

ETUDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

COURS MASTER-2
Commande Robuste et Systèmes Non Linéaires

Launay Frédéric

I) Introduction Système Non linéaire - chaotique

Objectif du cours :

L'idée de ce cours est de vulgariser la notion de systèmes non linéaires et d'analyser leur mise en œuvre en appliquant ceux-ci à la théorie du **chaos**. La difficulté majeure d'un système chaotique (un système chaotique est par nature imprévisible) est d'être capable de synthétiser une loi de commande permettant à un système tierce de reproduire la même trajectoire.

On rappelle que le développement de la stratégie de commande passe par 3 étapes :

- Identification/Modélisation du modèle 'chaotique'
- Synthèse d'une loi de commande
- Analyse de la robustesse (validation de la loi de commande par rapport au bruit et par rapport à l'approximation du modèle)

Découpage du cours

Dans un premier temps, nous allons présenter l'apport d'analyse des systèmes non linéaires par rapport aux systèmes linéaires, mettant ainsi en défaut certaines modélisations actuelles. **Modéliser** est un premier pas, l'objectif de toute modélisation est de fournir un système paramétrable et d'optimiser les performances de ce système (en vue d'applications précises) grâce à une **régulation** ou un **asservissement** par la mise en place de **lois de commande**. A ce titre, nous allons définir les propriétés des systèmes non linéaires, les outils d'études de tels systèmes pour vérifier la **stabilité** de l'asservissement et les méthodes de **commandes robustes** pour garantir les performances souhaitées lors d'un asservissement 'malgré' les caractères non linéaires du modèle.

Avant toute modélisation, il est aussi nécessaire de définir l'environnement du système. **L'environnement du système** revient à délimiter celui-ci par un certain nombre de variables indépendantes d'entrées (**entrées exogènes : excitations et perturbations**) qui conditionnent l'état du système, et par des variables de sortie qui permettent de rendre compte, à tout instant, de la réponse (c'est à dire de l'évolution) du système vis-à-vis des excitations. On rajoute ensuite des entrées de **commande** issues de l'asservissement. Plus le système est complexe, plus il est nécessaire d'établir un réseau d'équations simultanées pour décrire le système. En règle général, le modèle que l'on souhaite établir est issu d'un compromis entre fidélité vis à vis du comportement réel du système à diverses excitations et simplicité. La simplicité est obtenue par des hypothèses de travail et des approximations qui rendent le modèle mathématiquement viable. En physique, lorsque l'on étudie un phénomène, on s'intéresse généralement aux effets prépondérants de celui-ci. Ceci revient souvent à **linéariser** les phénomènes caractéristiques du système étudié (on dit qu'il y a proportionnalité entre la cause et l'effet).

Grâce à la linéarisation du système autour **d'un point de repos (point régulier ou point singulier)**, ou sous certaines hypothèses (approximation de faibles déviations), on peut décrire le système par un modèle mathématique linéaire. Dans ce cadre d'étude, les méthodes fréquentielles (Transformée de Laplace) constituent les outils les plus performants pour l'analyse (Nyquist,

Black Nichols, Bode, Lieu des racines) et la synthèse des asservissements linéaires (Correcteur PID, avance/retard de phase).

Toutefois, aucun système physique n'est rigoureusement linéaire et en dehors du domaine de linéarité, il est nécessaire d'utiliser d'autres méthodes que celles citées ci-avant pour vérifier la stabilité et la robustesse aux perturbations d'un système en boucle fermée.

De plus, la méthode par **linéarisation** est une méthode valide que **localement** autour d'un point de fonctionnement (en règle générale d'un point régulier) et par conséquent, cette méthode ne peut pas être utilisée pour définir un comportement global. De plus, lors de la linéarisation les effets non linéaires sont alors considérés comme perturbateurs et de ce fait négligés. Or, la dynamique apportée par ces effets non linéaires est plus riche que les systèmes linéaires. A titre d'exemple, à la différence des systèmes linéaires qui ne possèdent qu'un seul point d'équilibre, les systèmes non linéaires peuvent posséder **plusieurs points d'équilibre**. De plus, de tels systèmes peuvent être le siège d'oscillations (**cycles limites**) caractérisées par leur amplitude et leur fréquence quelque soient les conditions initiales et sans l'apport d'excitation extérieure alors qu'un système linéaire, pour osciller, doit présenter une paire de pôle sur l'axe imaginaire, condition très fragile vis-à-vis des perturbations et des erreurs de modélisation. On peut aussi constater d'autres phénomènes dans les systèmes non linéaires (**bifurcations**), phénomènes qui représentent une variation de l'évolution du système en terme du nombre de points d'équilibre, de la stabilité lorsqu'un ou plusieurs paramètres (**non autonome**) du modèle varient.

Nous allons introduire ces notions sur des exemples concrets au cours du premier chapitre.

Dans le chapitre 1, nous analyserons de manière globale l'évolution d'un système et nous nous définirons des points locaux particuliers par linéarisation. Nous étudierons ainsi les avantages et les limitations d'un système linéarisé par secteur d'étude.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons des modèles un peu plus complexe, puisque nous prendrons en compte une non linéarité et nous présenterons des outils d'analyse du système.

Dans le troisième chapitre, nous aborderons le problème d'identification d'un système et nous élaborerons les premiers outils d'analyse de la robustesse du système.

Enfin dans le 4^{ème} chapitre, nous focaliserons notre étude sur les systèmes chaotiques.

1.1) Quelques comportements non linéaires: Points d'équilibre multiples

Soit le système modélisé par l'équation différentielle suivante :

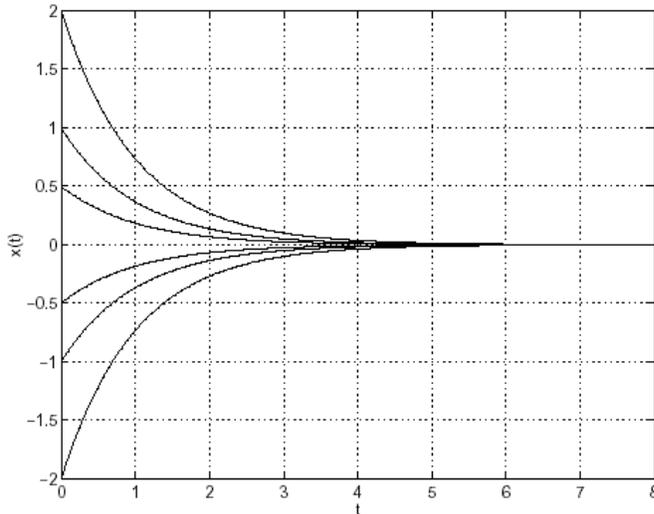
$$\dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t)$$

1 – Calculez le point d'équilibre du système linéarisé pour de faibles perturbations

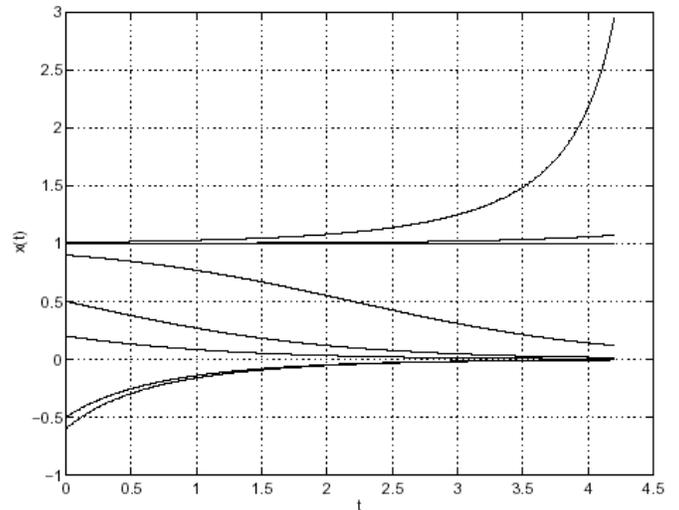
2 – Trouvez la solution analytique de l'évolution de la trajectoire autour de chaque point d'équilibre.

3 – Calculez les points d'équilibre du système Non Linéaire

4 – Trouvez la solution analytique de l'évolution de la trajectoire autour de chaque point d'équilibre.



Solution du système linéarisé



Solution du système non linéaire

Conclusions :

Dans le cas linéaire, le point d'équilibre est stable et les trajectoires d'état pour différentes conditions initiales $x(0)$ décroissent vers l'état d'équilibre.

Dans le cas non linéaire, le point d'équilibre 0 est stable localement puisque à partir de toutes conditions initiales proche de 0 (appartenant à une boucle fermée dans l'espace topologique autour de 0) la solution converge vers 0, mais le système est instable autour de 1 puisque la trajectoire tend vers 0 sauf pour $x_0=1$.

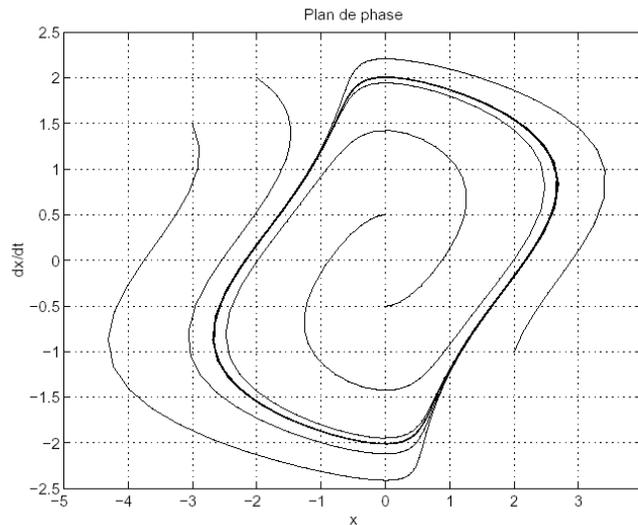
I.2) Quelques comportements non linéaires: Cycles limites

Equation de Van Der Pol

Soit le système suivant :

$$m.\ddot{x}(t) + 2c(x^2 - 1).\dot{x}(t) + k.x(t) = 0, c > 0$$

La simulation de cette équation sous Matlab, nous donne le résultat suivant. On représente en ordonnée la variation de la dérivée en fonction de x



Solution à l'équation de Van Der Pol pour différentes CI

Conclusion :

Cette courbe fermée traduit un cycle limite, on retourne sur le même cycle, quelque soit la condition initiale choisie.

I.3) Quelques comportements non linéaires: Bifurcations

Soit un système non linéaire défini par l'équation non linéaire suivante (Equation non amortie de Duffing).

$$\ddot{x}(t) + \alpha x(t) + x^3(t) = 0$$

- 1- Ecrire l'équation donnant le point d'équilibre
- 2- Selon les valeurs du paramètre α , le nombre de points d'équilibre varie.
Notamment, lorsque $\alpha=0$ à $0+$, on passe d'un système avec un point d'équilibre à un système avec 3 point d'équilibre. On a ainsi une **bifurcation**.

Lors d'une bifurcation, la trajectoire peut évoluer en faisant apparaître

- d'autres points d'équilibre
- une période multiple à la période du signal avant bifurcation
- une multiplicité de la période du signal (signal quasi-périodique)
- un signal chaotique.

1.4) Comportement des points singuliers linéaires : Stabilité locale

Que le système soit linéaire ou linéarisé, on s'intéresse souvent à l'évolution LOCALE de la trajectoire au point de repos. Il s'agit de prévoir l'évolution (asymptotique) de la trajectoire autour du point de repos.

Reprenons le système précédent décrit par :

$$\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) + x^3(t) = 0$$

Posons $x_1 = \dot{x}$ et $x_2 = x$ et écrivons le nouveau système d'équation

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - x_2^3 \end{cases}, \text{ ce système s'écrit sous forme Matricielle : } \dot{X} = A.X + f(X), \text{ avec } X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Les points de repos sont définis par $x_1=0$ et $x_2=0$. Calculé précédemment (paragraphe 1.3) on trouve selon la valeur du paramètre α , les points suivants

$$X = (x, x_1) = (0,0), (\sqrt{\alpha}, 0), (-\sqrt{\alpha}, 0)$$

La forme matricielle du système linéarisé autour d'un point de repos s'écrit :

$$\dot{X} = A_L X$$

La détermination des valeurs propres de A conditionnent l'évolution du système autour du point de repos. En effet, soient λ_1 et λ_2 , les valeurs propres de A, plusieurs cas se présentent selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique associée au calcul des valeurs propres.

Supposons que le discriminant soit non nul, il existe deux valeurs propres distinctes (éventuellement complexes).

La matrice est diagonalisable (déterminant de A non nul), il existe alors une matrice symétrique inversible P telle que : $D_L = P^{-1}MP$ (Matrice équivalente)

On se ramène alors à la résolution du système suivant par changement de base:

$$\dot{Y} = D_L Y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} Y \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases}, \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ réels ou complexes conjugués}$$

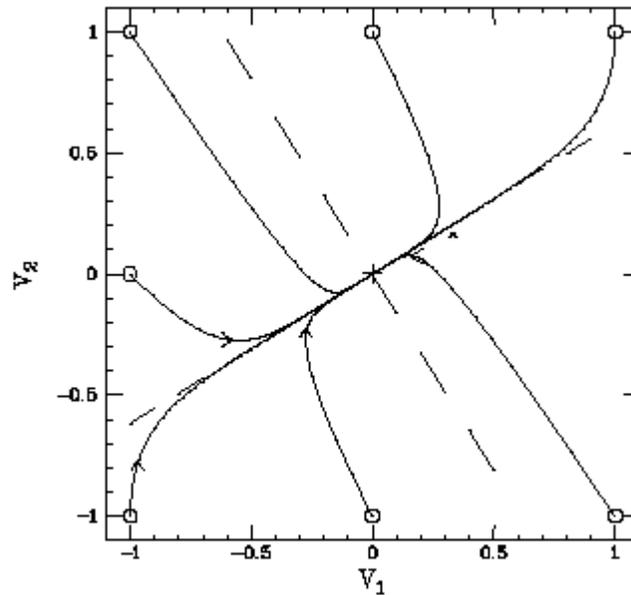
La résolution donne $\begin{cases} y_1 = K_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = K_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$ dans le plan associé aux vecteurs propres (\vec{U}_1, \vec{U}_2)

Par l'équation d'équivalence, on exprime X en fonction de P et Y .

Cas 1 : Le discriminant est positif et les valeurs propres sont négatives

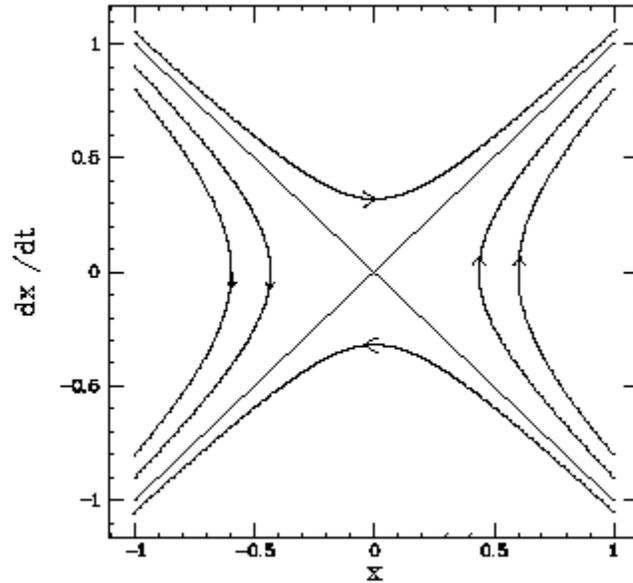
Le déterminant étant positif, les valeurs propres sont réelles. On suppose que les valeurs propres sont à coefficients négatifs, alors y_1 et y_2 tendent vers 0 donc X tend vers 0. le système est stable et la trajectoire tend vers le point de repos (linéarisation autour du point de repos).

On parle de **nœud stable**.



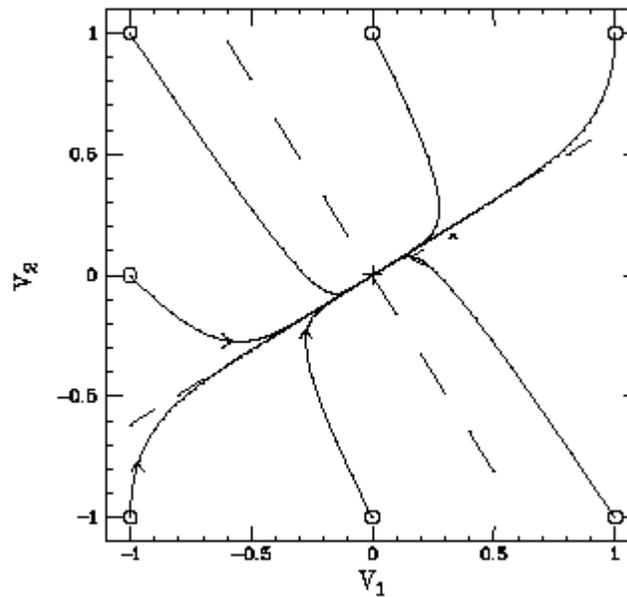
Cas 2 : Le discriminant est positif, une valeur propre est négative (soit λ_1) et l'autre positive.

La première équation dans le plan (\vec{U}_1, \vec{U}_2) converge vers $y_1=0$ quand $t \rightarrow \infty$, la seconde diverge. On parle de **col** (par définition un col est instable).

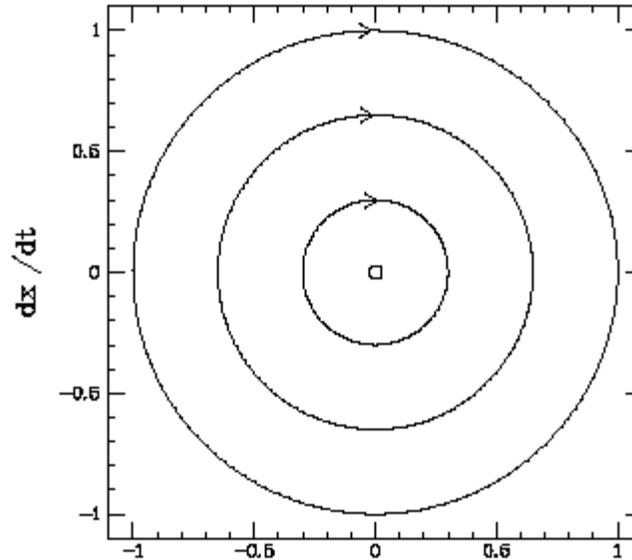


Cas 3 : Le discriminant est positif et les valeurs propres sont positives

Les trajectoires ont mêmes allures que dans le cas 1, mais les équations divergent. On parle de **nœud instable**.



Cas 4 : Le discriminant est négatif, les racines sont des imaginaires pures



Cas 5 : Le discriminant est négatif, les racines sont imaginaires conjugués.

Si la partie réelle est négative, le système subit un frottement. Les trajectoires sont des spirales convergentes vers l'origine. On obtient un foyer stable. Dans le cas où les parties réelles sont positives, les trajectoires forment des spirales divergentes. On obtient un foyer instable.

1.5) *Interprétations*

Comme on peut le constater, la mise en équation de systèmes non linéaires apportent des modifications sur l'évolution de la (des) sortie(s) du système qui ne peuvent être pris en compte par les systèmes linéaires.

Pour asservir de tels systèmes, il est bien entendu nécessaire de prendre en compte ces phénomènes non linéaires. Nous présenterons dans un premier temps deux méthodes classiques pour analyser l'évolution d'un système asservi à partir d'hypothèses limitatrices. La première méthode, appelée Méthode du premier harmonique permet de prévoir approximativement certains comportements non linéaires et se contente de déterminer le cycle limite (amplitude et fréquence). L'avantage de cette méthode est la possibilité d'utiliser les **méthodes fréquentielles** classiques.

La méthode du plan de phase est une **méthode temporelle** limitée aux systèmes d'ordre 2. Outre sa simplicité, l'intérêt de présenter cette méthode est d'introduire des notions (plan de phase) relative à l'étude de tout système non linéaire.

Nous introduirons ensuite la notion de stabilité. Cette notion de stabilité est primordiale pour asservir des systèmes en prenant en compte des erreurs de modélisations. Cela permet d'estimer globalement le fonctionnement du système asservi sans avoir à déterminer les trajectoires.

Pour terminer l'illustration des phénomènes non linéaires, nous allons imaginer un exemple basé sur le mouvement oscillatoire d'un pendule.

Expérience 1 :

Imaginons un exemple simple tel que le mouvement d'un pendule. Ce dernier est modélisé par un système (non linéaire de par la fonction sinus) à deux variables (la position et la vitesse angulaire) permettant de décrire son mouvement d'oscillation régulier (sans frottement, le mouvement du pendule est périodique non amorti, avec frottement le mouvement est amorti et revient à son **état stable**). Le pendule présente 2 points de repos (pour lesquels la vitesse angulaire est nulle), un instable et un stable.

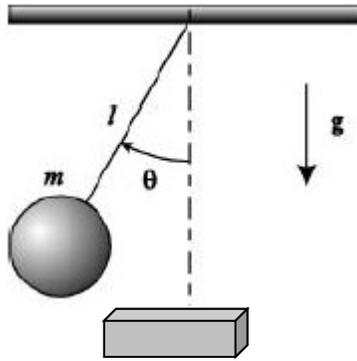
Introduction au chaos :

Expérience 2 :

Supposons maintenant qu'une commande externe lui **apporte** de l'énergie vers une trajectoire perpendiculaire au mouvement initial. A titre d'exemple, un aimant positionné devant ou derrière le pendule (cf. schéma). La modélisation doit prendre en compte cet apport d'énergie. Si, l'énergie apportée est non linéaire (la force d'attraction dépend de la distance du pendule par rapport à l'aimant), on peut ainsi imaginer soit un mouvement cyclique du pendule dans un plan ou un mouvement 'désordonné' qu'on appellera chaotique. En regardant la trajectoire du pendule en 3D, on peut s'apercevoir que d'une oscillation à une autre, le pendule n'effectue jamais deux fois le même trajet dans l'espace.

De plus, si on recommence l'expérience 2 en modifiant très légèrement une condition initiale (soit la position ou la vitesse angulaire initiale ou la position de l'aimant), et qu'on compare la nouvelle trajectoire du pendule par rapport à celle tracée précédemment, on s'aperçoit que les deux trajectoires diffèrent totalement : à un instant donné, les deux pendules sont à des positions différentes, et en prenant deux instants différents pour lesquels les deux pendules sont à la même position, il est impossible de prédire la position future de la deuxième expérience en connaissant l'évolution de la première expérience. On dit que le système est Sensible aux Conditions Initiales (SCI). *C'est une caractéristique essentielle des systèmes chaotiques. L'autre caractéristique est une trajectoire récurrente.*

Cependant, le mouvement du pendule, bien que chaotique, n'est pas aléatoire car il peut être décrit par des équations plus ou moins simples et **déterministes**.



Exercice :

Soit l , la longueur de la corde (non élastique), et m la masse de la bille. Soit θ , l'angle de la corde par rapport à la verticale.

1. Identifier les forces agissant sur la bille. On suppose que la bille est soumise à une force de frottement, proportionnelle à la vitesse de la bille par un facteur de frottement k .
2. Ecrire les équations différentielles régissant l'état de la bille à partir du premier principe de la dynamique ($ma = \sum F$, a est l'accélération, F les forces agissant)
3. On va noter $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$. Trouver les points d'équilibres ($x_1 = x_2 = 0$).

II) Premières méthodes de résolution d'un système non linéaire : Estimation des trajectoires

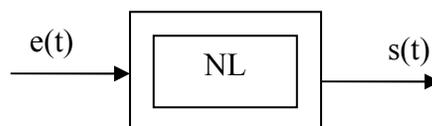
L'étude d'un système qu'il soit d'ordre mécanique, électronique, ou autre, nécessite une première approche mathématique consistant à modéliser le système pour un mode de fonctionnement donné.

Il existe deux grandes familles d'analyse de la trajectoire

- Méthodes fréquentielles : Méthode du premier harmonique
- Méthodes temporelles : Méthodes graphique du plan de phase

II.1) Méthode du premier harmonique

II.1.1) Principe



$$e(t) = E_M \sin(\omega_1 t)$$

$$s(t) = s_0 + s_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \phi_1) + s_2 \cdot \sin(2\omega_1 t + \phi_2) + \dots$$

La méthode du premier harmonique s'applique si

1 - $s_0 = \text{constante}$

2 - $s_2, s_3, \dots, s_n \ll s_1$ ou que les éléments blocs suivant la NL filtrent correctement la sortie de la NL.

HYPOTHESES :

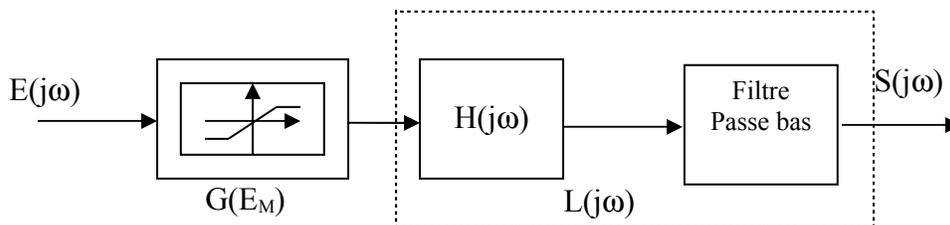
H1 : On considère uniquement les systèmes asservis possédant un élément non linéaire dans la chaîne d'asservissement.

H2 : L'élément non linéaire est invariant dans le temps

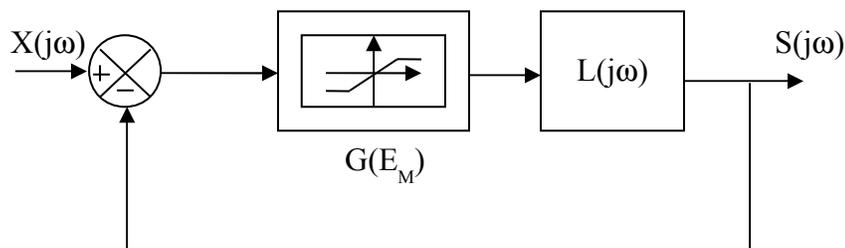
H3 : Les parties linéaires dans la chaîne d'asservissement sont stables et se comportent comme des filtres passe bas.

II.1.2) Fonction de Transfert

La méthode du premier harmonique ne peut s'appliquer que si la non linéarité est séparable : $f(j\omega, E_M) = G(E_M) \cdot H(j\omega)$, $H(j\omega)$ est un bloc linéaire.



II.1.3) Cas des systèmes asservis Non Linéaires



1 - Ecrivez l'équation $\frac{S(j\omega)}{X(j\omega)}$

Condition de stabilité

$$\text{Equation caractéristique : } 1 + G(E_M).L(j\omega)=0 \Rightarrow L(j\omega) = \frac{-1}{G(E_M)}$$

Dans le cas linéaire, l'étude se faisait autour de -1. Dans le cas non linéaire, l'étude de la stabilité se fera vis-à-vis **du lieu critique** qui est le lieu des points complexes donnés par

$\frac{-1}{G(E_M)}$. On va nommer E_{MA} et f_{MA} , l'amplitude et la fréquence d'oscillation si la condition de Barkhausen est vérifiée.

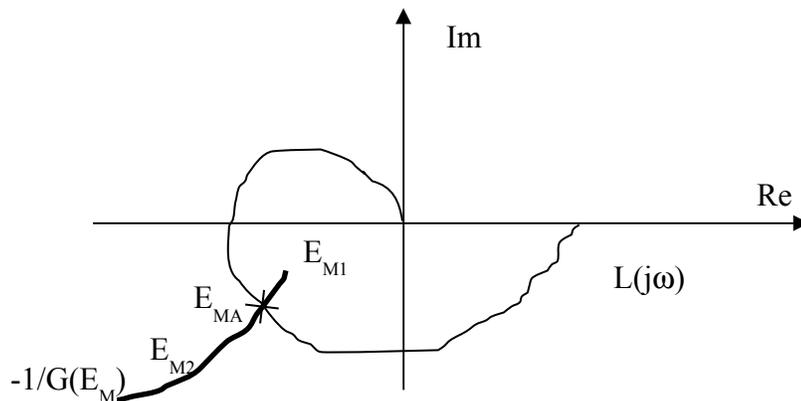
Etude des différents cas

La stabilité est conditionnée par la position relative des différents lieux $L(j\omega)$ et $\frac{-1}{G(E_M)}$.

a) Pas d'intersection

Si les hypothèses permettant l'application de la méthode harmonique sont vérifiées, le système sera toujours stable en BF.

b) Une intersection



Si l'amplitude à la sortie de la NL $E_{M1} < E_{MA}$, alors le système est instable (**critère du revers**).

Si l'amplitude à la sortie de la NL $E_{M2} > E_{MA}$, alors le système est stable (**critère du revers**).

Rappel du critère du revers : Un Système Asservi est stable si en parcourant le lieu de Nyquist pour les ω croissants, on laisse le point -1 à gauche.

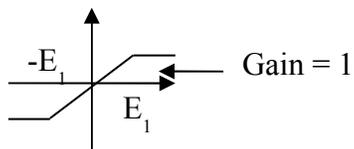
Définition : L'auto-oscillation du point A (E_{MA}, ω_A) est stable si en parcourant le lieu de transfert linéaire $L(j\omega)$ au voisinage du point A dans le sens des ω croissants, on laisse à gauche le lieu $-1/G(E_M)$ dans le sens des E_M croissants.

c) Plusieurs intersections

On applique la définition précédente.

II.1.4) Calcul du gain équivalent au premier harmonique

On suppose le système non linéaire suivant :



Etape 1 : Tracer $G(E_M)=f(E_M)$

Etape 2 : Tracer $-1/G(E_M)$ dans le plan complexe

Etape 3 : Vérifier la stabilité.

Exemple 1

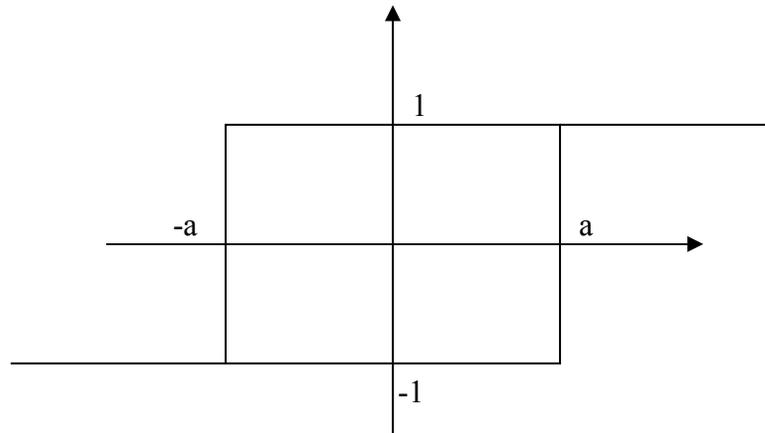
A partir du système NL précédent, appliquer un signal sinusoïdale d'amplitude E_M à l'entrée du bloc NL et calcul la série de Fourier du signal résultant. Soit b_1 , l'amplitude de la fondamentale, le gain équivalent est :

$$G(E_M) = b_1/E_M.$$

Exemple 2

Soit le système non linéaire Plus ou Moins avec hysteresis suivi d'un filtre du 3^{ème} ordre $\frac{1}{(1 + \tau p)^3}$

NL :



Exercice : Etudier la stabilité du système précédent.

II.2) Méthode du plan de phase

Cette méthode graphique est rigoureuse mais ne s'applique qu'au système du deuxième ordre et est limitée aux entrées nulles ou constantes.

$$\frac{d^2s}{dt^2} = F\left(s, \frac{ds}{dt}\right)$$

II.2.1) Principe

Pour l'analyse des systèmes non linéaires, on recourt souvent à des représentations dans l'**espace des phases**. Il s'agit d'un espace multidimensionnel dont les coordonnées sont les variables du système. Généralement, on considère la variable et sa dérivée, telles que la position et la vitesse angulaire d'un pendule ou dans le cadre d'un système d'équations linéaires d'ordre 2 à 1 inconnue x , on choisira l'espace des phases représenté par $(x, y = \dot{x})$, on pourra se référer à la représentation du système présenté en introduction). A plus de trois dimensions il faudra recourir à une projection de cet espace (sur une surface, par exemple). Ainsi, le portrait de phase est considéré comme une véritable signature de la dynamique du système.

De par l'intérêt suscité par une telle représentation, des méthodes graphiques basées sur le concept de résolution numérique ont été développées pour apporter quelques informations sur la résolution d'une équation différentielle. Cette résolution permet certes d'observer la trajectoire de la solution dans le temps, en fonction des conditions initiales lorsque la résolution numérique s'avère fastidieuse, mais elle est surtout utilisée pour représenter le portrait de phase.

II.2.2) Résolution par la méthode graphique

La première méthode graphique applicable dans le cas d'équation du premier ordre est la méthode des isoclines. Cette méthode consiste, à partir d'une condition initiale, à tracer la réponse du système à partir de la tangente en chaque point.

Ainsi, en partant de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

on trace un ensemble de courbes de pente $m : \frac{dx}{dt} = m$, ce qui revient à résoudre une équation non linéaire $f(x,t)=m$. La connaissance de la pente et du point initial permet de tracer un segment représentant l'évolution du système. L'ensemble des points (x,t) défini par $f(x,t)=m$ représente une isocline.

II.2.3) Equation du deuxième ordre

La méthode des isoclines n'est adaptée qu'au système du premier ordre. Dans le cas où l'ordre de l'équation différentielle est supérieur, on décompose le système d'ordre n à n système d'ordre 1. Cependant, une telle méthode se résout difficilement par un manque d'information à l'état initial. Il existe néanmoins une solution de type isocline pour les équations du second ordre, lorsque l'équation est autonome et peut ainsi se ramener à un système du premier ordre, c'est à dire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(\frac{dx}{dt}, x\right) = 0$$

Mise en équation

$$\text{On pose } \begin{cases} y = \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} + f(y, x) = 0 \end{cases}, \text{ si } y > 0 \text{ alors } x \text{ croit, si } y \text{ est négatif, } y \text{ décroît}$$

L'étude de la trajectoire va nous renseigner sur l'allure de l'évolution de la variable x .

Le tracé de la trajectoire va être facilité en recherchant :

- points singuliers
- Isoclines

Rappel : **Points singuliers** sont les points d'équilibre stables ou instable du système. Ils sont définis par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

Méthode des isoclines

Les isoclines vont nous permettre de préciser le tracé de la trajectoire au voisinage des points particuliers.

Isocline : Tracé de l'ensemble des points particuliers pour lesquels $\lambda = \frac{dy}{dx} = cste$

II.2.4) Exemple

Cas d'un second ordre linéaire

Soit le système suivant : $\ddot{x}(t) + 2m.\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2.x(t) = 0$

On se ramène à :

$$\begin{cases} y = \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = -2m.\omega_0 y(t) - \omega_0^2 .x(t) \end{cases}$$

Les points singuliers sont : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

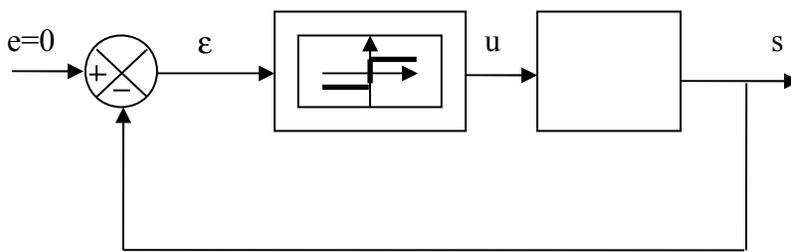
On calcule les isoclines par $\lambda = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ soit $\lambda \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$.

On peut donc écrire : $\lambda \cdot y = -2m.\omega_0 y - \omega_0^2 .x$, soit : $y = \frac{-\omega_0^2 .x}{2m.\omega_0 + \lambda}$

Si $\omega_0=1$ et $m=0,5$, $y = -\frac{x}{1+\lambda}$ alors, Si $\lambda=\infty$, $y=0$, si $\lambda=1$ $y=-x/2$, ...

Le tracé est le suivant

Cas d'un second ordre linéaire

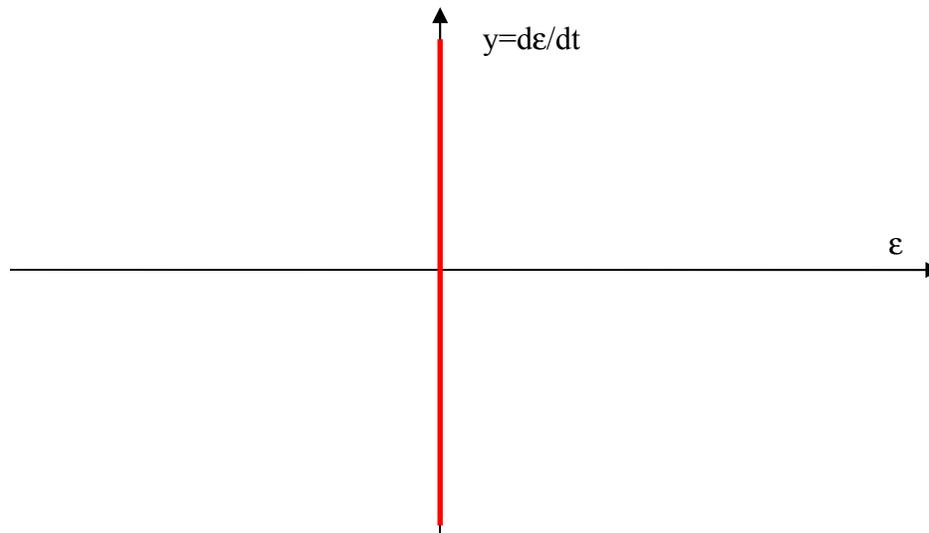


Choix variable

- En général, on pose $x=s$
- En pratique, on pose pour un système à retour unitaire à entrée nulle
 $x=\varepsilon, y=d\varepsilon/dt$

Calcul du tracé

- Droite de commutation et tracé



De par la fonction linéaire, on peut écrire :

$$\frac{\varepsilon}{u} = -\frac{A}{p(1+\tau p)} \text{ donc } p(1+\tau p)\varepsilon = -Au \text{ soit } \frac{d\varepsilon}{dt} + \tau \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + Au = 0$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} y = \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau}[y + Au] \end{cases}$$

On suppose $A=1$, et $\tau=1$.

Cas 1 : $\varepsilon > 0$, $u = +1$

Pas de point singulier

Isocline $y = -1/(1+\lambda)$

Cas 2 : $\varepsilon < 0$, $u = -1$

Pas de point singulier

Isocline $y = 1/(1+\lambda)$

II.3) Conclusion

Les méthodes graphiques s'appliquent directement aux équations du premier ordre et à celles du second ordre qui peuvent se ramener au premier ordre. Ces méthodes peuvent être utilisées pour des équations d'ordre supérieure, à condition qu'elles soient réductibles à un système d'équations simultanées d'ordre un ou deux. Maintes méthodes graphiques ont été proposées pour résoudre des types particuliers d'équations et les procédés que nous avons exposés ne représentent que les plus généraux.

Tous les processus graphiques reposent sur le principe du pas à pas. Le nombre d'étapes nécessaires à l'obtention de la solution dépend de la grandeur des accroissements utilisés. En général, il faudra prendre les pas assez petits pour que les variations correspondantes soient faibles. Des accroissements très petits nécessiteront un graphique de grande dimension. De plus, la précision finale sera faible car les petites erreurs tendent à s'accumuler.

Quand il n'est pas nécessaire de procéder à un grand nombre d'étapes et lorsque l'on n'a pas besoin d'un haut degré de précision, les procédés graphiques conduisent à la solution de façon relativement simple et rapide. Ils sont particulièrement utiles pour l'amorçage de la solution d'un problème nouveau, dont ils permettent de déterminer assez vite les éléments qualitatifs.

III) Stabilité des systèmes non linéaires asservis

III.1) *Modèle d'identification*

Jusqu'à présent, nous avons présenté des outils d'analyse de la trajectoire de système à partir de l'écriture mathématique de celui-ci. Les modèles présentés ont été obtenus à partir de lois physiques élémentaires.

Or, certains systèmes ne peuvent être entièrement décrits par des lois de la physique. Si des mesures expérimentales peuvent être réalisées, on peut alors déterminer la structure d'un modèle à partir de lois physiques partielles ou uniquement à partir des mesures et définir les paramètres du modèle à partir des campagnes de mesures.

On trouve généralement deux types de modèles :

Modèle pour la commande : L'objectif étant de définir une loi de commande pour optimiser le système, on cherche alors à construire un modèle simple représentatif du système. Les imperfections du modèle seront validées lors de la phase de robustesse.

Modèle de simulation, défini pour reproduire le plus précisément possible le comportement du système. La structure du modèle sera plus complexe que le modèle pour la commande. La structure peut être imposée par les lois de la physique (exemple : Modèle fractionnaire pour la μ -analyse, ...)

Dans les deux cas, la première étape consiste à définir le nombre de paramètres minimum intervenant dans le modèle et de définir des lois de sortie le plus simple possible (idéalement linéaire) en fonction du jeu réduit de paramètres.

La **méthode LP** utilise des techniques de régressions linéaires pour estimer un modèle linéaire en fonction des paramètres (on pourra éventuellement augmenter le nombre de paramètres pour améliorer le modèle, sachant que la simplicité est obtenue par un modèle linéaire)

Si le modèle linéaire n'est pas assez représentatif du système ou si le nombre de paramètres est trop élevé, on va estimer un modèle non linéaire (**non LP**). Dans le cas où le nombre de paramètres est trop élevé, on choisit une liste de signaux d'entrées et on détermine un critère d'erreur, via un algorithme d'optimisation (programmation non linéaire) à partir de l'écart entre les mesures expérimentales et le modèle.

Lorsqu'on détermine un modèle, il est nécessaire ensuite de valider son niveau de fiabilité : les approximations entraînent des erreurs et on cherche à définir la stabilité et la robustesse du système.

On définit en règle générale la stabilité du point singulier (cf. introduction). Mais, on s'intéresse en fait d'avantage à l'état d'équilibre d'un système, c'est-à-dire à l'étude des trajectoires du système pour t variant dans le temps, prenant en compte les incertitudes du modèle et des perturbations. On ne cherche pas à calculer explicitement les trajectoires, mais de démontrer que les trajectoires sont bornées. Ce concept est issu de la théorie de **la stabilité au sens de Lyapunov**.

III.2) Notions de Stabilité : Commande Robuste

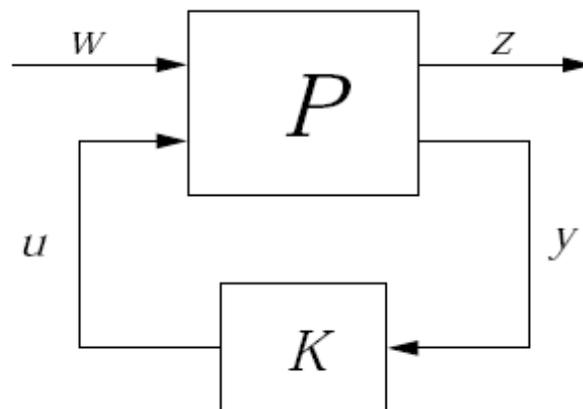
La **commande robuste** repose en grande partie sur la structure de commande à contre-réaction (feedback control systems) et sur les modèles linéaires temps invariant (**LTI**) des systèmes dynamiques.

On définit une structure de commande basée sur l'erreur entre l'information collectée par un ensemble de capteur (y) et les signaux de références souhaités.

Les différences existantes sont traitées par le système de commande afin d'élaborer un signal de commande u affectant le système.

Commande H_∞

J.C. Doyle a proposé une formulation générale de synthèse des systèmes de commande à contre-réaction



P est le modèle généralisé du système dynamique et K le correcteur. P est un système linéaire multivariables avec deux types de signaux d'entrées :

Commande u et de sortie y

Performance ou incertitude, d'entrée v et de sortie z

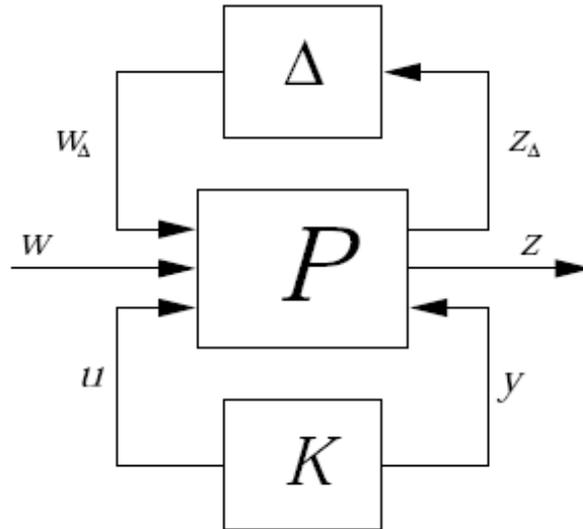
On note $P_{BF}(s)$, le système en Boucle Fermée. L'algorithme de Glover-Doyle permet de synthétiser un correcteur linéaire $K(s)$ de manière à minimiser la norme H_∞ du transfert $P_{BF}(s)$.

On note γ , l'indice de performance, on impose $\|P_{BF}(s)\|_\infty < \gamma$.

L'algorithme LMI peut être utilisé en lieu et place de l'algorithme de Glover-Doyle.

Les coefficients de modèles physiques extraits de mesures expérimentales sont empreints d'erreurs. De plus, des phénomènes extrinsèques ou intrinsèques au modèle non pris en compte modifient le comportement du système et ajoute un degré d'incertitude au modèle.

On introduit alors un système d'incertitude Δ



Le modèle incertain et sa structure étant fixés, l'objectif principal de la structure de commande est d'assurer la stabilité de la boucle fermée ainsi qu'un certain degré de performance pour l'ensemble des réalisations possibles du modèle incertain.

Il s'agit donc de réduire la sensibilité de la structure de commande en présence des variations paramétriques et d'éventuelles perturbations affectant le modèle du système à commander.

Le théorème du petit gain permet d'affirmer que le système présenté ci-dessus est stable pour toute incertitude vérifiant $\|\Delta(s)\|_{\infty} < 1/\gamma$. C'est pour cette propriété que la commande est qualifiée de **robuste**.

III.2.1) Stabilité structurelle

Ainsi, les solutions mathématiques des modèles non linéaires sont souvent très approchées. La stabilité structurelle est la propriété d'un système physique tel que son comportement qualitatif reste inchangé si les coefficients des équations sont soumis à des petites variations. En raison de l'incertitude inhérente à la relation de solutions mathématiques à des systèmes physiques, il est souvent bon d'imposer aux systèmes des conditions telles qu'ils possèdent la propriété de stabilité structurelle.

III.2.2) Stabilité dynamique

Un système physique peut être représenté par un ensemble d'équations différentielles simultanées de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

le temps t étant la variable indépendante, x_1, x_2, \dots, x_n les variables dépendantes et f_1, f_2, \dots, f_n , des fonctions, en général non linéaires des variables dépendantes (appelées vecteur de champ).

Le point d'équilibre ou singulier se traduit par l'annulation de toutes les dérivées. Un système linéaire pour lequel le déterminant A est non nul conduit à un seul point d'équilibre, caractérisé par l'annulation de toutes les variables dépendantes.

Un système non linéaire introduit des fonctions f_1, f_2, \dots, f_n , qui ne sont pas linéaires et les conditions d'équilibres peuvent être atteintes pour des valeurs de x_1, x_2, \dots, x_n qui ne sont pas nulles. Pour étudier la stabilité d'un système au voisinage de l'une de ses positions d'équilibre, on provoque une légère perturbation en faisant varier les x à partir de ces valeurs d'équilibres. Si lorsque t croît indéfiniment, les x reviennent à celles-ci, on dit que le système est asymptotiquement stable, sinon il est dynamiquement instable.

Dans quelques cas particuliers, les x ne retournent pas vers leur position d'équilibre, mais ne s'en écartent pas davantage. On dit que le système a une stabilité neutre ou temporaire.

III.2.3) Notions d'Invariant

Un ensemble invariant M , pour un système dynamique $\dot{x} = f(x)$ est défini comme un ensemble de conditions initiales tels que la solution $\chi(x_0, t)$ reste dans l'ensemble M pour tout t .

Un système non linéaire peut donc être considéré comme instable localement mais globalement stable dans le sens où les trajectoires sont contenues dans une Boule fermée (Invariant) pour un ensemble de conditions initiales.

III.3) Stabilité pour les systèmes non linéaires

Dans le paragraphe précédent, nous nous préoccupons de la stabilité de la réponse autour d'un seul point d'équilibre. Il s'agit d'une étude locale.

Dans le cas non linéaire, l'existence de plusieurs points d'équilibres modifie les conditions de stabilité du système. Si de nombreuses règles existent dans le cas de système linéaire, il n'est pas possible de donner de définition générale de la stabilité qui ait un sens dans tous les cas pour les systèmes non linéaires.

On peut néanmoins définir trois méthodes principales : Deux études locales basées sur la linéarisation du système autour du point d'équilibre ou d'un point de la trajectoire projetée sur un plan (**la théorie de Floquet**), et une méthode globale : la **théorie de Lyapunov** basée autour d'un point d'équilibre sur la fonction non linéaire. Nous exposons rapidement le principe des deux premières dans les paragraphes suivants.

L'étude locale permet de prédire le comportement de la trajectoire autour d'un point d'équilibre, mais ne donne aucune information sur la trajectoire en elle-même. A titre d'exemple, les systèmes chaotiques présentent des instabilités locales autour de plusieurs points singuliers mais la trajectoire au cours du temps, reste confinée dans une boucle fermée (c'est-à-dire est bornée), s'il n'y a pas de bifurcation.

Nous allons dans un premier temps définir différents types d'équilibre en supposant le système décrit par son modèle d'état :

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \text{ représente l'état du système et } u \text{ l'entrée.}$$

On suppose que le système possède un point singulier (\bar{x}, \bar{u})

III.3.1) Equilibre stable

L'équilibre (\bar{x}, \bar{u}) est un équilibre stable du système si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \|x(0) - \bar{x}\| < \alpha \Rightarrow \|x(t, x(0), \bar{u}) - \bar{x}\| < \varepsilon$$

Dans le cas contraire, x_e est dit instable.

Interprétation : On souhaite caractériser le fait que la trajectoire $x(t)$ reste proche du point d'équilibre \bar{x} pour tout $t > 0$ lorsque l'entrée $u(t) = \bar{u}$ est constante. Pour cela, on introduit la notion de norme et l'on impose les solutions de $x(t)$ à l'intérieur d'une boule topologique de rayon ε autour de \bar{x} .

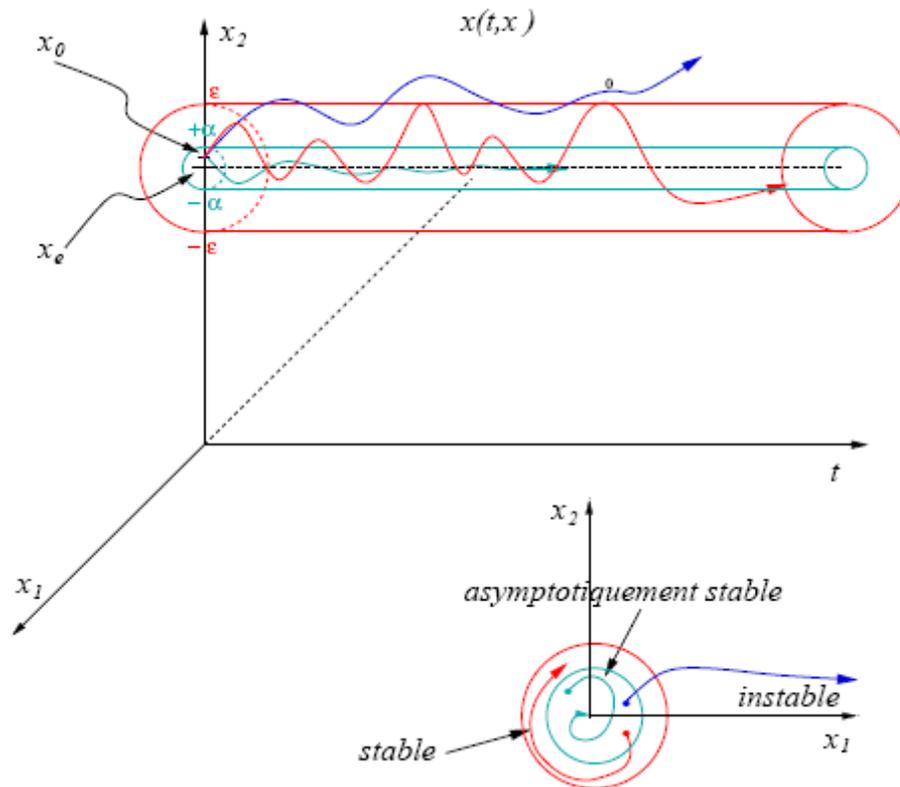
RMQ : Cela n'implique pas que les trajectoires convergent vers le point d'équilibre.

Stabilité asymptotique:

L'état d'équilibre, notée \bar{x} est dit asymptotiquement stable s'il est stable et si

$$\exists \alpha > 0, \|x(0) - \bar{x}\| < \alpha \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$$

On peut donc représenter la stabilité de la manière suivante



RMQ : Dans ce cas, les trajectoires convergent vers le point d'équilibre.

III.3.2) Equilibre attracteur

L'équilibre (\bar{x}, \bar{u}) est un équilibre attracteur du système si

$$\exists \delta > 0, \text{ tel que } \|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(0), \bar{u}) - \bar{x}\| = 0$$

Un équilibre attracteur est donc un point vers lequel convergent les solutions $x(t)$ si elles démarrent suffisamment près de \bar{x} .

RMQ : Stabilité et attractivité sont deux notions différentes qui ne s'impliquent pas mutuellement. Toutefois, l'équilibre est asymptotiquement stable s'il est stable et attracteur.

Attracteur

Un attracteur est un ensemble compact de l'espace des phases, invariant par le flot ou par l'application vers lequel toutes les trajectoires environnantes convergent.

Différents types d'attracteurs :

- Point fixe
- Cycle limite

- Tore
- Attracteurs étranges (chaos)

Bassin d'attraction :

Correspond à l'ensemble des points dont les trajectoires convergent vers l'attracteur.

III.3.3) Stabilité d'une trajectoire

Dans certains cas, les systèmes n'admettent pas de points d'équilibre, ou alors le point d'équilibre n'est pas stable. Pour autant, les trajectoires ne divergent pas. Divers cas peuvent se produire :

- Le système admet un domaine stable : il existe un domaine de conditions initiales (bassin d'attraction) tel que toutes les trajectoires restent comprises à l'intérieur du domaine stable
- Le système admet un domaine attractif : il existe un domaine de conditions initiales tel que toutes les trajectoires sont comprises dans le domaine attractif au bout d'un certain temps
- Le système admet une trajectoire stable.

La stabilité d'une trajectoire peut être démontrée par l'application du deuxième théorème de Lyapunov.

III.3.4) Analyse de la stabilité par Linéarisation

Méthode Locale :

Les systèmes non linéaires présente des (pseudo-)périodicités que l'on peut chercher à estimer. La méthode de linéarisation permet d'approximer une périodicité de l'évolution de la trajectoire.

Le principe de cette méthode repose, comme son nom l'indique, sur la linéarisation du système non linéaire décrit autour du point d'équilibre. Pour cela, on décompose le système (la fonction Vecteur de Champ) selon la formule de Taylor autour de chaque point d'équilibre. On se ramène ainsi au système précédent, en décrivant les trajectoires de phases autour des points d'équilibre.

On suppose une perturbation autour d'un point d'équilibre X_e : $X(t) = X_e + \tilde{X}$

La linéarisation du Vecteur champs donne : $\dot{X}(t) = F(X_e) + J_F(X_e)\tilde{X}$

$$J_r(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(X)}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1(X)}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_1(X)}{\partial X_n} \\ \frac{\partial F_2(X)}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2(X)}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_2(X)}{\partial X_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n(X)}{\partial X_1} & \frac{\partial F_n(X)}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_n(X)}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

Etant donné qu'à l'équilibre $X_e = F(X_e)$, cela revient à résoudre : $\dot{\tilde{X}}(t) = J_F(X) \tilde{X}$

Le calcul des valeurs propres permet de déduire de la stabilité des trajectoires vis-à-vis de petites perturbations autour du point d'équilibre.

Perturbation infinitésimale : Méthode de Poincaré Lindstedt

L'idée est d'écrire la solution périodique de la trajectoire du système sous la forme d'un développement en série de ε . Si l'on souhaite étudier les perturbations infinitésimales, on étudie l'évolution de la trajectoire $X(t) = X_e + \varepsilon \tilde{X}$ en puissance croissante de ε .

A titre d'exemple, on choisit un puit à deux potentiel défini par l'équation : $f(q) = q - q^3$.

- Points d'équilibre $q = \pm 1$.
- Changement de variable $u = q - 1 \Rightarrow f(u) = -2u - 3u^2 - u^3$.
- Oscillation obtenu par le terme linéaire en u : $f(u) = -2u$ conduit à $\omega_0 = \sqrt{2}$. Il suffit de trouver les valeurs propres de la matrice A avec $X = (u, du/dt)$
- Méthode de Poincaré Lindstedt : Non linéarité en u^2 comme perturbation :

$$\begin{cases} du/dt = \dot{u} \\ d\dot{u}/dt = -2u - 3\varepsilon u^2 \end{cases}$$
- Et nous cherchons une solution de la forme $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$. Pour ce faire on fait correspondre les ordres de ε à différents ordres :
 - o DL Ordre 0 : $u_0 = A_0 \cos(\omega_0 t)$
 - o DL Ordre 1 : $\begin{cases} du_1/dt = \dot{u}_1 \\ d\dot{u}_1/dt = -2u_1 - 3\varepsilon A_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \end{cases}$
 - On décompose $A_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = \left(\frac{A_0^2}{2}\right) [1 + \cos(2\omega_0 t)]$
 - On décompose u_1 en deux parties u_{10} et u_{12} correspondant respectivement au fréquence 0 et $2\omega_0$
 - Ceci donne $u_{10} = -3A_0^2/4$
 - $u_{12} = (A_0^2/4) \cos(2\omega_0 t)$
- Non linéarité en u^3 comme perturbation $\begin{cases} du/dt = \dot{u} \\ d\dot{u}/dt = -2u - \varepsilon u^3 \end{cases}$
 - o Ordre 0 : solution linéaire
 - o Ordre 1 : Contribution à ω_0 et $3\omega_0$. Or à ω_0 conduit à un terme en $\sin(3\omega_0 t)$, l'amplitude augmente avec le temps, incompatible avec hypo pour laquelle la

fréquence du mouvement restait inchangée => Evolution de la période d'oscillation.

- Comme le période change également nous posons : $\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$ et on cherche solution sous forme $y = \omega t$. On cherche la solution sous forme de la fonction

y :

$$\begin{cases} du/dy = v \\ \omega^2 dv/dy = -2u - \varepsilon u^3 \end{cases}$$

- o Ordre 0.

Idem

- o Ordre 1

$$\omega^2 dv/dy = -2u_1 - u_0^3 \text{ avec } u_0 = A_0 \cos(\omega_0 t) \text{ et } \omega_0 = \sqrt{2}$$

$$\text{et } \omega^2 dv/dy = (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots)^2 d^2(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)/dy^2 \text{ conduit à } \omega_0^2 \ddot{u}_1 + 2\omega_0 \omega_1 \ddot{u}_0$$

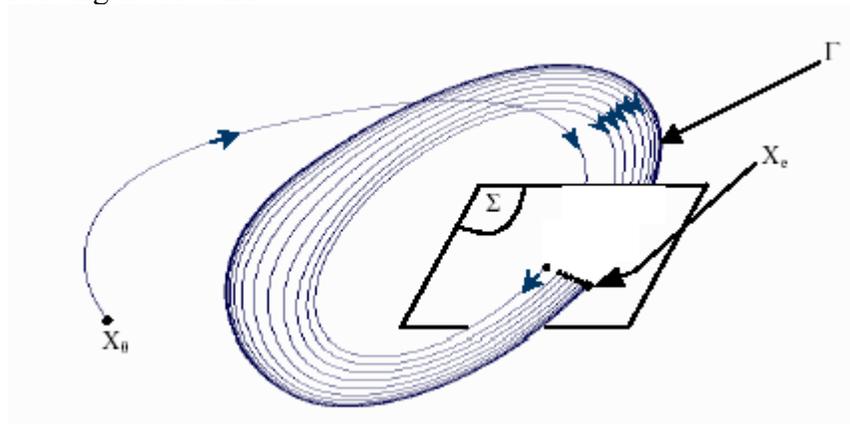
On choisit ω_1 pour faire disparaître la composante en $\cos(\omega_0 t)$ qui intervient dans le terme cubique de u_0^3

Cette étude nous permet de connaître la trajectoire **localement** aux points réguliers. Nous allons maintenant étudier la **stabilité locale** d'une trajectoire **périodique** par la **théorie de Floquet**.

III.3.5) Théorie de Floquet : Multiplicateurs caractéristiques

Les multiplicateurs caractéristiques encore appelés multiplicateurs de Floquet permettent de déterminer la stabilité d'une solution périodique. Ils sont une généralisation des valeurs propres utilisées pour étudier la stabilité des points fixes. Une solution périodique est une orbite d'ordre k dans l'espace des phases et correspond à k points fixes sur une **section de Poincaré**.

Une **section de Poincaré** peut, en première approche, se résumer à l'étude d'un hyperplan (en général on ramène la trajectoire d'une courbe à un plan) en fixant un paramètre, ou en projetant l'évolution temporelle de la trajectoire à un plan qui coupe transversalement la trajectoire, comme le montre la figure ci-contre.



Section de Poincaré

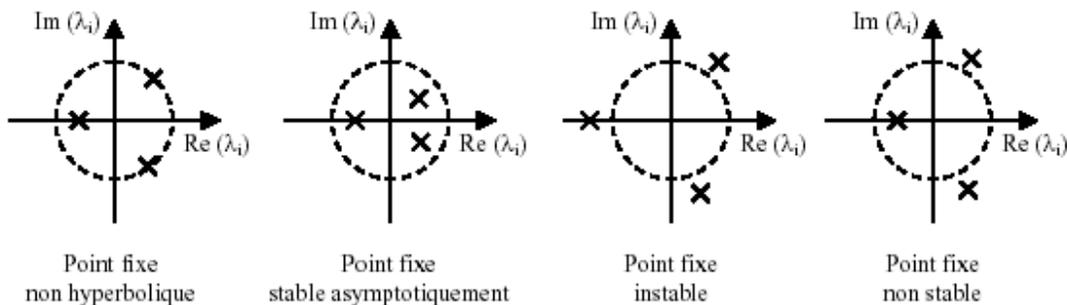
En régime établi, on suppose une petite perturbation au voisinage de X_e , l'un des points d'intersection de la trajectoire avec la section de Poincaré.

La solution du système s'écrit : $X(t) = X_e(t) + \tilde{X}(t)$.

Comme dans le cas de la stabilité du point fixe, le comportement de $X(t)$ au voisinage de X_e est étudié en linéarisant P (Projection de la trajectoire sur la section de Poincaré) autour de X_e . La fonction linéarisée P devient : $\tilde{X}_{k+1}(t) = J_p(X_e(t))\tilde{X}_k(t)$

Avec J la matrice Jacobienne de P autour de X_e . L'étude des valeurs propres et vecteurs propres comme précédemment détermine la stabilité de la projection de la trajectoire sur la section de Poincaré autour de X_e . On parle alors de stabilité locale.

Les valeurs propres (déterminent la stabilité) sont appelées les multiplicateurs de Floquet.



Dans le cas d'un système autonome, les multiplicateurs caractéristiques sont indépendants de la position de la section de Poincaré Σ . Par contre, les vecteurs propres associés à ces multiplicateurs caractéristiques dépendent de la position de Σ dans l'espace des phases.

Des méthodes numériques ont également été développées pour déterminer les points de trajectoire sur la section de Poincaré. Deux méthodes sont particulièrement utilisées, la méthode de Hénon et la méthode de KAM. La méthode de Hénon est une méthode numérique qui permet de déterminer l'intersection de la trajectoire de la caractéristique non linéaire avec l'hyperplan de Poincaré.

*Une approche **globale** doit néanmoins être réalisée pour vérifier que la trajectoire ne tend pas vers l'infini. Cette approche sera réalisée par le théorème de **Lyapunov**.*

III.3.6) Théorie de Lyapunov

Note : Les notions abordées dans le cours de Commande Robuste seront introduites sans rappel

Première approche :

Un système physique est stable s'il revient vers un état d'équilibre. Supposons un système mécanique telle la chute d'une bille, l'énergie mécanique de la bille est égal à l'Énergie cinétique et l'énergie potentielle. Le point d'Énergie mécanique nul est le point d'équilibre.

La théorie de Lyapunov peut être assez simplement interprétée en mécanique au sens où son énergie totale est complètement dissipée. Ainsi, le mouvement d'une bille atteint un état stable si la variation d'énergie mécanique $E_m = V(x)$ décroît (x représente la position de la bille), c'est-à-dire si $\dot{V}(x) < 0$

On introduit ainsi le concept de **fonction de Lyapunov**.

Fonction candidate de Lyapunov :

Soit $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^+$, une fonction telle que

- i) V est continûment différentiable en tous ses arguments
- ii) V est définie positive
 - iii) Il existe a et b deux fonctions scalaire de \mathfrak{R}^+ dans \mathfrak{R}^+ , continues, monotones non décroissantes, telles que :
 1. $a(0) = b(0) = 0$
 2. $\forall x \in \mathfrak{R}^n, a(\|x\|) \leq V(x) \leq b(\|x\|)$

V définit des équipotentielles de Lyapunov, $V(x) = \text{cste}$, qui définissent des domaines connexes autour de l'origine.

$\dot{V}(x)$ est la dérivée de $V(x)$ le long de la trajectoire de $\dot{x} = f(x, u)$

Principe : Dans le cas d'un système non linéaire, l'étude de la stabilité s'effectue par la recherche d'un gradient du système autour d'un point de repos pour lequel l'étude du système revient à trouver les minima locaux de la fonction de gradient (aussi nommé potentiel). Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de linéariser.

Avantages

- Etude de la stabilité par l'examen totale de la fonction d'énergie
- Ne nécessite ni la solution de l'équation d'état, ni la connaissance des pôles du système.

Seconde méthode de Lyapunov, méthode directe

Stabilité au point d'équilibre

La théorie de Lyapunov consiste à trouver une fonction scalaire (fonction de potentiel) G **définie positive** qui est décroissante le long des trajectoires du système ce qui permet de définir la stabilité dans un domaine autour du point d'équilibre.

$$\frac{dG}{dx} = - \frac{dx}{dt} \leq 0$$

alors le système est stable avec $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$ (asymptotiquement stable si strictement négatif).

(Note : dans le cas monovariante, dG/dt est donc définie négative puisque

$$\frac{dG}{dt} = - \frac{dG}{dx} \frac{dx}{dt} = - f^2(x,t).$$

Il s'agit d'une condition suffisante car on ne connaît pas l'existence a priori d'une telle fonction de potentielle G.

Une fonction de LYAPUNOV candidate est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour du point d'équilibre. Si $dG/dt < 0$, la stabilité est asymptotique, si $dG/dt = 0$, le système évolue dans un invariant (théorème de LaSalle)

La **fonction de Lyapunov quadratique** est définie par : $V(x) = x^T P x$

Stabilité locale

Si il existe une fonction scalaire de l'état $V(x)$ dont les dérivées partielles premières sont continues et telles que ;

- 1- V est une fonction candidate de Lyapunov
- 2- \dot{V} est localement semi-définie négative dans un voisinage de l'origine Ω

alors le point d'équilibre est stable et un domaine de conditions initiales stables est délimité par n'importe quelle équipotentielle de Lyapunov contenue dans Ω .

Asymptotiquement stable au point d'équilibre:

Le système $\dot{X} = AX$ est asymptotiquement stable ssi $\forall Q=Q^T, \exists P > 0$ solution de l'équation de Lyapunov

$$A^T P + P A + Q = 0$$

Exemple d'application

$$\text{Soient } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ et } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{On doit résoudre : } \begin{bmatrix} -2p_1 & 3p_1 - 3p_2 \\ 3p_1 - 3p_2 & 6p_2 - 4p_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où la solution } P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Inconvénient

Le problème majeur de cette méthode est de trouver la fonction de Lyapunov pour le système. Dans le cas non linéaire, il n'existe pas de méthode systématique pour choisir une fonction de Lyapunov.

III.3.7) Démarche à suivre pour étudier la stabilité

Pour résumer, la démarche à suivre pour étudier la stabilité d'un système se décompose en 4 étapes :

- 1- Trouver les points d'équilibre du système en résolvant $f(x)=0$
- 2- Linéariser le système autour des points d'équilibre pour valider la stabilité, l'instabilité du point d'équilibre en se référant aux valeurs propres (cf. p6 et p7)
- 3- Choisir une fonction candidate de Lyapunov V et en posant le changement de variable $\hat{x} = x - \bar{x}$ étudier le domaine de stabilité/instabilité par la deuxième méthode de Lyapunov
- 4- Si les résultats ne sont pas concluants, choisir une autre fonction candidate de Lyapunov.

IV) Système chaotique

Un système non linéaire peut avoir un comportement en régime permanent plus complexe que ceux habituellement répertoriés tels que l'équilibre, les oscillations périodiques... notamment lorsque le degré de liberté (dimension du vecteur d'état) est supérieur ou égal à 3.

Dans ce cas, la sortie du système est extrêmement sensible aux conditions initiales, d'où la non prévisibilité de la sortie. Certains comportements chaotiques font ainsi apparaître un aspect aléatoire malgré leur nature déterministe intrinsèque.

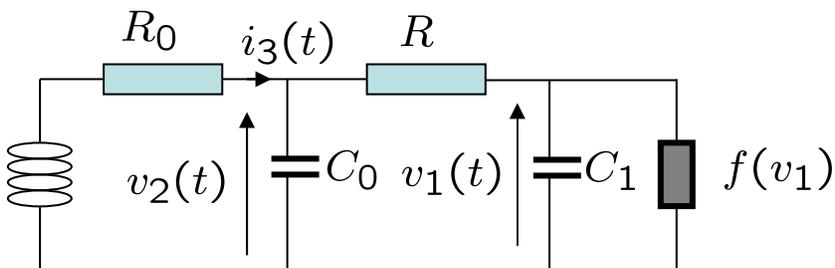
Pour rappel, on appelle système chaotique, un système déterministe dont la sensibilité aux conditions extérieures (**SCI**) rend l'évolution du système incertain. Nous savons que les systèmes non linéaires sont moins dépendants des conditions initiales, cependant pour une région donnée (bassin d'attracteur), le système évolue également vers une solution unique (point, cercle limite). Cette solution s'appelle **un attracteur**. Une fois que le système se trouve sur son attracteur (dont la dimension est plus petite que la dimension de l'espace des phases), il y reste confiné. On définit également le bassin d'attraction comme étant l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles la trajectoire associée au vecteur de champ conduit toujours vers le même attracteur.

De plus, dans le cas d'un système chaotique, la modification des paramètres de contrôle permet de modifier la trajectoire pour évoluer d'un attracteur à un autre attracteur. La trajectoire est ainsi déterminée par le comportement non linéaire du système mais est commandée par la modification des paramètres de contrôle du système. On parle de **route vers le chaos**.

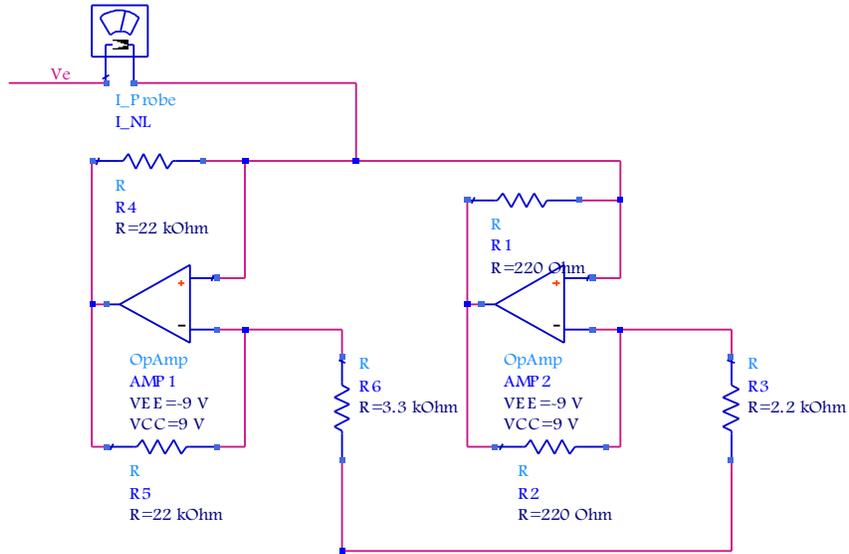
IV.1) *Système chaotique*

Un système dit chaotique est un système déterministe mais dont la sortie semble aléatoire et qui est très sensible aux conditions initiales. Pour être chaotique, le système doit être au minimum d'ordre 3 (3 états) et la sommation des valeurs propres sur toute la trajectoire du système doit conduire à deux valeurs propres négatives et une valeur propre positive. L'évolution de la trajectoire passe donc par un état d'expansion puis de rétraction. De par une non linéarité active, tout se passe comme si le système revenant vers un état stable, reçoit une quantité d'énergie avant d'être de nouveau dissipatif.

L'exemple suivant est issu d'un système RLC avec une résistance non linéaire négative générée par un NIC (Négative Impedance Converter) basée sur deux amplificateurs opérationnels.



La résistance négative étant construite par le générateur NIC présenté sur le graphe ci-dessous.



Nous générons ainsi un circuit RLC mais au lieu d'être dissipatifs (effet Joule via une résistance R), le système est entretenu par un apport d'énergie via la résistance négative (et les Aop).

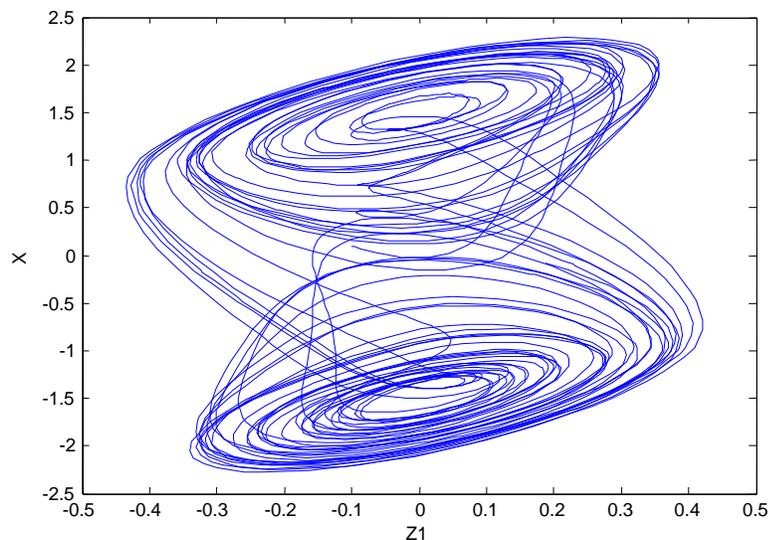
Les équations du système de Chua s'écrivent :

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{C_1} \left(\frac{v_2 - v_1}{R} - f(v_1) \right)$$

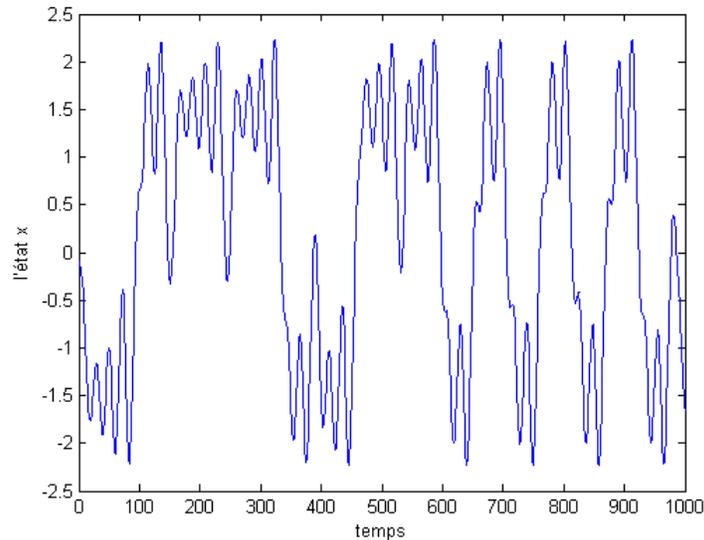
$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{C_0} \left(\frac{v_1 - v_2}{R} + i_3 \right)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} (-v_2 - R_0 i_L)$$

La courbe obtenue dans le plan de phase est la suivante



En représentant l'évolution d'un état au cours du temps, nous obtenons la courbe suivante



Il est ainsi très difficile de prédire la trajectoire à un instant t . D'ailleurs, une caractéristique essentielle des systèmes chaotiques est le degré d'imprévisibilité du système : Même si deux conditions initiales sont simplement voisines, la distance séparant les deux trajectoires dans l'espace des phases évolue très différemment d'une trajectoire à une autre et très « rapidement » les trajectoires se trouvent décoréllées. Le calcul des exposants de Lyapunov permet de quantifier la vitesse de décoréllation entre deux trajectoires issues de deux conditions initiales très proches, par la mesure du paramètre λ de divergence exponentielle.

IV.1.1) **Exposant de Lyapunov : approche de la théorie du chaos**

Certains systèmes dynamiques (systèmes qui décrivent dans l'espace un état qui évolue dans le temps) sont très sensibles aux petites variations de leur condition initiale (SCI). Ces variations peuvent rapidement prendre d'énormes proportions. Le mathématicien russe Alexander Lyapunov s'est penché sur ce phénomène et a développé une quantité permettant de mesurer la vitesse à laquelle ces petites variations peuvent s'amplifier. Cette quantité appelée "exposant de Lyapunov" mesure en fait le degré de sensibilité d'un système dynamique.

$$\text{Exposant de Lyapunov} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |(f'(x_{i-1}))|$$

Considérons un système dynamique quelconque dont la condition initiale x_0 est affectée d'une erreur infinitésimale E_0 . Après n itérations, l'erreur initiale E_0 sera donc amplifiée d'un facteur $\left| \frac{E_n}{E_0} \right|$. Notons que l'erreur diminue lorsque le facteur est inférieur à 1 et augmente s'il est supérieur à 1.

Puisque $\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \dots \left| \frac{E_1}{E_0} \right|$, il suffit alors de calculer ce produit pour déterminer la façon dont s'amplifie l'erreur initiale.

Malheureusement, calculer un très grand nombre de produits à l'aide d'un ordinateur amène quelques difficultés. Le logarithme d'un produit correspond à une somme de logarithmes. Utilisons plutôt le logarithme du produit pour compléter cette étude.

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| &= \ln \left(\left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \dots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \right) \\ &= \ln \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| + \dots + \ln \left| \frac{E_2}{E_1} \right| + \ln \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \end{aligned}$$

Avant de faire tendre cette dernière quantité vers l'infini, calculons d'abord la moyenne de la somme obtenue. On arrive ainsi à l'exposant de Lyapunov.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \right)$$

E_i et E_{i-1} étant de très petites valeurs, le rapport $\left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right|$ correspond à la dérivée de la fonction associée à l'équation utilisée si naturellement la fonction est dérivable. En effet soit $f(x_i)$ cette fonction.

$$E_i = f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})$$

et
$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}}$$

Puisque $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$ alors si $f(x_i)$ est dérivable, on a

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} = f'(x_{i-1}) \text{ lorsque } E_{i-1} \rightarrow 0$$

Par conséquent,

$$\text{Exposant de Lyapunov} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_{i-1})|$$

Lorsque l'exposant de Lyapunov est positif,

$$\ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 0 \text{ et par conséquent } \left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 1$$

L'erreur infinitésimale du début ira donc en augmentant. Le système sera dans ce cas sensible aux très petites variations de sa condition initiale, une des caractéristiques des systèmes chaotiques. Si au contraire l'exposant de Lyapunov est négatif, l'erreur infinitésimale du début ira en diminuant. L'erreur initiale n'aura dans ce cas aucun effet à long terme.

Un exemple est traité ci-dessous :

$$\text{Soit le système suivant : } \begin{cases} \dot{X}_1 = X_1 - X_1^3 \\ \dot{X}_2 = -X_2 \end{cases}$$

La trajectoire $\phi(X_0, t)$ considérée est définie à partir des conditions initiales : $0 < X_1 < 1$ et $X_2 = 0$

L'intégration de la première ligne donne :

$$\begin{aligned} \frac{dX_1(t)}{dt} &= X_1(t) - X_1^3(t) \\ \frac{dX_1(t)}{X_1(t)(1 - X_1^2(t))} &= dt \end{aligned}$$

$$\text{Posons } \varphi(t) = (1 - X_1^2(t)) \Rightarrow d\varphi(t) = -2X_1(t)dX_1(t) \text{ soit } dX_1(t) = \frac{d\varphi(t)}{-2\sqrt{1-\varphi(t)}}$$

$$\text{D'où, } \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dX_1} \frac{dX_1}{dt} = -2\sqrt{1-\varphi(t)}\sqrt{1-\varphi(t)}\varphi(t) = -2|1-\varphi(t)|\varphi(t)$$

$$\text{En écrivant : } \frac{d\varphi(t)}{(1-\varphi(t))\varphi(t)} = -2dt, \text{ on trouve : } \ln\left(\frac{1}{\varphi(t)} - 1\right) = -2t$$

$$\text{D'où } X_1^2(t) = \frac{e^{-2t}}{e^{-2t} + 1}$$

La linéarisation du système d'équation autour d'un point X_p donne :

$$\begin{cases} \delta \dot{X}_1 = (1 - 3X_1^2)\delta X_1 \\ \delta \dot{X}_2 = -1 \delta X_2 \end{cases} \text{ donc } \begin{pmatrix} \delta \dot{X}_1 \\ \delta \dot{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3X_1^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta \dot{X}_2}{\delta X_2} = -1 \Rightarrow \\ X_2 = e^{-t} \end{cases}$$

On remplace $X_1(t)$ (et donc sa dérivée par calcul) par la solution obtenue précédemment puis on intègre ce dernier ce qui permet d'obtenir la matrice de la solution fondamentale Φ_t .

On obtient ainsi le système suivant :

$$\frac{\delta \dot{X}_1}{\delta X_1} = \left(1 - 3 \frac{e^{-2t}}{e^{-2t} + 1} \right), \text{ soit par intégration : } \ln(X_1) = \left(t + \frac{3}{2} \ln(e^{-2t} + 1) \right)$$

On trouve par conséquent : $X_1 = e^t e^{\frac{3}{2} \ln(e^{-2t} + 1)} = e^t (e^{-2t} + 1)^{\frac{3}{2}}$

$$\Phi_t = \begin{bmatrix} e^t (e^{-2t} + 1)^{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\mu_1 = e^t (e^{-2t} + 1)^{\frac{3}{2}}$ et $\mu_2 = e^{-t}$

Les exposants de Lyapunov sont donnés par : $\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\mu_i(t)|$

On trouve ainsi $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -1$.

IV.2) En route vers le chaos

Un cycle linéaire invariant dans le temps doit posséder une partie imaginaire pure pour osciller dans le temps. Cette condition est très fragile vis-à-vis des perturbations existantes et/ou erreurs de modélisation pouvant affecter la valeur de ces pôles. De plus, dans le cas linéaire, l'amplitude de l'oscillation dépend uniquement de la condition initiale.

Au contraire, les systèmes non linéaires peuvent être le siège d'oscillation (cycles limites) caractérisés par leur amplitude et leur fréquence, indépendamment de la condition initiale. Ainsi, pour concevoir un oscillateur stable, il est nécessaire de réaliser un système non linéaire. L'équation de Van Der Pol est l'exemple le plus couramment traité dans la littérature. Il s'agit d'une équation d'ordre 2 non linéaire caractérisée par l'équation suivante :

$$m\ddot{x}(t) + 2c(x(t) - 1)\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad c > 0$$

En ce qui concerne les cycles limites, la théorie de Floquet est une aide considérable pour déterminer la stabilité. Également basée sur l'analyse des valeurs propres (multiplicateurs de Floquet) de la matrice Jacobienne du système, elle permet de connaître le comportement stable ou instable en fonction de la manière dont les valeurs propres passent à travers le cercle unité du plan complexe.

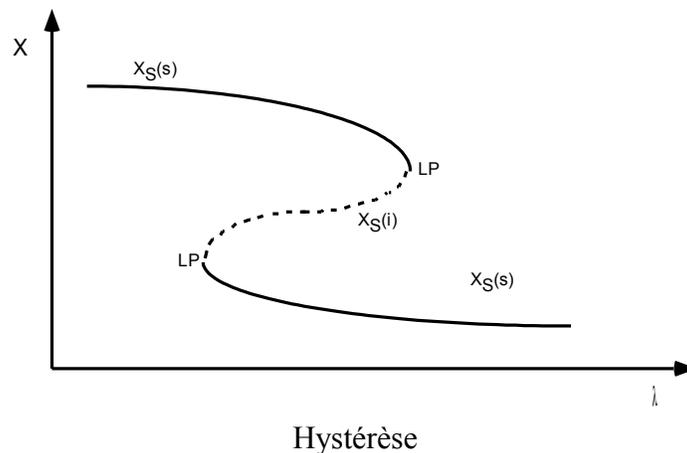
Si on adjoint maintenant un degré de liberté supplémentaire au système précédent, par exemple en faisant varier c , nous obtenons un système à trois degrés de liberté et dont le comportement dépend du paramètre de contrôle c . Pour une valeur de c fixée et positive, le système décrit un cycle limite dont l'amplitude et la durée dépendent de c . Si on modifie c , on modifie la trajectoire du cycle. Si c devient négatif, le système peut décrire une trajectoire dite nœud ou col. Avant de devenir chaotique, ces systèmes présentent des changements brutaux de comportement liés à la modification du paramètre de contrôle. On dit alors qu'une bifurcation se produit à chaque changement.

IV.3) Hystérèses et bifurcations

Lorsque l'on fait varier un paramètre du système (par exemple le paramètre c du système de Van Der Pol précédent), celui-ci pourra changer le régime. Le diagramme de bifurcation nous renseigne sur le type de comportement produit par le système en fonction d'un paramètre donnée.

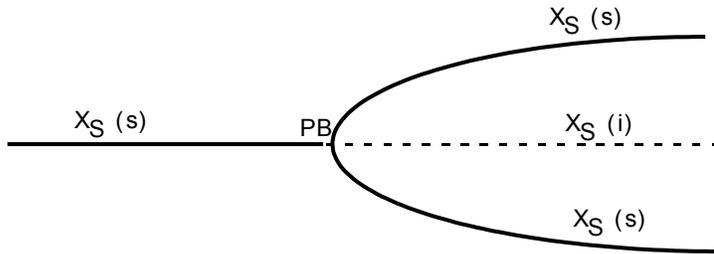
IV.3.1) Hystérèse

Si, en fonction d'un paramètre de contrôle c , la courbe de l'état stationnaire forme un 'S', il apparaît un domaine de valeurs de contrôle pour lequel le système admet simultanément trois états stationnaires, dont deux sont stables et un est instable (bistabilité) (le paramètre de stabilité est obtenu par linéarisation). Cette courbe est appelée hystérèse.

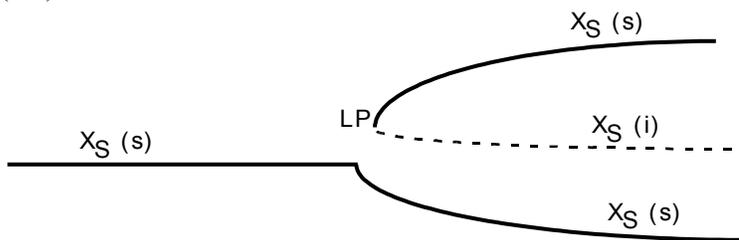


IV.3.2) Bifurcation fourche (Pitchfork) ou nœud col

Si, à une valeur donnée de la variable de contrôle c le système devient instable (i) et qu'apparaissent au même endroit deux états stationnaires (indice S) stables (s) de la variable X qui coexistent, on parlera de bifurcation de pitchfork (PB) :



Notons que ce type de bifurcation est très instable et qu'il suffit, en général de modifier légèrement un autre paramètre pour que cette structure se brise. On voit alors apparaître un **point limite** (LP).



IV.3.3) Bifurcation de Hopf

Passer d'un état stationnaire stable à un régime périodique est possible suite à une bifurcation de Hopf (HB).

La bifurcation de Hopf donne naissance à des solutions oscillantes dont l'amplitude donne lieu à une bifurcation fourche et la phase tourne à vitesse constante. La solution est donc périodique et les trajectoires décrivent une spirale attirée vers une courbe asymptotique nommée cycle limite.

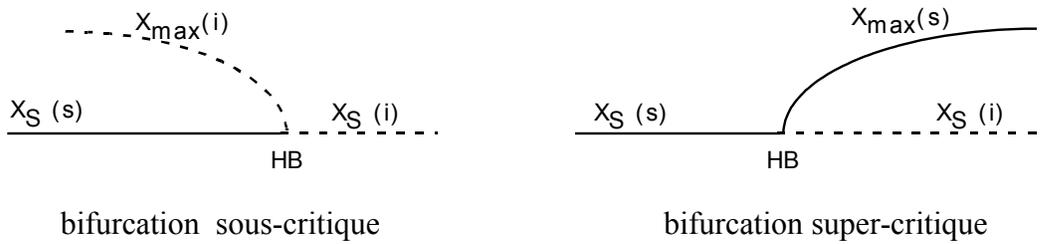
Une bifurcation de Hopf est caractérisée par le passage de la partie réelle de deux valeurs propres complexes conjuguées de la matrice jacobienne du domaine négatif au domaine positif. Il arrive parfois que plusieurs paires de valeurs propres voient simultanément leur partie réelle changer de signe. On parlera alors de bifurcation de Hopf dégénérée.

Un cycle limite peut également être généré à partir d'une bifurcation de Hopf située sur la branche d'un autre cycle limite. Une telle bifurcation est qualifiée de secondaire.

IV.3.4) Notion de sous- et super-criticalité

Dans le cas d'une bifurcation fourche, ainsi que pour une bifurcation Hopf, si la branche se déploie dans le domaine stable de l'état stationnaire, elle sera certainement instable. On qualifie

alors la bifurcation de sous-critique (schéma à gauche ci-dessous). Dans le cas contraire, la bifurcation est dite super-critique (schéma à droite ci-dessous).

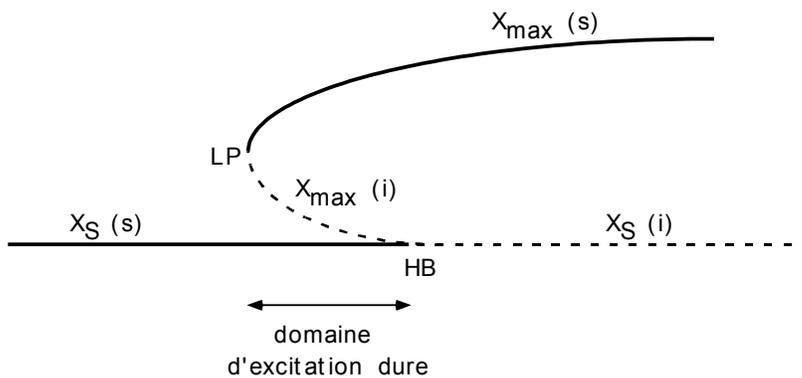


La forme normale de la bifurcation supercritique est : $\dot{x} = \mu x - x^3$.

Cependant, le terme cubique du développement de la forme normale n'est pas suffisante pour rendre compte de la trajectoire. Pour obtenir la saturation de la solution, l'on doit parfois prendre le terme de degré 5 : $\dot{x} = \mu x + x^3 - x^5$

IV.3.5) Excitation dure

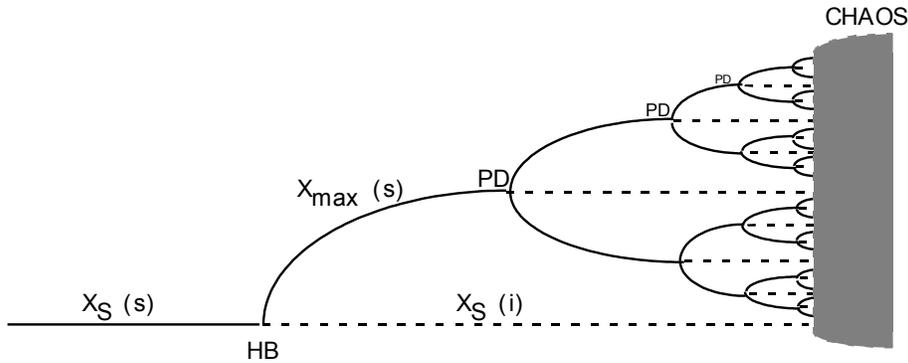
Si le début de la branche commence par être sous-critique, mais que celle-ci rencontre peu après un point limite qui la fait retourner vers le domaine de λ où l'état stationnaire est instable, on peut trouver une région où un cycle limite stable coexiste avec un état stationnaire, les deux étant séparés par un cycle limite instable. Ce dernier joue le rôle de séparatrice. Cette situation est qualifiée d'excitation dure.



L'origine du terme "excitation dure" vient de fait que pour passer de l'état stationnaire stable au cycle limite stable, il faut infliger au système une perturbation (excitation) suffisamment forte pour qu'il puisse franchir le cycle limite instable.

IV.3.6) Dédoublément de période et route vers le chaos

Signalons enfin que la cascade de dédoublement de période (séquence de Feigenbaum) est la route vers le chaos la plus couramment rencontrée.



Séquence de Feigenbaum

La route de Feigenbaum consiste en une succession de bifurcations fourches, alors que la route de Pomeau-Manneville (non vue) repose sur une hystérèse (bifurcation tangente ?) prise en inverse.

V) Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre les systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. Une étude sur la stabilité a permis d'introduire différentes trajectoires pour les systèmes à deux dimensions linéaires. Dans le cas de système non linéaires la notion de stabilité est plus complexe et l'existence d'attracteurs multiples modifie les trajectoires dans le plan de phase. Cependant, dans le cas d'un système d'ordre 2, les non linéarités génèrent plusieurs attracteurs autour desquels nous retrouvons les trajectoires associées aux systèmes linéaires. Enfin, l'augmentation du degré de liberté (par variation d'un paramètre dit de contrôle) a fait apparaître des changements brutaux de trajectoires (bifurcations) à l'origine desquels on conçoit l'idée de trajectoire chaotique.

Ce chapitre constitue une base de compréhension des systèmes non linéaire en introduisant les différents comportements dynamiques de systèmes non linéaire de degré 2 puis 3. Au-delà, on se ramène à un système courbe ou hyperplan mais dont la génération d'un phénomène chaotique reste liée au(x) paramètres de contrôle.