MODULE TRC1

Préparation aux concours d'écoles d'Ingénieurs.

COURS – TD – TP 1

1) INTRODUCTION

Nous allons reprendre les bases du traitement du signal et le premier cours est destiné à rappeler la correspondance entre le spectre en amplitude d'un signal périodique et son développement en série trigonométrique, appelée Série de Fourier.
Ceci doit permettre dans un second temps de synthétiser différents signaux périodiques à partir du relevé de leurs spectres.

Nous allons à présent rappeler quelques généralités sur l'analyse de Fourier. La décomposition en série de Fourier d'un signal périodique de période T_0 (ou à durée limitée sur un intervalle T_0) s'écrit :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \exp\left(i2\pi n \frac{t}{T_0} \right) \tag{1}$$

$x(t)$: signal périodique de période T_0.
x_n : coefficients de Fourier de $x(t)$.

Ces coefficients donnent une représentation en fréquence ou spectrale du signal. Pour passer de la représentation temporelle à la représentation spectrale, on utilise la formule suivante :

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) \exp\left(-i2\pi n \frac{t}{T_0} \right) dt \tag{2}$$

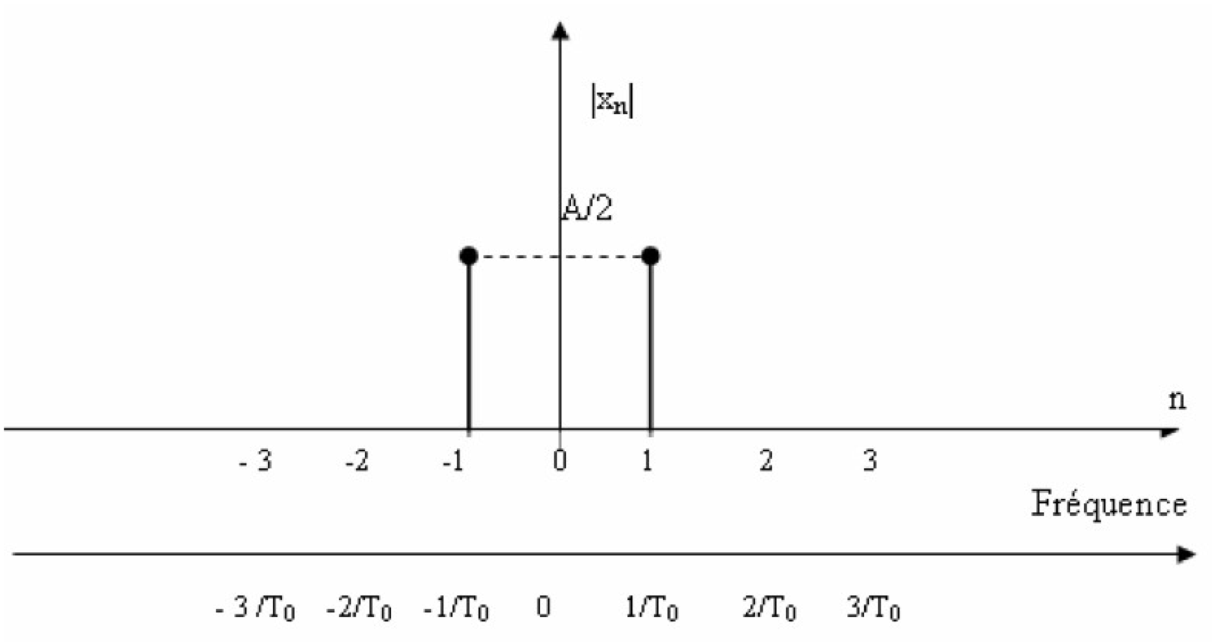
$1/T_0$: représente une fréquence appelée fondamentale, et de manière plus générale on nomme $n^{ième}$ harmonique la fréquence correspondant à n/T_0.

Prenons une fonction cosinus comme exemple pour calculer le spectre d'un signal périodique à partir des séries de Fourier :

$$x(t) = A\cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} \right) \tag{3}$$

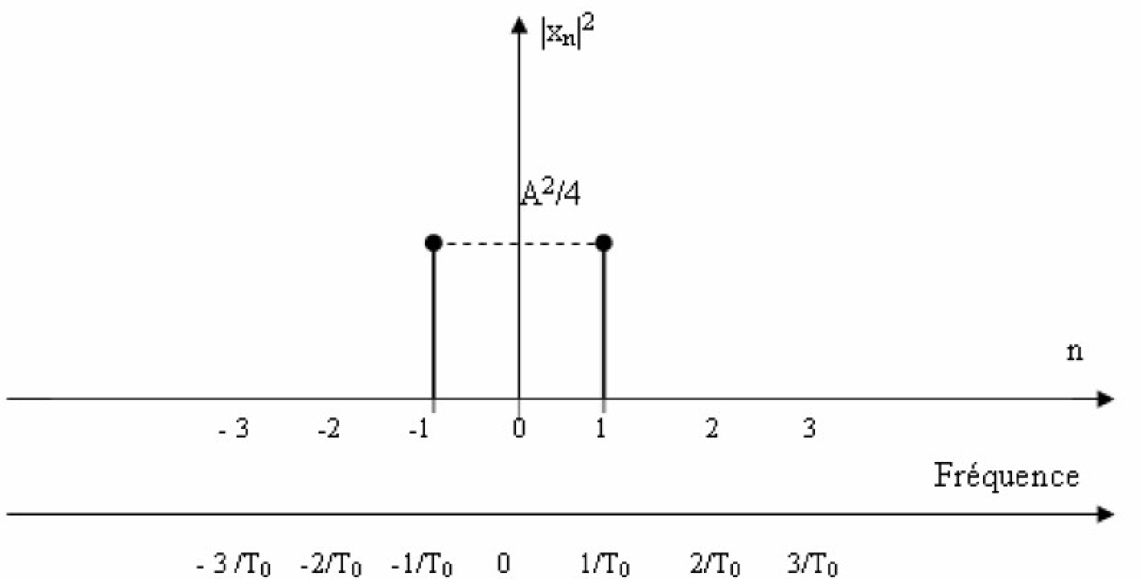
T_0 : période
A : amplitude

En utilisant l'équation (2) pour calculer les coefficients de Fourier, nous obtenons :
$x_n = A/2$ pour $n = \pm 1$ et $x_n = 0$ pour n différent de ± 1
Le spectre en amplitude est donné par la norme de x_n et peut être tracé de la façon suivante :



On remarque que ce signal périodique n'est constitué que d'une fondamentale, il est monochromatique.

Le domaine des fréquences négatives n'a aucune signification physique, il est dû aux fonctions exponentielles complexes introduites dans la définition des séries de Fourier. Pour les signaux réels, le spectre en amplitude sera toujours une fonction paire. Les analyseurs de spectre délivrent plus généralement le spectre en puissance qui est représenté ci-dessous dans le cas de la fonction cosinus



Cette représentation permet de faire un calcul très simple de la puissance moyenne totale par le théorème de Parseval :

$$P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x_n^2\right| \quad \mathbf{(4)}$$

Le résultat $P=A^2/2$ est alors immédiat à partir du spectre représenté précédemment.

Relations entre la série de Fourier et la décomposition en série trigonométrique.

Pour obtenir la relation entre les coefficients x_n et les coefficients en cosinus (a_n) et les coefficients en sinus (b_n), on remplace la fonction exponentielle complexe dans la formule (1) par cosinus + i sinus.

Ensuite, on identifie le résultat obtenu avec le développement en série trigonométrique donné ci-dessous :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) \quad (5)$$

On obtient alors la relation suivante entre les coefficients x_n et les valeurs de a_n et b_n :

$$x_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad \text{pour n différent de 0.}$$

$$x_0 = a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)dt \quad (6)$$

Les relations donnant les valeurs de a_n et b_n sont obtenues à partir des équations (6) et (2) :

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)\cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right)dt \quad \mathbf{(7)}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)\sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right)dt \quad \mathbf{(8)}$$

Les coefficients a_n et b_n ne sont définis que pour des valeurs de n positives. Dans le cas des signaux réels (à partie imaginaire nulle) une relation simple provenant de la propriété de symétrie hermitienne permet de calculer les coefficients x_n pour des indices n négatifs à partir des valeurs de x_n pour n positif :

$$\boxed{x_{-n} = x_n^*}$$

En appliquant ces relations à notre signal sinusoïdal, le seul coefficient différent de 0 est a_1=A. Ce résultat s'obtient également de façon très simple dans ce cas particulier en identifiant les équations (3) et (5).

<u>Relation entre la transformée de Fourier et les coefficients de Fourier pour les signaux périodiques.</u>

Il est également possible de calculer la transformée de Fourier pour un signal périodique de période T_0, le résultat obtenu donne en réalité les mêmes informations que les coefficients de Fourier, ceci va être démontré à présent :

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-i2\pi ft)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{T_0} t\right)\exp(-i2\pi ft)dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i2\pi\left(f - \frac{n}{T_0}\right)t\right)dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

<u>Propriétés de la série trigonométrique :</u>

Il existe de nombreux cas où les coefficients a_n et b_n se calculent très rapidement :

a) pour un signal réel et pair tous les coefficients b_n sont nuls seuls les coefficients a_n sont différents de zéro.

b) pour un signal réel et impair tous les coefficients a_n sont nuls seuls les coefficients b_n sont non nuls. Les valeurs de a_0 ne suivent pas les conditions précédentes, a_0 représente la valeur moyenne du signal.

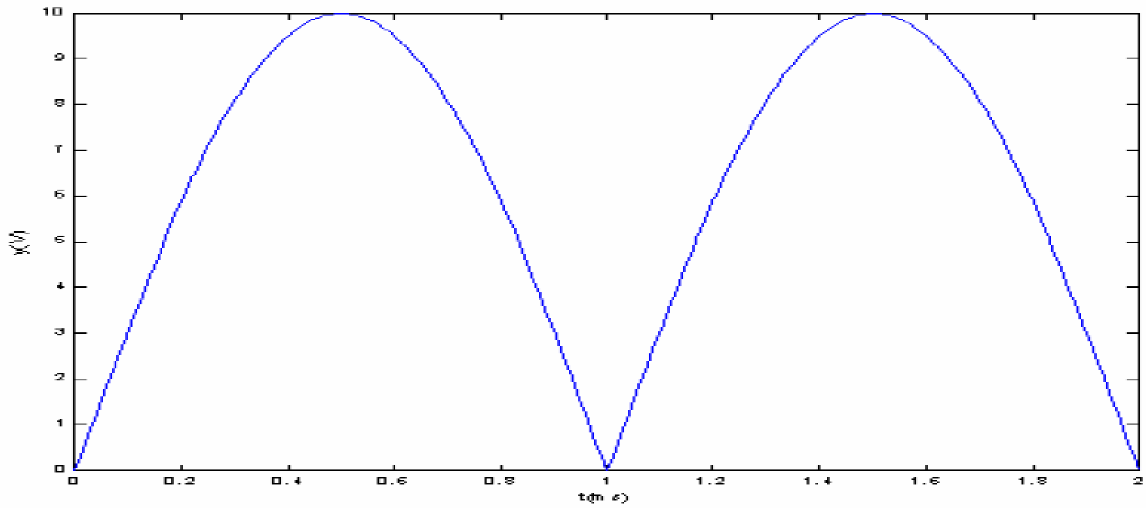
Module Complémentaire TR – C1
Traitement Numérique du Signal

TD n°1 : Transformée de Fourier et convolution

1) Calcul des coefficients en série trigonométrique

Calculer les coefficients en série trigonométrique des signaux suivants, prenez soins à bien relever les périodes des signaux (attention l'axe des abscisses est donné en millisecondes):

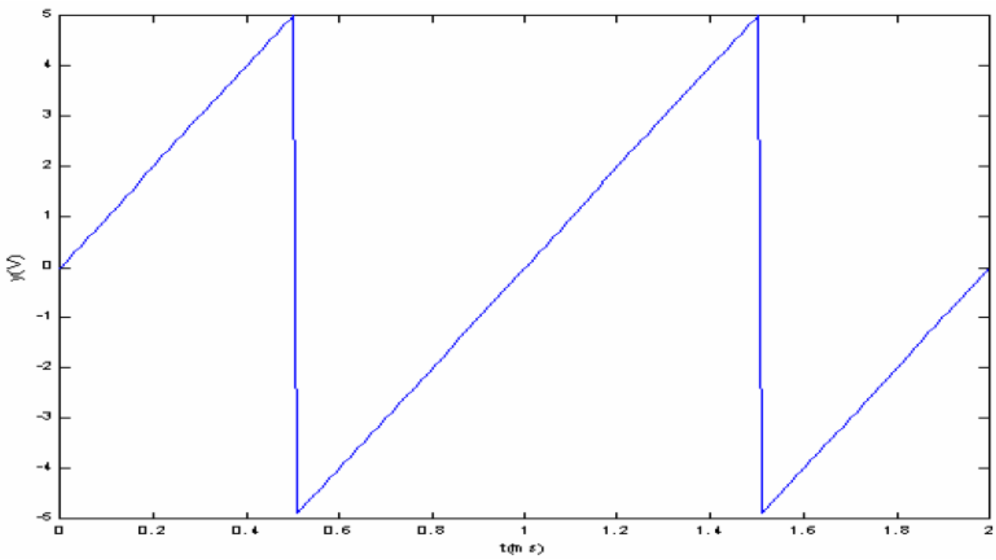
a) Sinusoïde redressée



Montrer que :

$$a_n = \frac{40}{\pi\left(1-(2n)^2\right)},\quad a_0 = \frac{20}{\pi}$$ et $b_n=0$ pour tout n.

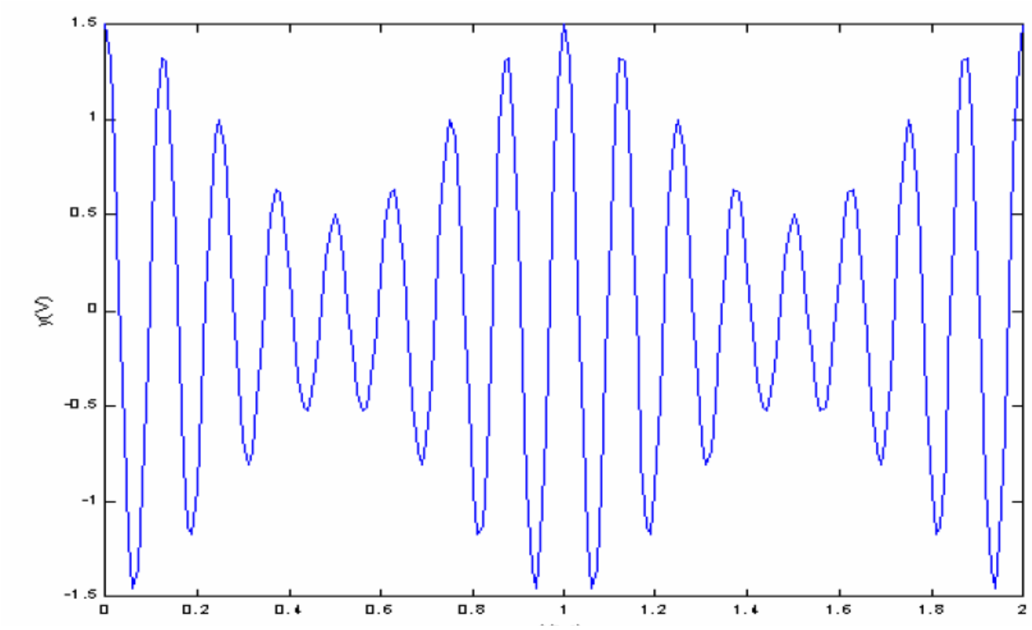
b) Rampe



Montrer que:

$$b_n = -10\frac{\cos(\pi n)}{\pi n} \qquad \text{et } a_n=0 \text{ pour tout n.}$$

c) Signal modulé en amplitude



Ce dernier signal peut être modélisé par l'équation:

$$y(t) = (1 + m\cos(2\pi f_m t))\cos(2\pi f_p t)$$

avec f_m=1 kHz: fréquence du signal modulant, f_p=8kHz: fréquence de la porteuse, m indice de modulation fixé arbitrairement à 0.5 dans le cas présent.

Pour trouver la décomposition en série trigonométrique de ce signal, il n'est pas nécessaire d'utiliser les formules 7 et 8 pour calculer les coefficients a_n et b_n, il suffit de développer le produit des fonctions cosinus apparaissant dans l'équation précédente. Le signal y(t) peut alors s'exprimer comme la somme de fonctions cosinus, on réalise donc aussi la décomposition de ce signal en somme de plusieurs sinusoïdes que l'on peut appeler série trigonométrique.

- Déterminer la période du signal modulé ainsi que les coefficients de Fourier.

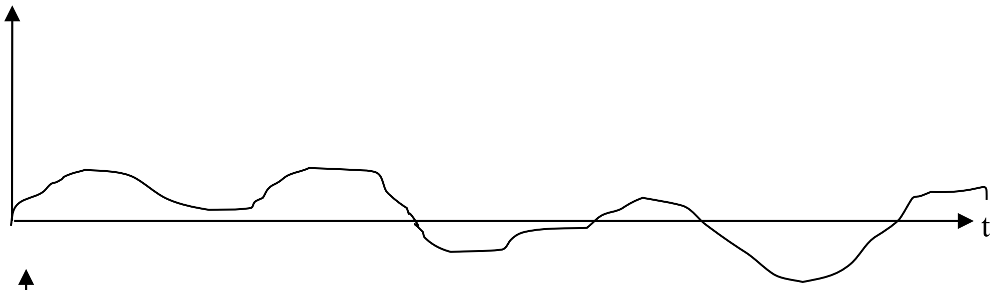
d) Peigne de Dirac

Le peigne de Dirac a été étudié en cours et nous avons déterminé la transformée de Fourier de ce signal et donc ses différents coefficients de Fourier.
- Calculer les coefficients de Fourier d'un peigne de Dirac de période égale à 1 seconde.
- En déduire les valeurs des coefficients a_0, a_n et b_n.

2) Convolution

Soit la fonction t_> x(t) un signal quelconque et y(t) une fenêtre rectangulaire :

$$y(t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{Rect}_T\left(t - T/2\right)$$



a) Rappeler la formule de convolution

b) Tracer le résultat de la convolution. A quoi cela correspond t’il ?

2) Transformée de Fourier Discrete

Le but de ce cours est d'interpréter correctement les résultats obtenus par le calcul d'une transformée de Fourier discrète dans le cas de signaux périodiques. Il faudra pouvoir lier ces résultats aux coefficients de Fourier et à la transformée de Fourier du signal échantillonné. A titre d'illustration on traitera des cas simples de signaux périodiques et on verra tout l'intérêt de l'analyse spectrale sur des signaux périodiques bruités. Nous verrons comment le choix de la fréquence d'échantillonnage et du nombre d'échantillons influe sur les spectres obtenus. Nous avons vu qu'on pouvait facilement exprimer la transformée de Fourier X(f) à partir des coefficients de Fourier x_n pour un signal périodique x(t) :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \tag{2.1}$$

avec T_0 : la période de x(t)
et δ : l'impulsion de Dirac ou impulsion unité

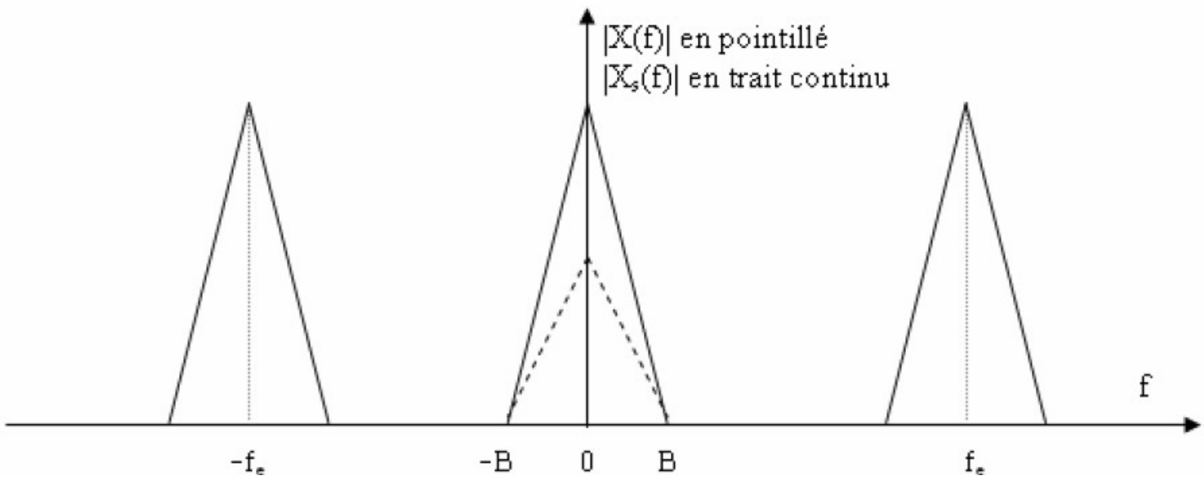
En théorie, échantillonner le signal x(t) revient à le multiplier par un peigne de Dirac $\delta_{Te}(t)$ de période égale à la période d'échantillonnage T_e. On notera $x_s(t)$ le signal échantillonné, il s'écrira en fonction de x(t) sous la forme :

$$x_s(t) = x(t)\delta_{Te}(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \tag{2.2}$$

La transformée de Fourier de $x_s(t)$ ($X_s(f)$) s'écrira alors comme le produit de convolution de X(f) avec la transformée de Fourier du peigne de Dirac qui est également un peigne de Dirac :

$$\begin{aligned} X_s(f) &= X(f) * f_e \delta_{fe}(f) \\ &= f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e) \end{aligned} \tag{2.3}$$

La simplification opérée pour passer de la première à la deuxième ligne de l'équation (3) est due à la propriété d'élément neutre de l'impulsion de Dirac pour la convolution. La figure suivante illustre la relation existant entre X(f) et $X_s(f)$. Attention la fonction $X_s(f)$ étant périodique de période f_e, il est impossible de la représenter dans son intégralité (de $-\infty$ à $+\infty$).



Cette figure montre bien qu'il est nécessaire d'échantillonner le signal à une fréquence f_e supérieure ou égale à 2 fois la bande limitée du signal B de manière à éviter un recouvrement de spectre (théorème de Shannon). On comprend dès lors l'intérêt d'un filtre anti-repliement à placer avant l'échantillonneur pour limiter le spectre du signal. On conçoit également qu'une simple opération de filtrage passe-bas puisse permettre de reconstruire le signal initial à partir de ces échantillons. La figure précédente montre également une propriété importante de $X_s(f)$: la périodicité.
La transformée de Fourier discrète (X[n]) de x(t) est directement liée à la transformée de Fourier du signal échantillonné ($X_s(f)$) par la relation suivante :

$$X[n] = X_s\left(f = \frac{n}{T_0}\right) = \sum_{m=0}^{N-1} x(t_m)\exp\left(-i2\pi\frac{mn}{N}\right) \tag{2.4}$$

Cette équation s'obtient en simplifiant l'expression de la transformée de Fourier de $x_s(t)$ calculée en $f=n/T_0$. T_0 désigne ici le temps de mesure du signal, N représente le nombre de points échantillonnés sur cette durée, et $t_m=mt_e$ où t_e est la période d'échantillonnage qui correspond à T_0/N. La majeure partie des problèmes d'analyse spectrale par calcul de transformée de Fourier discrète provient de cette limitation de durée du signal qui est évidemment indispensable. En effet limiter la durée de x(t) revient à multiplier x(t) par une fonction porte de largeur égale à T_0. X(f) sera alors convoluée par la transformée de Fourier de cette fonction porte qui est un sinus cardinal. Au lieu d'avoir un spectre de raies pour un signal périodique on aura des fonctions sinus cardinales présentant différents lobes (un lobe principal ou central et des lobes secondaires) qui donnent lieu à l'effet Gibbs. Les problèmes de résolution spectrale en analyse par transformée de Fourier discrète sont liés au recouvrement possible de ces lobes.

A titre d'exemple, prenons le cas d'une fonction cosinus de fréquence et d'amplitude unité :

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) \quad avec\, f_1 = 1Hz$$
$$X(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)\right) \tag{2.5}$$

Le spectre en amplitude de ce signal périodique est donc formé d'une impulsion de Dirac dans les fréquences positives située en f_1=1Hz. Pour calculer une TFD sur ce signal, on est amené à limiter le nombre d'échantillons du signal, donc la durée de celui-ci. On note alors x`(t) le signal x(t) limitée à un intervalle de temps allant de 0 à T_0:

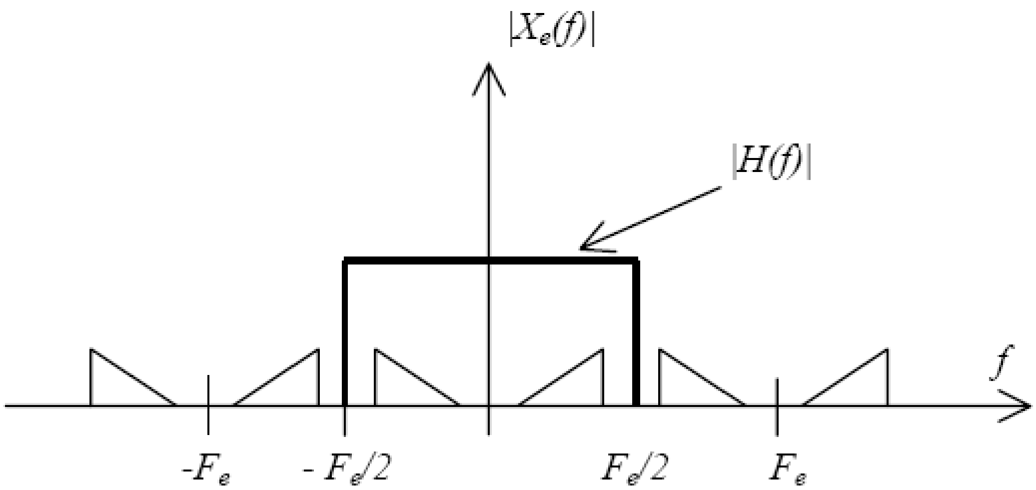
Le théorème de reconstruction

L'échantillonnage a introduit une périodicité du spectre. Pour reconstituer le signal d'origine on peut "travailler" dans le domaine spectral pour retrouver le spectre du signal analogique. Il ne restera plus alors qu'à effectuer une transformation de Fourier inverse pour reconstituer le signal analogique temporel.

Dans le domaine spectral, il suffit simplement de supprimer les bandes images du signal numérique. En introduisant un filtre idéal $H(f)$, dont la fonction de transfert est définie par :

$$H(f) = \frac{1}{F_e}, \text{ pour } f \in \left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}\right]$$

$$H(f) = 0, \text{ pour } f \notin \left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}\right]$$



Le signal en sortie du filtre correspond au produit de convolution du signal $x_e(t)$ par la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre $H(f)$.

$$\text{or } h(t) = \frac{1}{F_e}\int_{-\infty}^{+\infty} H(f)e^{+j2\pi ft}\,df = \frac{1}{F_e}\int_{-F_e/2}^{F_e/2} e^{+j2\pi ft}\,df = \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e}$$

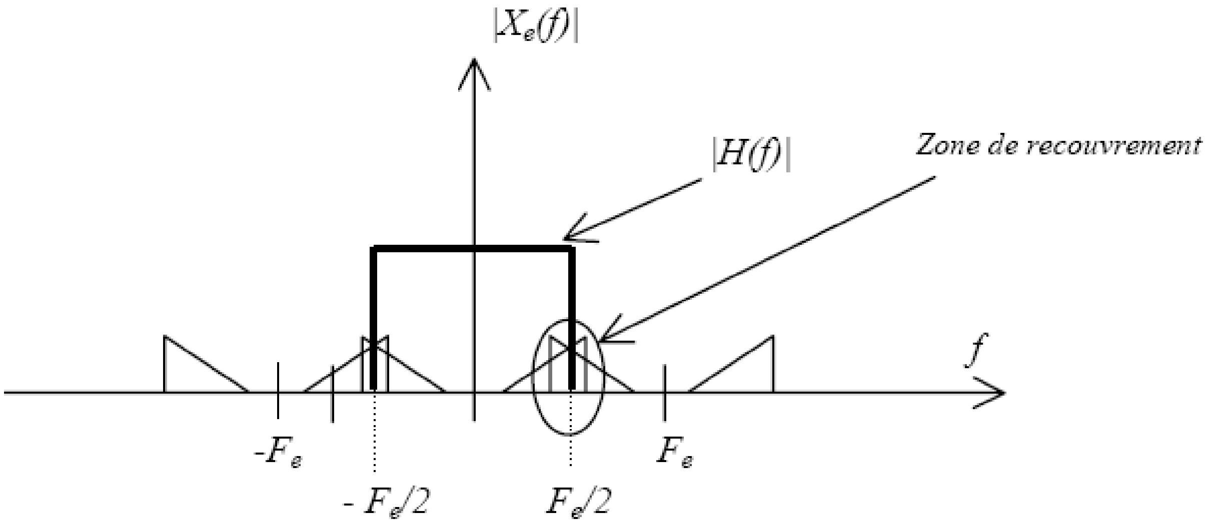
On a donc :

$$\hat{x}_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(\tau)\delta(\tau - nT_e)\right]\frac{\sin \pi F_e(t-\tau)}{\pi F_e(t-\tau)}\,d\tau$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_e(nT_e) \frac{\sin \pi F_e (t - nT_e)}{\pi F_e (t - nT_e)}$$

Pour cela il faut donc s'assurer que l'on peut reconstituer le spectre du signal analogique en filtrant le spectre du signal numérique. Cette condition est vérifiée si et seulement si le spectre d'origine ne contient pas de composantes aux fréquences supérieures ou égales à $F_e/2$.
Si ce n'est pas le cas, les bandes images se chevauchent, on dit alors qu'il y a repliement de spectre et le signal reconstitué $\hat{x}_a(t)$ est différent du signal d'origine.



TP1

Ce TP est l'application du cours 1 et du cours 2. Cours 1 : Série de Fourier Numérique, cours 2 : Convolution avec un signal rectangulaire.

Tracer un signal sinusoidal et mesurer le spectre quand on respecte le nombre de points Faire du Zeros padding et voir ce qui se passe.

La fonction fft de Matlab (help fft)

Il existe différents algorithmes de fft. La fft appliquée par Matlab est donnée ci-dessous à partir de l'aide. Si $X = fft(x)$ et $x = ifft(X)$, x et X vecteurs de longueur N :

$$X(k) = \sum_{j=1}^{N} x(j) W_N^{(j-1)(k-1)} \qquad x(j) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{k=1}^{N} X(k) W_N^{-(j-1)(k-1)}$$

avec $W_N = e^{-2\pi i/N}$. Si N n'est pas une puissance de 2, Matlab complète le vecteur argument avec des zéros (zéro padding) à la puissance de deux immédiatement supérieure.

Le faible coût de calcul provient des propriétés de périodicité et de symétrie du terme $W_N^{(j-1)(k-1)}$ par rapport aux indices j et k.

EXERCICE

Construire l'allure de la fft de $s(t) = \cos(100\pi t)$ en tenant compte dans l'ordre :

(1) de l'échantillonnage du signal : $T = 1 ms$

(2) de la fenêtre temporelle rectangulaire de 1024 points utilisée qui dure $F = 1023/1000 = 1.023 s$

(3) du nombre $N = 1024$ de points calculés sur le spectre.

Script Matlab inversant la transformée de Fourier

Le script suivant affiche le spectre d'un signal carré et réalise la FFT inverse (instruction ifft) qu'il affiche:

```
fs=22050;
Ns= 1024;%
t=[0:Ns-1]/
f =440;
s = sign(co
%signal car
spectre=fft
%calcul du
% avec la f
freq=-Ns/2:
freq=freq*f
subplot(2,1
plot(freq,a
subplot(2,1
plot(t,s,t,
axis([0 t(1
```