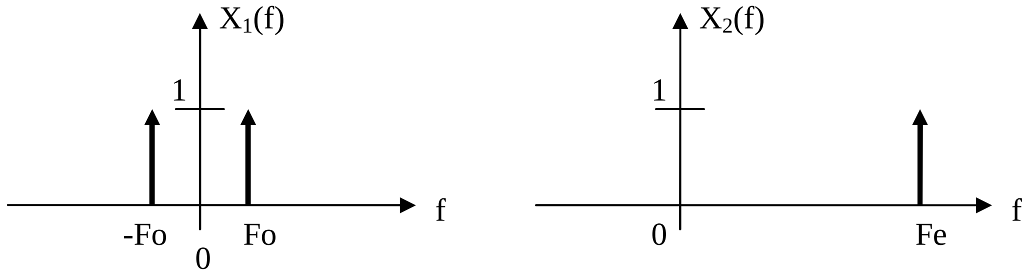
Département RT- IUT de Poitiers- Site de Châtellerault
1ère année. 2007-2008. Télécommunications : Module T1

TD Traitement du Signal n°3 : Convolution et échantillonnage

Exercice n°1 : Produit de convolution

Soient deux fonctions dont on donne les transformées de Fourier : $X_1(f)$ et $X_2(f)$.



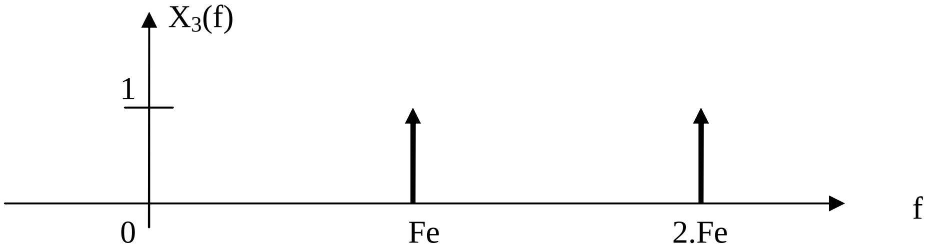
1. Calculer graphiquement le produit de convolution $X_{12}(f)$ entre $X_1(f)$ et $X_2(f)$:
   $X_{12}(f) = X_1(f) * X_2(f)$.

   On rappelle la définition du produit de convolution :

   $$X_{12}(f) = X_1(f) * X_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\tau).X_2(f-\tau)d\tau$$

2. Donnez l'expression de $X_2(f)$.
   Donnez l'expression de $X_{12}(f)$ en fonction de $X_1(f)$ et de Fe uniquement.
   Nous retrouvons une propriété essentielle du produit de convolution avec un Dirac.

3. En déduire le produit de convolution $X_{13}(f)$ entre $X_1(f)$ et $X_3(f)$, $X_3(f)$ étant donnée ci-dessous.



Exercice n°2 : Echantillonnage, théorème de Shannon , filtre anti-repliement

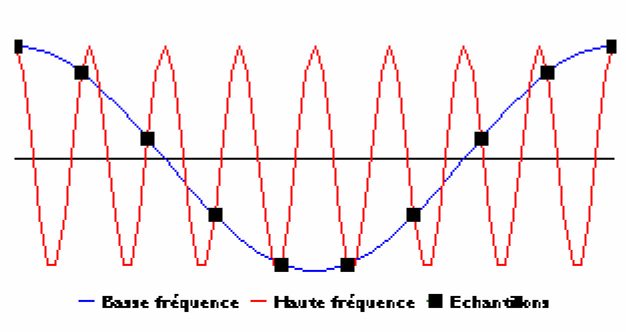
Partie 1 : aspect temporel

Soit un signal x(t)=2.sin(2πFt) avec F=440Hz.

1. On échantillonne s(t) à 3520Hz. Combien y a-t-il d'échantillons par période de x(t)? Représentez x(t) et $x_e(t)$ qui est s(t) échantillonné à Fe=3520Hz.
2. D'après vous, à partir de $x_e(t)$, est-il possible de reconstituer x(t) (peut-on facilement faire passer une courbe sinusoïdale entre les points échantillonnés) ?
3. Recommencez en échantillonnant le signal à Fe=1760Hz.

Si l'on diminue la fréquence d'échantillonnage en dessous de 2.F=880Hz, on ne pourra plus récupérer correctement le signal.

Si l'on *sous-échantillonne* (c'est à dire Fe < F), on reconstituera un signal à une fréquence qui n'est pas F. Voir l'exemple ci-dessous :

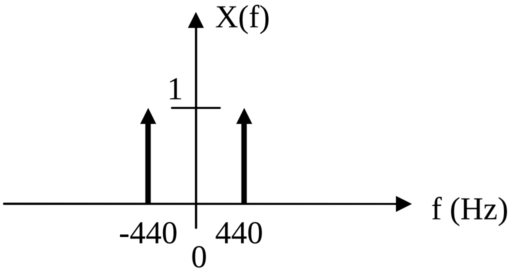


Ceci peut également être démontré en étudiant l'aspect fréquentiel de l'échantillonnage.

Partie 2 : aspect fréquentiel, théorème de Shannon, filtre anti-repliement

Le but est ici de comprendre pourquoi le signal audio est échantillonné à 44,1 kHz avant numérisation et stockage sur un CD audio.

La transformée de Fourier X(f) du signal x(t) est donnée ci-dessous en représentation bilatérale :



Soit Xe(f) la transformée de Fourier du signal x(t) échantillonné.

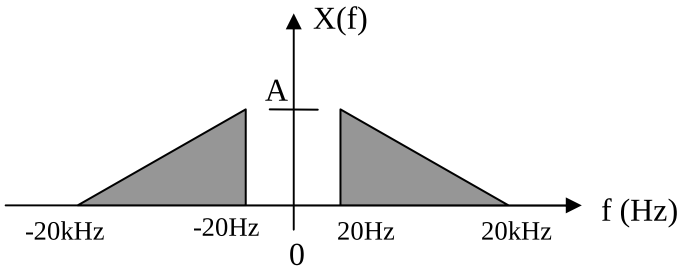
On peut démontrer que $Xe(f) = \frac{1}{Te} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n.Fe)$.

4. On échantillonne ce signal à une fréquence Fe = 44,1 kHz.
   Tracez Xe(f) (l'échelle horizontale de votre graphe ne doit pas forcément être cohérente…)
   Quelles raies doit-on supprimer pour reconstituer le signal (=pour retrouver X(f)) ?
   Quel dispositif électronique va-t-on utiliser pour réaliser cela ?

   Aparte : si l'on fait passer Xe(t) dans un filtre passe-bande qui ne conserve que les raies autour de Fe, quel type de signal obtient-on ?

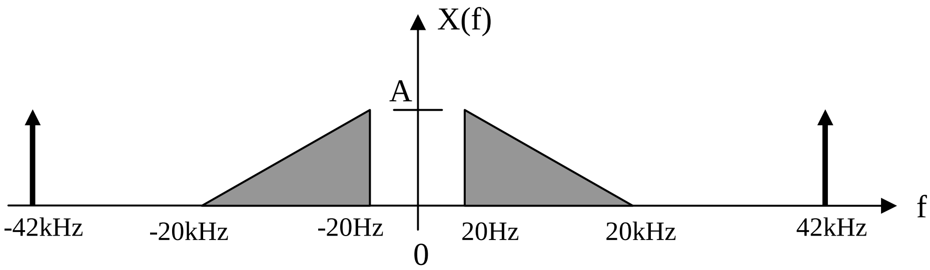
5. On échantillonne maintenant le même signal à une fréquence Fe = 640 Hz. Tracez Xe(f) pour $f \in$ [-440Hz ; 1720Hz].
   Que se passe-t-il lors de la reconstitution du signal avec le dispositif cité précédemment ?

6. Un signal audio réel (musique par exemple) a un spectre qui occupe les fréquences de 20Hz à 20KHz :



   - Représentez le spectre de ce signal échantilloné à 44,1 kHz.
   - Représentez le spectre de ce signal échantilloné à 15 kHz. Comment s'appelle le phénomène observé ?
   - En déduire une condition sur Fe pour pouvoir reconstituer le signal : retrouvez le théorème de Shannon.
   - Est-ce que la fréquence utilisée dans les CD respectent bien ce théorème ?

7. Fe est maintenant fixée à 44,1kHz.
   Le signal à échantillonner est maintenant le suivant (présence d'ultrasons en entrée de l'échantillonneur) :



   - Représentez le spectre du signal échantillonné : Xe(f).
   - Fe étant fixé à 44,1 kHz, déduisez-en une condition sur Fmax, la fréquence maximale contenue dans le spectre X(f) du signal x(t) à échantillonner.
   - Avec quel type de dispositif peut-on être certain de tenir cette contrainte ?
     On l'appelle dans ce cas **filtre anti-repliement**.