si A augmente, le lieu du déphasage n'est pas modifié ; en revanche, la courbe de gain remonte puisque $T = 20\log(|AG(j\omega)|) = 20\log(|G(j\omega)|) + 20\log(A)$, ce qui a pour effet de déplacer la pulsation critique ω_g vers la droite, là où le déphasage se réduit. Ainsi, la marge de phase diminue et peut même s'annuler (pour certains systèmes) et changer de signe. D'où l'on conclut que l'augmentation du gain proportionnel A est préjudiciable à la stabilité du système bouclé. Ceci est vrai pour la plupart des systèmes.

5.2.2 Influence de A sur la rapidité

Pour comprendre l'influence de A sur la rapidité, on peut raisonner sur un premier ordre comme le modèle simplifié du moteur à courant continu qui conduit à une fonction de transfert de la chaîne directe :

$$L(p) = AG(p) = \frac{0,5A}{1 + 0,5p}.$$

La *formule de Black* conduit à la fonction de transfert en boucle fermée (après mise sous forme canonique)

$$H(p) = \frac{\frac{0,5A}{0,5A + 1}}{1 + \frac{0,5}{0,5A + 1}p} = \frac{K_f}{1 + \tau_f p}.$$

La constante de temps en boucle fermée (à savoir $\tau_f = 0,5/(A + 1)$) diminue. On comprend donc que A peut permettre d'accélérer le système. C'est un effet classique du gain proportionnel. On dit qu'il assure une certaine *raideur* au système (rapidité). Pour illustrer ces propos, la figure 5.2 montre la réponse indicielle du modèle bouclé pour $A = 2$, $A = 4$ et $A = 20$.

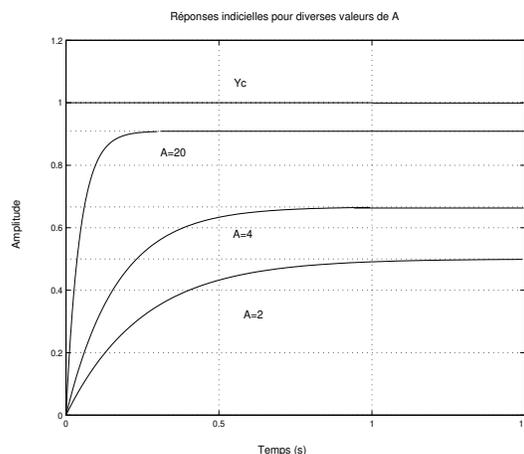


FIGURE 5.2 – Réponses du moteur bouclé pour $A = 2$, $A = 4$ et $A = 20$

5.2.3 Influence de A sur la précision

Si A augmente, on constate que le gain statique en boucle fermée (à savoir $K_f = 0,5A/(0,5A + 1)$) a tendance à se rapprocher de 1 (voir de nouveau la figure 5.2). Ceci est intéressant car cela signifie que la sortie va se rapprocher de la consigne.

Dans ce paragraphe, on revient sur la notion de *précision* de manière plus explicite. On dit qu'un système *bouclé* est précis lorsqu'en régime permanent, la *sortie* est égale à la *consigne* (ce qui revient à obtenir un gain statique de 1). La précision se mesure donc en regardant l'*erreur* (l'écart ϵ en régime permanent) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\epsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pY_c(p)}{1 + AG(p)}, \quad (5.1)$$

qui n'est autre que l'écart en régime permanent.

On constate avec cette formule que la précision dépend de trois choses :

- la consigne ;
- la fonction de transfert du système $G(p)$;
- le gain proportionnel A dont on veut apprécier l'influence.

On distinguera ici deux types d'entrée, les échelons $Y_c(p) = E/p$ et les rampes $Y_c(p) = b/p^2$. L'erreur en présence d'un échelon est appelée *erreur de position*. L'erreur en présence d'une rampe est appelée *erreur de vitesse*.

On distinguera aussi les systèmes en boucle ouverte selon leur classe. La classe (ou le type) d'un système est le nombre α d'intégrateurs (un intégrateur est modélisé par $1/p$) que comprend sa fonction de transfert $G(p)$. Ainsi, les systèmes de type $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$ peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \alpha = 0 : \quad G(p) &= K \times \frac{1 + a_1p + \dots}{1 + b_1p + \dots} ; \\ \alpha = 1 : \quad G(p) &= \frac{K}{p} \times \frac{1 + a_1p + \dots}{1 + b_1p + \dots} ; \\ \alpha = 2 : \quad G(p) &= \frac{K}{p^2} \times \frac{1 + a_1p + \dots}{1 + b_1p + \dots} ; \end{aligned}$$

Compte tenu de la formule (5.1), on peut facilement déduire le tableau 5.1 où l'on s'aperçoit que le gain A est propice à une amélioration de la précision. On s'aperçoit également que la présence d'intégrateurs dans la chaîne directe peut amener à obtenir la précision souhaitée ce qui conduit souvent à dire qu'« un intégrateur correspond à un gain infini ». Du reste, la figure 5.2 montre qu'une valeur infinie de A impliquerait $\epsilon_p = 0$.

En résumé, pour prétendre avoir une bonne précision, on peut augmenter A mais il y a un risque d'instabilité. De même, on peut introduire un intégrateur dans le régulateur pour augmenter la classe de la chaîne directe mais tout intégrateur ajoute un déphasage de -90° ce qui peut conduire à une trop forte diminution de la marge de phase..

Il existe donc un *compromis entre la précision, la stabilité et la rapidité* mais la stabilité doit toujours être privilégiée.

5.3 Retour sur le paradoxe évoqué en introduction

Dans le paragraphe 1.5, un paradoxe « apparent » a été évoqué. Il est temps de lever cette ambiguïté... donc on retourne à la figure 1.4. Le moteur électrique est commandé en vitesse à l'aide d'un régulateur proportionnel et l'on souhaite une précision absolue. On a vu que si la cette précision est atteinte (la sortie est égale à la consigne) alors l'écart devient nul ainsi que la commande... Ooops ! Le moteur ne tourne pas. C'est un peu dommage.

Type de $G(p)$ → $Y_c(p)$ ↓	0	1	2	Nom de l'erreur
$\frac{E}{p}$	$\frac{E}{1 + AK}$	0	0	ϵ_p : erreur statique ou de position
$\frac{b}{p^2}$	∞	$\frac{b}{AK}$	0	ϵ_v : erreur de vitesse

TABLE 5.1 – Précision des systèmes

On suppose que le moteur électrique a pour fonction de transfert

$$G(p) = \frac{0,5}{1 + 0,5p},$$

comme le moteur à courant continu du chapitre 2. Si un grand gain A est appliqué, la figure 5.2 montre que la précision peut s'améliorer mais ne sera jamais parfaite... sauf à considérer une valeur infinie de A , ce qui impliquerait une commande infinie, c'est-à-dire une tension d'induit infinie... à éviter. On n'en sort pas vraiment.

Il faut abandonner l'idée d'une simple régulation proportionnelle et se poser la question suivante : peut-on avoir une loi de commande telle que $\epsilon = 0$ et $u \neq 0$?

De manière un peu plus explicite, le situation est résumée sur la figure 5.3.

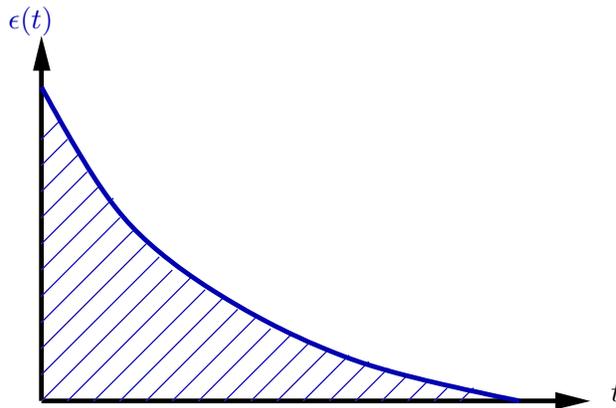


FIGURE 5.3 – Exemple de signal d'écart s'annulant

Il faudrait une commande $u(t)$ qui, dès lors que $\epsilon(t)$ s'est annulée (ou est proche de zéro puisque la convergence est souvent asymptotique), $u(t)$ soit en rapport avec $\epsilon(t)$ (sinon où serait la contre-réaction?) mais ne soit pas nulle. Clairement, une simple règle de proportionnalité ne suffit pas, comme il vient d'être vu. Comme la dérivée du signal $\epsilon(t)$ s'annule également, il n'est *a priori* pas plus utile de rendre $u(t)$ proportionnelle à cette dérivée. En revanche, l'intégrale de $\epsilon(t)$ de zéro à l'infini, correspondant à la surface hachurée de la figure 5.3. Cette dernière reste constante dès lors que $\epsilon(t)$ s'annule. L'idée est peut-être d'insérer dans la commande $u(t)$, un terme proportionnel à cette intégrale. C'est en effet la solution. En faisant de la sorte, la chaîne directe devient de classe 1 et comme l'indique le tableau 5.1, l'erreur de position (c'est-à-dire l'erreur en présence d'une consigne en échelon...

il ne s'agit pas de la position du moteur) s'annule.

D'ailleurs, pour en finir avec ce paradoxe, si la sortie du système est la position angulaire de l'arbre du moteur, non plus sa vitesse angulaire, alors, lorsque la sortie y atteint la consigne y_c , on a $\epsilon = 0$, ce qui, même avec un gain proportionnel, conduit à conserver $y = y_c$ puisque, le moteur ne tournant plus, il reste dans la position souhaitée. Ceci s'explique mathématiquement par le fait que la position angulaire est l'intégrale de la vitesse. Ainsi, en changeant la sortie, on rend le système de classe 1, ce qui permet d'annuler son erreur de position par un simple bouclage proportionnel.

En résumé, lorsqu'un intégrateur n'est pas déjà présent dans la chaîne directe, il peut être intéressant de l'insérer dans le régulateur à des fins de précision.

5.4 Influence de A et des intégrateurs sur une erreur due à une perturbation

Il est possible que l'erreur soit due à un signal de perturbation d agissant sur le système. Cette perturbation peut apparaître n'importe où dans la chaîne directe. Dans le cas général, on peut supposer qu'elle agit à un endroit tel que la fonction de transfert de la chaîne directe peut être considérée comme le produit de deux facteurs, l'un correspondant au transfert en amont de la perturbation, l'autre correspondant au transfert en aval. Ceci est schématisé sur la figure 5.4.

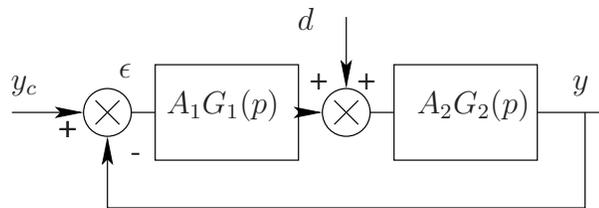


FIGURE 5.4 – Schéma prenant en compte une perturbation d

Il peut être montré que pour réduire ou annuler l'effet de d sur ϵ en régime permanent, il convient d'agir en jouant sur A_1 ou sur la classe de $G_1(p)$, c'est-à-dire d'agir en amont de la perturbation. Toute action en aval est inefficace. Voir l'exemple proposé dans l'annexe 6.2.9.

Remarque 5.1 *Ces commentaires sur le rejet de perturbation sont valides pour des perturbations en échelon, en rampe, ... ou toute perturbation en $1/p^q$. Ils sont caduques pour certaines perturbations plus compliquées, entre autres pour des perturbations en sinus (intégrer un sinus génère un cosinus). La régulation nécessite donc parfois des solutions plus sophistiquées qui sortent largement du cadre de ce cours.*

5.5 Régulateur PID

On vient de voir qu'une simple régulation proportionnelle pouvait permettre d'accélérer un système. Toutefois, elle peut aussi générer des phénomènes d'instabilité. Par ailleurs, la précision peut être obtenue à l'aide d'une commande comportant un intégrateur mais là encore, le risque d'une telle commande est l'instabilité du système bouclé. On peut également envisager un régulateur comportant une action intégrale et une action proportionnelle (on parle de régulateur PI). Le risque d'instabilité est double mais sur certains systèmes (notamment les systèmes de premier ordre), cette solution est envisageable. Il reste à vérifier, avec une telle commande, que les marges de stabilité sont suffisantes (on regardera plus spontanément la marge de phase). Il existe en particulier une technique de calcul des régulateurs PI dite « par compensation de pôle » qui consiste à compenser un pôle de la chaîne directe par un zéro du régulateur. Cette technique sera éventuellement étudiée en travaux dirigés et est fournie en annexe 6.2.10.1. De manière générale, il faut vérifier que le diagramme de Bode de la chaîne directe, comprenant le régulateur PI et le procédé, conserve une bonne marge de phase (ce qui revient pour des systèmes d'ordre

strictement supérieur à 1, à conserver un bon amortissement).

Ce n'est pas toujours le cas. C'est pourquoi il convient souvent d'introduire un troisième terme dans la commande qui a pour but de compenser les effets indésirables du gain proportionnel et de l'intégrateur. Il permet de remonter la phase là où cela peut être utile, c'est-à-dire dans la gamme de fréquences où l'on mesure la marge de phase. Ce troisième effet est un effet dérivé. Il conduit à la conception d'un régulateur PID (Proportionnel Intégral Dérivé) dont la description temporelle correspond à l'équation suivante :

$$u(t) = k \left(\epsilon(t) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t \epsilon(\theta) d\theta + \tau_d \frac{d\epsilon(t)}{dt} \right)$$

et où l'on voit clairement apparaître les trois effets. La fonction de transfert d'un tel régulateur est :

$$R(p) = \frac{U(p)}{\epsilon(p)} = k + \frac{k}{\tau_i p} + k\tau_d p. \quad (5.2)$$

L'expression ci-dessus est appelée *forme parallèle* du régulateur PID et sert notamment à l'implantation physique d'un tel régulateur. En réduisant $R(p)$ au même dénominateur, on constate que ce régulateur est de classe 1. On peut aussi exprimer la fonction de transfert d'un PID sous une forme dite *série* :

$$R(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p) \quad (5.3)$$

On retrouve, en développant cette expression, les trois termes : proportionnel, intégral et dérivé. Cette forme est particulièrement utile pour construire le diagramme de Bode du régulateur donc pour la conception de la loi de commande. Ce diagramme est donné sur la figure 5.5.

Diagramme de Bode d'un régulateur PID

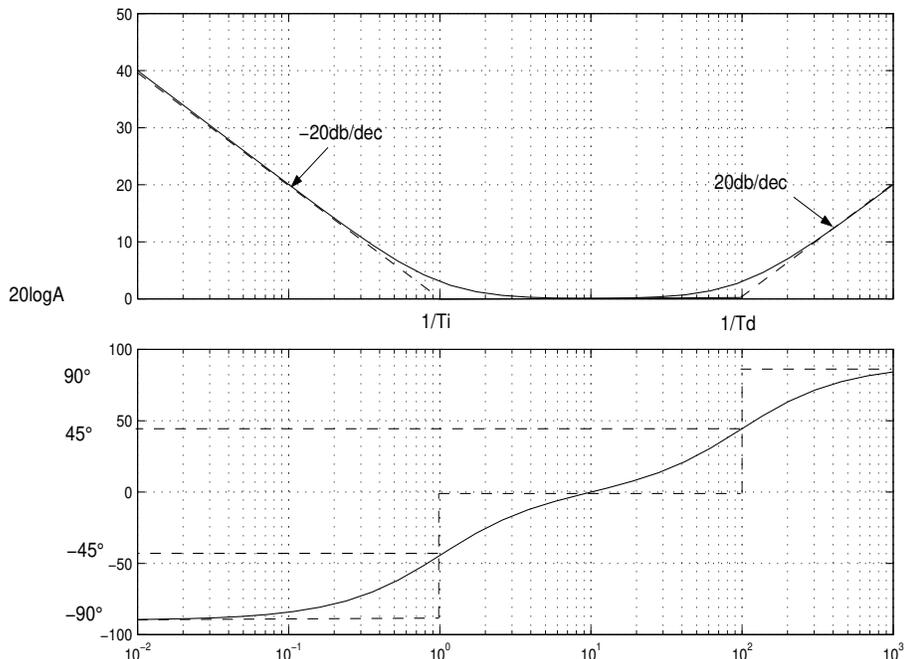


FIGURE 5.5 – Diagramme de Bode possible d'un régulateur PID

Sur cette figure, on remarque que l'on a un comportement de type grand gain en statique (basses fréquences) ce qui est propice à la précision du système. Cette propriété, comme on l'a vu, est due aux effets proportionnel et intégral. Par ailleurs, le terme dérivé (que l'on repère ici en hautes fréquences) a pour effet d'augmenter la phase

(au sens algébrique). Encore faut-il que cet apport de phase intervienne dans la gamme de pulsations où l'on va mesurer la marge de phase. En conséquence, il convient de choisir avec discernement les valeurs A , T_i et T_d sachant que ce diagramme viendra s'ajouter géométriquement dans le plan de Bode à celui du système en boucle ouverte modifiant ainsi le transfert de la chaîne directe. Généralement, on recherche une marge de phase de l'ordre de 40° à 50° . En effet, en raison des incertitudes qui peuvent être liées à la connaissance imprécise du modèle du système, il serait très dangereux de vouloir laisser une faible marge. La moindre méconnaissance d'un paramètre dans le modèle ou sa moindre variation pourrait conduire à l'instabilité. Le terme de marge prend ici tout son sens. En outre, il faut noter que cette marge classique que l'on cherche à atteindre correspond, sur un système de deuxième ordre, à un coefficient d'amortissement m d'environ 0.7 permettant une réponse rapide en autorisant un léger dépassement.

Les techniques de calcul des coefficients d'un régulateur PID sont nombreuses et dépendent des performances escomptées. Cependant, il n'existe pas de panacée dans ce domaine. On s'attachera plutôt à décrire, lors des travaux dirigés, des méthodes s'appuyant sur le modelage du diagramme de Bode de la chaîne directe (comme il vient d'être en partie expliqué et en utilisant les propriétés énoncées dans la partie 3.4.3). Une technique basée sur la compensation de pôle est par ailleurs proposée en annexe. D'autres techniques, telles les méthodes de *Ziegler-Nichols* présentées dans l'annexe 6.2.11, s'affranchissent du diagramme de Bode. Néanmoins, le concepteur d'un PID doit garder présents à l'esprit les trois effets de ce régulateur :

- effet proportionnel :
 - + assure la raideur du système.
 - risque d'entraîner des oscillations, voire l'**instabilité**.
- effet intégral :
 - + assure la précision ($\epsilon_p = 0$).
 - entraîne un ralentissement du transitoire et peut générer des oscillations allant jusqu'à l'instabilité.
- effet dérivé :
 - + anticipe la réaction du système car utilise la variation de l'écart. Ceci évite des oscillations et a un effet stabilisateur. En fait, cet effet ajoute de l'amortissement en augmentant la marge de phase ce qui permet d'accroître le gain proportionnel.
 - ne peut être utilisé seul car génère des à-coups dans la commande. Il accentue la sollicitation des actionneurs et peut répercuter l'effet des perturbations de hautes fréquences, en particulier celles apparaissant sur la mesure des sorties. À ce propos, il faut noter qu'en pratique, on préfère implanter un effet dérivé filtré plutôt qu'une dérivée pure (voir annexe 6.2.12) et que parfois, l'effet dérivé n'est appliquée qu'à la sortie y mais pas à l'écart ϵ .

Une fois une première synthèse d'un PID effectuée, il convient d'affiner les réglages en considérant ces faits. On peut trouver des régulateurs P, PD, PI, et même PID avec des sophistications diverses. Il existe également d'autres types de régulateurs qui ne sont pas envisagés ici mais qui peuvent être tout aussi efficaces. Le PID reste le plus célèbre, le plus couramment utilisé, et il résout, en monovariante, une bonne part des problèmes d'asservissement et de régulation rencontrés dans l'industrie, ceci de manière assez satisfaisante.

Chapitre 6

Conclusions et annexes

Ce chapitre conclut rapidement sur cette petite initiation à l'automatique de systèmes continus et propose un certain nombre d'annexes pour les étudiants soucieux d'en connaître un peu plus. Un certain nombre de développements mathématiques, peu développés en cours faute de temps, y sont notamment relégués.

Sommaire

6.1 Conclusion	37
6.2 Annexes	38
6.2.1 Point de fonctionnement et caractéristique statique	38
6.2.2 Principe de superposition	40
6.2.3 À propos de la transformée de Laplace	40
6.2.4 Formule de Black	43
6.2.5 Expression du gain statique	43
6.2.6 Influence des pôles sur la réponse d'un système	44
6.2.7 Fonction de transfert et réponse harmonique	46
6.2.8 À propos du diagramme de Bode	48
6.2.9 Perturbation en $1/p^q$ et position des intégrateurs	53
6.2.10 Calcul d'un régulateur par compensation de pôle	54
6.2.11 Méthodes de Ziegler-Nichols	57
6.2.12 Filtrage de l'effet dérivé	59

6.1 Conclusion

Ce cours s'est voulu assez simple et les développements mathématiques ont été évités autant que possible. Quelques uns sont proposés en annexe. Le document donne une vue de ce que peut être l'Automatique mais toute personne amenée à exercer des activités d'automaticien est invitée à consolider ses connaissances. Les occasions d'appliquer les concepts de l'Automatique pour améliorer les performances, le confort ou la sécurité sont nombreuses. Les domaines qui nécessitent (ou nécessiteraient) les connaissances d'un automaticien sont légion.

Parfois les problèmes d'asservissement et de régulation qui apparaissent dans certains enjeux vont bien au delà de ce qui est présenté. Il suffit de penser à la conquête spatiale pour comprendre que les satellites et les fusées ne se déplacent ni ne se positionnent sans de nombreux asservissements, parfois fort complexes. Sans aller jusqu'à ce degré de sophistication, le cours propose de faire les premiers pas avant d'en entamer de plus grands, peut-être en école d'ingénieurs.

Il y a peu de chances qu'un DUT MP partant travailler soit amené dans son métier à concevoir des lois de commande. C'est plutôt la tâche d'un ingénieur. Toutefois, il est souhaitable que ce technicien connaisse un minimum de vocabulaire et les notions de base de l'Automatique afin de collaborer avec l'ingénieur. C'est un des buts que se fixe le cours.

6.2 Annexes

6.2.1 Point de fonctionnement et caractéristique statique

La plupart du temps, lorsque l'on écrit les équations algébriques ou différentielles correspondant aux lois physiques qui régissent le comportement du système, elles ne sont pas linéaires en les grandeurs qui nous intéressent et leur dérivées successives. Ainsi une grandeur physique z peut dépendre d'une autre grandeur physique x selon une loi $z = f(x)$ où $f(\cdot)$ n'est pas linéaire en x . La technique habituelle consiste alors à considérer uniquement de petites variations autour d'une valeur de x et à chercher un modèle linéaire valable uniquement dans cette plage de variations. Le *point de fonctionnement* est noté $(\bar{x}; \bar{z})$. x doit donc être proche de \bar{x} et z proche de \bar{z} . Si c'est le cas, on désigne les variations de x et z autour du point de fonctionnement par

$$\delta x = x - \bar{x} \quad ; \quad \delta z = z - \bar{z},$$

et un développement de Taylor au premier ordre de f autour de \bar{x} permet d'écrire

$$\delta z \simeq k \delta x \quad \text{avec} \quad k = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}}.$$

Ceci montre que δz suit approximativement une loi linéaire par rapport à δx et donc ce genre d'hypothèse permet d'obtenir un modèle linéaire autour d'un point de fonctionnement, modèle valable pour de petites variations autour de ce point. On parle parfois de *modèle linéarisé tangent*. Les grandeurs physiques en jeu sont donc *a priori* δx et δy . Néanmoins, on a

$$z \simeq \bar{z} - k\bar{x} + z$$

et comme $\bar{z} - k\bar{x}$ est constant, z suit une loi affine par rapport à x autour de \bar{x} . Ainsi, on peut raisonner soit en x et z , soit en δx et δz indifféremment dès l'instant où l'on ne s'éloigne pas du point de fonctionnement.

Un exemple connu en électronique se rencontre dans l'étude du transistor à effet de champ (voir cours d'électronique). L'intensité du courant Drain-Source I_{DS} , lorsque la tension Drain-Source V_{DS} est constante, s'exprime en fonction de la tension Grille-Source V_{GS} selon une loi parabolique, à savoir

$$I_{DS} = I_{DSS} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_{GSoff}} \right)^2,$$

où V_{GSoff} , la tension de blocage, et I_{DSS} , l'intensité du courant Drain-Source de saturation, sont des paramètres constants du transistor (cette relation est valide pour $V_{DS} \geq V_{GS} - V_{GSoff}$). La courbe $I_{DS} = f(V_{GS})$ peut être tracée ou même obtenue expérimentalement. On l'appelle caractéristique de transfert statique ou simplement *caractéristique statique*. Elle est donnée par la figure 6.1.

On constate sur cette figure que si l'on considère un point de fonctionnement $(V_{GS0}; I_{DS0})$ appelé point de polarisation en électronique, alors des petites variations v_{gs} autour de V_{GS0} entraîneront de petites variations i_{ds} autour de I_{DS0} telles que

$$i_{ds} \simeq g_{m0} v_{gs},$$

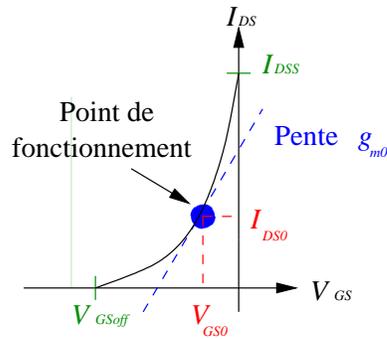
où g_{m0} , appelé transconductance, est le coefficient directeur de la tangente à l'arc de parabole au point de polarisation. Cette transconductance s'exprime ainsi :

$$g_{m0} = \left. \frac{dI_{DS}}{dV_{GS}} \right|_{V_{GS}=V_{GS0}} = -\frac{2I_{DSS}}{V_{GSoff}} \left(1 - \frac{V_{GS0}}{V_{GSoff}} \right).$$

Ceci revient à utiliser le développement de Taylor au premier ordre.

Or, en électronique, la tension Grille-Source est en réalité de la forme

$$v_{GS}(t) = V_{GS0} + v_{gs}(t),$$

FIGURE 6.1 – Caractéristique statique $I_{DS} = f(V_{GS})$ pour V_{DS} constante

où $v_{gs}(t)$ est une excitation sinusoïdale de faible amplitude. Le courant Drain-Source est alors d'intensité

$$i_{DS}(t) = I_{DS0} + i_{ds}(t) \quad \text{avec} \quad i_{ds}(t) = g_{m0}v_{gs}(t).$$

Les signaux continus n'interviennent que pour polariser le transistor. Les signaux utiles v_{gs} et i_{ds} sont les petites variations sinusoïdales autour du point de fonctionnement. L'approximation présentée permet de considérer que i_{ds} est linéaire par rapport à v_{gs} .

Cette notion de caractéristique statique est très importante en Automatique. On peut en donner un autre exemple en supposant que le moteur à courant continu déjà étudié au chapitre 2 est en plus soumis à deux non-linéarités. D'une part, de trop fortes valeurs de la tension d'induit u font saturer la vitesse angulaire $y = \Omega$; d'autre part, le moteur est sujet à des frottements secs dans sa liaison avec la charge qui font qu'une très faible valeur de u n'entraîne aucune rotation. La caractéristique statique $Y = f(U)$ est obtenue en traçant la courbe de Y , valeur en régime permanent de y , en fonction des différentes valeurs continues U de u (voir figure 6.2).

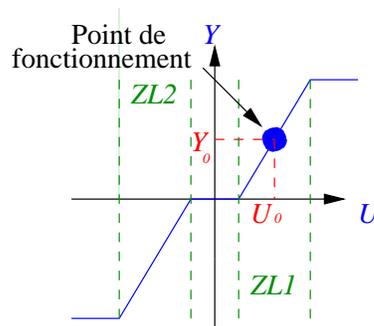


FIGURE 6.2 – Caractéristique statique du moteur

Sur cette courbe, on reconnaît aisément les deux paliers de saturation et la zone morte liée aux frottements secs. On s'aperçoit qu'il existe deux zones désignées par ZL1 et ZL2 pour lesquelles y varie de façon affine en fonction de u . Par abus de langage, l'automaticien parle de variation linéaire. Dans l'une ou l'autre de ces zones, on peut définir un point de fonctionnement $(U_0; Y_0)$. δy , la variation de y autour de Y_0 , suit alors une loi véritablement linéaire en δu , la variation de u autour de U_0 . Que l'on considère δu et δy ou u et y , on peut chercher un modèle linéaire dès lors que les signaux u et y restent dans la zone « linéaire » choisie (ZL1 ou ZL2).

L'établissement d'une caractéristique statique et d'un point de fonctionnement (ou d'une zone « linéaire ») est souvent une étape préliminaire à l'obtention d'un modèle. On parle de linéarisation ou d'approximation linéaire.

6.2.2 Principe de superposition

On a déjà vu au paragraphe 1.3, qu'une des caractéristiques des systèmes dits linéaires est que l'on peut leur appliquer le *principe de superposition* résumé par la figure 1.2. Ce principe est ici justifié.

Les modèles linéaires sont des modèles d'entrée/sortie. Si u est l'entrée et y la sortie, ces modèles sont des équations différentielles de la forme (cf. chapitre 2, en particulier paragraphe 2.4)

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j u}{dt^j},$$

où les a_i et b_j sont des coefficients constants. Si l'on suppose qu'un choix u_1 de u entraîne une solution y_1 en y et qu'un choix u_2 entraîne une solution y_2 , il est facile de vérifier que pour un choix $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j u}{dt^j} &= \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)}{dt^j} = \alpha_1 \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j u_1}{dt^j} + \alpha_2 \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j u_2}{dt^j} = \\ &\alpha_1 \sum_{i=1}^m a_i \frac{d^i y_1}{dt^i} + \alpha_2 \sum_{i=1}^m a_i \frac{d^i y_2}{dt^i} = \sum_{i=1}^m a_i \frac{d^i (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)}{dt^i}, \end{aligned}$$

ce qui signifie que la solution est la sortie $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$.

6.2.3 À propos de la transformée de Laplace

6.2.3.1 Quelques transformées

Cette partie propose de justifier quelques lignes du tableau 2.1 concernant la transformation de Laplace \mathcal{L} . De même que le paragraphe 6.2.3.2, elle présente un caractère quelque peu mathématique aussi l'étudiant peu enclin à l'abstraction peut se dispenser de les étudier sans pour autant perdre l'idée générale de ce cours.

- **Fonction de Heaviside** $f(t) = \Gamma(t)$

La forme d'une telle fonction est donnée par la figure 3.1. On a en fait $f(t) = 1 \forall t \geq 0$ donc on peut déduire

$$\begin{aligned} F(p) = \mathcal{L}(\Gamma)(p) &= \int_0^{\infty} e^{-p\tau} d\tau = \left[-\frac{e^{-p\tau}}{p} \right]_0^{\infty} \Leftrightarrow \\ F(p) &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

On note ici que la convergence de l'intégrale n'est en réalité assurée que si $\alpha = \text{Re}(p) > 0$, sinon la borne infinie n'a pas de limite. Cette valeur limite est appelée *abscisse de sommabilité* définissant un *domaine de sommabilité* dans le *plan de Laplace*. On peut se poser la question de savoir ce que cette supposition impose à l'automaticien. Les mathématiques viennent à nouveau à son secours. En effet, la théorie de la variable complexe et en particulier le théorème d'extension analytique (voir cours de mathématiques) permet d'affirmer que ce résultat reste valable pour toute valeur de p . Seule la valeur $p = 0$ pose problème puisqu'en effet, $F(p)$ n'est clairement pas définie pour cette valeur là.

- **Retard pur** θ i.e. $g(t) = f(t - \theta)$

On a

$$G(p) = \mathcal{L}(g)(p) = \int_0^{\infty} e^{-p(\tau-\theta)} d\tau = e^{-\theta p} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} d\tau \Leftrightarrow$$

$$G(p) = e^{-\theta p} F(p).$$

• **Impulsion de Dirac** $f(t) = \delta t$

L'impulsion de Dirac $\delta(t)$ est difficile à représenter. On a $\delta(t) = 0 \forall t \neq 0$ et $\delta(0)$ prend une valeur infinie telle que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$. Telle est la définition d'une telle impulsion qui est donc la dérivée de la fonction de Heaviside. Elle peut être approximativement représentée sur la figure 6.3.

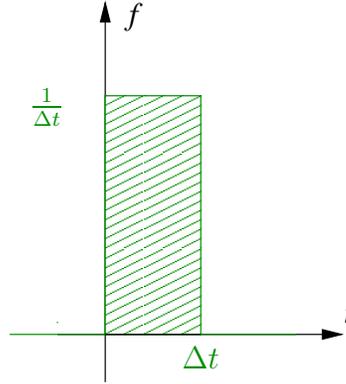


FIGURE 6.3 – Impulsion de Dirac

En réalité, une vraie impulsion de Dirac est telle que Δt tend vers 0.

Pour calculer la transformée de Laplace de cette impulsion, il faudrait en toute rigueur utiliser la théorie des distributions car $\delta(t)$ n'est pas une fonction mais une distribution. Cependant, on propose ici un calcul un peu moins rigoureux qui s'appuie sur un raisonnement aux limites. On a

$$F(p) = \mathcal{L}(\delta)(p) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} \left(\frac{1}{\Delta t} e^{-p\tau} d\tau \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1 - e^{-p\Delta t}}{p} \right) \right)$$

Or, un développement limité de e^{pt} autour de $t = 0$ (ce qui correspond bien à $\Delta t \rightarrow 0$), ceci à l'ordre 1, conduit à écrire

$$e^{-p\Delta t} = 1 - p\Delta t \Rightarrow$$

$$F(p) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1 - (1 - p\Delta t)}{p} \right) \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \Delta t \Leftrightarrow$$

$$F(p) = 1.$$

On peut toutefois proposer une démonstration alternative. En remarquant que l'impulsion de Dirac peut s'exprimer :

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} (\Gamma(t) - \Gamma(t - \Delta t)) \right)$$

Compte tenu des résultats relatifs à $\mathcal{L}(\Gamma)(p)$ et $\mathcal{L}(g)(p)$ avec $g(t) = f(t - \theta)$, il vient

$$F(p) = \mathcal{L}(\delta)(p) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-\Delta t p}}{p} \right).$$

Or, en introduisant le développement limité déjà utilisé ci-dessus, on déduit

$$F(p) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1 - 1 + \Delta t p}{p} \right) \Leftrightarrow$$

$$F(p) = 1.$$

• **Fonction** $f(t) = e^{-at}$

Il vient

$$F(p) = \mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{\infty} e^{-a\tau} e^{-p\tau} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)\tau} d\tau = \left[-\frac{e^{-(p+a)\tau}}{p+a} \right]_0^{\infty} \Leftrightarrow$$

$$F(p) = \frac{1}{p+a}.$$

Ici, l'abscisse de sommabilité est $-\alpha$.

• **fonction** $f(t) = \sin(\omega t)$

On peut écrire $f(t) = \sin(\omega t)$ de la façon suivante

$$f(t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

À partir de cette autre écriture, il est plus facile de calculer $F(p)$:

$$F(p) = \mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{2j} e^{-p\tau} d\tau = \int_0^{\infty} \frac{e^{(j\omega-p)\tau} - e^{-(j\omega+p)\tau}}{2j} d\tau =$$

$$\frac{1}{2j} \left[\frac{e^{(j\omega-p)\tau}}{j\omega-p} + \frac{e^{-(j\omega+p)\tau}}{p+j\omega} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) \Leftrightarrow$$

$$F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Une fois de plus, l'existence de cette transformée, si l'on se réfère à ce calcul, conduit à restreindre le plan de Laplace à $\alpha > 0$. L'abscisse de sommabilité est donc nulle.

6.2.3.2 Remarques sur la transformation de Laplace inverse

On a vu qu'on pouvait souvent retrouver un signal temporel causal à partir d'une fonction en p grâce à une utilisation judicieuse du tableau 2.1. Cependant, compte tenu du problème lié au domaine de *sommabilité*, on peut se poser la question de savoir ce qu'il advient si les résultats du tableau 2.1 sont obtenus en restreignant le domaine de Laplace. Par exemple, en affirmant

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{p+a} \right) = e^{at}$$

(voir paragraphe ci-avant), on peut se demander ce qu'entraîne la restriction $p \neq -a$. La réponse n'est pas simple mais elle réside dans l'expression mathématique de \mathcal{L}^{-1} donnée par l'intégrale suivante,

$$F(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_0 - j\infty}^{\alpha_0 + j\infty} F(q) e^{qt} dq,$$

où α_0 , l'abscisse de sommabilité, est supérieure aux parties réelles de toutes les valeurs de p qui rendent $F(p)$ non définie. Pour l'exemple donné, $\alpha_0 > -a$. Une fois de plus, la théorie de la variable complexe et en particulier le théorème des résidus (non détaillé ici) permet de conclure que l'on peut, malgré cette hypothèse restrictive sur le domaine de sommabilité, calculer \mathcal{L}^{-1} . En d'autres termes, même si cela est difficile à démontrer, le fait que $F(p)$ ne soit pas définie en $-a$ n'empêche pas d'utiliser le tableau 2.1. L'automaticien n'a donc pas à se préoccuper de ces considérations mathématiques lorsqu'il utilise ce tableau.

6.2.4 Formule de Black

Il s'agit ici de démontrer la formule de Black. Il faut donc se référer au paragraphe 2.7 et à la figure 2.3. En suivant le schéma-bloc pour le cas non unitaire, il vient

$$\begin{aligned}\epsilon(p) &= Y_c(p) - G_2(p)Y(p) \\ \Leftrightarrow \epsilon(p) &= Y_c(p) - G_2(p)Y(p).\end{aligned}$$

Or,

$$Y(p) = G_1(p)\epsilon(p),$$

ce qui implique que

$$Y(p) = G_1(p)(Y_c(p) - G_2(p)Y(p))G_1(p)Y_c(p) - G_1(p)G_2(p)Y(p).$$

En regroupant les termes en $Y(p)$ dans le membre de gauche, on obtient

$$Y(p)(1 + G_1(p)G_2(p)) = G_1(p)Y_c(p),$$

ce qui conduit à la fonction de transfert en boucle fermée

$$H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)} = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)}.$$

Pour le cas unitaire, il suffit de poser $G_2(p) = 1$.

6.2.5 Expression du gain statique

Au paragraphe 3.3.1, il est affirmé que le gain statique K d'une fonction de transfert $G(p)$ est

$$K = G(0),$$

ce qui sous-entend que $p = 0$ revient à considérer le comportement statique c'est-à-dire en régime permanent. Ceci peut être aisément montré en utilisant le théorème de la valeur finale (voir propriétés de la transformation de Laplace).

En effet, on a vu que le gain statique K correspondait au rapport constant entre l'entrée constante U_0 (ce qui revient à dire que l'entrée $u(t)$ est de la forme échelon $u(t) = U_0\Gamma(t)$) et la sortie en régime permanent Y_∞ , également constante si le modèle est asymptotiquement stable. Donc, on a

$$Y(p) = G(p)\frac{U_0}{p}$$

Le théorème de la valeur finale conduit à écrire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = \lim_{p \rightarrow 0} G(p)U_0$$

Donc, il vient bien

$$K = \frac{Y_\infty}{U_0} = \lim_{p \rightarrow 0} G(p)$$

Pour un système asymptotiquement stable, $G(p)$ est calculable en 0 donc $K = G(0)$.

Attention! On vient de voir que pour un système asymptotiquement stable, le gain statique est $K = G(0)$. Cependant, pour un système instable, il se peut que l'on puisse aussi calculer $G(0)$. Ceci ne signifie pas que $G(0)$ est le gain statique. En effet, soit le système de fonction de transfert

$$G(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)}$$

Ce système est clairement instable selon le critère des racines puisque ses deux pôles, $p_1 = 1$ et $p_2 = 2$ sont réels positifs. Sa réponse indicielle est franchement divergente. Pourtant $G(0) = 1/2$.

6.2.6 Influence des pôles sur la réponse d'un système

Le but de cette partie est d'analyser plus en détails l'influence des pôles (voire des zéros) du système sur la réponse de ce dernier. L'étude est faite surtout sur la réponse impulsionnelle définie au paragraphe 3.2.

On rappelle que la forme générale de la fonction de transfert d'un système linéaire est

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

et que la réponse impulsionnelle correspondante est la *transformée de Laplace* inverse \mathcal{L}^{-1} de cette transmittance. On a vu au paragraphe 6.2.3.2 qu'il était difficile d'utiliser l'expression de \mathcal{L}^{-1} mais qu'il valait mieux, comme indiqué au paragraphe 3.3.5, décomposer $G(p)$ (dans le cas de la réponse impulsionnelle) ou $G(p)/p$ (dans le cas de la réponse indicielle) et appliquer ensuite sur chaque élément simple les résultats connus et fournis par le tableau 2.1.

Par ailleurs, compte tenu de la définition des pôles et des zéros d'un système, on peut écrire

$$G(p) = K \frac{(p - z_1) \dots (p - z_m)}{(p - p_1) \dots (p - p_n)},$$

où K est le gain statique, z_1, z_2, \dots, z_m sont les zéros et p_1, p_2, \dots, p_n sont les pôles. Il faut alors distinguer deux cas :

- le cas où les pôles sont tous distincts qui sera traité de manière générale ;
- le cas où certains pôles sont multiples qui fera l'objet d'un exemple à part.

Remarque 6.1 Comme les réponses sont étudiées grâce à la fonction de transfert, ceci sous-entend que les conditions initiales sont supposées nulles.

6.2.6.1 Pôles distincts

Dans le cas où la fonction de transfert est strictement propre, on peut décomposer $G(p)$ en éléments simples et l'écrire

$$G(p) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{p - p_i},$$

où les numérateurs R_i sont appelés *résidus*. En réalité, ces résidus sont étroitement liés aux zéros.

Lorsque p_i est réel, alors R_i est réel. De plus, si p_i est complexe alors son conjugué \bar{p}_i est aussi un pôle du système. Leurs résidus respectifs R_i et \bar{R}_i sont également conjugués. Si cette conjugaison n'était pas respectée, les numérateur et dénominateur de $G(p)$ ne seraient pas des polynômes à coefficients réels ce qui n'est pas réaliste.

Le tableau 2.1 permet de déduire que la réponse impulsionnelle est

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p)) = \sum_{i=1}^n R_i e^{p_i t} \Gamma(t)$$

(l'apparition de l'échelon $\Gamma(t)$ marque simplement le fait que les termes sont des fonctions causales (nulles pour $t < 0$)). On s'aperçoit avec cette formule que :

- chaque pôle engendre un comportement exponentiel réel ou complexe dans la réponse ;
- les résidus (donc indirectement les zéros) vont « répartir » l'influence de ces divers comportements sur la réponse globale.

On doit maintenant essayer de comprendre ce qui se cache derrière chaque comportement exponentiel, c'est-à-dire derrière chaque pôle. Il faut à nouveau considérer deux cas.

- ◇ p_i est un pôle réel donc, dans la réponse impulsionnelle, il engendrera un terme de décroissance exponentielle si $p_i < 0$ ou un terme de croissance exponentielle dangereuse caractéristique d'un système instable si $p_i > 0$. Cette constatation est conforme au critère des racines.
- ◇ p_i et son conjugué \bar{p}_i sont complexes. On peut alors écrire $R_i = \rho e^{j\theta}$ et $p_i = \alpha + \beta j$. On a alors

$$(R_i e^{j p_i t} + \bar{R}_i e^{\bar{p}_i t}) \Gamma(t) = (\rho e^{j\theta} e^{\alpha t + j\beta t} + \rho e^{-j\theta} e^{\alpha t - j\beta t}) \Gamma(t) = \\ \rho e^{\alpha t} (e^{j(\beta t + \theta)} + e^{-j(\beta t + \theta)}) \Gamma(t) = 2\rho e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \Gamma(t).$$

Ceci signifie que chaque paire de pôles complexes engendre un terme sinusoïdal de pulsation β dont l'amplitude suit une loi de croissance ou de décroissance exponentielle selon le signe de α . Si $\alpha > 0$, ce terme est d'amplitude croissante et le système est instable. Si $\alpha < 0$, ce terme est d'amplitude décroissante correspondant à un comportement. Ces constatations sont conformes au critère des racines.

En résumé, un système est asymptotiquement stable lorsque tous ces pôles sont à partie réelle négative. En outre, ce sont les pôles complexes qui engendrent les oscillations de la réponse impulsionnelle et ces oscillations sont d'autant plus marquées que la partie imaginaire des pôles est importante devant la partie réelle. Ceci constitue un début de preuve du critère des racines. Ces effets sont résumés sur la figure 6.4.

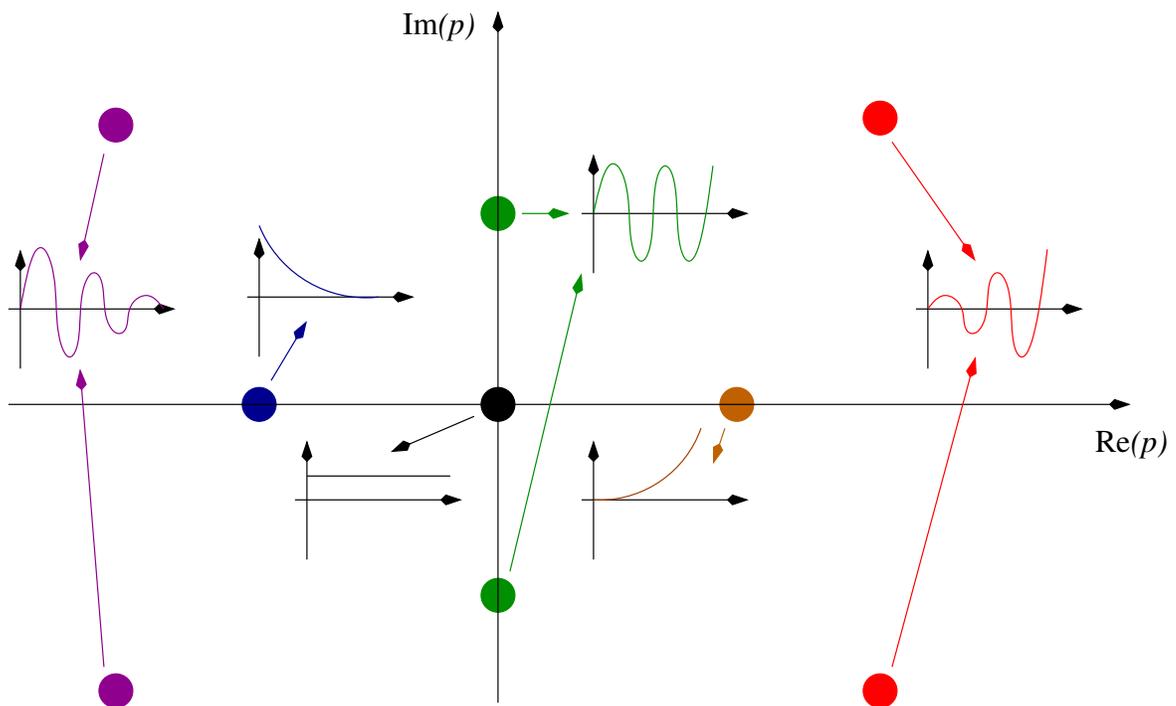


FIGURE 6.4 – Influence des pôles sur la réponse impulsionnelle

La réponse est une combinaison des comportements de chaque pôle. Ainsi tout pôle à droite de l'axe imaginaire rend le système instable. Si tous les pôles sont à gauche de cet axe, le système est asymptotiquement stable. Parmi ces pôles, les pôles dominants ou lents sont *a priori* les plus influents sur la réponse. Cependant, les résidus viennent tempérer ce raisonnement « simpliste » à savoir qu'ils pondèrent l'influence de chaque pôle. Cette influence des résidus (indirectement celle des zéros) est beaucoup plus délicate à analyser. Il est très difficile de traduire, par exemple, cette influence en termes de localisation des zéros dans le plan de Laplace.

Enfin, il faut noter que ces comportements vont se retrouver dans la réponse indicielle. En effet, il s'agit alors

de décomposer $G(p)/p$ plutôt que $G(p)$. On retrouve alors les mêmes racines au dénominateur (c'est-à-dire les pôles) plus une racine nulle liée à l'échelon. Les résidus sont eux différents. On obtient

$$\frac{G(p)}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{R'_i}{p - p_i} + \frac{K}{p}.$$

La réponse est alors

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(p)}{p} \right) = \left(K + \sum_{i=1}^n R'_i e^{p_i t} \right) \Gamma(t).$$

On retrouve donc bien l'influence des pôles dans cette réponse indicielle.

6.2.6.2 Pôles multiples

Dans le cas où les pôles ne sont pas distincts, la décomposition en éléments simples n'est plus aussi facile. Si l'on prend l'exemple d'ordre 3 suivant,

$$G(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{(p + 1)^3},$$

le pôle -1 est de multiplicité 3 et la décomposition en éléments simples est la suivante :

$$G(p) = \frac{2}{(p + 1)^3} + \frac{1}{p + 1}$$

(voir le cours de mathématiques pour les techniques de décomposition en éléments simples). Il vient alors, en utilisant le tableau 2.1, la réponse impulsionnelle

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p)) = (t^2 + 1)e^{-t}\Gamma(t)$$

On voit sur cet exemple que si les comportements exponentiels interviennent toujours, ce n'est plus de manière aussi évidente et des termes en $t^q e^{p_i t}$ apparaissent, ce qui ne change rien au critère des racines puisque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (t^q e_i^p t) = 0 \quad \text{si} \quad \text{Re}(p_i) < 0.$$

Ce cas n'est pas traité de manière générale. On peut toutefois mentionner qu'il existe des outils numériques permettant de faire la décomposition en éléments simples d'expressions non triviales.

6.2.7 Fonction de transfert et réponse harmonique

Dans cette partie, on revient sur les assertions du paragraphe 3.4.2. Il y est dit que la réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale est, en régime permanent (pour $t \rightarrow \infty$), une sinusoïde. En réalité, ceci n'est vrai que si le système est asymptotiquement stable ce qui sera supposé ici. Il est également affirmé que la fonction de transfert permet de reconstruire cette sortie. En voici les justifications.

Le signal d'entrée est sinusoïdal :

$$u(t) = U_m \sin(\omega t).$$

D'après le tableau 2.1, sa transformée de Laplace est

$$U(p) = \frac{U_m \omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Soit $G(p)$, la fonction de transfert du système que l'on supposera de manière réaliste strictement propre. La transformée de Laplace de la sortie $y(t)$ est

$$Y(p) = G(p) \frac{U_m \omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (6.1)$$

Comme $G(p)$ est strictement propre, $Y(p)$ est décomposable en éléments simples. Par souci de simplicité, on suppose, dans les calculs, que les pôles du système sont distincts. La décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} conduit à

$$Y(p) = \frac{a}{p + j\omega} + \frac{\bar{a}}{p - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{p - p_i}. \quad (6.2)$$

Les valeurs p_i correspondent aux n pôles du système et les S_i sont les résidus associés à ces pôles dans cette décomposition. a et \bar{a} sont les résidus associés à l'entrée sinusoïdale qui génère deux racines imaginaires pures conjuguées $j\omega$ et $-j\omega$ au dénominateur de $Y(p)$.

Si on applique \mathcal{L}^{-1} à $Y(p)$, on obtient

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n S_i e^{-p_i t}.$$

Comme le système est supposé asymptotiquement stable, la partie réelle de ses pôles est strictement négative et chaque terme $e^{-p_i t}$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini. Donc, après un certain temps de régime transitoire, ce sont les deux premiers termes qui vont déterminer la réponse en régime permanent.

Dans le cas des pôles multiples, les expressions sont un peu plus compliquées à écrire et en appliquant \mathcal{L}^{-1} , des termes en $t^q e^{-p_i t}$ apparaissent mais ils tendent eux aussi vers 0 quand t tend vers l'infini. Il reste donc en régime permanent

$$y_\infty(t) = y(t \rightarrow \infty) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}, \quad (6.3)$$

expression dans laquelle il convient de déterminer a et \bar{a} . L'identification des deux expressions de $Y(p)$ données par les équations (6.1) et (6.2) permet, en multipliant ces deux expressions par $(p + j\omega)$ et en choisissant $p = -j\omega$ de déduire

$$a = -\frac{U_m}{2j} G(-j\omega).$$

Le même raisonnement mais en multipliant par $(p - j\omega)$ et en choisissant $p = j\omega$ conduit à

$$\bar{a} = \frac{U_m}{2j} G(-j\omega).$$

$G(j\omega)$ est un nombre complexe paramétré par ω . Son module peut être noté $A(\omega)$ et son argument $\phi(\omega)$. $G(p)$ étant une fraction de deux polynômes en p , à coefficients réels, il est facile de voir que $G(-j\omega)$ est de même module $A(\omega)$. En revanche, on a $\text{Arg}(G(-j\omega)) = -\phi(\omega)$. On peut donc écrire $G(j\omega)$ et $G(-j\omega)$ ainsi :

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad ; \quad G(-j\omega) = A(\omega)e^{-j\phi(\omega)}.$$

On reprend l'équation (6.3) avec ces valeurs de résidus et il vient

$$y(t) = A(\omega)U_m \frac{e^{j(\omega t + \phi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \phi(\omega))}}{2j} \Leftrightarrow$$

$$y(t) = A(\omega)U_m \sin(\omega t + \phi(\omega)).$$

La fonction de transfert calculée en $p = j\omega$ permet donc de retrouver la réponse harmonique du système. On comprend ici pourquoi poser $p = j\omega$ revient à supposer que l'excitation d'entrée est sinusoïdale. En électronique où les circuits linéaires sont souvent plus considérés comme des filtres, les excitations sont très souvent sinusoïdales et les fonctions de transfert s'expriment en fonction de $j\omega$. En fait, les électroniciens utilisent la transformation de Fourier¹, notée \mathcal{F} , qui est définie de manière assez similaire à celle de Laplace :

1. Baron Joseph Fourier (1768-1830) : mathématicien français contemporain de Laplace

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \bar{F}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\beta\tau} d\tau.$$

\mathcal{F} est une restriction de la transformée de Laplace dite “bilatérale” c’est-à-dire quand l’intégration se fait entre $-\infty$ et ∞ . Dans le cas « Laplace bilatérale », p est complexe quelconque ; dans le cas de \mathcal{F} , $p = j\beta$ est imaginaire pur.

Enfin, on note que si $\omega = 0$ (fréquence nulle correspondant à une entrée continue type échelon), on retrouve, en régime permanent, $G(0) = K$, le gain statique. Ceci-dit, la démonstration de ce dernier point proposée en annexe 6.2.5 est plus appropriée.

6.2.8 À propos du diagramme de Bode

Dans cette partie, quelques notions supplémentaires relatives à la construction des diagrammes de Bode sont proposées. La réponse fréquentielle d’éléments simples de premier ordre est d’abord présentée et justifiée, puis, le diagramme de Bode du moteur à courant continu étudié dans le cours est construit.

6.2.8.1 Quelques règles simples de construction

Lorsque l’on s’intéresse à la réponse harmonique d’un système, on considère sa fonction de transfert pour $p = j\omega$, à savoir $G(j\omega)$, ω étant la pulsation du signal sinusoïdal censé exciter le système. Par ailleurs, si le diagramme de Bode est choisi pour représenter graphiquement cette réponse, il a été vu au paragraphe 3.4.3 que si la fonction de transfert du système s’écrit

$$G(p) = \prod_{k=1}^r G_k(p),$$

alors le gain en décibels total s’écrit :

$$T(\omega) = 20\log(|G(j\omega)|) = \sum_{k=1}^r T_k(\omega),$$

où chaque $T_k(\omega)$ est défini par $T_k(\omega) = 20\log(|G_k(j\omega)|)$.

De même, le déphasage global s’exprime

$$\phi(\omega) = \text{Arg}(G(j\omega)) = \sum_{k=1}^r \phi_k(\omega),$$

où chaque $\phi_k(\omega)$ est défini par $\phi_k(\omega) = \text{Arg}(G_k(j\omega))$.

De cette constatation, il convient de tirer la conclusion suivante :

Il faut exprimer la fonction de transfert comme un produit de facteurs simples dont le diagramme de Bode est aisé à tracer. Une fois chaque diagramme asymptotique ou réel tracé, le diagramme global est la somme géométrique de tous les sous-diagrammes dans le plan de Bode.

Quelques diagrammes simples sont maintenant proposés. Ils peuvent souvent servir au tracé de diagrammes plus complexes.

- $G(p) = \frac{p}{\omega_0}$. Il s’agit là du dérivateur. Le gain en décibels est

$$T(\omega) = 20\log\left(\left| j \frac{\omega}{\omega_0} \right|\right) = 20\log\left(\left| \frac{\omega}{\omega_0} \right|\right) = 20\log(\omega) - 20\log\omega_0.$$

Il est facile de voir que $T(\omega)$ croît avec ω et s'annule pour $\omega = \omega_0$. En outre, si l'on calcule le gain en décibels pour 10ω , on obtient

$$T(10\omega) = 20\log(10\omega) - 20\log\omega_0 = 20\log(\omega) - 20\log\omega_0 + 20 = T(\omega) + 20.$$

On en déduit que pour chaque changement de décade, le gain en décibels croît de 20dB, ce qui signifie que géométriquement, dans le plan de Bode, en raison de l'échelle logarithmique en abscisse, ce *dérivateur* produit une droite de pente 20dB par décade passant par 0dB en ω_0 .

Concernant le déphasage, ce dernier est constant puisque

$$\phi(\omega) = \text{Arg} \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right) = 90^\circ.$$

Ces résultats sont résumés par la figure 6.5.

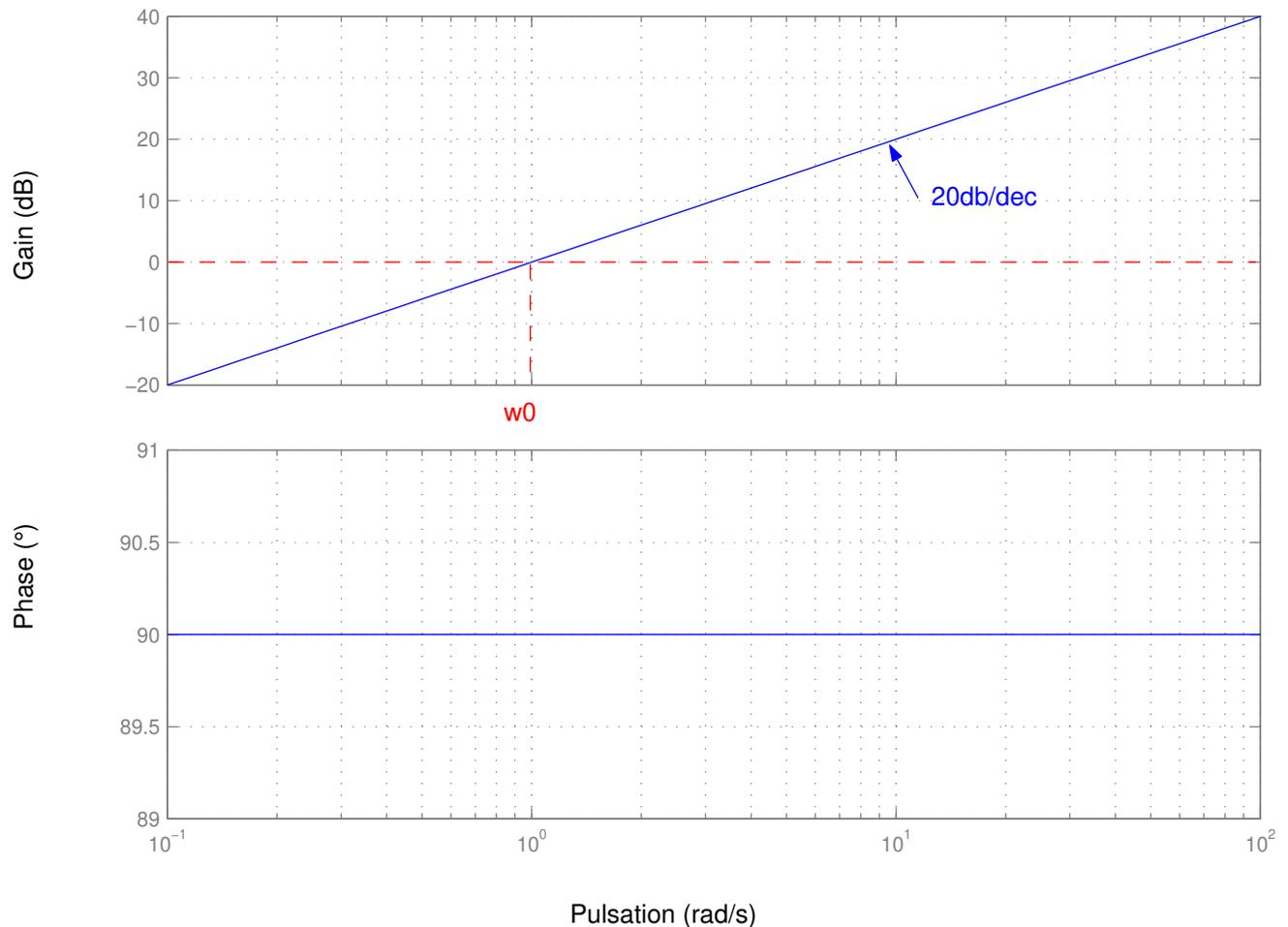


FIGURE 6.5 – Diagramme de Bode d'un dérivateur

- $G(p) = \frac{\omega_0}{p}$. Il s'agit là d'un intégrateur. Son gain en décibels s'exprime

$$T(\omega) = 20\log \left(\left| \frac{\omega_0}{j\omega} \right| \right) = 20\log \left(\left| \frac{j}{j\frac{\omega}{\omega_0}} \right| \right) = -20\log \left(\left| j\frac{\omega}{\omega_0} \right| \right) = -20\log(\omega) + 20\log(\omega_0).$$

On peut faire les mêmes constatations qu'avec le dérivateur si ce n'est qu'en raison du signe moins, la pente est de -20dB par décade. On a toujours $T(\omega_0) = 0$.

Pour le déphasage, il vient

$$\phi(\omega) = \text{Arg} \left(\frac{\omega_0}{j\omega} \right) = -90^\circ.$$

La réponse fréquentielle de cet *intégrateur* est donné par la figure 6.6.

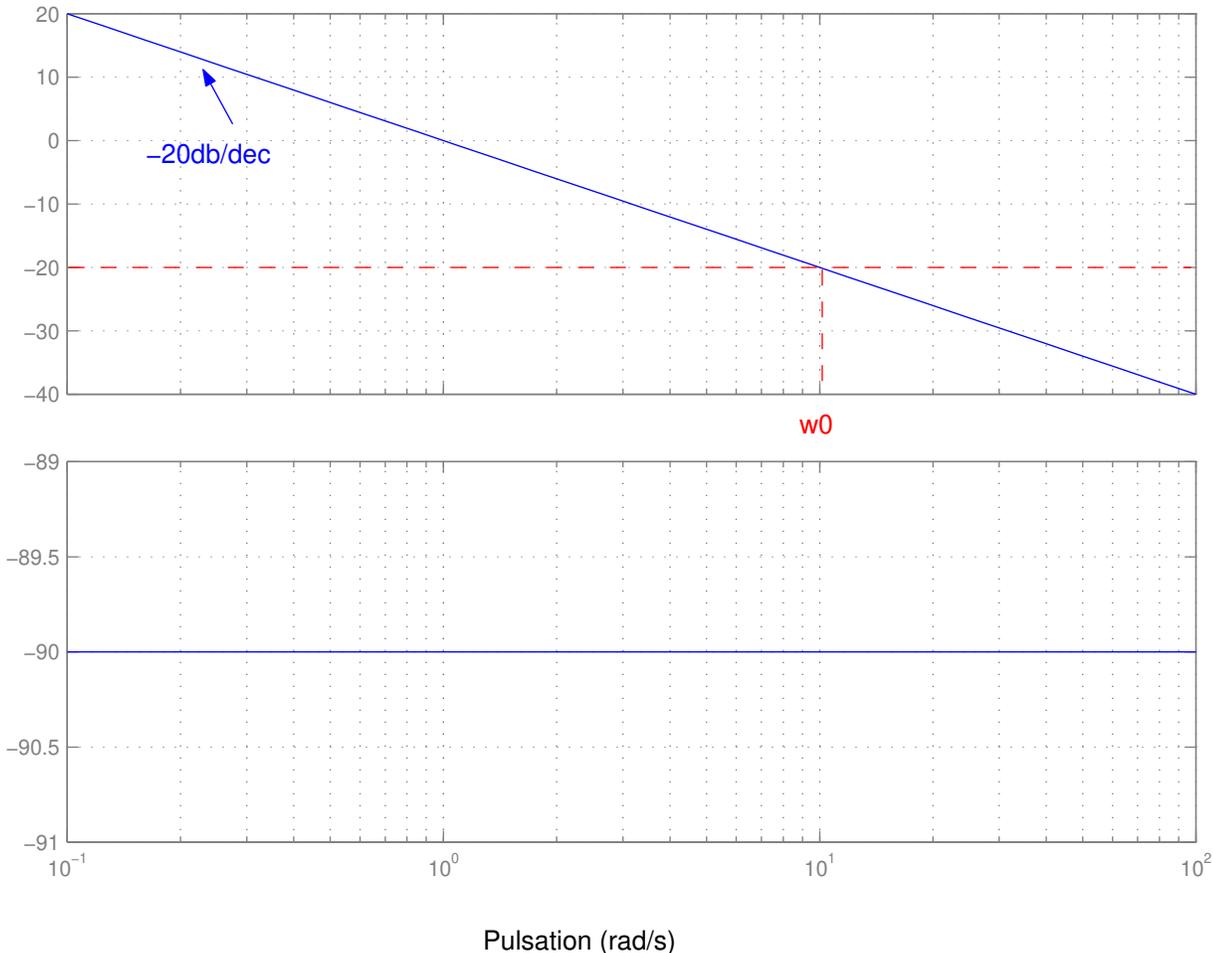


FIGURE 6.6 – Diagramme de Bode d'un intégrateur

• $G(p) = 1 + \frac{p}{w_0}$. Il s'agit là d'un *pseudo-dérivateur*. Il se comporte comme un dérivateur en hautes fréquences et comme un simple gain unitaire en basses fréquences. On distingue justement ces deux comportements extrêmes pour réaliser un tracé asymptotique.

Lorsque ω tend vers l'infini, le terme 1 est négligeable et $G(j\omega)$ se comporte comme un dérivateur avec, pour le gain, une pente de 20dB par décade et un déphasage constant de 90° . Ceci permet de tracer une première asymptote pour le gain et pour la phase.

En basses fréquences, $G(j\omega)$ tend vers 1 (soit un gain en décibels de 0 et un déphasage nul). Ceci permet de tracer une seconde asymptote pour le gain et pour la phase.

La limite entre ces deux zones de pulsations est ω_0 , appelée *pulsation de cassure*. En effet, pour $\omega = \omega_0$, les

deux termes de la fonction de transfert sont aussi influents l'un que l'autre puisque parties réelle et imaginaire sont égales. On a

$$T(\omega_0) = 20\log(|1 + j|) = 20\log(\sqrt{2}) = 3\text{dB} \quad ; \quad \phi(\omega_0) = \text{Arg}(1 + j) = \text{Arctan}(1) = 45^\circ.$$

À la pulsation de cassure, la courbe de gain réelle se situe donc 3dB au dessus de l'intersection des asymptotes. Le déphasage à cette pulsation est de 45° . De plus, on a

$$\begin{cases} T\left(\frac{\omega_0}{2}\right) = 20\log\left(\left|1 + j\frac{1}{2}\right|\right) = 20\log\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right) \simeq 1\text{dB} \\ T(|2\omega_0|) = 20\log(|1 + 2j|) = 20\log(\sqrt{5}) \simeq 7\text{dB} \\ \log(|2j|) = 20\log(\sqrt{4}) \simeq 6\text{dB}. \end{cases}$$

La première équation montre que pour $\omega = \omega_0/2$, la courbe de gain réelle se situe 1dB au dessus de l'asymptote horizontale. La deuxième et la troisième montrent que pour $\omega = 2\omega_0$, la courbe réelle se trouve à nouveau à 1dB au dessus de l'asymptote oblique. Ces constatations aident à tracer la courbe réelle une fois les asymptotes en place. En outre, on a

$$\begin{cases} \phi\left(\frac{\omega_0}{10}\right) = \text{Arg}\left(1 + j\frac{1}{10}\right) = \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right) \simeq 5,7^\circ \\ \phi(|10\omega_0|) = \text{Arg}(1 + 10j) = \text{Arctan}(10) \simeq 84,3^\circ. \end{cases}$$

Ces deux équations permettent de tracer un segment de droite oblique sur la courbe des phases qui donne une idée approximative du déphasage dans les fréquences intermédiaires. Tout ceci est résumé sur la figure 6.7.

- $G(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_0}}$. Il s'agit là d'un filtre passe bas de premier ordre que l'on a étudié sous le nom de *système canonique de premier ordre*. Sans entrer dans tous les détails de construction qui sont similaires à ce qui a été vu pour le pseudo-dérivateur, on voit bien qu'en basses fréquences, le système se comporte comme un gain unitaire ($T_0 = 0\text{dB}$, $\phi(0) = 0^\circ$) et qu'en hautes fréquences, c'est-à-dire grossièrement au-delà de ω_0 , la pulsation de cassure, l'amplification diminue. Ce comportement est expliqué sur la figure 6.8.

- Enfin, quelle que soit la fonction de transfert $G(p)$, il faut garder présent à l'esprit que si l'on souhaite tracer le diagramme de Bode de $AG(p)$ où $A > 0$ est un gain, on a $\text{Arg}(AG(j\omega)) = \text{Arg}(G(j\omega))$ donc le déphasage reste inchangé par le gain A et on a

$$20\log(|AG(j\omega)|) = 20\log(A) + 20\log(|G(j\omega)|).$$

Ainsi, si l'on fait précéder un système de fonction de transfert $G(p)$ d'un gain A , la phase n'est pas altérée et la courbe de gain est translatée vers le haut de $20\log(A)$. Si $A > 1$, alors $20\log(A) > 0\text{dB}$ et c'est une translation effective vers le haut. Si $A < 1$, alors $20\log(A) < 0\text{dB}$ et c'est en fait une translation vers le bas. On remarque à ce propos qu'un gain supérieur à 0dB correspond à une vraie amplification alors qu'un gain inférieur correspond à une atténuation.

Toutefois, si $A < 0$, il faut prendre en compte le signe négatif de A . La courbe de gain prend en compte le module de A mais le signe moins introduit un déphasage supplémentaire de (-180°) .

La présence d'un signe moins devant une fonction de transfert induit une opposition de phase.

6.2.8.2 Construction du diagramme de Bode associé au modèle complet du moteur

Dans ce paragraphe, on cherche à illustrer l'utilité de la propriété vue au paragraphe 3.4.3 ainsi qu'au paragraphe précédent. Le modèle d'ordre 2 du moteur à courant continu est

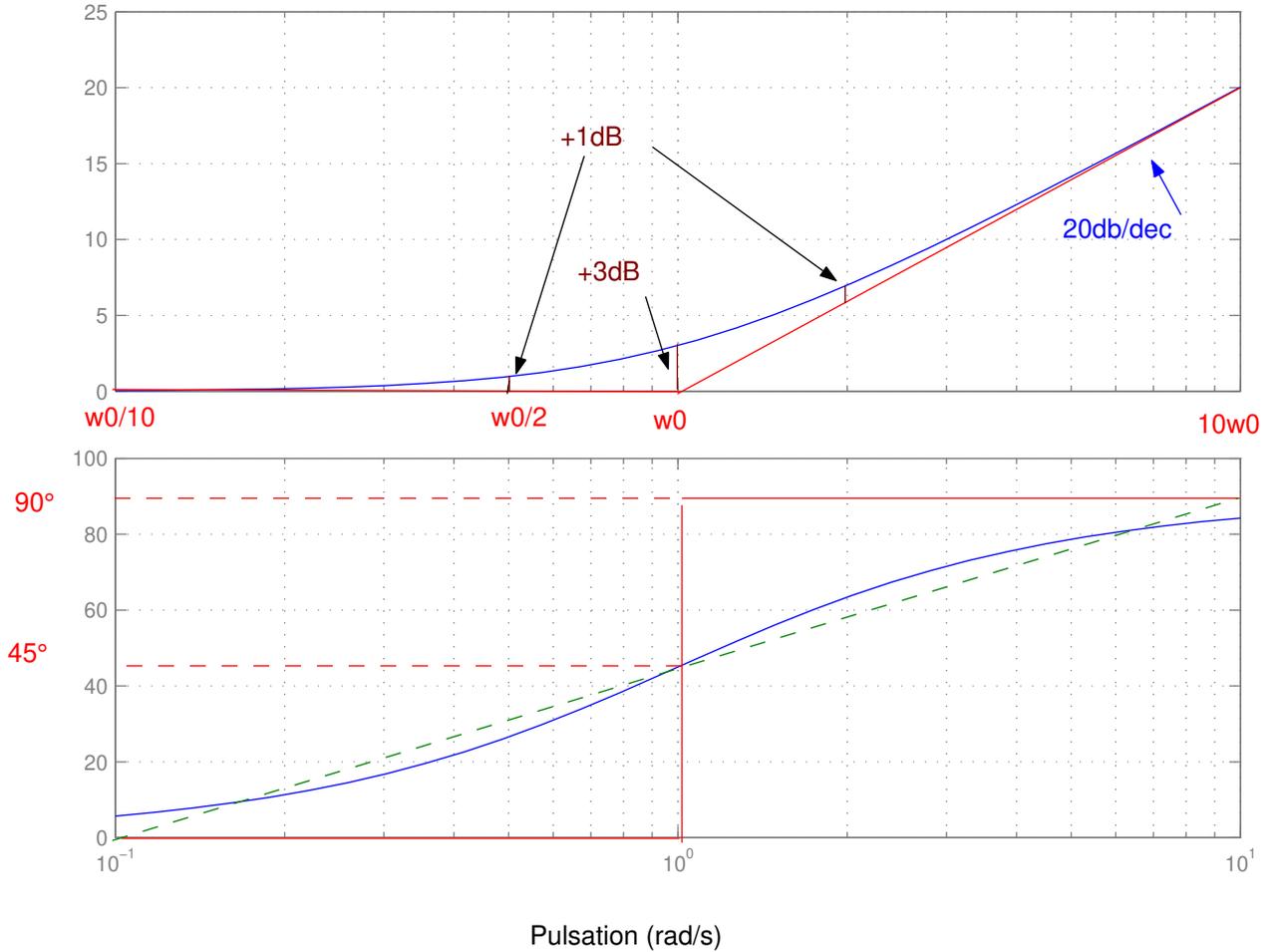


FIGURE 6.7 – Diagramme de Bode d'un pseudo-dérivateur

$$G(p) = \frac{0,5}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)},$$

avec $\tau_1 = 0,5$, une constante de temps essentiellement liée aux phénomènes mécaniques et $\tau_2 = 0,01$, une constante de temps essentiellement liée aux phénomènes électriques. On peut écrire $G(p)$ ainsi :

$$G(p) = G_1(p)G_2(p) \quad \text{avec :}$$

$$G_1(p) = \frac{0,5}{1 + \tau_1 p} \quad \text{et} \quad G_2(p) = \frac{1}{1 + \tau_2 p}.$$

Au paragraphe 3.4.3 ainsi qu'au paragraphe 6.2.8.1, il est expliqué que la réponse harmonique dans le plan de Bode de $G(p)$ est la somme géométrique des réponses respectives de $G_1(p)$ et $G_2(p)$.

Sur la figure 6.9, on voit qu'une fois les diagrammes associés à $G_1(p)$ et $G_2(p)$ tracés (ce sont des réponses fréquentielles de modèles canoniques de premier ordre), ajouter les deux dans le plan de Bode permet d'obtenir le diagramme de Bode de $G(p)$. On constate aussi que pour des basses fréquences correspondant plutôt à la dynamique mécanique, la réponse de $G_1(p)$ est une bonne approximation de celle de $G(p)$. En revanche, en hautes fréquences où la dynamique électrique intervient, $G_1(p)$ n'est plus assez précis. On voit bien aussi que négliger les phénomènes électriques dans le moteur revient à négliger les hautes fréquences.

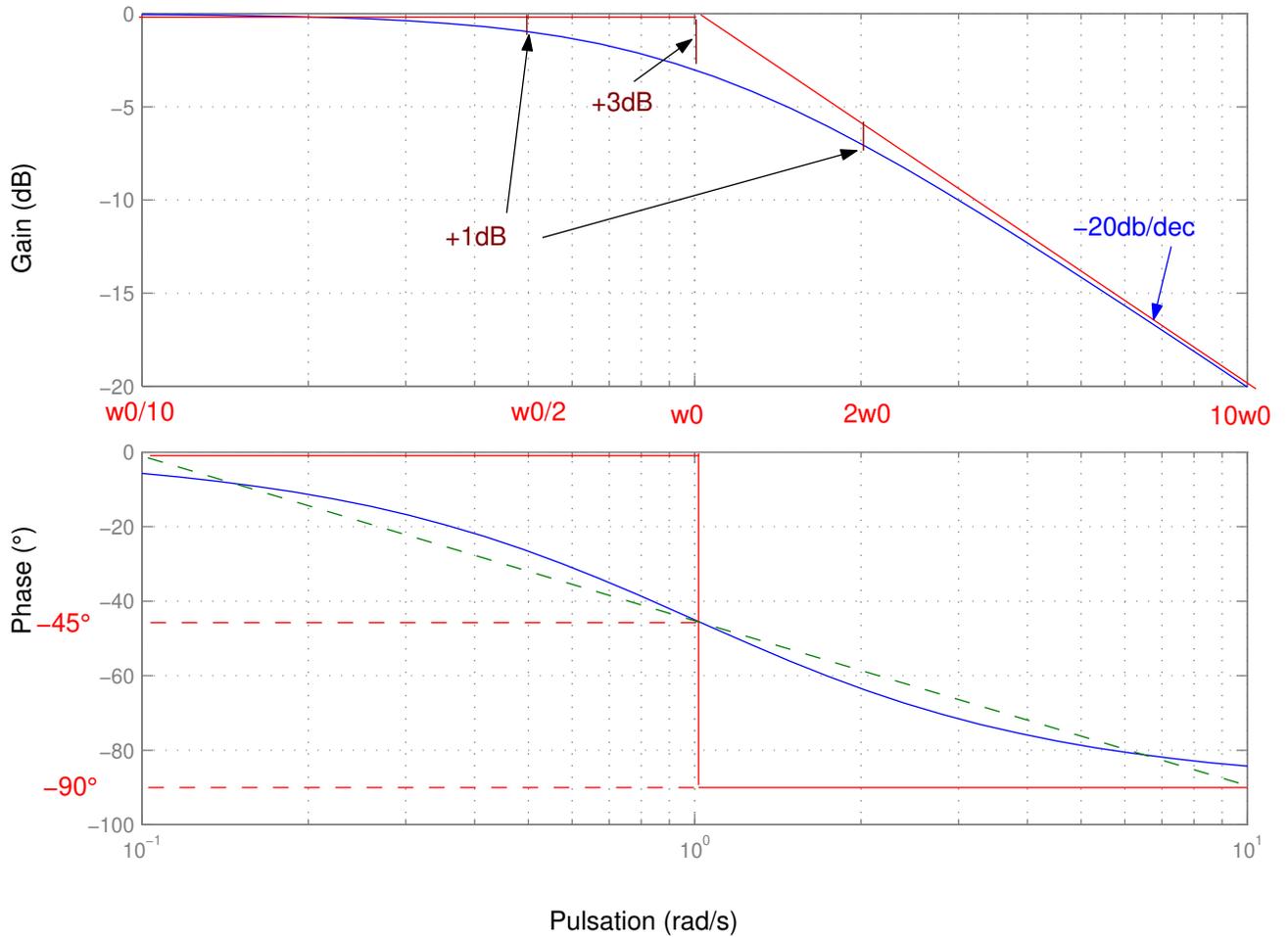


FIGURE 6.8 – Diagramme de Bode d'un modèle canonique de premier ordre

6.2.9 Perturbation en $1/p^q$ et position des intégrateurs

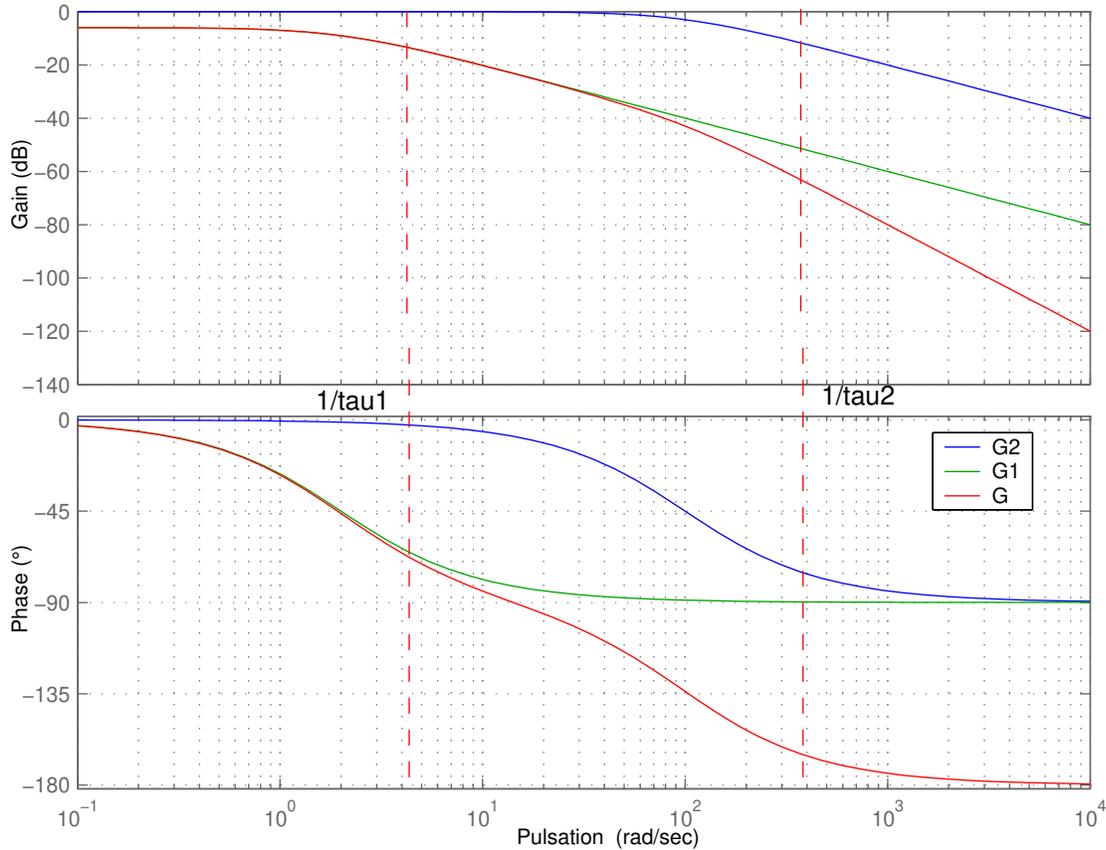
Cette partie illustre le fait que l'action destinée à réduire l'effet d'une perturbation de type D_0/p^q doit être exercée en amont de cette perturbation comme affirmé au paragraphe 5.4. On se réfère à la figure 5.4 pour le justifier. On suppose que la consigne y_c et la perturbation d sont toutes deux de type échelon, c'est-à-dire que leurs transformées de Laplace sont

$$Y_c(p) = \frac{Y_{c0}}{p} \quad ; \quad D(p) = \frac{D_0}{p}.$$

On suppose que $G_1(p)$ et $G_2(p)$ sont les fonctions de transfert de systèmes de gains statiques respectifs K_1 et K_2 . La transformée de Laplace de l'écart ϵ est

$$\begin{aligned} \epsilon(p) &= Y_c(p) - Y(p) = Y_c(p) - A_2 G_2(p) D(p) - A_1 A_2 G_1(p) G_2(p) \epsilon(p) \Leftrightarrow \\ \epsilon(p) (1 + A_1 A_2 G_1(p) G_2(p)) &= Y_c(p) - A_2 G_2(p) D(p) \Leftrightarrow \\ \epsilon(p) &= \frac{Y_c(p)}{1 + A_1 A_2 G_1(p) G_2(p)} - \frac{A_2 G_2(p) D(p)}{1 + A_1 A_2 G_1(p) G_2(p)}. \end{aligned}$$

On souhaite annuler l'influence de d sur ϵ en régime permanent (pour $t \rightarrow \infty$) par l'adjonction d'un intégrateur. On envisage deux cas :

FIGURE 6.9 – Diagrammes de Bode de $G_1(p)$, $G_2(p)$ et $G(p)$

1. $G_1(p)$ est de classe 0 et $G_2(p)$ est de classe 1 (l'intégrateur se situe dans $G_2(p)$);
2. $G_1(p)$ est de classe 1 et $G_2(p)$ est de classe 0 (l'intégrateur se situe dans $G_1(p)$).

• **Cas 1** : en calculant l'écart en régime permanent (c'est-à-dire l'erreur), on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\epsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p\varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{Y_{c0}p}{1 + \frac{p}{A_1 A_2 K_1 K_1}}}{1 + \frac{p}{A_1 A_2 K_1 K_1}} - \frac{\frac{D_0 A_2 K_2 p}{1 + \frac{p}{A_1 A_2 K_1 K_1}} \times \frac{1}{p}}{1 + \frac{p}{A_1 A_2 K_1 K_1}} \right) = -\frac{D_0}{A_1 K_1}.$$

L'écart en régime permanent (c'est-à-dire l'erreur) n'est donc pas nulle.

• **Cas 2** : il vient maintenant

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\epsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p\varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{Y_{c0}p}{1 + \frac{p}{A_1 A_2 K_1 K_1}}}{1 + \frac{p}{A_1 A_2 K_1 K_1}} - \frac{\frac{D_0 A_2 K_2 p}{1 + \frac{p}{A_1 A_2 K_1 K_1}}}{1 + \frac{p}{A_1 A_2 K_1 K_1}} \right) = 0.$$

Cette fois-ci, l'erreur statique s'annule et l'on voit bien que l'action doit être exercée en amont de la perturbation.

6.2.10 Calcul d'un régulateur par compensation de pôle

Soit un procédé de fonction de transfert $G(p)$ tel que $G(p)$ fait apparaître une constante de temps dominante τ , c'est-à-dire un pôle $\lambda = -1/\tau$ dominant :

$$G(p) = \frac{N(p)}{(1 + \tau p)D'(p)}.$$

$N(p)$ est un polynôme qui est supposé non factorisable par p . $D'(p)$ est un polynôme quelconque. Selon le principe de la commande par retour unitaire, on peut commander le système grâce un régulateur $R(p)$.

6.2.10.1 Régulateur PI

La technique de compensation de pôle consiste à choisir un régulateur PI d'une forme particulière :

$$R(p) = \frac{A}{p}(1 + \tau p) = A\tau + \frac{A}{p}. \quad (6.4)$$

On voit clairement qu'un terme est un simple gain (effet proportionnel) alors que l'autre est en $1/p$ (effet intégral). La constante de temps τ apparaît dans cette fonction de transfert. Celle de la chaîne directe est

$$L(p) = \frac{AN(p)}{pD'(p)}.$$

La formule de Black conduit à la fonction de transfert en boucle fermée

$$H(p) = \frac{\frac{AN(p)}{pD'(p)}}{1 + \frac{AN(p)}{pD'(p)}} = \frac{1}{1 + \frac{pD'(p)}{AN(p)}}.$$

On constate que quelle que soit la classe α de $G(p)$ (voir paragraphe 5.2.3), le gain statique en boucle fermée est égal à

$$\lim_{p \rightarrow 0} L(p) = 1.$$

Ceci correspond à un système précis ayant une erreur de position nulle (voir à nouveau le paragraphe 5.2.3). Ainsi, ce correcteur, comme tout régulateur PI, permet d'augmenter la classe de $L(p)$ donc de rendre le système en boucle fermée plus précis. En outre, la dynamique liée à la constante de temps τ est compensée par le régulateur et n'apparaît plus sur la réponse du système en boucle fermée (sous réserve que le modèle soit suffisamment fidèle et donc que τ soit connue avec exactitude). De plus, A peut permettre d'accélérer ou de ralentir un peu la réponse en boucle fermée.

Cette technique est souvent utilisée sur des modèles canoniques de premier ordre pour lesquels on a

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Un régulateur de modèle donné par (6.4) conduit à une chaîne directe et une boucle fermée dont les fonctions de transfert respectives sont données par

$$L(p) = \frac{AK}{p} \quad ; \quad H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{AK}} = \frac{K_{bf}}{1 + \tau_{bf}p}. \quad (6.5)$$

On retrouve un modèle canonique de premier ordre. Par ailleurs, on constate que le gain statique en boucle fermée est unitaire ($K_{bf} = 1$) (donc le système devient précis) et la constante de temps en boucle fermée dépend de A (car $\tau_{bf} = 1/AK$). Comme attendu, plus grand est A , plus rapide est le système bouclé. On a donc, dans ce cas très précis, un seul paramètre pour gérer la raideur tout en assurant la précision.

Dans le cas du modèle simplifié du moteur à courant continu, le modèle en boucle ouverte est le suivant :

$$G(p) = \frac{0,5}{1 + 0,5p}$$

Ce modèle n'est pas précis puisque $K = 0,5$. Si l'on cherche à accélérer sa réponse indicielle par une régulation proportionnelle ($R(p) = A$), on s'aperçoit que la précision est variable (cf paragraphe 5.2.2). On peut bien sûr tenter de réduire l'erreur de position par un grand gain A (cf. figure 5.2) mais ceci risque de conduire à de trop fortes valeurs du signal de commande $u(t)$ donc à une saturation des actionneurs. C'est pourquoi, il vaut mieux utiliser un régulateur PI tel que celui présenté en (6.4). On obtient la fonction de transfert en boucle fermée donnée par (6.5), soit

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{0,5A}}$$

On choisit donc la constante de temps en boucle fermée grâce à A tout en conservant la précision. Il faut toutefois toujours veiller à ce que les actionneurs ne soient pas saturés (le signal de commande $u(t)$ ne doit pas prendre des valeurs excessives).

Remarque 6.2 Dans le cas du moteur, une forte augmentation de A peut conduire à l'apparition d'une oscillation en boucle fermée. En réalité, ce phénomène est dû au fait que la constante de temps électrique est négligée dans le modèle simplifié. Si elle est prise en compte, la marge de phase mesurée sur le diagramme de Bode de la chaîne directe s'en trouve diminuée ce qui réduit le coefficient d'amortissement. En effet, lorsque A augmente, la courbe de gain est décalée vers le haut et la pulsation critique à laquelle cette marge est mesurée se déplace vers la droite, c'est-à-dire vers des fréquences où les phénomènes électriques ne sont plus négligeables. Sur la figure 6.9, les marges de stabilité sont infinies. Toutefois, on voit que si un gain $A > 2$ venait multiplier le transfert de la chaîne directe, on pourrait alors mesurer une marge de phase. Plus A serait grand, plus la courbe de gain monterait (puisque'il faut ajouter $20\log A$ à cette dernière) et la pulsation critique se déplacerait vers les fréquences où le déphasage diminue en raison de la constante de temps électrique.

6.2.10.2 Régulateur PD

Il faut également remarquer que cette compensation de pôle peut être effectuée avec d'autres types de régulateurs. Ainsi, si l'on choisit, comme sortie du moteur, la position angulaire, plutôt que sa vitesse angulaire, la fonction de transfert du procédé devient :

$$G(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)}$$

La classe de $G(p)$ passe à 1 car la position est l'intégrale de la vitesse et de ce fait, un intégrateur apparaît maintenant dans $G(p)$. On note d'ailleurs que ce modèle en boucle ouverte n'est pas asymptotiquement stable puisqu'il comporte un pôle nul. En effet, si l'on perturbe le moteur au repos, il se peut que la position de son arbre change et donc la sortie ne reviendra pas à sa position initiale. La classe étant déjà de 1, il est inutile, pour obtenir une erreur de position nulle en boucle fermée, d'ajouter un intégrateur dans la chaîne directe. On peut utiliser par exemple un régulateur PD en supprimant l'intégrateur du régulateur donné par (6.4) ce qui conduit à

$$R(p) = A(1 + \tau p) = A + A\tau p.$$

On voit clairement apparaître un terme constant (effet proportionnel) et un terme en p (effet dérivé). La fonction de transfert en boucle fermée est la même dans le cas de l'asservissement de vitesse donc le système en boucle fermée est précis et A détermine la raideur.

6.2.10.3 Régulateur PID

On peut encore s'inspirer de la technique de la compensation de pôle pour concevoir un régulateur PID, donc faire intervenir les trois effets. Pour cela, on considère un régulateur de la forme

$$R(p) = \frac{A}{p}(1 + \tau p)(1 + T_d p).$$

Il s'agit donc d'un régulateur de forme série. La partie PI, à savoir $(A/p)(1 + \tau p)$, est obtenue en utilisant une compensation de pôle comme détaillée au paragraphe 6.2.10.1 mais il se peut alors que la marge de phase soit

insuffisante aussi décide-t-on d'apporter de la phase grâce à l'effet dérivé contenu dans le facteur $(1 + T_d p)$. T_d est la constante de temps du facteur dérivatif. L'expérience des tracés des diagrammes de Bode des chaînes directes conduit à utiliser la méthode suivante pour choisir T_d :

1. tracer la réponse harmonique de $(A/p)(1 + \tau p)G(p)$ dans le plan de Bode ;
2. déterminer la pulsation ω' pour laquelle le gain en décibels est $T = T_0 - 20\text{dB}$;
3. opter pour le choix $T_d = 10/\omega'$;
4. toujours sur le diagramme de Bode tracé en 2, lire, à la pulsation ω' , l'écart $\Delta\phi$ entre le déphasage et -180° ;
5. si la marge de phase voulue (généralement autour de 45 ou 50°) est supérieure à $\Delta\phi + 90^\circ$, diminuer T_d , sinon, l'augmenter.

Il faut garder présent à l'esprit que cette méthode peut ne pas aboutir à un régulateur tout-à-fait satisfaisant. On peut l'affiner en tenant compte des effets des trois termes de la commande.

6.2.11 Méthodes de Ziegler-Nichols

Dans cette partie, deux méthodes de réglage des régulateurs PID sous forme parallèle (équation (5.2)) sont présentées. Elles sont dites méthodes de *Ziegler Nichols* et ont un caractère presque empirique. Elles ont pour but *a priori* d'obtenir une réponse indicielle avec un dépassement de 25% comme le montre la figure 6.10.

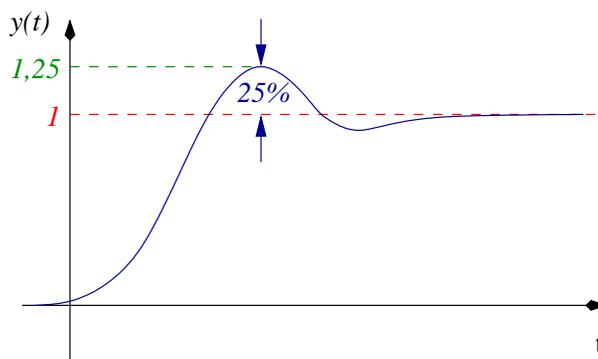


FIGURE 6.10 – Réponse indicielle avec 25% de premier dépassement

Il existe deux méthodes de Ziegler-Nichols :

- la première est dite « *méthode de la réponse indicielle* » ;
- la seconde est dite « *méthode de la juste oscillation* ».

6.2.11.1 Méthode de la réponse indicielle

Cette méthode n'est valable que pour des procédés stables dont la fonction de transfert ne comporte ni intégrateur, ni pôle dominant complexe. De tels procédés ont une réponse indicielle qui peut se rapprocher de la réponse dite « en S » donnée par la figure 6.11.

Cette forme de courbe peut être approchée par un modèle canonique de premier ordre de gain statique K et de constante de temps τ auquel on ajoute un retard pur θ ce qui amène la fonction de transfert approximative

$$G(p) = \frac{K^{-\theta p}}{1 + \tau p}$$

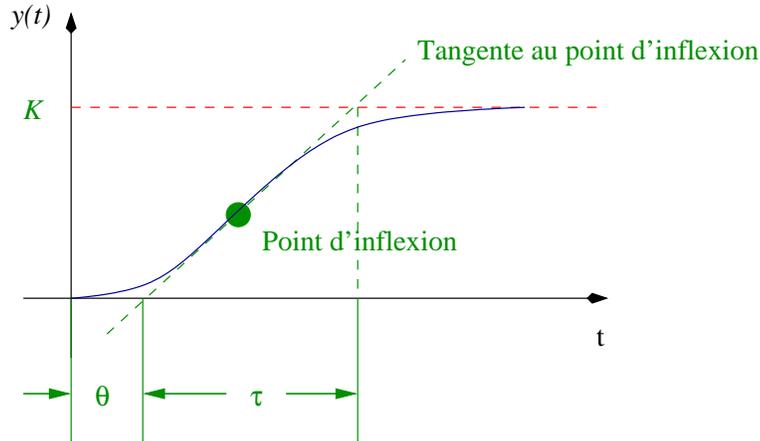


FIGURE 6.11 – Réponse indicielle « en S »

Régulateur	k	τ_i	τ_d
P	$\frac{\tau}{\theta}$	∞	0
PI	$0,9 \frac{\tau}{\theta}$	$\frac{\theta}{0,3}$	0
PID	$1,2 \frac{\tau}{\theta}$	2θ	$0,5\theta$

TABLE 6.1 – Règles de Ziegler-Nichols (méthode « de la réponse indicielle »)

(On note que le retard pur est une non-linéarité.)

Ziegler et Nichols, sur la base de leur expérience, proposent d'affecter aux paramètres du régulateur P, PI, ou PID de forme **parallèle** (équation (5.2)), les valeurs données par le tableau 6.1

6.2.11.2 Méthode de la juste oscillation

Dans cette seconde méthode, on suppose que le système est stabilisable par un régulateur proportionnel. Cette méthode est utilisée pour des systèmes dont on ne veut pas tracer la réponse indicielle en boucle ouverte (parce qu'il est instable par exemple). On cherche alors quel est le gain proportionnel critique A_{cr} tel que le système en boucle fermée est en limite de stabilité, c'est-à-dire se comporte comme un oscillateur dont la réponse indicielle est une sinusoïde d'amplitude constante. Ceci explique le nom de la méthode. On relève alors T_{cr} , la période, dite aussi critique, de cette oscillation.

Toujours sur la base de leur expérience, Ziegler et Nichols proposent d'utiliser le tableau 6.2 pour affecter des valeurs à k , τ_i et τ_d .

Régulateur	k	τ_i	τ_d
P	$0,5A_{cr}$	∞	0
PI	$0,45A_{cr}$	$\frac{1}{1,2}T_{cr}$	0
PID	$0,6A_{cr}$	$0,5T_{cr}$	$0,125T_{cr}$

TABLE 6.2 – Règles de Ziegler-Nichols (méthode « de la juste oscillation »)

6.2.11.3 Commentaires sur les deux méthodes

Ces deux méthodes ont permis de résoudre nombre de problèmes de régulation et d'asservissement. La première suppose que le modèle du procédé est stable. Elle suppose aussi que sa réponse en boucle ouverte n'oscille pas ou peu. La seconde suppose que le système est stabilisable par un régulateur proportionnel. Certains procédés peuvent ne satisfaire aucune de ces contraintes et une autre méthode doit alors être utilisée.

En outre, il faut noter qu'en pratique, l'application de ces méthodes engendre des dépassements indiciels allant de 10% à 60%, ce qui peut donc être bien supérieur aux 25% annoncés par Ziegler et Nichols. En réalité ce pourcentage n'est qu'une valeur moyenne c'est pourquoi il faut toujours se souvenir des effets de chacun des termes de la commande.

Enfin, pour des systèmes de modèles connus avec précision, on peut s'interroger sur l'intérêt de telles méthodes et sans doute leur préférer des méthodes basées sur le diagramme de Bode. En revanche, lorsque la dynamique du procédé reste énigmatique mais qu'elle semble satisfaire aux contraintes imposées par l'une ou l'autre des méthodes, alors ces dernières peuvent s'avérer un bon moyen de trouver un « premier » régulateur PID satisfaisant qui peut être amélioré en jouant sur les trois effets.

6.2.12 Filtrage de l'effet dérivé

Dans la partie du cours concernant le régulateur PID, il est spécifié qu'en pratique, il est imprudent d'utiliser un effet dérivé pur. En effet, ce dernier présente une fâcheuse tendance à répercuter les dynamiques de hautes fréquences sur la commande, sollicitant ainsi énormément les actionneurs. Parmi ces dynamiques de hautes fréquences, on peut citer les bruits liés aux capteurs de mesure de la sortie.

Par ailleurs, en reprenant la logique du retour unitaire présentée sur la figure 2.3, on se rend mieux compte du danger d'une dérivation pure. Si la consigne y_c évolue en échelon à un instant t , il est impossible que la sortie la suive instantanément. De ce fait, l'écart ϵ subit lui aussi un échelon à ce même instant t . Sa dérivée est donc infinie et la commande u subira par conséquent un à-coup très violent qu'il convient de limiter. La solution consiste à filtrer l'effet dérivé. En supposant que le régulateur initialement calculé comporte un facteur dérivatif pur, la fonction de transfert sous forme série de ce régulateur est

$$R(p) = A\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)(1 + T_d p),$$

où T_d est la constante de temps du facteur dérivatif. On multiplie cette fonction de transfert par un filtre passe-bas de premier ordre afin d'obtenir :

$$R(p) = A\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)\frac{(1 + T_d p)}{(1 + T_f p)}$$

T_f est une constante de temps de filtrage qui est généralement prise nettement inférieure à T_d . On filtre ainsi les fréquences supérieures à $1/T_f$ et on limite les à-coups dans la commande.

On peut aussi appliquer ce principe à une forme parallèle de régulateur PID et l'on obtient

$$R(p) = k + \frac{k}{\tau_i p} + \frac{k\tau_d p}{1 + \tau_d p}$$

où τ_d est alors la constante de temps du filtrage.

Remarque 6.3 *Du point de vue pratique, le filtrage de l'effet dérivé, voire de l'ensemble de la commande, est très avantageux. En effet, il rend le régulateur PD ou PID causal (il ne l'est pas initialement), ce qui est nécessaire lorsque l'on veut implanter ce régulateur sous forme numérique.*

Références bibliographiques

Pour écrire ce document, les ouvrages et références suivantes ont été utiles.

Ch. Burgat.

Problèmes résolus d'Automatique.

Éditions Ellipses (Technosup), 2001.

P. Clerc. *Automatique continue, échantillonnée :*

IUT Génie Électrique-Informatique Industrielle,

BTS Électronique-Mécanique-Informatique.

Éditions Masson (198p), 1997.

Ph. de Larminat.

Automatique.

Éditions Hermes, 2000.

P. Codron et S. Leballois.

Automatique : systèmes linéaires continus.

Éditions Dunod (289p), 1998.

C. Foulard, J.-M. Flaus, et M. Jacomino.

Automatique pour les Classes Préparatoires : cours et exercices corrigés.

Éditions Hermes (379p), 1997.

Y. Granjon.

Automatique : Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état.

Éditions Dunod (381p), 2001.

K. Ogata.

Modern control engineering - Fourth edition.

Prentice Hall International Editions (997p), 2001.

B. Pradin.

Cours d'Automatique.

INSA de Toulouse, 3ème année spécialité GII.

B. Pradin.

Polycopié de cours d'Automatique.

INSA de Toulouse, 3ème année spécialité AEI.

B. Pradin et G. Garcia.

Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires.

Presses universitaires du Mirail, 2010.

M. Rivoire et J.-L. Ferrier.

Cours d'Automatique, tome 1 : traitement du signal, systèmes.

Éditions Eyrolles (248p), 1992.

M. Rivoire et J.-L. Ferrier.

Cours d'Automatique, tome 2 : asservissement, régulation, commande analogique.

Éditions Eyrolles (172p), 1996.

Y. Thomas.

Signaux et systèmes linéaires : exercices corrigés.

Éditions Masson (194p), 1993.

Y. Thomas.

Signaux et systèmes linéaires.

Éditions Masson (354p), 1994.

Index

- Abscisse de sommabilité, 40
- Actionneur, 3
- Amortissement, 34
 - (coefficient d'), 18, 35, 56
- Approximation linéaire, 40
- Asservissement, 4
 - de position, 56
 - de vitesse, 8
- Asymptotiquement stable
 - (équilibre), 26
 - (fonction de transfert), 26
 - (modèle), 26
 - (système), 26
- Autonome
 - (système), 25

- Bande passante, 22, 23
- Black
 - (Harold Stephen), 14
 - (formule de), 14, 43
- Bode
 - (Hendrik W.), 21
 - (construction du diagramme de), 48
 - (diagramme asymptotique de), 21
 - (diagramme de (...) de l'intégrateur), 49
 - (diagramme de (...) du dérivateur), 48
 - (diagramme de (...) du moteur), 51
 - (diagramme de ... du PID), 34
 - (diagramme de), 21, 27, 30, 33, 48
 - (plan de), 27
- Bouclage
 - proportionnel, 33
- Boucle, 3, 5, 13
 - automatique, 4
 - fermée, 4
 - manuelle, 3
 - ouverte, 4, 13, 27

- Canonique (modèle), 16
- Capteur, 3, 5, 13, 59
- Caractéristique statique, 9, 38
- Causal (système), 13
- Causalité, 9
- Chaîne directe, 13, 14, 24, 27, 30, 33
- Classe
 - d'un modèle, 31, 53, 55
 - d'un système, 31, 53
- Classe 1
 - (système de), 33, 34
- Coefficient
 - d'amortissement, 18, 27
 - de surtension, 23
- Commande, 2, 6, 29
 - (loi de), 1, 4
 - des systèmes bouclés, 29
 - par retour unitaire, 29
- Compensateur, 29
- Compensation de pôle, 33, 54, 56
- Comportement exponentiel, 44
- Conditions initiales, 12
- Consigne, 29, 31
- Constante de temps, 12, 16, 55
 - du filtrage, 60
- Contre-réaction, 3
- Correcteur, 3, 29
- Critère
 - de Nyquist, 27
 - des racines, 26, 45
 - du revers, 27, 30
- Critique
 - (gain), 28
 - (pulsation), 27, 30, 56

- Décalage fréquentiel (théorème du), 10
- Décroissance exponentielle, 45
- Dépassement, 20, 59
- Déphasage, 21, 30
- Dérivée
 - filtrée, 59
 - première, 8
 - seconde, 8
- Dérivateur, 48
 - (pseudo-), 50
- Dérivation, 9, 59
 - (opérateur de), 9, 12
 - (théorème de la), 9
 - pure, 59
- Dirac
 - (Paul Adrien Maurice), 15
 - (impulsion de), 10, 15, 41
- Domaine de sommabilité, 40

- Ecart, 29, 53
- Echelle logarithmique, 21
- Echelon, 31
 - d'amplitude E, 10
 - unitaire, 16
- Effet
 - dérivé, 35
 - intégral, 35
 - proportionnel, 35
- Eléments simples (décomposition en), 16, 20, 44, 46
- Entrée, 2
- Equation
 - caractéristique, 12
 - différentielle, 8, 12
 - homogène associée, 16
- Equilibre
 - (état d'), 25
 - asymptiquement stable, 26
 - instable, 26
 - simplement stable, 26
- Erreur, 31
 - de position, 31
 - de vitesse, 31
 - statique, 31, 54
- Etat d'équilibre, 25
 - asymptotiquement stable, 26
- Facteur de surtension, 23
- Filtrage
 - (constante de temps du), 60
 - de la dérivée, 59
- Filtre
 - passé-bas, 23, 51
- Fonction
 - causale, 9
 - du temps, 9
- Fonction de transfert, 5, 7, 8, 10, 13, 21, 46
 - en boucle fermée, 13
 - propre, 13
 - strictement propre, 13
- Fonctionnement (point de), 9, 38
- Fonctions de transfert
 - (association de), 13
 - en parallèle, 13
 - en série, 13, 24
- Gain, 30
 - critique, 28, 58
 - en décibels, 21
 - harmonique, 21
 - infini, 31
 - proportionnel, 30
 - statique, 16, 18, 43, 55
- Heaviside
 - (Oliver), 16
 - (fonction de), 16, 40
- Impulsion de Dirac, 10
- Instabilité, 26, 33, 35
- Instable
 - (équilibre), 26
 - (réponse), 18
 - (système), 58
- Intégrateur, 31, 33, 49, 53
- Intégration, 10
 - (opérateur d'), 10
 - (théorème de l'), 9
- Juste oscillation (méthode de la), 57, 58
- Laplace
 - (Pierre Simon de), 9
 - (domaine de), 9
 - (plan de), 27, 40
 - (tableau de transformées de), 10
 - (transformée de), 9, 40
 - (transformée inverse de), 10, 42
 - (transformation de), 9, 12, 40
 - (transformation inverse de), 42
 - (variable de), 9
- Linéaire
 - (approximation), 40
 - (loi), 38
 - (modèle), 9, 38
 - (zone), 39
- Linéarisation, 40
- Linéarité, 9
- Marge
 - de gain, 28
 - de phase, 27, 30, 31, 33, 35, 56
 - de stabilité, 27, 30, 56
 - de stabilité absolue, 27
- Mesure, 3, 5
- Mesures physiques, 5
- Modélisation, 1, 5, 7
- Modèle, 1, 2
 - canonique, 16, 51
 - canonique de deuxième ordre, 18
 - canonique de premier ordre, 51, 55
 - de deuxième ordre, 18
 - de premier ordre, 16, 21, 22
 - linéaire, 2, 9, 38
 - linéarisé tangent, 38
 - non linéaire, 38
- Moteur
 - électrique, 7, 17, 21, 31
 - à commande d'induit, 7
 - à courant continu, 5, 7, 10, 19, 25, 51, 55

- Nichols, 35
- Non linéaire (élément), 9
- Nyquist (critère de), 27
- Opposition de phase, 51
- Ordre du système, 12
- Oscillateur, 18
- Oscillations, 4, 18, 19, 27, 45
- Période critique, 58
- Pôle
 - (compensation de), 33, 54, 56
 - complexe, 19, 45
 - distinct, 44
 - dominant, 19, 20, 45
 - du système, 12, 19, 26, 33, 44, 45
 - lent, 45
 - multiple, 44, 46
 - réel, 19, 45
 - rapide, 19
- Paradoxe, 4, 5, 31
- Parallèle (régulateur PID sous forme), 34
- Perturbation, 2, 26, 33, 53
 - (rejet de), 33, 53
- Phase, 21, 30
 - (marge de), 30, 31, 33, 35
 - (opposition de), 51
- PID
 - (diagramme de Bode du), 34
 - (régulateur), 6, 33, 57
- Point
 - de fonctionnement, 9, 38
 - de polarisation, 38
- Polarisation (point de), 38
- Polynôme caractéristique, 12
- Position (erreur de), 31
- Précis (système), 31
- Précision, 4, 31, 33, 56
 - d'un système bouclé, 31
- Principe de superposition, 40
- Proportionnel
 - (bouclage), 33
 - (gain), 30
- Propre
 - (fonction de transfert strictement), 13
 - (fonction de transfert), 13
- Pseudo-dérivateur, 50
- Pulsation
 - critique, 27, 30, 56
 - de cassure, 22
 - de coupure, 22
 - de résonance, 23
 - propre non amortie, 18
- Référence, 29
- Régime
 - permanent, 17, 31, 33, 43
 - transitoire, 17
- Réglage
 - des systèmes bouclés, 29
- Régulateur, 3, 29
 - PD, 56
 - PI, 33, 55
 - PID, 6, 33, 56, 57, 59
 - proportionnel, 30
- Régulateur PID
 - sous forme parallèle, 34
 - sous forme série, 34
- Régulation, 4
 - proportionnelle, 30
- Réponse, 5, 8
 - (temps de), 4
 - apériodique, 18
 - d'un système, 15
 - divergente, 18
 - fréquentielle, 5, 20, 27, 48
 - harmonique, 5, 20, 46, 48
 - impulsionnelle, 15, 44
 - indicielle, 16, 45, 56
 - (méthode de la), 57
 - non amortie, 18
 - pseudo-périodique, 18
 - temporelle, 5
- Résidu, 44
- Rétro-action, 3, 13
- Racines (critère des), 26
- Raideur, 30
- Rampe, 10, 31
- Rapidité, 27, 30
 - d'un système, 55
- Rejet de perturbation, 53
- Retard
 - (théorème du), 10
 - pur, 10, 40, 57
- Retour
 - dynamique, 13
 - non unitaire, 14
 - unitaire, 13, 29
- Revers (critère du), 27, 30
- Série (régulateur PID sous forme), 34
- Saturation, 39
- Schéma-bloc, 13
- Signal
 - analogique, 2
 - continu, 2
 - non quantifié, 2
- Simplement stable (équilibre), 26
- Sommabilité

- (abscisse de), 40, 42
- (domaine de), 40, 42
- Sortie, 2
- Stabilité, 4, 6, 19, 20, 27, 30, 45
 - (marge de), 27, 30
 - asymptotique, 26
 - asymptotique d'un état d'équilibre, 26
 - asymptotique d'un système, 26
 - d'un état d'équilibre, 25
 - simple, 26
- Stable
 - (modèle), 26
 - (système), 26
- Superposition (Principe de), 40
- Superposition (principe de), 2
- Surtension
 - (coefficient de), 23
 - (facteur de), 23
- Système, 1
 - autonome, 25, 26
 - causal, 13
 - continu, 2
 - de deuxième ordre, 18
 - de premier ordre, 16, 21, 22
 - linéaire, 3
 - monovariable, 3
 - précis, 31
- Temps
 - (constante de), 12, 55
 - de réponse, 4, 17, 27
- Théorème
 - de l'intégration, 9
 - de la dérivation, 9
 - de la valeur finale, 10, 43
 - de la valeur initiale, 10
 - du décalage fréquentiel, 10
 - du retard, 10
- Transfert (fonction de), 10
- Transformée de Laplace, 9
- Transformation de Laplace, 9
- Transistor à effet de champ, 38
- Transmittance, 10
- Type, 33
 - d'un modèle, 31, 53
 - d'un système, 31, 53
- Valeur finale (théorème de la), 10, 43
- Valeur initiale (théorème de la), 10
- Ventilateur, 4
- Vitesse
 - (erreur de), 31
- Zéro du système, 12, 20, 33, 44, 45
- Ziegler, 35
 - Ziegler-Nichols, 59
 - (méthodes de), 35, 57
 - (première méthode de), 57
 - (seconde méthode de), 57, 58