

Projet ANR- 13-BS03-0005

MSDOS

(Multidimensional systems, digression on stability – Systèmes multidimensionnels, digression sur la stabilité)

Programme Blanc 2013 SIMI3

A	IDENTIFICATION	2
B	LIVRABLES ET JALONS	2
C	RAPPORT D'AVANCEMENT	3
	C.1 Objectifs initiaux du projet	3
	C.2 Travaux effectués et résultats atteints sur la période concernée ..	3
	C.3 Difficultés rencontrées et solutions	4
	C.4 Faits et résultats marquants	5
	C.5 Travaux spécifiques aux entreprises (le cas échéant)	5
	C.6 Réunions du consortium (projets collaboratifs)	5
	C.7 Commentaires libres	5
D	VALORISATION ET IMPACT DU PROJET DEPUIS LE DEBUT	6
	D.1 Publications et communications	6
	D.2 Autres éléments de valorisation	8
	D.3 Pôles de compétitivité (projet labellisés)	8
	D.4 Personnels recrutés en CDD (hors stagiaires)	8
	D.5 État financier	9
E	ANNEXES EVENTUELLES	9

Ce document est à remplir par le coordinateur en collaboration avec les partenaires du projet. Il doit être transmis par le coordinateur aux échéances prévues dans les actes attributifs :

- 1. à l'ANR*
- 2. aux pôles de compétitivité ayant accordé leur label au projet.*

L'ensemble des partenaires doit avoir une copie de la version transmise à l'ANR.

Il doit être accompagné d'un résumé public du projet mis à jour, conformément au modèle associé à ce document.

Ce modèle doit être utilisé uniquement pour le(s) compte(s)-rendu(s) intermédiaire(s) défini(s) dans les actes attributifs de financement, hors rapport T0+6 pour lequel il existe un modèle spécifique. Il existe également un modèle spécifique au compte-rendu final.

A IDENTIFICATION

Acronyme du projet	MSDOS
Titre du projet	Systèmes multidimensionnels, digression sur la stabilité
Coordinateur du projet (société/organisme)	LIAS-ENSIP
Date de début du projet Date de fin du projet	20/01/2014 – 19/01/2018
Labels et correspondants des pôles de compétitivité (pôle, nom et courriel du corresp.)	Pôle de compétitivité Ellopsys Pierre-Jean Laroulandie Pj-laroulandie@elopsys.fr
Site web du projet, le cas échéant	Site général : http://www.lias-lab.fr/perso/nimayeganefer/doku.php?id=welcome Site résumant l'approche algébrique : http://chercheurs.lille.inria.fr/aquadrat/MSDOS.html

Rédacteur de ce rapport	
Civilité, prénom, nom	Nima Yeganefer
Téléphone	0549453667
Courriel	Nima.yeganefer@univ-poitiers.fr
Date de rédaction	20/07/2016
Période faisant l'objet du rapport d'activité	T0+18->T0+24

B LIVRABLES ET JALONS

Quand le projet en comporte, reproduire ici le tableau des jalons et livrables fourni au début du projet. Mentionner l'ensemble des livrables, y compris les éventuels livrables abandonnés, et ceux non prévus dans la liste initiale.

N°	Intitulé	Nature*	Date de fourniture			Partenaires (souligner le responsable)
			Prévue initialement	Replanifiée	Livrée	
1	M.1.1. bibliographie sur la stabilité des systèmes nD	Rapport interne	03/2015	09/2015	09/2015	<u>LIAS</u> , XLIM
2	M.2.1. bibliographie sur les systèmes répétitifs	Rapport interne	03/2015	abandonné		<u>LIAS</u> , ISSI
3	M.3.1. rapport sur les versions algorithmiques de la preuve de Deligne et ses applications aux systèmes nD	Rapport interne	12/2014			<u>INRIA</u> -XLIM
4	M.3.2. point sur la stabilisation structurelle des systèmes nD	jalons	09/2015		09/2015	<u>XLIM</u> , INRIA
5	M.5.1. travail des Masters, simulation et programmation LMI	Rapports étudiants Master	06/2016		06/2016	<u>LIAS</u>
6	M.1.2. point sur les avancées théoriques liées aux méthodes de Lyapunov	jalons	07/2016		07/2016	XLIM, <u>LIAS</u>
7	M.2.2. rapport intermédiaire sur les avancées théoriques des systèmes répétitifs	Rapport interne	01/2016	abandonné		<u>LIAS</u> , ISSI
8	M.5. IsStable (stabilité des systèmes nD)	Package	2017-2018		2016	<u>INRIA</u>
9	M.5. IsStable2D (stabilité des systèmes 2D)	Package	2017		2016	<u>INRIA</u>
10	M.5. WhereIsStable2D (stabilité sur une région donnée)	Package	2017-2018		2016	<u>INRIA</u>

N°	Intitulé	Nature*	Date de fourniture			Partenaires (souligner le responsable)
			Prévue initialement	Replanifiée	Livrée	
11	M.5. IsAsymptoticStable (stabilité d'un système à retard)	Package	2016		2016	<u>INRIA</u>
12	M.5. Stabilization2D (stabilisation d'un système 2D)	Package	2017-2018		2016	<u>INRIA-XLIM</u>
13	M.5. StabilityEquivalence (équivalence des modèles 2D et stabilité)	Package	2016		2016	<u>LIAS-XLIM</u>

* jalon, rapport, logiciel, prototype, données, ...

C RAPPORT D'AVANCEMENT

C.1 OBJECTIFS INITIAUX DU PROJET

Maximum 10 à 20 lignes.

Le projet MSDOS se propose de traiter par des approches différentes les problèmes relatifs à la stabilité et la stabilisation des systèmes multidimensionnels, aussi appelés systèmes nD. Les premiers objectifs du projet sont donc d'abord théoriques et divisés en 3 tâches distinctes. Dans un deuxième temps, cette théorie devrait aboutir à des outils pratiques permettant l'analyse des systèmes nD.

Précisément les 3 premières tâches se concentrent sur différentes approches de la stabilité et la stabilisation : l'une concerne les approches de type Lyapunov, l'une étudie les systèmes répétitifs et la dernière étudie les problèmes de factorisations coprimaires et ses liens avec la stabilisation. Les 3 dernières tâches se pencheront sur les aspects pratiques avec d'une part un ensemble de packages qui sera mis à disposition de la communauté scientifique traitant des problèmes d'analyse et de synthèse des systèmes nD ; d'autre part, les résultats obtenus dans les tâches théoriques seront appliqués à l'étude des systèmes à retards et des équations aux dérivées partielles. Enfin, un plan de cours sur les systèmes multidimensionnels intégrant les résultats obtenus sera proposé comme formation universitaire de niveau master/thèse.

Les objectifs sont donc clairs : étendre les connaissances scientifiques sur les systèmes multidimensionnels, développer cette thématique au niveau national et international, proposer des formations pour les étudiants afin de les sensibiliser à cette thématique importante.

C.2 TRAVAUX EFFECTUES ET RESULTATS ATTEINTS SUR LA PERIODE CONCERNEE

Maximum 1 page. Travaux et résultats obtenus pendant la période concernée, conformité de l'avancement des travaux avec le plan initialement prévu. Prévision de travaux pour la (les) prochaine(s) période(s).

Durant l'année scolaire 2015/2016, nous avons continué à mettre l'accent sur les collaborations entre les différentes équipes. En s'appuyant sur les résultats obtenus par des approches algébriques sur l'équivalence des modèles nD usuels, nous avons pu dresser une carte assez complète de la stabilité et la stabilisation structurelle des modèles 2D. Cela nous a permis de dégager d'autres questions fondamentales, notamment les liens entre stabilité structurelle et stabilité asymptotique. Nous pensons pouvoir montrer que ces deux notions ne sont pas strictement équivalentes dans le cas de modèles

linéaires, le lieu précis dépendant du choix des conditions initiales. L'année qui suit sera l'occasion de présenter ce résultat, notamment lors de l'organisation de notre workshop soutenu par le CIRM (Centre International de Rencontres Mathématiques) en octobre 2016.

Un effort important a aussi été réalisé pour obtenir de nouveaux critères de stabilité s'appuyant sur des techniques dites de Lyapunov. Plusieurs réunions de recherche en petit comité ont eu lieu dans le courant de l'année mais les verrous scientifiques pour l'instant rendent la tâche difficile notamment pour le cas continu.

Cette année fut aussi l'occasion de mettre au point plusieurs packages pour l'étude de la stabilité et la stabilisation des modèles nD et leurs applications notamment aux systèmes à retards. Ces packages sont intitulés : IsStable, IsStable2D, WhereIsStable2D, IsAsymptoticStable, Stabilization2D, StabilityEquivalence. Ils sont décrits sur notre site web et disponibles à la demande. À noter que certains de ces packages sont issus des avancées de la tâche 4 dédiée à l'application des résultats théoriques obtenus pour l'étude des systèmes à retards et des équations aux dérivées partielles.

Enfin, la tâche 3 qui s'attaque à l'un des problèmes les plus difficiles et ambitieux du projet MSDOS (basée sur une preuve constructive d'un théorème de Pierre Deligne) a permis de déverrouiller quelques premiers verrous scientifiques. En effet, la collaboration entre les partenaires INRIA et XLIM a permis de démontrer une conjecture de Zhiping Lin cruciale pour l'étude de la stabilisation de systèmes multidimensionnels (publication à venir).

C.3 DIFFICULTES RENCONTREES ET SOLUTIONS

Maximum 10 à 20 lignes. Difficultés éventuelles rencontrées et solutions de remplacement envisagées ex : impasse technique, abandon d'un prestataire, maîtrise des délais, maîtrise des budgets. Faut-il revoir le contenu du projet ? Faut-il revoir le calendrier du projet ?

Lors de la réunion à mi-parcours, nous avons souligné la problématique à laquelle nous étions confrontés : à mesure que nous avançons dans une tâche ou une direction donnée, la dynamique féconde du groupe nous permettait de découvrir de nombreuses nouvelles pistes qu'il nous était difficile d'ignorer. Nous avons donc décidé de focaliser un peu plus notre travail sur les thématiques qui sont les plus proches de nos thématiques d'origine. La tâche 2 qui était focalisée sur les processus répétitifs restera donc cantonnée aux modèles classiques 2D linéaires. Le calendrier du projet n'est pas modifié, la tâche et les livrables de cette tâche sont simplement réorientés et fusionnés avec la tâche 1 qui traite aussi de la stabilité des systèmes classiques 2D avec des approches pouvant s'adapter aussi bien au linéaire qu'au non linéaire.

Nous avons aussi souligné la difficulté scientifique de certaines thématiques parfois anticipée (tâche 3, preuve constructive d'un théorème de Pierre Deligne), parfois moins (tâche 1, méthodes de Lyapunov). L'accent sera donc mis sur ces approches lors de la phase finale de notre projet notamment en accentuant les réunions de travail en petits comités et les échanges internationaux (via notre possible PHC et autres collaborations).

C.4 FAITS ET RESULTATS MARQUANTS

En quelques lignes pour chaque fait ou résultat marquant. Cet élément pourrait donner lieu à communication, après accord du coordinateur du projet.

Parmi les faits marquants de cette année, nous poursuivons la dynamique de collaboration qui a fait le succès de notre projet jusqu'à présent avec notamment :

- Le dépôt d'un projet PHC PESSOA avec d'autres membres importants de la communauté des systèmes nD au Portugal (budget demandé de l'ordre de 10k€) ;
- L'organisation d'un workshop soutenu par le CIRM à Marseille (3-7/10/2016) ;
- Le dépôt d'une demande d'organisation d'une « tutorial session » (sur 1 ou 2 jours) lors du IFAC 2017 World Congress qui aura lieu à Toulouse en juillet 2017 ;
- La continuation de la formation au niveau doctoral à Poitiers (10h) ;
- La création de plusieurs packages destinés à l'analyse de la stabilité et la stabilisation des systèmes multidimensionnels.

C.5 TRAVAUX SPECIFIQUES AUX ENTREPRISES (LE CAS ECHEANT)

néant

C.6 REUNIONS DU CONSORTIUM (PROJETS COLLABORATIFS)

Date	Lieu	Partenaires présents	Thème de la réunion
13-16/12/2015	Poitiers	XLIM-LIAS	Séjour de travail, étude sur la stabilisation
2-5/12/2015	Marseille	LIAS+collaborateur Marseille	Séjour de travail, étude de la stabilité via les méthodes de Lyapunov
2-3/02/2016	Paris	XLIM-LIAS-INRIA	Préparation de l'évaluation mi-parcours et présentation devant l'ANR
15-18/02/2016	Poitiers	XLIM-LIAS	Séjour de travail, étude de la stabilité structurelle et ces liens avec la stabilité asymptotique
4-5/04/2016	Poitiers	Tous	Bilan de l'action et retour de l'ANR après l'évaluation mi-parcours
11-15/04/2016	Paris	XLIM-INRIA	Séjour de travail sur la stabilisation
31/06-6/06/2016	Poitiers	LIAS+collaborateur Marseille	Séjour de travail, étude de la stabilité des modèles continus
11-12/07/2016	Poitiers	XLIM-LIAS	Séjour de travail, étude de la stabilité via les méthodes de Lyapunov

C.7 COMMENTAIRES LIBRES

Commentaires du coordinateur

Commentaire général à l'appréciation du coordinateur, sur l'état d'avancement du projet, les interactions entre les différents partenaires...

Lors de la réunion à mi-parcours, il a été demandé par l'ANR une « montée en puissance » du coordinateur, notamment pour tout ce qui concerne les « tâches ingrates » du projet. Le coordinateur, aidé par ses collègues, s'engage à faire de son

mieux et peut souligner les différents éléments suivants :

- Création d'une nouvelle page web plus concise et précise concernant les aspects algébriques du projet (<http://chercheurs.lille.inria.fr/aquadrat/MSDOS.html>) ;
- Mise à jour de la page web de l'ANR permettant de figurer les différents rapports en lien avec le projet (<http://www.lias-lab.fr/perso/nimayeganefer/doku.php?id=meetings>) ;
- Mise à jour des publications de la page web de l'ANR (<http://www.lias-lab.fr/perso/nimayeganefer/doku.php?id=publications>) ;
- Bilan complet du budget notamment dans le but de préparer le workshop soutenu par le CIRM :
- Réorganisation des tâches et de certains livrables (qui ne nuisent pas à l'ensemble du projet comme souligné devant le comité ANR à la réunion mi-parcours).

Commentaires des autres partenaires

Éventuellement, commentaires libres des autres partenaires

Question(s) posée(s) à l'ANR

Éventuellement, question(s) posée(s) à l'ANR...

Pas de questions.

D VALORISATION ET IMPACT DU PROJET DEPUIS LE DEBUT

Cette partie rassemble des éléments cumulés depuis le début du projet qui seront suivis tout au long de son avancée, et repris dans son bilan final.

D.1 PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS

Citer les publications résultant du projet en utilisant les normes habituelles du domaine. Si la publication est accessible en ligne, préciser l'adresse. L'ANR encourage, dans le respect des droits des co-auteurs et des éditeurs, à publier les articles résultant des projets qu'elle finance dans l'archive ouverte pluridisciplinaire HAL : <http://hal.archives-ouvertes.fr/>

Attention : éviter une inflation artificielle des publications, mentionner uniquement celles qui résultent directement du projet (postérieures à son démarrage, et qui citent le soutien de l'ANR et la référence du projet).

Liste des publications multipartenaires (résultant d'un travail mené en commun)		
International	Revue à comité de lecture	1. O. Bachelier, T. Cluzeau, R. David, N. Yeganefer, Structural stabilization of linear 2D discrete systems using equivalence transformations , accepté pour publication à <i>Multidimensional Systems and Signal Processing</i> .
	Ouvrages ou chapitres d'ouvrage	1. 2.
	Communications (conférence)	1. O. Bachelier, T. Cluzeau, R. David, N. Yeganefer, Structural stability and equivalence of linear 2D discrete systems , Proceedings of the IFAC Joint Symposium SSSC 2016 & TDS 2016 , Istanbul (Turkey), 22-24/06/2016. 2. T. Cluzeau, Constructive algebraic analysis approach to the equivalence of multidimensional linear systems , Proceedings of the <i>IEEE 9th International Workshop on Multidimensional (nD) Systems (IEEE nDS 2015)</i> , Vila Real (Portugal) (07-09/09/15).

		<ol style="list-style-type: none"> 3. R. David, F. Silva, N. Yeganefar, O. Bachelier, Existence and uniqueness of the solutions of continuous nonlinear 2D Roesser models : the locally Lipschitz case, Proceedings of the <i>IEEE 9th International Workshop on Multidimensional (nD) Systems (IEEE nDS 2015)</i>, Vila Real (Portugal) (07-09/09/15). 4. O. Bachelier, N. Yeganefar, D. Mehdi, W. Paszke, State feedback structural stabilization of 2D discrete Roesser models, Proceedings of the <i>IEEE 9th International Workshop on Multidimensional (nD) Systems (IEEE nDS 2015)</i>, Vila Real (Portugal) (07-09/09/15).
France	Revue à comité de lecture	<ol style="list-style-type: none"> 1. 2.
	Ouvrages ou chapitres d'ouvrage	<ol style="list-style-type: none"> 1. 2.
	Communications (conférence)	<ol style="list-style-type: none"> 1. 2.
Actions de diffusion	Articles de vulgarisation	<ol style="list-style-type: none"> 1. 2.
	Conférences de vulgarisation	<ol style="list-style-type: none"> 1. 2.
	Autres	<ol style="list-style-type: none"> 1. 2.

Liste des publications monopartenaires (impliquant un seul partenaire)		
International	Revue à comité de lecture	<ol style="list-style-type: none"> 1. Y. Bouzidi, F. Rouillier (2017). "Symbolic methods for solving algebraic systems and application in dynamical system theory", in Algebraic and Symbolic Computation Methods in Dynamical Systems, Advances in Delays and Dynamics (ADD), Springer, à paraître. 2.
	Ouvrages ou chapitres d'ouvrage	<ol style="list-style-type: none"> 1. 2.
	Communications (conférence)	<ol style="list-style-type: none"> 1. M. Bekcheva, L. Greco, H. Mounier, A. Quadrat (2015). "Euler-Bernoulli beam flatness based control with constraints", Proceedings of the <i>IEEE 9th International Workshop on Multidimensional (nD) Systems (IEEE nDS 2015)</i>, Vila Real (Portugal) (07-09/09/15). 2. Y. Bouzidi, A. Quadrat, F. Rouillier (2015). "Computer algebra methods for testing the structural stability of multidimensional systems", Proceedings of the <i>IEEE 9th International Workshop on Multidimensional (nD) Systems (IEEE nDS 2015)</i>, Vila Real (Portugal) (07-09/09/15). 3. Y. Bouzidi, A. Poteaux, A. Quadrat (2016). "Computer algebra methods for the stability analysis of differential systems with commensurate time-delays", Proceedings of the IFAC Joint Symposium SSSC 2016 & TDS 2016, Istanbul (Turkey), 22-24/06/2016. 4. Y. Bouzidi, F. Rouillier (2016). "Certified algorithms for proving the structural stability of two-dimensional systems possibly with parameters", Proceedings of the 22nd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), University of Minnesota, Minneapolis (USA), 12-15/07/2016. 5. H. Mounier, L. Greco (2016). "Modeling and flatness based control of distributed parameter wind turbine systems", Proceedings of the 22nd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), University of Minnesota, Minneapolis (USA), 12-15/07/2016. 6. A. Quadrat, R. Ushirobira (2016). "Algebraic analysis for the Ore extension rings of differential time-varying delay operators", Proceedings of the 22nd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), University of Minnesota, Minneapolis (USA), 12-15/07/2016.
France	Revue à comité de lecture	<ol style="list-style-type: none"> 1. 2.
	Ouvrages ou chapitres d'ouvrage	<ol style="list-style-type: none"> 1. 2.
	Communications (conférence)	<ol style="list-style-type: none"> 1. 2.
Actions de diffusion	Articles de vulgarisation	<ol style="list-style-type: none"> 1. 2.
	Conférences de vulgarisation	<ol style="list-style-type: none"> 1. 2.
	Autres	<ol style="list-style-type: none"> 1. 2.

D.2 AUTRES ELEMENTS DE VALORISATION

Les éléments de valorisation sont les retombées autres que les publications. On détaillera notamment :

- brevets nationaux et internationaux, licences, et autres éléments de propriété intellectuelle consécutifs au projet.
- logiciels et tout autre prototype
- actions de normalisation
- lancement de produit ou service, nouveau projet, contrat,...
- le développement d'un nouveau partenariat,
- la création d'une plate-forme à la disposition d'une communauté
- création d'entreprise, essaimage, levées de fonds
- autres (ouverture internationale,..).

Ce tableau détaille les brevets nationaux et internationaux, licences, et autres éléments de valorisation consécutifs au projet, du savoir-faire, des retombées diverses en précisant les partenariats éventuels. Voir en particulier celles annoncées dans l'annexe technique.

Liste des éléments. Préciser les titres, années et commentaires	
Brevets internationaux obtenus	1. 2.
Brevet internationaux en cours d'obtention	1. 2.
Brevets nationaux obtenus	1. 2.
Brevet nationaux en cours d'obtention	1. 2.
Licences d'exploitation (obtention / cession)	1. 2.
Créations d'entreprises ou essaimage	1. 2.
Nouveaux projets collaboratifs	1. Dépôt d'un projet PHC Pessoa avec des membres de la communauté Portugaise travaillant sur les systèmes multidimensionnels 2.
Colloques scientifiques	1. Mai 2016, journée GDR-EDP-SAR, Paris, N. Yeganefar, Stabilité structurelle et stabilité asymptotique des systèmes multidimensionnels 2. Mai 2016, journée GDR-EDP-SAR, Paris, Y. Bouzidi, ?? 3. Octobre 2016, workshop soutenu par le CIRM (Centre International de Rencontres Mathématiques) intitulé « Avancées théoriques et applicatives des systèmes multidimensionnels en théorie du contrôle »
Autres (préciser)	1.

D.3 POLES DE COMPETITIVITE (PROJET LABELLISES)

Néant.

D.4 PERSONNELS RECRUTES EN CDD (HORS STAGIAIRES)

Ce tableau dresse le bilan du projet en termes de recrutement de personnels non permanents sur CDD ou assimilé. Renseigner une ligne par personne embauchée sur le projet quand l'embauche a été financée partiellement ou en totalité par l'aide de l'ANR et quand la contribution au projet a été d'une durée au moins égale à 3 mois, tous contrats confondus, l'aide de l'ANR pouvant ne représenter qu'une partie de la rémunération de la personne sur la durée de sa participation au projet.

Les stagiaires bénéficiant d'une convention de stage avec un établissement d'enseignement ne doivent pas être mentionnés.

Des données complémentaires sur le devenir professionnel des personnes concernées seront demandées à la fin du projet. Elles pourront faire l'objet d'un suivi jusqu'à 5 ans après la fin du projet.

Pas d'embauches autres que des stagiaires (master et stage ingénieur).

D.5 ÉTAT FINANCIER

Donner un état indicatif de la consommation des crédits par les partenaires. Indiquer la conformité par rapport aux prévisions et expliquer les écarts significatifs éventuels.

Nom du partenaire	Crédits consommés (en %)	Commentaire éventuel
LIAS	37%	Le budget équipement est plus élevé que prévu, les dépenses sont pour le moment moindre pour préparer le workshop qui aura lieu à Marseille (CIRM).
XLIM	64%	Le budget est en accord avec les prévisions.
INRIA	72%	La principale dépense est l'embauche du contrat Post-Doctoral. La nouvelle convention du fait du changement INRIA-SACLAY->INRIA-LILLE n'a toujours pas été validée.

E ANNEXES EVENTUELLES

Vous trouverez en annexe le dossier PHC PESSOA intitulé « Analysis and Synthesis of Multidimensional Systems » déposé avec le Portugal (rédacteurs français : Alban Quadrat et Nima Yeganefar).

Analysis and Synthesis of Multidimensional Systems (ASMS)

– Proposal for the PHC Pessoa program 2017 –

June 15, 2016

Keywords: Control theory, multidimensional systems, behavioural approach, Lyapunov Stability, symbolic computation, S -procedure, functional equations, analysis and synthesis problems, constructive algebraic analysis

1 Scientific context of the collaboration

The idea of analysing *multidimensional systems* (also called *nD systems*) was born in an environment where both engineers and the researchers shared the same interests. The problem of engineers facing more and more complex models was solved by researchers who understood that these systems could be modeled and controlled using a multidimensional approach.

Indeed, most systems have a natural tendency to have multiple dimensions which are often neglected for simplicity. So instead of using 1D digital filter [11], scientists started to look for the implications of digital filters with 2 or more independent variables [11]. A *multidimensional system* was then defined as a system in which information propagates in a n -dimensional space rather than in a single independent direction (usually the time axis for standard 1D systems) [12, 14, 13]. Mathematically, they can be described by different types of *continuous or discrete functional systems*: systems of partial differential equations [36], systems of multivariate difference equations [33, 16], Fornasini-Marchesini models [22], Roesser models [40], transfer matrices with multivariate rational functions [47], multidimensional filters [11], multidimensional signals (e.g. images) [12, 14, 13], spatially interconnected systems [8, 7, 19, 21, 25, 28, 41, 42, 50], ... The class of systems that can be modeled as multidimensional systems is therefore very large. See [12, 24, 54, 14, 13] and the references therein.

Nowadays, *multidimensional systems theory* is a common branch of control theory and signal processing which provides researchers with a source of problems having a rich interplay with pure mathematics (e.g., complex analysis in \mathbb{C}^n , algebraic geometry, analysis of partial differential equations), computer algebra and scientific computing. To state only one important connection between multidimensional systems theory and computer algebra, we can note that the first complete account of the so-called *Gröbner bases* [1, 10], nowadays a cornerstone of the symbolic computation – which are implemented in most of the computer algebra systems (e.g., Maple, Mathematica, Singular, Magma, Macaulay2, Cocoa) – was first

published by B. Buchberger [15] in the book dedicated on multidimensional systems and was edited by N. K. Bose [14].

In France, this research area has not been part of any workgroup yet (e.g., GdR MACS), but it has been studied by some independent French scientists that organised the first *IEEE workshop on multidimensional systems* in France (Poitiers, September 2011). This conference contributed to the genesis of the ANR proposal MSDOS (*Multidimensional Systems: Digression On Stability*), SIMI 3, which was awarded in 2013 for the period 2014-2017 (<http://www.lias-lab.fr/perso/nimayeganeifar/doku.php?id=welcome>). For this ANR, a precise state of art on multidimensional systems theory was made and open problems on stabilities and stabilisation problems were raised.

Because of the expertise of each of the participants of the ANR, the focus of the research on stability and stabilization problems is mainly on two different approaches, we will refer to them as:

- The *Lyapunov approach*, including Lyapunov theory for nonlinear systems [52, 53, 25, 26, 43] but also linear matrix inequalities based on the first “generic nD -version” of the celebrated Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) [35, 23].
- The *frequency domain approach* [47], including algebraic geometry [2, 3, 9, 18, 27], algebraic analysis [38, 39], symbolic computation and constructive module theory [16, 36].

In order to have a complete view of the field, one last approach called the *behavioural approach*, developed by J. C. Willems’ school, was missing [48, 49, 33, 32, 37, 34, 51, 54, 55, 29, 30]. This is why this PHC program offers a great opportunity for the French team to extend their current knowledge and expertise working with one of the best groups of this field worldwide, and particularly with Paula Rocha who developed the behavioural approach for 2D systems in her PhD thesis under the supervision of J. C. Willems. The Portuguese group, involved in the program, recently hosted the previously mentioned *IEEE workshop on multidimensional systems* in Portugal (Vila Real, September 2015). Their expertise on the behavioural approach for multidimensional systems will be an important asset to have a complete view on the issues we want to analyse.

2 Objectives of the collaboration

2.1 Theoretical issues

Recent developments during the MSDOS project have been made on the question of asymptotic stability, exponential stability and structural stability. In [52, 53], we questioned - using the Lyapunov approach - the definitions of asymptotic and exponential stability for 2D systems and proposed new ways to understand these concepts. Lyapunov theorems were also developed to check these conditions for nonlinear systems. The meaning of the continuous 2D Roesser models were analysed in terms of existence and uniqueness of the solutions [20]. In the mean time, we proposed powerful algorithms to investigate the structural stability for nD systems using a generalised version of the S-procedure [6] only to discover that using the frequential approach, the algorithms were much faster and easier to compute [4]. The need to harmonise the results between the frequential and Lyapunov approach lead to interesting

results in terms of equivalence of the Roesser and Fornasini models [17]. This preliminary work has helped us uncovering new possibilities for stabilisation strategies, as shown in our last work [5].

In working intensively on these topics, we discovered that another community - the behavioural approach - has been working on these very same questions with interesting answers [46, 31]. The need to further investigate the links between these three different approaches became important. The last conference on the topic organised by the Portuguese team was decisive to the need to explore the following questions:

- links between the different concept of stability, asymptotic stability, exponential stability, structural stability, for both models, in the discrete, continuous, hybrid case and possibly depending on the models (Roesser, Fornasini or repetitive processes)
- study and development of new techniques for the stability analysis and stabilisation problems for nD systems by means of the behavioural, frequency and Lyapunov approach
- connections and differences of these three approaches, possible comparisons between their respective performances (hopefully without tearing apart one community against another!)

The results we obtain will be published in international journals (e.g. IEEE Transactions on Automatic Control (IEEE TAC), SIAM Journal on Control and Optimization (SICON), Multidimensional Systems and Signal Processing (Springer), ...) and they will be presented to international conferences of control theory (e.g. International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), European Control Conference (ECC), IEEE Conference on Decision and Control (DCD), IEEE International Workshop on Multidimensional (nD) Systems, ...).

2.2 Implementations

The results on stability and stabilisation problems for multidimensional systems, obtained in the three approaches, will be made algorithmic and implemented in a dedicated symbolic-numeric package developed in the computer algebra system `Maple` and interface with `Matlab`.

The French side has an international expertise in the development of `Maple` and `Mathematica` packages dedicated to multidimensional systems such as:

- OREMODULES (<http://wwwb.math.rwth-aachen.de/OreModules/>),
- OREALGEBRAICANALYSIS (<http://pages.saclay.inria.fr/alban.quadrat/OreAlgebraicAnalysis/index.html>)
- OREMORPHISMS (<http://pages.saclay.inria.fr/alban.quadrat/OreMorphisms/index.html>),
- QUILLENUSULIN (<http://wwwb.math.rwth-aachen.de/QuillenSuslin/>).

It is important to note that these symbolic packages are dedicated to the study of the structural properties of multidimensional systems (e.g. controllability, observability, flatness,...), but they cannot be used to develop stability analysis and study stabilisation problems. Hence, based on the expertise of the different group, this PHC program will be a unique opportunity to extend these package towards synthesis problems and give them to the international community.

2.3 Training into research

One of the important aspect of this project is also to help prospective PhD students and PhD students develop their research skills and broaden their knowledge. This is why many members of the project are still in formation and key moments of the project will especially focus on this aspect.

First, even if the project will be possibly financed starting 2017, the members of the project would like to use the workshop they are hosting at the CIRM (Centre International de Rencontres Mathmatiques) in October 2016 as a first step toward this educational aspect. This workshop will be an important moment to share our recent theoretical advances and a very good opportunity for the PhD students of the group to do so in a friendly environment. They will be able, indeed, to present their work during a small audience of international experts and other young researchers.

Second, the world IFAC conference will be hosted in France in July 2017. A tutorial will be organised by the members of the team at this conference mainly designed for interested PhD students from around the world. During this tutorial, the first theoretical results can be introduced in a comprehensive way using the implementation methods as illustration of the theoretical work.

Finally, the last year of the project will provide a good opportunity to co-supervise a master student and possibly finance a co-supervised PhD thesis. How to finance this PhD thesis remains open at the moment but we believe that there is an opportunity to get a Marie-Curie research grant to do so.

3 Program of the collaboration & schedule

Although the project will be funded starting 2017, the first interesting moment will be in October 2016 when the French team will organise a workshop supported by the CIRM organisation (Centre International de Rencontres Mathmatiques, <http://www.fr-cirm-math.fr/>). If the Portuguese team can find the financial resources to join this workshop, this one week rencontre will be a good opportunity to start sharing our knowledge on our respective area of expertise.

3.1 2017

- Confrontation between the Lyapunov, frequential and behavioural approach on stability and stabilisation regarding multidimensional systems.
- Organisation of a tutorial workshop during world IFAC conference in Toulouse (July 2017) on stability and stabilisation issues for nD systems.

- Development of a `Maple` package for stability and stabilisation problems for nD systems, possible extension to a `Matlab` interface using symbolic toolbox.

3.2 2018

- Supervision of a common Master project, the work will depend on the skills of the candidate and could possibly involve questions related to stability of repetitive processes.
- Description of a co-supervised PhD proposal with a possible Marie-Curie research grant (<https://goo.gl/swg4V6>).
- Implementation of the new theoretical results on stability and stabilisation.

4 Composition of the teams

4.1 Portugal

1. **Maria Paula Rocha Malonek, team leader**, Professor
University of Oporto, Department of Electrical and Computer Engineering - FEUP -
Rua Dr. Roberto Frias s/n 4200-465 Porto, Portugal.
Tel: 003512250818
Email: mprocha@fe.up.pt
Web: <http://paginas.fe.up.pt/~mprocha/>
2. **Teresa Paula Coelho Azevedo Perdicoúlis**, Professor
Dep. Engenharias, UTAD, 5000-801 Vila Real, Portugal.
Email: tazevedo@utad.pt
Web: <http://utad.academia.edu/TPerdicoulis/>
3. **Juliana Filipa Carvalho de Almeida**, PhD student
Dep. Engenharias, UTAD, 5000-801 Vila Real, Portugal.
Tel: 00351919529015
Email: almeidajfc@gmail.com
4. **Sara Teixeira Baltazar**, PhD student
University of Oporto, Department of Electrical and Computer Engineering - FEUP -
Rua Dr. Roberto Frias s/n 4200-465 Porto, Portugal.
Tel: 003512250818
Email: sarabaltazar@gmail.com

4.2 France

1. **Olivier Bachelier**, Professor
LIAS-ENSIP, 2, rue Pierre Brousse, BP 633, 86022 Poitiers, France.
Tel: 00-33-5-49-45-36-79
Email: olivier.bachelier@univ-poitiers.fr
Web: <http://www.lias-lab.fr/members/olivierbachelier>

2. **Yacine Bouzidi**, Post-Doc student
Inria Lille - Nord Europe, Parc Scientifique de la Haute Borne, 59650 Villeneuve d'Ascq, France.
Tel: 00-33-3-54-95-85-18
Email: yacine.bouzidi@inria.fr
Web: <http://researchers.lille.inria.fr/~yabouزيد/>
3. **Thomas Cluzeau**, Assistant Professor
XLIM, DMI, Université de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges cedex, France.
Tel: 00-33-5-55-42-37-14
Email: cluzeau@ensil.unilim.fr
Web: <http://perso.ensil.unilim.fr/~cluzeau/>
4. **Ronan David**, PhD student
LIAS-ENSIP, 2, rue Pierre Brousse, BP 633, 86022 Poitiers, France.
Tel: 06.71.45.85.89
Email: ronan.david@etu.univ-poitiers.fr
5. **Alban Quadrat**, Research Director
Inria Lille - Nord Europe, Parc Scientifique de la Haute Borne, 59650 Villeneuve d'Ascq, France.
Tel: 00-33-1-69-85-17-75
Email: alban.quadrat@inria.fr
Web: <http://pages.saclay.inria.fr/alban.quadrat/>
6. **Guillaume Rance**, PhD student
Laboratoire des Signaux et Systèmes, Supélec, Université Paris Sud 11, 3 rue Joliot Curie, 91192, Gif sur Yvette, France. Tel: 00-33-1-69-85-17-52
Email: guillaume.rance@l2s.centralesupelec.fr
Web: <http://www.l2s.centralesupelec.fr/en/perso/guillaume.rance>
7. **Nima Yeganefar, team leader**, Assistant Professor
Université de Poitiers, LIAS-ENSIP, 2 rue Pierre Brousse, BP 633, 86022 Poitiers, France.
Tel: 00-33-5-49-45-36-67
Email: nima.yeganefar@univ-poitiers.fr
Web: <http://www.lias-lab.fr/members/nimayeganefar>

5 Complementarity of the teams

The interest of this collaboration is easily highlighted with a practical example some members of the team experienced not long time ago. Trying to publish a result on the concept of asymptotic stability for 2D systems, they faced criticism from some of the reviewers because even if the concept is supposed to be the same for everyone, the understanding of the concept can widely vary depending on the communities. Moreover, people from one community (for instance those familiar with the Lyapunov approach) are not always aware of the work done

on the same issue from another community (the behavioural approach). Therefore, the fundamental questions that are being tackled in this project, need the joint effort of renowned experts within each community: behavioural approach (Portuguese contribution), Lyapunov approach (French contribution), frequency approach (French contribution). As for the details:

5.1 French team

- OLIVIER BACHELIER is a specialist on robust analysis and control of uncertain linear models, particularly matrix root-clustering, robust pole placement, eigenstructure assignment. He is also interested in descriptor linear models and linear nD-models, especially hybrid Roesser models for which he provided (together with W. Pazske and D. Mehdi) the first generic nD-version of the Kalman-Yakubovich-Popov lemma [35] and the first necessary and sufficient stability condition for a hybrid Roesser model [6]. Since January 2012, he is an associated editor of the international journal *Multidimensional Systems and Signal Processing* (Springer). He was the general chair of the international conference on this domain, nDS'11, which was held in LIAS, Poitiers, in September 2011.
- YACINE BOUZIDI is a Post-Doctoral student working with Alban Quadrat. He is a specialist of effective aspects of real algebraic geometry (e.g. Gröbner bases, univariate rational representation, discriminant variety, resultant theory), their applications in algorithmic geometry (certified topology of curves) and in control theory. These skills allowed the development of a new high performance algorithm [4] to check stability conditions for nD systems.
- THOMAS CLUZEAU is a world specialist in linear functional systems (e.g., systems of ordinary differential equations or of difference equations), unimodular methods, differential algebra, and symbolic computation. He also has a good knowledge in control theory (teaching, exercise classes, applications of some of his work). In collaboration with Alban Quadrat, he is the developer of the `Maple` package `OREMORPHISMS` and the `Mathematica` package `OREALGEBRAICANALYSIS` dedicated to the study of symmetries, factorisation, reduction, and decomposition of linear functional systems and multidimensional systems. His long experience symbolic methods in Ore algebras and differential algebra will be precious for the project.
- ALBAN QUADRAT is a world specialist on constructive algebra, symbolic computation and control theory. He is an associate editor of the Springer journal *Multidimensional Systems and Signal Processing* (2007 - –) for which he is in charge of the section on systems theory and symbolic computation. He is the developer of the `Maple` packages `OREMODULES`, `OREMORPHISMS`, `STAFFORD` and `QUILLENUSULIN`, and the `Mathematica` package `OREALGEBRAICANALYSIS` dedicated to the algebraic analysis of multidimensional systems. His experience in both control theory and symbolic computation (Gröbner bases, differential algebra) will be central for the success of the project.
- NIMA YEGANEFAR is an expert in stability analysis and Lyapunov theory. He proposed definitions of asymptotic and exponential stability for 2D systems [52] and highlighted the problems encountered with these generalisations. The successful collaboration [5] between him, Thomas Cluzeau, Ronan David and Olivier Bachelier recently shows the

importance to mix different approaches. His experience in leading the MSDOS project will also be determinant.

- RONAN DAVID and GUILLAUME RANCE are two PhD students who will work on the Lyapunov aspect of the project for Ronan and the frequential approach for Guillaume. They will benefit from the experience of the members of the Portuguese team by extending their knowledge to the behavioural approach.

5.2 Portuguese team

- MARIA PAULA ROCHA MALONEK is an expert in behavioral approach. She acquired her expertise through her work with Professor Willems himself (the father of this theory). Then she became an expert in the application of this approach to the description of nD dynamics. This point of view lies at the boundary of mathematics and automatic control with numerous original contribution to the stability question of multidimensional systems [31]. She has organised the IEEE sponsored conference on Multidimensional Systems nDS2007, and recently co-edited a special issue on Multidimensional Systems Applications for the journal *Multidimensional Systems and Signal Processing*. Her work and expertise is crucial to the project.
- TERESA PAULA COELHO AZEVEDO PERDICOÚLIS is one of the leading member of the nD community. She has chaired the IEEE conference in multidimensional systems in 2015, nDS2015, is a Co-Editor of the Journal Multidimensional Systems and Signal Processing and also is Co-Editing a Special Issue on Estimation and Control in Multidimensional Systems in the IJC (International Journal of Control) approved by Taylor & Francis and to appear by the end of next year. Her work focused on theory but also practical applications [44, 45] is very important to help master and PHD students entering the field.
- JULIANA FILIPA CARVALHO DE ALMEIDA is currently a PhD student of Paula Rocha's. Before, she has worked as a research fellow in a project held by Paula Rocha on the application of 2D neural networks to parameter estimation in 2D processes, a problem which involves dealing with stability issues. The participation of Juliana Almeida in this project would contribute to enrich her knowledge on the different approaches to the stability of multidimensional systems, and hopefully provide her with the necessary tools to overcome some more theoretical questions that were left open in the project.
- SARA TEIXEIRA BALTAZAR is a PhD student currently studying with Teresa Perdicoulis. Her work is focused on the simulation of dynamic models for natural gas pipelines where a set of nonlinear partial differential equations is used to describe the pipeline dynamics. The aims of the participation in this project are to study the stability of the PDE, develop solid models, explore new paths in this field, and enhance the research work.

6 Advantages for the teams

The main advantage of the collaboration is to bring closer three different communities on questions related to stability. It is crucial when we want to tackle fundamental theoretical questions for a special type of systems (nD systems), to be coherent even if the tools used

are different. It is impossible for the French team alone to do so, as the expertise on the behavioural approach is simply not very strong. On the other side, the Portuguese have a strong background on behavioural approach highlighted by their publications and an international reputation on nD systems as shown by their recent organisation of the special conference on nD systems in 2015. This collaboration will certainly help the French team to have a broader impact in the nD community and help the development of these topics in France, one of the objectives of the ANR project MSDOS.

Let us shortly highlight the expertise brought together in this project:

The Portuguese team will bring their expertise in the following domains:

- Expertise in behavioural analysis and synthesis
- Expertise in practical applications for nD systems
- Expertise in stability questions of repetitive processes

The French team will bring their expertise in the following domains:

- Expertise in algebraic methods, homological algebra and symbolic computation.
- Expertise in efficient implementations.
- Expertise in Lyapunov theory and Lyapunov stability notions
- Expertise in S-procedure and matricial relaxations

7 Exchange details

- **Portugal to France**

1. 2017: Paula Rocha, Teresa Perdicoulis, and Juliana Almeida will visit the French team for 5 days
2. 2018: Paula Rocha, Teresa Perdicoulis and Sara Teixeira Baltazar will visit the French team for 5 days

- **France to Portugal**

1. 2017: Olivier Bachelier, Nima Yeganefar, Thomas Cluzeau, and Ronan David will visit the Portuguese team for 5 days
2. 2018: Thomas Cluzeau, Nima Yeganefar, Alban Quadrat, Guillaume Rance, and Yacine Bouzidi will visit the Portuguese team for 5 days

References

- [1] W. W. Adams, P. Loustau, *An Introduction to Grbner Bases*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, Volume 3, 1994. [1](#)
- [2] D. S. Arnon, G. E. Collins, S. McCallum, “Cylindrical algebraic decomposition I: The basic algorithm”, *SIAM Journal on Computing*, 13 (1984), 865-877, “Cylindrical algebraic decomposition II: An adjacency algorithm for the plane”, 13 (1984), 878-889. [2](#)

- [3] P. Aubry, F. Rouillier, M. Safey El Din, “Real solving for positive dimensional systems”, *J. Symbolic Comput.* 34 (2002), 543-560. 2
- [4] Y. Bouzidi, A. Quadrat, F. Rouillier, “Computer algebra methods for testing the structural stability of multidimensional systems”, *NDS’15 - IEEE 9th International Workshop on Multidimensional Systems*, 2015 2, 7
- [5] O. Bachelier, T. Cluzeau, R. David, N. Yeganefar, “Structural stability and equivalence of linear 2D discrete systems”, *Joint IFAC Symposium SSSC 2016 & TDS 2016*, 2016. 3, 7
- [6] O. Bachelier, W. Paszke, N. Yeganefar, D. Mehdi, and A. Cherifi, “LMI stability conditions for 2D Roesser models” *Automatic Control, IEEE Transactions on* 61.3 (2015): 766-770. 2, 7
- [7] B. Bamieh, F. Paganini, M. A. Dahleh, “Distributed Control of Spatially Invariant Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*, 47 (2002), 1091-1107. 1
- [8] H. T. Banks, R. S. Smith, Y. Wang, *Smart Material Structures: Modeling, Estimation and Control*, Wiley, 1996. 1
- [9] S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy, *Algorithms in Real Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 2003. 2
- [10] T. Becker, V. Weispfenning, *Gröbner Bases*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 141, Springer, 1998. 1
- [11] M. Benidir, M. Barret, *Stabilité des filtres et des systèmes linéaires*, Dunod, 1999. 1
- [12] N. K. Bose, *Applied Multidimensional Systems Theory*, Van Nostrand Reinhold, 1982. 1
- [13] N. K. Bose, *Multidimensional Systems, Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2010. 1
- [14] N. K. Bose, J. P. Guiver, *Multidimensional Systems Theory: Progress, Directions, and Open Problems in Multidimensional Systems*, D. Reidel, 1985. 1, 2
- [15] B. Buchberger, “Gröbner bases: An algorithmic method in polynomial ideal theory”, in *Multidimensional Systems Theory: Progress, Directions and Open Problems*, N. K. Bose ed., Reidel, 1985, 184-232. 2
- [16] F. Chyzak, A. Quadrat, and D. Robertz. *Effective algorithms for parametrizing linear control systems over Ore algebras*. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 16, 319–376, 2005. 1, 2
- [17] T. Cluzeau, “A constructive algebraic analysis approach to the equivalence of multidimensional linear systems”, *9th international workshop on multidimensional systems, nDS’15*, 2015 3
- [18] G. E. Collins, “Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition”, in *Automation Theory and Formal Languages*, Lecture Notes in Computer Sciences 33, Springer, 1975, 184-232. 2

- [19] R. D’Andrea, G. Dullerud, “Distributed control design for spatially interconnected systems” *IEEE Trans. Automat. Control*, 48 (2003), 1478-1495. [1](#)
- [20] R. David, F. Silva, Ni. Yeganefar, O. Bachelier, and Na. Yeganefar, “Existence and uniqueness of the solutions of continuous nonlinear 2D Roesser Models: The globally Lipschitz case”, *IEEE Control Conference (ECC), 2015 European*, 2015 [2](#)
- [21] G. Dullerud, R. D’Andrea, “Distributed control of heterogeneous systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*, 49 (2004), 2113-2128. [1](#)
- [22] E. Fornasini, G. Marchesini, ”Doubly indexed dynamical systems: State-space models and structural properties”, *Math. Syst. Theory*, 12 (1978), 59-72. [1](#)
- [23] M. Ghamgui, N. Yeganefar, O. Bachelier, and D. Mehdi, “Robust stability of hybrid roesser models against parametric uncertainty: a general approach”, *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 24 (2013), 667-684. [2](#)
- [24] T. Kaczorek, *Two Dimensional Linear Systems*, Springer-Verlag, New York, 1985. [1](#)
- [25] S. Knorn and R. H. Middleton, “String stability analysis of a vehicle platoon with communication range 2 using the two-dimensional induced operator norm”, *European Control Conference (ECC) IEEE*, 2013, 3354-3359. [1](#), [2](#)
- [26] J. Kurek, “Stability of nonlinear time-varying digital 2-D Fornasini-Marchesini system”, *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 25 (2014), 235-244. [2](#)
- [27] D. Lazard, F. Rouillier, “Solving parametric polynomial systems”, *J. Symbolic Comput.*, 42 (2007), 636-667. [2](#)
- [28] S. M. Melzer, B. C. Kuo, “Optimal regulation of systems described by a countable infinite number of objects”, *Automatica*, 7 (1971), 359-366. [1](#)
- [29] D. Napp Avelli, P. Rapisarda, P. Rocha, “Lyapunov stability of 2D finite-dimensional behaviours”, *International Journal of Control*, 84 (2011), 737-745. [2](#)
- [30] D. Napp, P. Rocha, “Stabilization of discrete 2D behaviours by regular partial interconnection”, *Mathematic of control signals and systems*, 22 (2011), 295-316 [2](#)
- [31] D. Napp, P. Rapisarda, P. Rocha. “Time-relevant stability of 2D systems” *Automatica* 47.11 (2011): 2373-2382. [3](#), [8](#)
- [32] U. Oberst. *Multidimensional constant linear systems*. Acta Appl. Math., 20, 1–175, 1990. [2](#)
- [33] P. Rocha, *Structure and Representation of 2-D Systems*, Ph. D. thesis, University of Groningen, 1990. [1](#), [2](#)
- [34] P. Rocha, J. Wood, “A new perspective on controllability properties for dynamical systems”, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 7 (1997), 869-879. [2](#)

- [35] W. Paszke, O. Bachelier, “Robust control with finite frequency specification for uncertain discrete linear repetitive processes”, *Multidimension Systems and Signal Processing*, 24 (2013), 727-745. 2, 7
- [36] J.-F. Pommaret, A. Quadrat. *Algebraic analysis of linear multidimensional control systems*. IMA J. Math. Control Inform., 16 (1999), 275–297. 1, 2
- [37] J.-F. Pommaret, A. Quadrat. “A functorial approach to the behaviour of multidimensional control systems”, *Applied Mathematics and Computer Science*, 13 (2003), 7-13. 2
- [38] A. Quadrat, “A lattice approach to analysis and synthesis problems”, *Math. Control Signals Systems*, 18 (2006), 147-186. 2
- [39] A. Quadrat, “On a generalization of the Youla-Kučera parametrization. Part II: The lattice approach to MIMO systems”, *Math. Control Signals Systems*, 18 (2006), 199-235. 2
- [40] R. P. Roesser, “A discrete state-space model for linear image processing”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 20 (1975), 1-10. 1
- [41] G. E. Shaw, D. W. Miller, D. E. Hastings, “Development of the quantitative generalized information network analysis methodology for satellite systems”, *J. Spacecraft and Rockets*, 38 (2001), 257-269. 1
- [42] D. Swaroop, J. K. Hedrick, “Constant spacing strategies for platooning in automated highway systems”, *J. Dyna. Syst., Measure., Control*, 121 (1999), 462-470. 1
- [43] H. R. Shaker and F. Shaker, “Lyapunov stability for continuous-time multidimensional nonlinear systems”, *Nonlinear Dynamics*, 75 (2014), 717-724. 2
- [44] T-P Azevedo Perdicolis, G. Jank, and P. Lopes dos Santos, “Modelling a gas pipeline as a repetitive process: controllability, observability and stability”, *Special issue of Multidimensional Systems and Signal Processing on nD Systems Applications*, 2015. 8
- [45] T-P Azevedo Perdicolis, G. Jank, and P. Lopes dos Santos, “Disturbance attenuation of linear quadratic OL-Nash games on repetitive processes with smoothing on the gas dynamics”, *Multidimensional Systems and Signal Processing on nD Systems Applications*, 23-1 (2012), 131-153 8
- [46] M. Valcher, “Characteristic cones and stability properties of two-dimensional autonomous behaviors” *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, *IEEE Transactions on* 47.3 (2000): 290-302. 3
- [47] M. Vidyasagar, *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, MIT Press, 1985. 1, 2
- [48] J.C. Willems, “From time series to linear system. Part I:”, *Automatica*, 22 (1986), 561-580, “Part II:”, *Automatica*, 22 (1986), 675-694, “Part III:”, *Automatica*, 23 (1987), 87-115. 2

- [49] J.C. Willems, “Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems”, *IEEE Transactions of Automatic Control* 36 (1991), 259-294. [2](#)
- [50] J. D. Wolfe, D. F. Chichka, J. L. Speyer, “Decentralized controllers for unmaned aerial vehicle formation flight”, *Amer. Inst. Aeronautics Astronautics*, 1996. [1](#)
- [51] J. Wood, “Modules and behaviours in n D systems theory”, *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 11 (2000), 11-48. [2](#)
- [52] Ni. Yeganefar, Na. Yeganefar, M. Ghamgui, and E. Moulay, “Lyapunov theory for 2D nonlinear Roesser models: application to asymptotic and exponential stability”, *IEEE Trans. Aut. Control*, 58 (2013), 1299-1304. [2](#), [7](#)
- [53] Ni. Yeganefar, Na. Yeganefar, O. Bachelier, and E. Moulay, “Exponential stability for 2D systems: the linear case”, *Proceedings of the 8th International Workshop on Multidimensional Systems (nDS)*, 2013, 1-4. [2](#)
- [54] E. Zerz, *Topics in Multidimensional Linear Systems Theory*, Springer-Verlag, 2000. [1](#), [2](#)
- [55] E. Zerz, “Behavioral systems theory: A survey”, *Applied Mathematics and Computer Science*, 18 (2008), 265-270. [2](#)